

ОТЗЫВ

научного консультанта на диссертационную работу В.И. Качалова
«ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ
ЗАДАЧ», представленную на соискание ученой степени доктора физико-
математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Теория сингулярных возмущений, основы которой были заложены в трудах Прандтля, Биркгофа и Шлезингера, представлена в настоящее время большим количеством различных асимптотических методов, каждый из которых берет на вооружение фундаментальные работы А.Н. Тихонова о предельном переходе и разрабатывает свою концепцию построения асимптотических решений. Исходя из факта существенного различия структуры решения сингулярно возмущенной задачи внутри пограничного слоя и вне его, были разработаны методы аппроксимации решений в виде суммы регулярных и погранслойных рядов (М.И. Вишик, Л.А. Люстерник, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов и др.), методы усреднения и различные модификации метода многомасштабных разложений (Ю.А. Митропольский, А.Н. Филатов, Н.И. Шкиль, В. Вазов, Ван-дер-Поль и др.), метод регуляризации и метод нормальных форм, использующий идею спектрального подхода при построении асимптотических решений (С.А. Ломов, В.Ф. Сафонов, И.С. Ломов, А.А. Бободжанов, В.И. Качалов и др.). Среди указанных методов особое место занимает метод регуляризации С.А. Ломова. Этот метод позволяет получать регуляризованные асимптотические ряды, которые могут сходиться не только асимптотически, но и в обычном смысле, позволяя получать необходимую точность приближенных решений фиксированием малого параметра (что важно в прикладных задачах) и увеличением числа членов регуляризованного ряда. Однако эти результаты были получены в основном для *линейных сингулярно возмущенных задач*, причем обычная сходимость в них связана с выбором функциональных пространств, топологическая структура которых является весьма сложной. Это затрудняет асимптотический анализ многих математических моделей реальных процессов. Поэтому возникает необходимость в использовании методов и подходов, применяемых в современной качественной теории дифференциальных уравнений, представленных, например, работами Н.Х.Розова, И.Н. Сергеева, И.В. Асташовой, А.В. Боровских и др.

Настоящая диссертация посвящена методу голоморфной регуляризации *нелинейных сингулярно возмущенных уравнений*. Развиваемые в ней идеи

являются существенным обобщением идей С.А. Ломова, впервые заострившего вопрос об исследовании гладкости решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру. **Актуальность** решения этого вопроса для развития общей теории сингулярных возмущений не вызывает сомнений. В работе В.И. Качалова этот вопрос решается в плане развития аналитической теории сингулярно возмущенных уравнений. Построенные с помощью этой теории приближенные решения начальных нелинейных сингулярно возмущенных задач (при достаточно общих предположениях) представимы в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра, что, как указывалось выше, особо ценно для приложений.

Целью работы является дальнейшее развитие аналитической теории сингулярных возмущений на базе метода регуляризации С.А. Ломова и его обобщений, вытекающих из алгебраической природы интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Необходимо было решить следующие задачи:

- а) рассмотреть проблему аналитичности решений по регулярной и сингулярной зависимости от малого параметра;
- б) установить и обосновать аналитичность первых интегралов (а не решений) от параметра;
- в) разработать методику регуляризации исходной сингулярно возмущенной задачи с целью получения псевдоголоморфных по параметру и по регуляризирующей переменной решений расширенной задачи;
- г) применить результаты, полученные в пунктах а–в, для разработки алгоритмов построения рядов, сходящихся в обычном смысле, для решений нелинейных сингулярно возмущенных уравнений.

Для решения поставленных задач были активизированы следующие **методы исследования**:

- Метод линеаризации и метод регуляризации С.А. Ломова, первый из которых позволит свести нелинейную дифференциальную задачу к линейной, а затем применить к ней основные идеи метода регуляризации С.А. Ломова.
- При построении голоморфных по малому параметру интегралов сингулярно возмущенных уравнений и систем таких уравнений применяются установленные автором коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа комплексных переменных.
- Для получения псевдоголоморфных решений из аналитических по параметру интегралов используется аппарат теории неявных функций.

- При доказательстве сходимости возникающих при этом рядов применяется интегральная формула Коши для функций нескольких комплексных переменных.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются оригинальными. Основные из них следующие:

1. Изучена природа гомоморфизмов алгебр голоморфных функций различного числа комплексных переменных и установлена связь между коммутационными соотношениями и дифференциальными уравнениями.
2. Доказано существование и указан способ построения голоморфных по малому параметру интегралов нелинейных сингулярно возмущенных уравнений и систем уравнений и, тем самым, обобщена теорема Пуанкаре о разложении решений по степеням малого параметра. Все утверждения носят глобальный характер.
3. Разработан метод построения псевдоголоморфных решений сингулярно возмущенных начальных задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра (метод голоморфной регуляризации).
4. Установлена связь между существованием псевдоголоморфных решений и устойчивостью решений присоединенных систем.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Однако развитый метод и полученные в ней результаты могут быть использованы в прикладных вопросах обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, в математической теории пограничного слоя, а также в теории функций нескольких комплексных переменных и функционального анализа.

Достоверность полученных результатов гарантирована строгим математическим обоснованием сформулированных в работе теорем, подтверждением результатов удачно подобранными примерами и их графическими иллюстрациями.

Диссертация прошла следующую **апробацию**. Результаты работы докладывались:

- на семинаре по теории возмущений под руководством профессоров В.Ф. Сафонова и А.А. Бободжанова в МЭИ;
- на семинаре МЭИ по дифференциальным уравнениям (руководители — профессора Ю.А. Дубинский и А.А. Амосов);
- на семинаре физфака МГУ (руководители — профессора А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов);

- на семинаре мехмата МГУ по качественной теории дифференциальных уравнений (руководители — профессора И.В. Астапова, А.В. Боровских, Н.Х.Розов, И.Н. Сергеев);
- на семинаре академика Д.В. Аносова в Математическом институте им. Стеклова РАН;
- на семинаре по асимптотическим методам кафедры Дифференциальных уравнений мехмата МГУ под руководством профессоров А.С. Шамаева и В.В.Жикова;
- на семинаре кафедры Общей математики ВМК МГУ под руководством академика РАН В.А. Ильина и академика РАН Е.И. Моисеева.

Диссертационная работа В.И. Качалова является законченным математическим исследованием; она выполнена на высоком теоретическом уровне и свидетельствует о высокой научной квалификации автора. Все результаты являются новыми и строго обоснованными и опубликованы в ведущих научных математических журналах.

Считаю, что диссертационная работа В.И. Качалова «ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ» отвечает всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный консультант —

доктор физико-математических наук, профессор,
зам.зав кафедрой «Высшая математика» по научной работе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная,
д.14, тел. 8(495)362-71-31.

В.Ф. Сафонов

Подпись профессора В.Ф. Сафонова заверяю

Проректор по научной работе НИУ «МЭИ»

В.К. Драгунов

