

## Задача №5

# ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕТАЛЛА

*Цель работы* – знакомство с основами теории пластических течений в тонком слое металла (основные гипотезы и постановка краевой задачи). В практической части работы проводится эксперимент по сжатию тонкой пластины между двумя параллельными, сближающимися по нормали к поверхности пластины жесткими плитами, результаты которого сравниваются с построенным теоретическим решением.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1. Особенности задачи о пластическом течении в тонком слое

Постановка и решение задач о развитом пластическом формоизменении, к которым относятся штамповка, прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка и др., сопряжена со значительными трудностями. Прежде всего, при формулировке определяющих соотношений и свойств материалов (вязкость, инерция, наличие температурных градиентов), задании граничных условий, меняющихся в процессе решения. В последние годы появились новые материалы и технологии их обработки – пластическое деформирование в состоянии сверхпластичности, использование эффекта электро-пластичности, а вместе с этим потребность в разработке новых физико-математических моделей процессов, постановке новых краевых задач и разработке численно-аналитических методов их решения.

Из всего многообразия процессов пластического течения можно выделить класс задач, которые характеризуются одним общим свойством: течение в них происходит в форме сравнительно тонкого слоя, находящегося между рабочими поверхностями тел инструмента, движение которых определяет характер и геометрию течения. Для этого класса задач при сравнительно общих предположениях относительно характеристик процессов ока-

зывается возможным построить теорию и предположить эффективные методы решения.

Рассмотрим элемент криволинейной поверхности тонкого слоя вещества, совпадающего с рабочей поверхностью инструмента, внутренняя геометрия которого в криволинейных координатах  $(\alpha, \beta)$  определяется главными кривизнами:  $A = \frac{\partial^2 s}{\partial^2 \alpha}$ ,  $B = \frac{\partial^2 s}{\partial^2 \beta}$ . В каждой точке этой поверхности отложим по нормали  $z$  к ней отрезки длины  $h = h(\alpha, \beta, t)$ . Тогда концы этих отрезков определяют вторую рабочую поверхность (рис.1). Отрезок  $h$  при этом представляет толщину слоя пластического вещества.

Положим, что толщина  $h$  весьма мала по сравнению с характерным линейным размером  $L$  области течения вещества по линиям  $\alpha$  и  $\beta$ .

Следуя Эйлеру, движение вещества будем изучать, не следя за каждой физической ее точкой, а наблюдая, что происходит с различными физическими точками, проходящими через фиксированную точку пространства.

Задача ставится так: пластическое вещество сжимается двумя параллельными, сближающимися по нормали жесткими, шероховатыми плитами. В некоторый начальный момент  $t = 0$  поверхность этого вещества ограничена известным контуром  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$ . При этом боковая нагрузка отсутствует, и во все время процесса вещество может свободно растекаться.

Начальная толщина  $h_0$  постоянна, скорость сближения плит  $\frac{\partial h}{\partial t}$  известна как функция времени.

## 1.2. Основные гипотезы

Прежде чем приступить к записи уравнений движения слоя, примем следующие гипотезы:

– проекции скоростей физических частиц, лежащих на одной нормали, на касательную плоскость к криволинейной поверхности мало отличаются между собой и могут быть заменены средней по толщине слоя скоростью скольжения пластического вещества относительно физической поверхности движущегося рабочего тела:

$$\bar{v} = v_{\alpha}(\alpha, \beta, t) \frac{\partial \bar{r}}{A \partial \alpha} + v_{\beta}(\alpha, \beta, t) \frac{\partial \bar{r}}{B \partial \beta}, \quad (1)$$

при этом  $v_{\alpha} = v_{\alpha}(\alpha, \beta, t)$ ,  $v_{\beta} = v_{\beta}(\alpha, \beta, t)$  – эйлеровы координаты вектора относительной скорости;

– скорости деформации волокон  $e_{zz}$ , расположенных вдоль нормали, в направлении этой нормали мало отличаются между собой и равны средней скорости относительного изменения толщины слоя:

$$e_{zz} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \quad (2)$$

– поверхностные силы трения, возникающие на горизонтальных поверхностях, в общем случае являются функциями давления, относительных скоростей скольжения и коэффициентов трения; вместе с тем опыт показывает, что при сухом трении (процесс течения происходит без смазки) и наличии относительного скольжения пластического вещества по поверхностям касательное напряжение трения определяется законом Кулона  $\tau = \tau(v)$  и направлено противоположно направлению скорости скольжения массы, пока оно меньше предела текучести материала на сдвиг  $\tau_s$  (зона скольжения); равно пределу текучести материала на сдвиг  $\tau_s$  по закону Прандтля (зона торможения) или линейно меняется от  $\tau_s$  до нуля (зона застоя). Размеры первой и последней зон порядка толщины слоя; следовательно, с хорошей точностью можно считать, что возникающие в слое касательные контактные напряжения трения  $T_1$  (на плоскости  $z = 0$ ) и  $T_2$  (на плоскости  $z = h$ ) направлены в стороны, противоположные относительным скоростям скольжения и по величине равны  $\tau_s$ ;

– с точностью до величин порядка  $h/L$  по сравнению с единицей можно считать, что  $\sigma_{\alpha\alpha}$  и  $\sigma_{\beta\beta}$  равны между собой (обозначим их  $q$ ) и касательное напряжение  $\tau_{\alpha\beta}$  мало и им можно пренебречь;

– плоскость, перпендикулярная до деформации, остается перпендикулярной и после деформации, откуда следует, что касательными напряжениями  $\tau_{z\alpha}$  и  $\tau_{z\beta}$  можно пренебречь;

– условие текучести материала примем в форме Мизеса, а именно:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta})^2 + (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{zz})^2 \right]^{1/2} = |q - \sigma_{zz}| = \sigma_s. \quad (3)$$

### 1.3. Постановка задачи

Теперь составим уравнения сохранения импульса слоя  $ABhd\alpha d\beta$  с учетом всех перечисленных гипотез в проекциях на  $\alpha$  и  $\beta$  (рис.1).

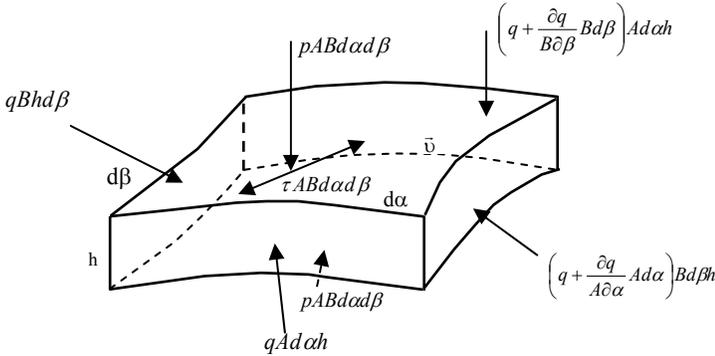


Рис 1. Элемент слоя вещества

Они имеют вид:

$$\begin{cases} \rho g_{\alpha} ABh \partial \alpha \partial \beta + qhBd\beta - (q + (\partial q / \partial \alpha) Ad\alpha) Bhd\beta - \\ -2\tau_s ABd\alpha d\beta v_{\alpha} / \sqrt{v_{\alpha}^2 + v_{\beta}^2} = 0, \\ \rho g_{\beta} ABh \partial \alpha \partial \beta + qhAd\alpha - (q + (\partial q / \partial \beta) Bd\beta) Ahd\alpha - \\ -2\tau_s ABd\alpha d\beta v_{\beta} / \sqrt{v_{\alpha}^2 + v_{\beta}^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку напряжения постоянны по толщине, то с ошибкой не более  $h/R$  ( $R$  - радиусы кривизн поверхности слоя) уравнение сохранения импульса в проекции на ось  $z$  даст равенство

$$\sigma_{zz} = -p, \quad (5)$$

где  $p$  - внешнее среднее нормальное давление со стороны рабочей поверхности на слой вещества.

В данной работе рассматриваются процессы медленных течений, поэтому в уравнениях сохранения импульса первыми – инерционными – членами можно пренебречь. Если теперь разделить на элемент  $ABhd\alpha d\beta$ , привести подобные члены, возвести каждое из уравнений в квадрат и сложить, то получим следующее уравнение для нормального напряжения  $q$ :

$$\left(\frac{\partial q}{A\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{B\partial\beta}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2} \quad (6)$$

или, используя условие Мизеса (3) с учетом (5), имеем для неизвестной функции давления  $p$  следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial p}{A\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{B\partial\beta}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}. \quad (7)$$

Эти соотношения показывают, что модуль градиента давления  $p$  в каждый момент течения массы постоянен для всей области и изменяется лишь по  $t$ :

$$|\mathit{grad}p| = \frac{2\tau_s}{h}. \quad (8)$$

При этом вектор скорости течения  $\vec{v}$  совпадает по направлению с вектором  $\mathit{grad}p$ , т.к. из (2) имеем

$$\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{\partial p}{A\partial\alpha} : \frac{\partial p}{B\partial\beta}. \quad (9)$$

В частном случае, когда течение происходит между двумя параллельными плоскостями (в технологии такой процесс называется осадкой между параллельными бойками), имеем:  $A d\alpha = dx$ ,  $B d\beta = dy$  и уравнение (7) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}. \quad (10)$$

Скорости деформации произвольного волокна выражаются формулами:

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{A \partial \alpha} + \frac{v_\beta}{A} \frac{\partial A}{B \partial \beta}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{\partial v_\beta}{B \partial \beta} + \frac{v_\alpha}{B} \frac{\partial B}{A \partial \alpha}, \quad (11)$$

$$2e_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{B \partial \beta} + \frac{\partial v_\beta}{A \partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{B} \frac{\partial A}{B \partial \beta} - \frac{v_\beta}{B} \frac{\partial B}{A \partial \alpha}.$$

Скорость деформации волокна, расположенного вдоль нормали, есть средняя скорость относительного изменения толщины слоя:

$$e_{zz} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial h}{A \partial \alpha} + v_\beta \frac{\partial h}{B \partial \beta} \right). \quad (12)$$

Из экспериментальных данных по сжимаемости известно, что изменение объема происходит в основном упруго, т.е. оно будет малым по сравнению с развитыми пластическими деформациями. Это позволяет воспользоваться условием несжимаемости, которое на основании (11) и (12) запишется в виде

$$e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{zz} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} h B v_\alpha + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} h A v_\beta \right) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для неизвестной функции  $p$  имеем уравнение (7) и граничные условия на контуре  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$ , известном лишь в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $h = h_0$ . Находя решение уравнений (7), (13) при  $t = 0$ , имеем  $p$ ,  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  и отсюда будем знать новый контур  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta, \Delta t)$  через малое время  $\Delta t$ . Повторяя последовательно аналогичные вычисления, можно найти как угодно сильно деформированный контур и соответствующее ему распределение  $p$ ,  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ .

#### 1.4. Задача о затекании материала в паз

Теперь рассмотрим квадратную пластинку из свинца и стальную матрицу с системой пазов, где  $d$  – расстояние между пазами,  $\delta$  – ширина паза,  $l$  – глубина паза,  $m$  – число квадратиков матрицы,  $h_0$  – средняя начальная

толщина пластинки (измеряется индикатором часового типа),  $\sigma_s$  – предел текучести свинца. Все вышеуказанные величины, за исключением предела текучести свинца, измеряются самостоятельно. В процессе эксперимента осуществляют равномерное сжатие квадратной пластинки между двумя матрицами рабочего инструмента: стальной матрицей с системой пазов и массивной плиты, общим усилием  $Q$ , боковые поверхности пластинки свободны от напряжений (проводится на гидравлическом прессе в лаборатории ОМД). Предполагается, что течение в каждом из квадратов происходит независимо от остальных (рис.2), граница пластинки мало меняется со временем, и для такого течения справедливы все вышеперечисленные гипотезы.

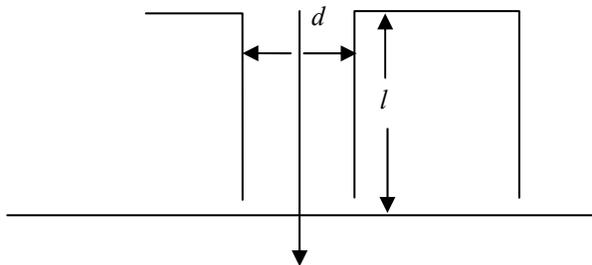


Рис 2. Затекание материала в паз

Задача затекания материала в паз состоит из решения уравнения (7) с граничным условием на границе стальной матрицы с системой пазов и пластинки. Направим ось  $Z$  вниз,  $Z=0$  – граница  $G$  матрица - пластинка,  $Z= l$  – основание щели в матрице). Тогда имеем следующие уравнение и граничное условие для определения функции  $l$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\tau_s}{\delta}, \\ p|_{z=l} = \sigma_s. \end{cases} \quad (14)$$

В качестве решения этой системы имеем

$$p = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{\delta} (l - z). \quad (15)$$

Следовательно, давление на границе  $G$  пластинка - матрица (при  $Z=0$ ) равно (при условии  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ ):

$$p|_G = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right). \quad (16)$$

Если  $l$  порядка  $\delta$ , то  $p|_G$  порядка  $2\sigma_s$ .

Теперь рассмотрим уравнение (10) с граничным условием (16). Сделаем некоторые тождественные преобразования. Введем вместо функции  $p$  новую функцию  $\xi$  следующего вида:

$$\xi = \frac{h}{2\tau_s} \left(p - \sigma_s - \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \sigma_s\right). \quad (17)$$

При этом она удовлетворяет уравнению (10) в виде:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (18)$$

и согласно (16) граничному условию на  $G$ :

$$\xi|_G = 0. \quad (19)$$

### 1.5. Аналогия формы эпюры давлений с формой песчаной насыпи

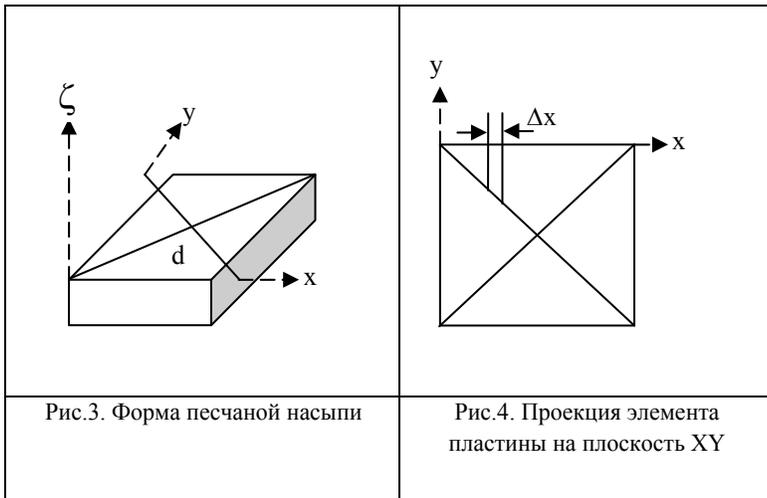
Уравнение (18) с приведенным граничным условием (19) указывает на существование аналогии между **задачами течения и определения формы песчаной насыпи из сухого однородного песка**. Представим себе горизонтально расположенную пластину, контур которой совпадает с контуром области течения (рис.3). Будем насыпать на эту пластину однородный песок с коэффициентом внутреннего трения  $\nu$  (если положить  $\nu = \text{tg } \varphi$ , то  $\varphi$  называется углом естественного скоса). В результате образуется определенной формы предельная насыпь, ордината которой  $\zeta$  будет удовлетворять такому уравнению:

$$|\text{grad } \zeta|^2 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = \nu^2 \quad (20)$$

и однородному граничному условию:

$$\zeta|_G = 0. \quad (21)$$

Предельная насыпь характерна тем, что угол наклона ее образующей к горизонту есть величина постоянная и равная  $\varphi$ . Отсюда следует, что образуемая насыпью поверхность линейчатая, т.е. содержит прямолинейные образующие.



Возьмем функцию  $\zeta/v$ . Видно, что она совпадает с  $\xi$ , поскольку тождественны уравнения (18) и (20) и граничные условия (19) и (21), которым эти функции удовлетворяют. Отсюда для функции давления  $p$  имеем

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right) + \frac{\zeta}{v} \frac{2\tau_s}{h}. \quad (22)$$

Подберем теперь такой песок, чтобы величина его коэффициента  $v$  численно совпадала с значением отношения  $\frac{2\tau_s}{h}$ . Тогда из (22) получим

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right) + \zeta. \quad (23)$$

Далее можно представить себе, что по контуру пластинки сделан вертикальный борт высотой  $\sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right)$ . Тогда ордината такой насыпи  $\zeta$  будет совпадать с функцией давления  $p$ , и для них справедливы одинаковые математические постановки задачи.

Разумеется, "песчаная аналогия" – эксперимент мысленный, но его использование позволяет, не решая задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, во многих случаях получать интегральные характеристики процесса и решение задачи из геометрических соображений.

В частности, общее усилие  $Q$ , необходимое для осуществления процесса течения и являющееся функцией толщины пластинки, будет численно равно объему песчаной насыпи. Подсчитать объем песчаной насыпи из однородного песка, а именно, объем конуса с углом наклона граней к основанию, равным  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tau_s}{h}$ , плюс объем параллелепипеда, высотой  $\sigma_s(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta})$ , не представляет труда. Разделим основание на четыре подобласти диагоналями квадрата (см. рис.3) и выразим объем каждого конуса, расположенного над соответствующей частью квадрата  $V_i$ , в виде интеграла:

$$V_i = 2 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy. \quad (24)$$

Отсюда, объем конуса равен:

$$V = 8 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy. \quad (25)$$

Умножая  $V$  на число квадратиков, имеем для суммарного усилия  $Q$ , необходимого для сжатия пластинки, следующее выражение через объем песчаной насыпи  $V$ :

$$Q = m \left( 8 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy + \sigma_s \left( 1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \right) d^2 \right). \quad (26)$$

Откуда после преобразований имеем:

$$Q = m \sigma_s d^2 \left( 1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} + \frac{d}{3\sqrt{3}h} \right), \quad (27)$$

где  $h$  – конечная толщина пластинки.

## 1.6. К определению контура области течения

До сих пор мы предполагали, что граница области течения фиксирована, теперь поставим задачу несколько иначе. Будем рассматривать процесс течения между параллельными плоскостями, причем предположим, что размеры плоскостей превышают (в достаточной степени) первоначальные размеры области течения. По мере сближения плоскостей материал слоя, растекаясь, будет занимать все новые и новые области; задача состоит в определении контура области в любой момент времени  $t > 0$ .

Запишем уравнение контура в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (29)$$

В момент  $t + dt$  должно быть справедливо уравнение (29), отсюда имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (30)$$

в котором  $v_x, v_y$  - скорости частиц, расположенных на контуре в момент времени  $t$ . Если обозначить  $v_n$  - скорость частицы по нормали к контуру, а через  $\theta$  - угол наклона касательной к контуру к оси  $x$ , то из (30) получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin \theta + v_y \frac{\partial F}{\partial y} \cos \theta \right) = 0. \quad (31)$$

Представим себе участок контура MN (рис.5) и соответствующий участок проекции ребра (mn). Подсчитаем количество материала, протекающего через отрезок границы  $ds$  за время  $dt$ . Если через  $a$  обозначить длину линии тока между контуром и проекцией ребра (рис.5), то получим:

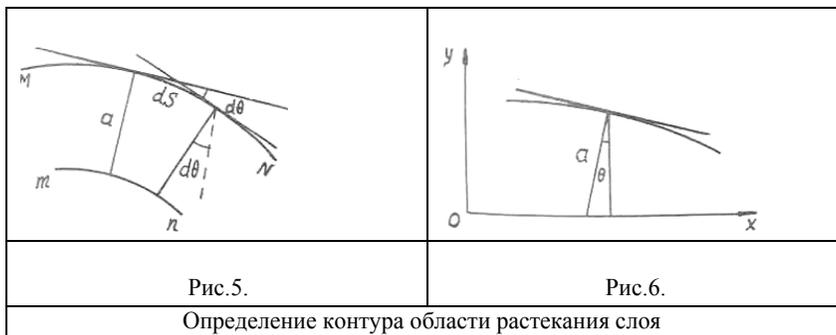
$$dV = -dh \left( ads - \frac{1}{2} a^2 d\theta \right). \quad (32)$$

С другой стороны,  $dV = v_n h dt ds$ . Из последних двух равенств находим:

$$v_n = a \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} a \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (33)$$

Определить  $a$  для произвольного контура довольно сложно. Прделаем это для случая, когда контур есть симметричная относительно оси  $x$  кривая,

при этом  $a = \frac{y}{\cos \theta}$  (рис.6),



$$v_n = \frac{y}{\cos \theta} \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (34)$$

Подставив это значение  $v_n$  в (31), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{y}{\cos \theta} \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\theta}{ds} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \theta \right) = 0. \quad (35)$$

Проделаем в этом уравнении следующие преобразования. Представим функцию  $F$  в виде:  $F(x, y, t) = y - \varphi(x, t) = 0$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x, t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1, \\ \cos \theta = - \left( 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \sin \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (36)$$

По определению  $\frac{d\theta}{ds}$  - кривизна кривой, отсюда следует:

$$\frac{d\theta}{ds} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}. \quad (37)$$

Подставив (36), (37) в (35), окончательно получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \ln h} - \varphi \left( 1 + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Поскольку при  $t = 0$ ,  $h = h_0$ , имеем  $\ln(h/h_0) = 0$  и начальным условием для  $\varphi(x, \ln(h/h_0))$  будет следующее:

$$\ln(h/h_0) = 0, \quad \varphi = \varphi_0(x). \quad (39)$$

Общее решение системы (38),(39) не представляется возможным, поэтому ограничимся рассмотрением одного примера (кроме одного тривиального, когда начальная область есть круг).

Пусть в начальный момент область является эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (40)$$

Предположим, в процессе растекания область будет оставаться эллипсом с полуосями, зависящими от  $\ln(h/h_0)$ , и подставим это выражение в уравнение (38). Определив из него величины  $a(\ln(h/h_0))$  и  $b(\ln(h/h_0))$  при условии (39), получим контур области в процессе течения в виде эллипса такого вида:

$$\frac{x^2}{\left(a^2 - b^2\right) e^{-2\ln(h/h_0)}} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{ae^{2\ln(h/h_0)}}{\left(a^2 - b^2 + b^2 e^{2\ln(h/h_0)}\right)^{1/2}}. \quad (41)$$

Из уравнения (41) следует интересный результат. Перейдя к пределу, положив  $\ln(h/h_0) \rightarrow \infty$ , получим такое уравнение:

$$x^2 + y^2 = abe^{\ln(h/h_0)}, \quad (42)$$

т.е. в пределе область стремится к кругу радиуса  $R(\ln(h/h_0)) = \sqrt{abe^{\ln(h/h_0)}/2}$ . Этот результат имеет простой смысл. Из условия сохранения массы имеем

$$\pi abh_0 = \pi R^2(\ln(h/h_0))h,$$

откуда 
$$R(\ln(h/h_0)) = \sqrt{ab} \sqrt{\frac{h}{h_0}}.$$

Полученный результат есть частный случай общего принципа, согласно которому любая область в пределе стремится к круговой.

Итак, **основной результат**, который необходимо осмыслить, проделав предложенную работу, состоит в том, что в процессах течения пластического вещества в виде тонкого слоя между двумя движущимися жесткими поверхностями инструмента внутренние касательные напряжения оказываются малыми сравнительно с нормальными, причем два нормальных напряжения в поперечных сечениях слоя можно полагать в первом приближе-

нии равными, при этом третье нормальное напряжение постоянно по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности:

$$-\sigma_3 = p \approx q + \sigma_s . \quad (43)$$

Другой основной результат представляет собой кинематическое условие: поперечные скорости частиц, расположенных по нормали, мало отличаются между собой и могут считаться одинаковыми.

Представленная классическая теория течения в тонких слоях имеет дальнейшее развитие в различных направлениях: учитываются деформации инструментов; принимается, что материал слоя обладает сжимаемостью и упрочнением; допускается анизотропия трения на поверхностях контакта и др. Так, например, вблизи точек резкого изменения кривизны контура необходимо учитывать касательные напряжения, т.к. их отсутствие может привести к неправильному нахождению поля скоростей. Для этого необходимо разработать теорию в следующем приближении и решать нелинейную задачу.

## 2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Программу эксперимента можно задавать двумя путями:

1. На прессе задается усилие  $Q$  и экспериментально определяется конечная толщина пластинки  $h_3$ . По формуле (27) рассчитывается теоретическая толщина пластинки  $h_T$ , затем сравнивается с  $h_3$  (определяются абсолютное и относительное отклонение теоретической величины от экспериментальной).

2. Выбирается конечная толщина пластинки  $h_3$  и задается в эксперименте (контролируется индикатором сближения рабочих поверхностей штампа). В эксперименте по данным силоизмерителя определяется усилие  $Q_3$  и затем сравнивается с теоретическим значением  $Q_T$ , соответствующим толщине  $h_3$  и найденное по соотношению (27).

3. Теперь поставим вопрос о нахождении такой толщины  $h_{\max}$ , до которой будет осажена пластинка при полном затекании в паз. Объем материала, стекающий в паз, равен:  $\Delta V = (h_0 - h)y\Delta x$  (рис.4), занимает площадь:

$\Delta S = \delta \Delta x$  и стекает на глубину  $l'$  с двух сторон, т.е.  $l' = \frac{\Delta V}{\Delta S}$ . Максимально возможная глубина затекания в паз равна:

$$l = \max_y l' \Big|_{y=d/2} = 2 \frac{d(h_0 - h)}{2\delta}.$$

Отсюда имеем для максимальной толщины, на которую может быть осажена пластинка следующее выражение:

$$h_{\max, T} = h_0 - \frac{l\delta}{a}. \quad (44)$$

В работе предлагается проверить, осуществлено ли в эксперименте по программе 1 полное затекание материала в паз. Если осуществлено, то можно сравнить  $h_2$  и  $h_{\max, T}$ , найденное по соотношению (44) (найти относительную и абсолютную погрешности).

### 3. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Определение предела текучести свинца из опыта на осадку цилиндрического образца.
2. Измерение геометрии матрицы и толщины свинцовой пластинки.
3. Расчет усилия, необходимого для полного затекания материала в паз.
4. Проведение эксперимента на сжатие свинцовой пластинки.
5. Сравнение результатов эксперимента с теоретическими расчетами.

#### Список литературы

1. Ильюшин, А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям / А.А. Ильюшин // ПММ. Сер. мат. мех., 1954.- Т. 18. - № 3. - С. 265-288.
2. Ильюшин, А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые

приложения / А.А. Ильюшин // ПММ. Сер. мат. мех., 1955. Т. 19. № 6. С. 693-713.

3. Огибалов, П.М. Задачи пластических течений / П.М. Огибалов, И.А. Кийко // Инженерный журнал. – 1961.1.№ 3. С. 181-184.

4. Кийко, И.А. Пластическое течение металлов. Научные основы прогрессивной техники и технологии / И.А. Кийко - М.: Машиностроение, 1985.- 376 с.

5. Вязко-пластическое течение материалов / под общ. ред. И.А. Кийко. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – Ч.1. – 98 с. – Ч.2. –131 с.

Учебное издание

*Васин Р. А.,  
Демидович П. Н.,  
Завойчинская Э. Б.,  
Муравлев А. В.,  
Рязанцева М. Ю.,  
Тунгускова З. Г.,  
Чистяков П. В.,  
Шарафутдинов Г. З.,  
Шешенин С. В.*

**ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
МЕТАЛЛОВ И КОМПОЗИТОВ**

*Учебное пособие*

Под редакцией  
академика РАН Ю.Д. Третьякова,  
академика РАН Г.Г. Чёрного,  
профессора Ф. В. Гречникова

Технический редактор М. В. Хардин  
Редакторская обработка Т. К. Ретинина  
Корректорская обработка Ю. Н. Литвинова  
Доверстка Т. Е. Половнева

Подписано в печать 22.12.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 5,0.

Тираж 120 экз. Заказ . ИП-ж142/2007

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.