

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Теретёнков Александр Евгеньевич

**Точно решаемые задачи
необратимой квантовой эволюции**

01.04.02 — «теоретическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

А. М. Чеботарев

Москва – 2018

Оглавление

Введение	5
1 Бозоны	17
1.1 Основные обозначения	17
1.2 Вычисления с квадратичными операторами	21
1.3 Квадратичные супероператоры	25
1.3.1 Формальный генератор квантовой положительной полугруппы	28
1.3.2 Генератор ГКС-Л	29
1.3.3 Генераторы, зависящие от времени	32
1.4 Канонические преобразования и их обобщения	33
1.4.1 Канонические преобразования, зависящие от времени	34
1.5 Гауссовские состояния	35
1.5.1 Матрицы плотности, заданные как экспоненты от квадратичных форм	35
1.5.2 Канонические формы и нормировка	36
1.5.3 Нормальные символы	38
1.5.4 Первые и вторые моменты	42
1.5.5 Характеристические функции	45
1.5.6 Энтропия, чистота, число частиц	45
1.6 Подходы к решению кинетического уравнения с квадратичным генератором	46
1.6.1 Динамика матрицы плотности с квадратичным генератором	47
1.6.2 Динамика в представлении Гейзенберга	52
1.6.3 Уравнение для символов	58
1.6.4 Эволюция негауссовских матриц плотности	60

1.6.5	Гейзенберговская эволюция супероператоров	62
1.7	Подходы к решению уравнений для средних и матриц ковариаций .	65
1.7.1	Общий случай	65
1.7.2	Уравнение с постоянными коэффициентами	68
1.7.3	Уравнение с переменными линейными членами	71
1.8	Свойства решений	71
1.8.1	Существование решений и условия положительности	72
1.8.2	Обращение динамики первых моментов	75
1.8.3	Предельные распределения, не зависящие от начального рас- пределения	75
1.8.4	Квадратичные интегралы движения	77
1.8.5	Динамика энтропии	78
1.8.6	Стохастические интегралы движения и коммутаторы гене- раторов	79
1.9	Связь с квантовыми каналами	81
1.10	Частные случаи	84
1.10.1	Динамика без диссипатора	84
1.10.2	Классический резервуар	84
1.10.3	Равномерный бозонный резервуар	87
1.10.4	Одномерный осциллятор	88
1.10.5	Антидиагональный случай	90
1.10.6	Положительная динамика	93
1.11	Некоторые примеры из квантовой оптики	93
1.11.1	Трёхмодовый случай	94
1.11.2	Четырёхмодовый случай	96
2	Фермионы	99
2.1	Основные обозначения	99
2.2	Вычисления с квадратичными и линейными формами	101
2.3	Квадратичные супероператоры	104
2.3.1	Формальный генератор положительной полугруппы	106
2.3.2	Генератор ГКС-Л	107
2.3.3	Генераторы, зависящие от времени	107
2.4	Канонические преобразования и их обобщения	108
2.4.1	Канонические преобразования, зависящие от времени . . .	109

2.5	Гауссовские состояния	110
2.5.1	Матрицы плотности, заданные как экспоненты от квадратичных форм	110
2.5.2	Канонические формы и нормировка	111
2.5.3	Нормальные символы	112
2.5.4	Вторые моменты	113
2.5.5	Характеристические функции	115
2.5.6	Энтропия	115
2.6	Подходы к решению кинетического уравнения с квадратичным генератором	115
2.6.1	Динамика матрицы плотности с квадратичным генератором	116
2.6.2	Динамика в представлении Гейзенберга	118
2.6.3	Уравнение для символов	121
2.7	Подходы к решению уравнений для матриц антиковариаций	124
2.7.1	Общий случай	124
2.7.2	Уравнение с постоянными коэффициентами	126
2.8	Свойства решений	127
2.8.1	Существование решений и условия положительности	127
2.8.2	Частичное обращение динамики вторых моментов	128
2.8.3	Предельные распределения, не зависящие от начального распределения	129
2.8.4	Квадратичные интегралы движения	130
2.9	Связь с квантовыми каналами	130
2.10	Частные случаи	131
2.10.1	Динамика без диссипатора	131
2.10.2	Классический резервуар	131
2.10.3	Равномерный фермионный резервуар	132
2.10.4	Антидиагональный случай	132
2.10.5	Одномодовая положительная полугруппа	133
	Заключение	135
	Список литературы	137

Введение

Цель работы

Основной целью работы является решение уравнений необратимой квантовой динамики (квантовых кинетических уравнений) с генераторами, квадратичными по бозонным или фермионным операторам рождения и уничтожения, и исследование их свойств. При этом коэффициенты генератора могут быть как постоянными, так и зависящими от времени. Среди свойств этих уравнений изучаются условия на параметры генератора, приводящие к положительной и к вполне положительной динамике матриц плотности, наличие или отсутствие гауссовских стационарных состояний и ряд других свойств.

Обзор литературы, историческая справка и актуальность темы исследования

Необратимая динамика является прямым обобщением унитарной динамики с квадратичным гамильтонианом. Систематическое исследование унитарной динамики с квадратичными гамильтонианами общего вида было проведено в работах К. О. Фридрихса (K. O. Friedrichs) [83] и Ф. А. Березина [5]¹. Дальнейшее развитие изучение унитарной динамики получило в работах И. А. Малкина, В. И. Манько и В. В. Додонова [24], [12], [78]. Ряд современных исследований на эту тему был проведён в работах А. М. Чеботарёва, Т. В. Тлячёва и А. А. Родионова [41], [42], [60]. Обзор этих результатов и соответствующая литература могут быть найдены в диссертации Т. В. Тлячёва [32].

Одной из наиболее важных областей приложения квадратичных гамильтонианов общего вида является квантовая оптика. Основным источником таких гамильтонианов является приближение заданного поля накачки (параметрическое приближение) (см. [2, Глава II], [28, Глава 16], [106, Раздел 7.1.2]). Когерентные состояния для многомодовых параметрических систем рассматривались в [77]. Современные приложения можно найти в работах А. С. Чиркина, М. Ю. Сайгина, И. В. Шутова, А. М. Чеботарёва, Т. В. Тлячёва [64], [44], [63], [121], [131], [130]. Также квадратичные гамильтонианы возникают в оптомеханических задачах (см., например, [95], [96]). Ещё одним источником таких гамильтонианов является метод приближённого вторичного квантования Н. Н. Боголюбова (см. [8], а также современное изложение в [20, с. 192-200]). Таким образом, исследование уже унитарных квадратичных систем является актуальной современной задачей.

¹Мы в дальнейшем будем ссылаться на более позднее издание [6].

Мы будем рассматривать генераторы как с постоянными коэффициентами, так и более общие генераторы с коэффициентами, зависящими от времени. Обсуждение унитарной динамики с нестационарными гамильтонианами можно найти в [62], [103], [24], [10]. Физические приложения таких нестационарных гамильтонианов в контексте сжатой томографии обсуждались в [125].

Стоит также отметить, что динамика квантовых систем с квадратичным генератором тесно связана с классической гамильтоновой динамикой с квадратичным гамильтонианом. Общие свойства такой динамики изучались в работах Дж. Вилльямсона (J. Williamson) [136], [135], [137]. Квазиклассическое приближение сжатых состояний обсуждается в [49].

В данной работе мы приводим ссылки на статьи, наиболее близкие к теме нашего исследования. За более подробной библиографией для бозонного случая мы отсылаем читателя к сборнику [78] и обзору [75].

Для фермионов случай без диссипации подробно исследован в [6]. С единой точки зрения и бозонная, и фермионная обратимая динамика рассматривалась В. И. Манько и В. В. Додоновым в [13].

В нашей работе рассматривается общая необратимая (неунитарная) динамика с квадратичными генераторами. С исторической точки зрения, здесь следует отметить знаменитую статью Л. Д. Ландау 1927 года (см. [22, стр. 19-31]), в которой впервые было введено понятие матрицы плотности. Для нашего исследования интересна мотивация введения данного понятия. А именно, то, что только в терминах матрицы плотности можно описывать необратимые процессы, такие как релаксация населённостей и декогеренция. Таким образом, первыми уравнениями, написанными для матрицы плотности, были именно уравнения необратимой квантовой эволюции. Л. Д. Ландау рассматривал квантовую систему в электромагнитном резервуаре при нулевой температуре. Как отмечается в [78, стр. 183] и (более подробно) в [26, стр. 219-220], если в уравнении, полученном Л. Д. Ландау (уравнение (31) в [22]), в качестве системы выбрать гармонический осциллятор, то получится уравнение (в современных обозначениях)

$$\dot{\rho}_t = \gamma \left(\hat{a} \rho_t \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t \hat{a}^\dagger \hat{a} \right).$$

Следующий важный результат был получен Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголю-

бывым в [21, стр. 73] формула (147)

$$\dot{\rho}_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \mathcal{E}(\rho_t) + \mathcal{E}^*(\rho_t) - \mathcal{E}(I)\rho_t - \rho_t\mathcal{E}(I), \quad (1)$$

где $\hat{H}$ и $\mathcal{E}$ определяются через корреляционные функции резервуара. В случае осциллятора при стандартном дипольном взаимодействии $\hat{H} = \frac{1}{2}\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$, $\mathcal{E}(\rho_t) = \gamma N(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a})$, тогда (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_t = & -i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_t] + \\ & + \gamma N \left(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \gamma N \left(\hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}\hat{a}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Фактически, это высокотемпературный предел ($N \gg 1$) широко известной модели затухающего осциллятора (см., например, [85, Пункт 6.1.1], [9, Пункт 3.4.6])

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_t = & -i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_t] + \\ & + \gamma(N+1) \left(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \gamma N \left(\hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}\hat{a}^\dagger \right). \end{aligned}$$

При произвольной температуре и уже в явном виде эта модель, вероятно, впервые изучалась Р. Баушем (R. Bausch) и А. Штейлом (A. Stahl) в [53].

Особую роль при рассмотрении необратимой динамики играют генераторы в форме Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада (ГКС-Л), введённые в [90] для систем в конечномерном гильбертовом пространстве и в [104] в более общем случае. Уравнение для матрицы плотности ρ_t с генератором ГКС-Л имеет вид

$$\dot{\rho}_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \sum_i \left(\hat{C}^{(i)}\rho_t(\hat{C}^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2}(\hat{C}^{(i)})^\dagger\hat{C}^{(i)}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t(\hat{C}^{(i)})^\dagger\hat{C}^{(i)} \right),$$

где $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ и $\hat{C}^{(i)}$ — операторы; мы будем интересоваться случаем, когда $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ квадратичны, а $\hat{C}^{(i)}$ линейны по операторам рождения и уничтожения бозонов или фермионов. Уравнения с ГКС-Л генератором имеют наиболее ясную физическую интерпретацию и математические свойства. В частности, они описывают квантовую марковскую динамику (см. [9, Раздел 3.2]) и могут быть выведены из микроскопических соображений в ряде важных случаев (см. [9, Раздел 3.2]). Краткий исторический обзор уравнений ГКС-Л можно найти в [68].

Строгая теория вывода уравнений вида ГКС-Л в пределах слабой связи и низ-

кой плотности была развита Л. Аккарди (L. Accardi), Ю. Г. Лу (Yu. G. Lu), И. В. Воловичем, С. В. Козыревым, А. Н. Печенем (см. изложение этих результатов и соответствующую литературу в [45], [46], [27]). Ряд существенных результатов для обоснования предела слабой связи был также получен Е. Б. Девисом (E. B. Davies) [72, Глава 10]. Вывод ГКС-Л генераторов на основе квантовых стохастических уравнений невиноровского типа был получен А. М. Башаровым (см. [52], [3], [4]).

Важнейшим свойством ГКС-Л уравнений является убывание квантовой относительной энтропии (обобщающее соответствующее утверждение для классической марковской динамики), позволяющее придавать соответствующей динамике термодинамический смысл. Это привело к формированию такой новой области физики, как квантовая термодинамика (см. [86], [102]). Ряд современных результатов в этой области можно найти в работах И. В. Воловича и А. С. Трушечкина [133], [33].

Бозонная динамика с квадратичным ГКС-Л генератором является квантовым аналогом динамики в соответствии с классическими стохастическими линейными дифференциальными уравнениями. Изложение результатов в этой области можно найти, например, в [51, Глава 8] или в [118, Раздел 6.5].

Многомодовая бозонная динамика вида ГКС-Л в представлении Вигнера изучалась В. И. Манько, В. В. Додоновым и О. В. Манько в [12], [15], [76]. Несколько конкретных примеров уравнений такого вида изучались в [120], [97], [98]. В случае дудиагонализуемости форм, определяющих генератор, общие решения бозонных ГКС-Л уравнений обсуждаются в [114], но такая дудиагонализуемость не всегда возможна даже в унитарном случае [41]. Предельные равновесные состояния связанных осцилляторов, взаимодействующих с резервуарами при разных температурах, рассматривались Р. Дж. Глаубером (R. J. Glauber) и В. И. Манько в [88].

Необратимая динамика с (локально) зависящим от времени генератором, а также сравнение подходов к немарковской динамике на основе локальных и нелокальных по времени кинетических уравнений в последнее время активно исследовалась Д. Крушинским (D. Chruscinski) и др. в [66], [67], [65], [139].

Эволюционные отображения, соответствующие квадратичным генераторам, имеют тесную связь с бозонными и фермионными гауссовскими каналами, играющими существенную роль в квантовой теории информации. При этом она задаётся не в терминах генераторов, а непосредственно линейными преобразова-

ниями форм, определяющих гауссовские состояния [35], или (значительно реже) посредством усреднения операторов Вейля, действующих на операторы плотности, по классическим распределениям [111]. Ряд современных результатов в этой области можно найти в работах А. С. Холево (см. [38], [39], [40], [36]). Стоит отметить, что, вообще говоря, не всякий бозонный или фермионный канал может быть представлен как эволюционное отображение (однопараметрическая полугруппа) в некоторый момент времени. В бозонном случае такая представимость и соответствующие квадратичные генераторы обсуждались Т. Хейносаари (Т. Heinosaari), А. С. Холево и М. М. Вольфом (М. М. Wolf) в [92].

Современный интерес к фермионным гауссовским состояниям берёт своё начало в работе К. Е. Кейхила (К. Е. Cahill) и Р. Дж. Глаубера (R. J. Glauber) [57]. Случай фермионной необратимой динамики рассматривался в [115] и [79]. В [115] супероператор ГКС-Л, квадратичный по $2n$ фермионным операторам рождения и уничтожения, сводится к неэрмитову оператору, квадратичному по $4n$ фермионным операторам рождения и уничтожения. Далее в [115] требовалась диагонализуемость получившейся формы, чего не требуется в нашей работе. В работе [79] получена динамика в представлении Гейзенберга операторов, коммутирующих с оператором чётности. Однако, изложенный в [79] подход, на наш взгляд, является весьма громоздким, так как требует расширения диссипативной динамики системы до унитарной динамики системы и резервуара, а затем взятия следов по степеням свободы резервуара. Таким образом, исследование фермионных квадратичных операторов с постоянными коэффициентами является современной актуальной задачей.

Кроме того, многомодовое фермионное уравнение ГКС-Л как конечномерное матричное уравнение может быть решено общими методами (см. [50]). Однако, такой подход требует решения систем линейных уравнений, количество которых экспоненциально зависит от n , но в данной работе мы получим, что соответствующее число линейно растёт с n .

Динамика, описываемая квадратичным фермионным уравнением ГКС-Л, тесно связана с гауссовскими фермионными каналами. Здесь следует отметить работу С. Б. Бравого (S. Bravyi) [54], где исследовались представления квантовых фермионных каналов в виде грассмановых интегральных ядер. Данная работа развивала концепцию ”фермионной линейной оптики”, введённую в силу аналогии между бозонными (возникающими в квантовой оптике) и фермионными

гауссовскими каналами в работах [101] и [129]. Также применение квадратичных фермионных генераторов в квантовой теории информации изучалось перед этим А. Ю. Китаевым в [100]. Кроме того, связь между вычислениями с фермионными модами и вычислениями с кубитами обсуждалась в [55]. Систематическое изложение вопросов, связанных с фермионными гауссовскими каналами, а также соответствующий обзор литературы можно найти в магистерской работе Э. Грепловой (E. Greplova) [91].

В последнее время (см. [108], [82], [74], [122]) всё большую актуальностью приобретают задачи описания немарковской динамики. Такие вопросы могут приводить к генераторам, явно зависящим от времени и не имеющим вид ГКС-Л генератора (см. [9, Глава 10]). В частности, к такого вида генераторам приводит метод устранения временной свёртки (см. [56], [9, Глава 9]). Нелиндрбладовская динамика одномерной квантовой броуновской частицы рассматривалась в [105] и [109]. Положительные, но не вполне положительные отображения также приобретают в последнее время всё большую актуальность [123], [112], [110], [81]. Динамика сцепленности в двухмодовом немарковском гауссовском канале исследовалась в [107].

Научная новизна

- Несколькими методами получены гауссовские решения уравнений необратимой квантовой эволюции с квадратичными бозонными и фермионными генераторами с зависящими от времени коэффициентами в терминах решений непрерывного уравнения Ляпунова для матриц ковариаций и (в бозонном случае) системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора средних. Для фермионов данный результат имеет научную новизну уже в случае постоянных коэффициентов (см. [115]).
- В работе изучаются генераторы не только вполне положительной, но и положительной динамики гауссовских состояний.
- В случае бозонов получена динамика с квадратичными генераторами, зависящими от времени, для состояний, имеющих антинормальные символы, в терминах гауссовских свёрток с такими символами.
- В работе изучаются условия стремления к предельному стационарному состоянию для многомодовых генераторов (в литературе встречаются, в основ-

ном, 1-2-модовые случаи исследования стационарных состояний, см. [120], [97], [98]).

Объект исследования

В диссертационной работе исследуются:

1. Уравнения необратимой квантовой динамики матрицы плотности, в частности, ГКС-Л уравнения, с генератором, содержащим линейные и квадратичные формы по *бозонным* операторам рождения и уничтожения. При этом коэффициенты генератора могут как зависеть от времени, так и быть постоянными. (Таким бозонным квадратичным генераторам посвящена глава 1.)
2. Уравнения необратимой квантовой динамики матрицы плотности, в частности, ГКС-Л уравнения, с генератором, содержащим квадратичные формы по *фермионным* операторам рождения и уничтожения. Вновь коэффициенты генератора могут как зависеть от времени, так и быть постоянными. (Таким фермионным квадратичным генераторам посвящена глава 2.)

Методология и методы исследования

Уравнения для средних и вторых центральных моментов в бозонном случае получены несколькими методами: методом экспоненциальной подстановки (см. пункт 1.6.1), методом усреднения уравнений Гейзенберга (см. пункт 1.6.2), методом уравнений для нормальных символов (см. пункт 1.6.3), методом уравнений Гейзенберга для супероператоров (см. пункт 1.6.5). Уравнения для вторых моментов в фермионном случае также получены некоторыми из этих методов (см. раздел 2.6). Для решения этих уравнения предложено несколько методов решения уравнения Ляпунова (см. явные формулировки и обсуждение в разделах 1.7 и 2.7).

Защищаемые положения

- Доказана теорема 2, а также утверждение 8, сводящие уравнения для гауссовских матриц плотности к уравнениям для матриц вторых центральных моментов и средних в случае бозонов.
- Доказана теорема 6, а также утверждение 38, сводящие уравнения для чётных гауссовских матриц плотности к уравнениям для матрицы вторых моментов.
- Показано (см. утверждения 14 и 42), что решение уравнения Ляпунова, возникающее в теоремах 2 и 6, может быть выражено в терминах матрицанта размера $(2n) \times (2n)$, где n — число мод (пар операторов рождения и уничтожения) в

генераторе. Причём, в случае постоянных коэффициентов при определённых условиях невырожденности это может быть сделано чисто алгебраическим путём (см. утверждения 26 и 50). Кроме того, показано, что решения уравнения Ляпунова могут быть выражены через решение системы $4n$ линейных уравнений (см. утверждения 15 и 43). Специально рассмотрены случаи генераторов с постоянными коэффициентами (см. пункты 1.7.2 и 2.7.2). Получены явные формулы в виде экспонент от постоянных матриц.

- Получены условия на параметры квадратичного генератора (см. теорему 4 для бозонного случая и теорему 7 для фермионного случая) с постоянными коэффициентами, определяющие корректную положительную (но не обязательно вполне положительную) динамику гауссовских состояний. Данные условия являются достаточными в случае переменных коэффициентов. Приведены примеры такой положительной динамики (см. пункты 1.10.6 и 2.10.5).
- В случае генераторов с постоянными коэффициентами получены выражения параметров, задающих гауссовские квантовые каналы (как бозонные, так и фермионные), являющиеся эволюционными отображениями, соответствующими этим генераторам (см. утверждения 30 и 52).
- В случае генераторов с постоянными коэффициентами получены условия на наличие стационарных гауссовских состояний (см. утверждения 25 и 49).

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы связана с тем, что рассматриваемые в ней квадратичные генераторы подобно унитарному случаю могут служить отправной точкой для исследования необратимой динамики общего вида. Во-первых, такое исследование может быть проведено в рамках теории возмущений, где квадратичные генераторы возникают в виде естественного нулевого приближения, а члены высших степеней рассматриваются как малые поправки. Во-вторых, уравнения необратимой динамики с неквадратичными потенциалами могут быть исследованы методом Монте-Карло, основанным на представлении их решений в виде корректных континуальных интегралов. В унитарном случае было показано (см. [42]), что решение задач с квадратичным генератором также играет фундаментальную роль. В-третьих, квадратичные ГКС-Л генераторы важны с точки зрения квантовой теории информации, где центральную роль играют гауссовские (как бозонные, так и фермионные) каналы. Эволюционные отображения, порождаемые

квадратичными ГКС-Л генераторами, задают широкий класс таких каналов. В-четвёртых, квадратичные генераторы возникают и при исследовании нелинейных моделей в тех случаях, когда в результате тех или иных приближений удаётся заменить часть операторов в гамильтониане взаимодействия на заданные числовые функции. Характерным примером может служить уже упомянутое выше приближение заданной волны накачки и метод приближённого вторичного квантования.

Практическая значимость полученных в работе результатов тесно связана с их теоретической значимостью. А именно, указанная выше связь с приближением заданного поля накачки позволяет применять результаты в квантовой оптике. В частности, при учёте диссипации в процессе трёх- и четырёх-модовых взаимодействий в апериодическом нелинейном фотонном кристалле. Указанная выше связь с квантовыми гауссовскими каналами может быть использована для изучения вопросов физической реализации этих каналов. Возможность описания некоторых уравнений немарковской динамики может иметь дальнейшее применение в тех областях, где немарковские эффекты играют существенную роль (структурированные резервуары [71], светособирающие комплексы [99]).

Степень разработанности темы исследования

Поставленные в диссертационной работе цели и задачи полностью выполнены. Однако, полученные результаты ставят новые вопросы для дальнейшего исследования.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность выносимых на защиту диссертационной работы результатов обеспечивается использованием строгих математических методов, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул (в частности, посредством пакета [140], [141]). В ряде частных случаев на основе этих формул были воспроизведены уже известные в литературе утверждения. Кроме того, наиболее важные результаты работы получены несколькими независимыми способами.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы обсуждались и отражены в тезисах и докладах следующих конференций:

- 24th Central European Workshop on Quantum Optics, Lyngby, Denmark, 27 – 30 June 2017 // Teretenkov A. E. "Quadratic fermionic dynamics with dissipation".
- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых уче-

ных по фундаментальным наукам "Ломоносов-2017", Секция "Физика", МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия, 10 – 14 апреля 2017 // Теретёнков А. Е. "Квадратичная фермионная динамика с диссипацией".

- 23rd Central European Workshop on Quantum Optics, Crete, Greece, 27 June – 1 July 2016 // Teretenkov A. E. "Gaussian solutions to the Lindblad equation with a multimode quadratic generator".
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», Секция «Физика», МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–15 апреля 2016 // Теретёнков А. Е. "Квадратичная линдбладовская эволюция гауссовских состояний".
- Четвертая международная конференция "Математическая физика и ее приложения", Самара, Россия, 25 августа – 1 сентября 2014// Теретёнков А. Е., Тлячев Т. В., Чеботарев А. М. "Разложение Такаги и диагонализация многомодовых сжатий".
- 21st Central European Workshop on Quantum Optics, Brussels, Belgium, 23–27 June 2014 // Teretenkov A. E. "A note on the Takagi factorization of symmetric matrices and diagonalization of multimode squeezings".
- 34th International Conference on Quantum Probability and Related Topics, Moscow, Russia, 16–20 September 2013 // Chebotarev A. M., Tlyachev T. V., Teretenkov A. E., Belokurov V. V. "On the normal form of multimode squeezing".

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

- Теретёнков А. Е. Квадратичная фермионная динамика с диссипацией // Математические заметки. – 2017. – Т. 102. – №. 6. – С. 881–889;
Teretenkov A. E. Quadratic fermionic dynamics with dissipation // Mathematical Notes. — 2017. — Vol. 102, no. 5–6. — P. 846–853.
- Teretenkov A. E. Quadratic dissipative evolution of Gaussian states with drift // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101 – no. 1–2. – P. 341–351.

- Теретёнков А. Е. Квадратичная диссипативная эволюция гауссовских состояний // Математические заметки. — 2016. — Т. 100. — №. 4. — С. 636–640;
Teretenkov A. E. Quadratic dissipative evolution of gaussian states // Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 100, no. 3–4. — P. 642–646.
- Chebotarev A. M., Teretenkov A. E. Singular value decomposition for the Takagi factorization of symmetric matrices // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 234. — P. 380–384.
- Чеботарев А. М., Теретёнков А. Е. Операторные ОДУ и формула Фейнмана // Математические заметки. — 2012. — Т. 92. — №. 6. — С. 943–948;
Chebotarev A. M., Teretenkov A. E. Operator-valued ODEs and Feynman's formula // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 92, no. 5–6. — P. 837–842.

Из результатов совместных работ в диссертацию автором включены результаты, полученные им лично.

Структура, объём и краткое содержание работы

Работа состоит из Введения, двух глав, Заключения и списка литературы. Общий объём диссертации: 148 страниц. Список литературы включает 141 наименование. Для удобства цитирования в список литературы включены, в том числе, и авторские публикации.

Во Введении сформулированы цели работы, дан обзор литературы и истории вопросов, рассматриваемых в работе, обоснованы актуальность и новизна выбранной темы, перечислены основные защищаемые положения, приведена структура работы и краткое содержание.

Основной текст поделён на две главы. Первая из них посвящена генераторам необратимой квантовой динамики, квадратичным по бозонным операторам рождения и уничтожения, вторая — их фермионным аналогам. Главы специально устроены так, чтобы иметь максимально сходную структуру. А именно, большинство разделов главы 1 имеют аналоги среди разделов главы 2, приведённые в одинаковой последовательности. Сделано это, чтобы максимально подчеркнуть сходства и различия, возникающие между бозонными и фермионными системами. Кроме того, это позволяет читателю рассматривать эти главы не только последовательно, но и параллельно, читая парами аналогичные разделы из двух глав. Такая структура во многом навеяна структурой книги Ф. А. Березина [6].

Первые пять разделов в обеих главах (1.1 – 1.5 и 2.1 – 2.5) являются вводными. В них даются основные обозначения и определения. Также в них приводится ряд предварительных лемм и утверждений, необходимых для формулировки и доказательства основных результатов работы.

Эти результаты изложены в разделах 1.6 – 1.9 и 2.6 – 2.9. А именно, в разделах 1.6 и 2.6 рассматриваются несколько подходов к сведению необратимой динамики гауссовских матриц плотности к динамике их первых и вторых моментов. При этом метод, основанный на подстановке обратимых гауссовских матриц плотности и использовании их в качестве операторов не вещественного канонического преобразования, был разработан автором в [30], [128], [31]. В разделах 1.7 и 2.7 рассматриваются решения уравнений для вторых (центральных) моментов и средних. Отдельно обсуждается случай постоянных коэффициентов. В случае бозонов также рассмотрен случай, когда только коэффициенты при линейных членах в генераторе зависят от времени. В разделах 1.8 и 2.8 рассматриваются свойства решений, полученных в предшествующих разделах. В первую очередь, изучаются условия на коэффициенты генераторов, которые приводят к корректной положительной динамике. Также, в случае постоянных коэффициентов генератора, получены условия наличия предельных стационарных состояний. В разделах 1.9 и 2.9 описана связь квадратичных генераторов с квантовыми каналами. В частности, выписаны явные формулы, связывающие параметры, задающие квантовые каналы, с параметрами квадратичных генераторов.

В разделах 1.10–1.11 и 2.10 рассмотрены примеры, иллюстрирующие применение разработанных в работе методов к конкретным задачам.

В Заключение приведены основные результаты работы.

Глава 1

Бозоны

В данной главе мы получим решения уравнений необратимой квантовой динамики с генератором, содержащим квадратичные и линейные члены по бозонным операторам рождения и уничтожения. Основным результатом является теорема 2, а также уравнения (1.68) и (1.71) для первых моментов и матрицы ковариаций. Теорема 1 позволяет выразить гауссовские решения в терминах нормальных символов. В разделе 1.7 обсуждаются решения этих уравнений. В пункте 1.8.1 даются условия на параметры генератора, приводящие к положительной (но не обязательно вполне положительной) динамике гауссовских состояний. В разделе 1.9 параметры квантовых гауссовских каналов выражаются через коэффициенты ГКС-Л генераторов.

1.1 Основные обозначения

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^n \ell_2$. В таком пространстве можно задать n пар операторов рождения и уничтожения по формулам (см. [28, Пункт 1.1.2])

$$\begin{aligned}\hat{a}_i |\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle &= \sqrt{\nu_i} |\nu_1, \dots, \nu_i - 1, \dots, \nu_n\rangle, \\ \hat{a}_i^\dagger |\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle &= \sqrt{\nu_i + 1} |\nu_1, \dots, \nu_i + 1, \dots, \nu_n\rangle,\end{aligned}$$

где $|\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle$, $\nu_i \in \mathbb{Z}_+$ — базис в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$. Такие операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} I_\ell, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0,$$

где I_ℓ — единичная матрица в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$. Далее мы будем писать просто λ вместо λI_ℓ , где $\lambda \in \mathbb{C}$, чтобы не загромождать формулы, например $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Для произвольных операторов в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$ эрмитово сопряжение будем обозначать † .

Так как мы будем работать с квадратичными и линейными комбинациями из этих операторов, то нам будет удобно составить из операторов рождения и уничтожения $2n$ -мерный вектор $\mathbf{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{a}_1^\dagger, \dots, \hat{a}_n^\dagger)^T$. Тогда введём естественные обозначения

$$f^T \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^T f \equiv \sum_{i=1}^n (f_i \hat{a}_i + f_{i+n-1} \hat{a}_i^\dagger), \quad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + K_{i+n,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i,j+n} \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger), \quad \forall K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}. \quad (1.1)$$

Отметим, что данное определение не предполагает нормального упорядочения операторов рождения и уничтожения, которое мы будем обозначать парами двоеточий. В частности,

$$: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + (K_{i+n,j} + K_{i,j+n}) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger), \quad \forall K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}. \quad (1.2)$$

Эрмитово сопряжение матриц $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ будем обозначать $^+$.

Определим $2n \times 2n$ -мерные матрицы как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где I_n — единичная матрица в $\mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда канонические коммутационные соотношения (ККС) в таких обозначениях принимают вид

$$[f^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T g] = -f^T J g, \quad \forall g, f \in \mathbb{C}^{2n}. \quad (1.4)$$

Будем также писать

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] = -J, \quad (1.5)$$

что можно понимать либо как сокращённую запись (1.4), либо непосредственно, определив матрицу $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^T]$ её операторно-значными элементами как $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^T]_{ij} \equiv$

$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j], \forall i, j = 1, \dots, 2n$. Данные определения эквивалентны.

Чтобы описать действие эрмитова сопряжения на операторы, дадим

Определение 1. $\sim$ -сопряжение векторов и матриц определяется формулами:

$$\tilde{g} = E\bar{g}, \quad g \in \mathbb{C}^{2n}, \quad \tilde{K} = E\bar{K}E, \quad K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

где черта сверху обозначает (поэлементное) комплексное сопряжение, а матрица E определена в (1.3).

Тогда эрмитово сопряжение действует по формулам

$$(g^T \mathfrak{a})^\dagger = \tilde{g}^T \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a})^\dagger = \mathfrak{a}^T \tilde{K}^T \mathfrak{a}, \quad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

в частности, $(\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a})^\dagger = \mathfrak{a}^T \tilde{K} \mathfrak{a}$ при $K = K^T$. Отметим, что $\sim$ -сопряжение инволютивно

$$\tilde{\tilde{K}} = K, \quad \tilde{\tilde{g}} = g, \quad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

и полулинейно

$$(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)^\sim = \bar{\lambda}_1 \tilde{K}_1 + \bar{\lambda}_2 \tilde{K}_2, \quad \forall K_1, K_2 \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, отметим, что $\tilde{J} = -J$, $\tilde{E} = E$. Мы будем многократно пользоваться этими свойствами при дальнейших вычислениях.

По аналогии с оператором $^+$ для комплексных векторов можно обозначить $\mathfrak{a}^+ = (\hat{a}_1^\dagger, \dots, \hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$. Тогда $\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^+ E K \mathfrak{a}$. Далее мы увидим, что ряд формул содержит именно комбинации вида EK , поэтому естественно задаться вопросом: не упростится ли изложение, если проводить вычисления в терминах форм вида $\mathfrak{a}^+ A \mathfrak{a}$? Действительно, часть формул упростится, например, $(\mathfrak{a}^+ A \mathfrak{a})^\dagger = \mathfrak{a}^+ A^+ \mathfrak{a}$. Однако, условия, аналогичные симметричности матрицы K , примут вид $A = EA^T E$. Условия симметричности K необходимо накладывать, так как иначе выбор матрицы в выражении $\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}$ был бы неоднозначен. Мы будем далее часто приравнивать формы по операторам рождения и уничтожения, поэтому мы отдали предпочтение изложению в терминах форм вида $\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}$.

Множество ядерных операторов (операторов с конечным следом) в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$ будем обозначать как $\mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$, множество ограниченных — как $\mathcal{B}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$.

Будем писать tr для следа по пространству $\otimes_{j=1}^n \ell_2$ и Tr для следа по простран-

ству $\mathbb{C}^{2n}$. Поясним введённые обозначения на примере. Рассмотрим $2n \times 2n$ -матрицу $\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rho$ с операторнозначными компонентами

$$\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rho \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}_1^2 \rho & \cdots & \hat{a}_1 \hat{a}_n \rho & \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & \hat{a}_1 \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_n^2 \rho & \hat{a}_n \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n \rho & (\hat{a}_1^\dagger)^2 \rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rho & \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & (\hat{a}_n^\dagger)^2 \rho \end{pmatrix},$$

тогда

$$\mathrm{tr}(\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rho) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\hat{a}_1^2 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^2 \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}((\hat{a}_1^\dagger)^2 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}((\hat{a}_n^\dagger)^2 \rho) \end{pmatrix},$$

— $2n \times 2n$ -матрица с комплексными числовыми элементами, а

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rho) = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i^2 + (\hat{a}_i^\dagger)^2) \rho$$

— оператор в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$.

(Выпуклое) множество матриц плотности (нормальных состояний (см. [59, стр. 18])) $\mathfrak{S}_N(\otimes_{j=1}^n \ell_2) = \{\rho \in \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) : \rho^\dagger = \rho, \mathrm{tr} \rho = 1\}$.

Нас также будут интересовать нормальные символы матриц плотности. Нормальный символ матрицы плотности ρ мы будем обозначать $\rho(\mathbf{z})$, где $\mathbf{z} = (z_1 \dots z_n \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n)^T$ или в блочном виде $\mathbf{z} = (z \bar{z})^T$. В качестве определения нормального символа можно использовать формулу

$$\rho(\mathbf{z}) = \langle z | \rho | z \rangle, \quad (1.6)$$

где $|z\rangle \equiv |z_1\rangle \otimes \dots \otimes |z_n\rangle$ — n -модовое когерентное состояние, удовлетворяющее $\hat{a}_i |z\rangle = z_i |z\rangle$ (см., например, [89], [126], раздел 2.2 в [28]).

Знак корня во всём тексте диссертации означает, что под корнем стоит неот-

рицательная величина и в качестве результата также выбирается положительная величина. Таким образом, ветвь корня определена однозначно.

1.2 Вычисления с квадратичными операторами

В данном разделе выводятся общие формулы для вычислений с квадратичными и линейными комбинациями операторов рождения и уничтожения в обозначениях, представленных в предыдущем разделе. Эти формулы будут многократно использоваться далее, и потому они сформулированы в виде лемм.

В случае c -числовых форм, если матрица $K \neq K^T$ не симметрична, то её можно симметризовать, получив форму, равную исходной. В случае операторно-значных векторов возникает дополнительный числовой член, связанный с упорядочением операторов:

Лемма 1. (Симметризация форм) Пусть $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr } K^T J = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \text{Tr } K J. \quad (1.7)$$

Доказательство. Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T g f^T \mathbf{a}) + \frac{1}{2}[\mathbf{a}^T f, g^T \mathbf{a}] = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} f^T J g = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr}(g f^T J), \end{aligned}$$

где были использованы ККС в форме (1.4). Произвольную матрицу $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ можно представить в виде $K = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, поэтому по линейности получаем (1.7). $\square$

Эта лемма важна, когда нам необходимо приравнять две формы, так как приравнять можно только симметризованные формы.

В предыдущем разделе уже отмечалось, что наши обозначения (1.1) не предполагают нормального упорядочения, и именно такие неупорядоченные формы мы главным образом будем использовать в вычислениях, но, если нужно, их всегда можно связать с нормально упорядоченными квадратичными формами (1.2):

Лемма 2. (Нормальное упорядочение) Пусть $K = K^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда нормально упорядоченная и неупорядоченная формы связаны формулой

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} =: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : + \frac{1}{2} \text{Tr} EK.$$

Доказательство. Непосредственно, пользуясь обозначениями (1.1) и (1.2), вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T K \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} a_i a_j + K_{i+n,j} a_i^\dagger a_j + K_{i,j+n} a_i a_j^\dagger + K_{i+n,j+n} a_i^\dagger a_j^\dagger) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} a_i a_j + (K_{i+n,j} + K_{i,j+n}) a_i^\dagger a_j + K_{i,j+n} \delta_{ij} + K_{i+n,j+n} a_i^\dagger a_j^\dagger) = \\ &=: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j+n} + K_{i+n,j}) =: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : + \frac{1}{2} \text{Tr} EK. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 3. (Коммутационные соотношения линейных и квадратичных форм) Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}, \frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (MJK - KJM) \mathbf{a} + (f^T JK - g^T JM) \mathbf{a} - g^T Jf. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Доказательство. Коммутационное соотношение двух линейных членов непосредственно следует из (1.4): $[g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T f] = g^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] f = -g^T Jf$. Остальные коммутационные соотношения получаются по правилу Лейбница:

$$[g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T M \mathbf{a}] = 2g^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] M \mathbf{a} = -2g^T JM \mathbf{a},$$

$$[\mathbf{a}^T K \mathbf{a}, \mathbf{a}^T M \mathbf{a}] = 4\mathbf{a}^T K [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] M \mathbf{a} = -4\mathbf{a}^T KJM \mathbf{a} = -2\mathbf{a}^T (KJM - MJK) \mathbf{a}.$$

В последнем вычислении было использовано (1.7) и тождество $\text{Tr}(KJM - MJK) = 0$. Используя билинейность коммутатора, получаем (1.8). $\square$

Лемма 4. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадра-

тичных форм.) Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} - g^T \mathbf{a}} = \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-KJ} M e^{JK} \mathbf{a} + \left(e^{-KJ} M \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg + e^{-KJ} f \right)^T \mathbf{a} + \\ & + \left(\frac{1}{2} g^T J \frac{e^{-KJ} - I}{KJ} M + f^T \right) \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a}(\tau) = e^{\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau} \mathbf{a} e^{-\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau}$. Дифференцируя по τ , мы получим уравнения Гейзенберга: $\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{a}(\tau) = \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T(\tau) K \mathbf{a}(\tau) + g^T \mathbf{a}(\tau), \mathbf{a}(\tau) \right]$. С учётом (1.4) мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{a}(\tau) = JK \mathbf{a}(\tau) + Jg, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, его решение $\mathbf{a}(\tau) = e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg$. Для квадратичных и линейных форм имеем:

$$\begin{aligned} & e^{\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right) e^{-\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T(\tau) M \mathbf{a}(\tau) + f^T \mathbf{a}(\tau) = \\ & = \frac{1}{2} \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right)^T M \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right) + \\ & + f^T \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right). \end{aligned}$$

При $\tau = 1$, собирая члены при каждой степени $\mathbf{a}$, получим (1.9). □

Лемма 5. (Производная экспоненты.) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + c_t} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} - g_t^T \mathbf{a} - c_t} = \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ & + \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} (\text{sh}(K_t J) - K_t J) \frac{1}{K_t J} g_t + c_t \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

причём матрица $e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1}$ симметрична.

Доказательство. По формуле Вилкокса-Фейнмана (см. [134], [43]) и лемме 4 мы получим

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + c_t} \right) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} - g_t^T \mathbf{a} - c_t} = \\
& = \int_0^1 e^{(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a}) \tau} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \dot{K}_t \mathbf{a} + \dot{g}_t^T \mathbf{a} \right) e^{-(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a}) \tau} d\tau + \dot{c}_t = \\
& = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-K_t J \tau} \dot{K}_t e^{J K_t \tau} \mathbf{a} + \left(e^{-K_t J \tau} \dot{K}_t \frac{e^{J K_t \tau} - I}{J K_t} J g_t + e^{-K_t J \tau} \dot{g}_t \right)^T \mathbf{a} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J \tau} - I}{K_t J} \dot{K}_t + \dot{g}_t^T \right) \frac{e^{J K_t \tau} - I}{J K_t} J g \right) d\tau + \dot{c}_t.
\end{aligned}$$

Рассчитаем коэффициенты при разных степенях операторов рождения-уничтожения по отдельности:

1) Квадратичная форма $(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a})$: Снова применяя формулу Вилкокса-Фейнмана, но к матрицам, а не операторам, получим

$$\int_0^1 e^{-K_t J \tau} \dot{K}_t e^{J K_t \tau} d\tau = \int_0^1 e^{-K_t J \tau} \dot{K}_t J e^{K_t \tau} J^{-1} d\tau = \left(\frac{d}{dt} e^{-K_t J} \right) e^{K_t J} J^{-1}. \quad (1.11)$$

Покажем, что матрица полученной квадратичной формы является симметричной

$$\begin{aligned}
& \left(e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \right)^T = J \left(\frac{d}{dt} e^{-J K_t} \right) e^{J K_t} = - \left(\frac{d}{dt} e^{-K_t J} \right) e^{K_t J} J^{-1} = \\
& = - \left(\frac{d}{dt} I \right) J^{-1} + \left(e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \right) = e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1}.
\end{aligned}$$

2) Линейная форма $(\cdot \mathbf{a})$: По (1.11), явно интегрируя отдельные экспоненты, мы получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(e^{-K_t J \tau} \dot{K}_t \frac{e^{J K_t \tau} - I}{J K_t} J g_t + e^{-K_t J \tau} \dot{g}_t \right) d\tau = e^{-K_t J} \left(\frac{d}{dt} e^{K_t J} \right) \frac{1}{K_t J} g + \\
& + \frac{I - e^{-K_t J}}{K_t J} \left(-\dot{K}_t J \frac{1}{K_t J} g_t + \dot{g}_t \right) = e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right).
\end{aligned}$$

3) Скалярный член: Интегрируя как и для линейных форм, получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J \tau} - I}{K_t J} \dot{K}_t + \dot{g}_t^T \right) \frac{e^{J K_t \tau} - I}{J K_t} J g \right) d\tau + \dot{c}_t = \\
& = \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J}}{K_t J} \left(\frac{d}{dt} e^{K_t J} \right) \frac{1}{K_t J} g_t - \frac{1}{2} g_t^T J \frac{I - e^{-K_t J}}{(K_t J)^2} \dot{K}_t J \frac{1}{K_t J} g_t + \\
& + \left(\dot{g}_t^T J - \frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} \dot{K}_t J \right) \frac{e^{K_t J} - I - K_t J}{(K_t J)^2} g + \dot{c}_t = \\
& = \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} (\operatorname{sh}(K_t J) - K_t J) \frac{1}{K_t J} g_t + c_t \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, (1.10) доказано. $\square$

Замечание 1. Величину, вычисленную в данной лемме, иногда называют левой производной экспоненты (см. [43]), в том смысле, что

$$\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + c_t} = \hat{D}_t^{(L)} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + c_t},$$

где $\hat{D}_t$ — правая часть формулы (1.10).

Формулы (1.8) – (1.10) из лемм 3–5, в первую очередь, будут использованы при доказательстве теоремы 2.

1.3 Квадратичные супероператоры

В данном разделе мы изучим квадратичные генераторы как типа ГКС-Л, так и более общие генераторы полугрупп, отображающие матрицы плотности в матрицы плотности.

Определение 2. Под квадратичным супероператором мы будем понимать отображение $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) \rightarrow \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$ вида

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathbf{a}^T \Gamma \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} + \rho g_R^T \mathbf{a} + g_L^T \mathbf{a} \rho + \lambda \rho, \quad \rho \in \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2), \quad (1.12)$$

где $\Gamma, \Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Для супероператоров можно ввести две ”естественные” инволюции. Первая — это просто сопряжение относительно следового скалярного произведения операторов [59, стр. 80], а именно

Определение 3. Пусть $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) \rightarrow \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$ — супероператор общего вида (1.12). Определим супероператор $\mathcal{L}^* : \mathcal{B}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) \rightarrow \mathcal{B}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$ соотношениями

$$\mathrm{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \mathrm{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)), \quad \hat{X} \in \mathcal{B}(\otimes_{j=1}^n \ell_2), \rho \in \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2).$$

Коме того, можно ввести инволюцию на основе эрмитового сопряжения $\dagger$ матриц из $\mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$, а именно

Определение 4. Пусть $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) \rightarrow \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$ — супероператор общего вида (1.12). Определим супероператор $\mathcal{L}^+ : \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2) \rightarrow \mathcal{T}(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$ по формуле

$$\mathcal{L}^+(\rho) = (\mathcal{L}(\rho^\dagger))^\dagger.$$

С помощью первой инволюции можно выразить условие сохранения следа как $\mathcal{L}^*(I) = 0$. Вторая позволяет выразить тот факт, что $\mathcal{L}$ переводит самосопряжённые операторы в самосопряжённые, как $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$. Получим явные выражения для $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{L}^+$ для квадратичного супероператора.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{L}$ — квадратичный супероператор, определённый формулой (1.12), тогда

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{a} + \tilde{g}_R^T \mathbf{a} \rho + \bar{\lambda} \rho, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} \hat{X} + \hat{X} \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}. \quad (1.14)$$

Доказательство. 1) Сначала вычислим

$$(\mathbf{a}^T f \rho^\dagger g^T \mathbf{a})^\dagger = (g^T \mathbf{a})^\dagger \rho (\mathbf{a}^T f)^\dagger = \mathbf{a}^T \tilde{g} \rho \tilde{f}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T (\widetilde{f g^T})^T \rho \mathbf{a}.$$

Так как произвольная матрица $\Gamma \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ может быть представлена в виде $\Gamma = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, то по линейности получаем $(\mathbf{a}^T \Gamma \rho^\dagger \mathbf{a})^\dagger = \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{a}$. Для остальных членов получаем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} \rho^\dagger + \rho^\dagger \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} + \rho^\dagger g_R^T \mathbf{a} + g_L^T \mathbf{a} \rho^\dagger + \lambda \rho^\dagger)^\dagger = \\ & = \rho (\mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a})^\dagger + (\mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a})^\dagger \rho + (g_R^T \mathbf{a})^\dagger \rho + \rho (g_L^T \mathbf{a})^\dagger + \bar{\lambda} \rho = \\ & = \rho \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} \rho + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \rho + \rho \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \bar{\lambda} \rho. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.13).

2) Аналогично, сначала вычислим

$$\mathrm{tr}(\hat{X}^\dagger \mathbf{a}^T f \rho g^T \mathbf{a}) = \mathrm{tr}(\mathbf{a}^T g \hat{X}^\dagger f^T \mathbf{a} \rho) = \mathrm{tr}((\mathbf{a}^T \widetilde{(fg^T)} \hat{X} \mathbf{a})^\dagger \rho).$$

Снова разлагая $\Gamma = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, приходим к

$$\mathrm{tr}(\hat{X}^\dagger \mathbf{a}^T \Gamma \rho \mathbf{a}) = \mathrm{tr}(\mathbf{a}^T g \hat{X}^\dagger f^T \mathbf{a} \rho) = \mathrm{tr}((\mathbf{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{a})^\dagger \rho).$$

Остальные члены

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr} \left(\hat{X}^\dagger (\mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} + \rho g_R^T \mathbf{a} + g_L^T \mathbf{a} \rho + \lambda \rho) \right) = \\ & = \mathrm{tr} \left((\hat{X}^\dagger \mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} \hat{X}^\dagger + g_R^T \mathbf{a} \hat{X}^\dagger + \hat{X}^\dagger g_L^T \mathbf{a} + \lambda \hat{X}^\dagger) \rho \right) = \\ & = \mathrm{tr} \left((\mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} \hat{X} + \hat{X} \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X})^\dagger \rho \right). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.14). □

Лемма 7. *Параметры $\Gamma, \Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$ квадратичного супероператора (1.12) определяются однозначно.*

Доказательство. Так как разность двух супероператоров вида (1.12) имеет снова вид (1.12) и в область определения произвольного супероператора (1.12) входят операторы $|u\rangle\langle z|$, то достаточно доказать, что из $\mathcal{L}(|u\rangle\langle z|) = 0$ (для произвольных $u, z \in \mathbb{C}^n$) следует $\Gamma = \Gamma_L = \Gamma_R = 0, g_L = g_R = 0, \lambda = 0$. Действительно, вычислим с учётом леммы 2

$$\begin{aligned} \langle u | \mathcal{L}(|u\rangle\langle z|) | z \rangle &= \mathbf{u}^T \Gamma \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \Gamma_L \mathbf{u} + \mathbf{z}^T \Gamma_R \mathbf{z} + g_R^T \mathbf{z} + g_L^T \mathbf{u} + \lambda + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\Gamma_R + \Gamma_L) E = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{z}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Gamma_L & \Gamma \\ \Gamma^T & 2\Gamma_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_L^T & g_R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \lambda + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\Gamma_R + \Gamma_L) E, \end{aligned}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{z}$ имеют блочный вид

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, из $\langle u | \mathcal{L}(|u\rangle\langle z|) | z \rangle = 0$ и условий $\Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T$ получим $\Gamma = \Gamma_L = \Gamma_R = 0, g_L = g_R = 0, \lambda = 0$. □

1.3.1 Формальный генератор квантовой положительной полу- группы

Для того, чтобы лучше понять, чем выделены генераторы ГКС-Л, получим условия на коэффициенты формального квадратичного генератора при условии, что $\mathcal{L}$ переводит самосопряжённые операторы в самосопряжённые и сопряжённый генератор $\mathcal{L}^*$ обнуляется на единичном операторе, не требуя, чтобы $\mathcal{L}$ имел вид ГКС-Л. В связи с этим введём следующее определение:

Определение 5. Будем называть супероператор $\mathcal{L}$ **формальным генератором квантовой положительной полугруппы**, если

1. $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$.
2. $\mathcal{L}^*(I) = 0$.

Вид такого квадратичного генератора может быть определён по следующей лемме

Лемма 8. $\mathcal{L}(\rho)$ — формальный генератор квантовой положительной полугруппы тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \quad (1.15)$$

где

$$H = H^T = \tilde{H}, \quad \Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad f = \tilde{f}.$$

Доказательство. Доказательство основано на прямом вычислении на основе леммы 6:

- 1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы (1.13), получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = \Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

- 2) Из $\mathcal{L}^*(I) = 0$, с учётом формулы (1.14), получим

$$\frac{\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T}{2} + \tilde{\Gamma}_L + \tilde{\Gamma}_R = 0, \quad \tilde{g}_L + \tilde{g}_R = 0, \quad \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J = 0.$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = i g_L$. Для квадратичных членов получим $\Gamma_L +$

$\tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma)$. Кроме того, определим $H = i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$. Тогда $\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma)$, $\Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma)$. Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\tilde{\Gamma}J$, то $\lambda = -\frac{1}{2}\text{Tr}\tilde{\Gamma}J$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически. Таким образом, получаем

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma^T J \rho.$$

С учётом формулы (1.7) получим (1.15). $\square$

Квадратичный генератор из определения 5 будем обозначать $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}$.

Мы будем решать эволюционное уравнение (задачу Коши) вида

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho_t), t \in \mathbb{R}_+ \quad \rho_t|_{t=0} = \rho_0, \quad \rho_t \in \mathfrak{S}_N(\otimes_{j=1}^n \ell_2). \quad (1.16)$$

Эволюционные операторы обозначим Φ_t : $\rho_t = \Phi_t \rho_0$. Такие операторы образуют полугруппу $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \Phi_{t_2}$. Отметим, что в случае произвольного формального генератора положительной полугруппы задача Коши (1.16) не обязана иметь решений.

1.3.2 Генератор ГКС-Л

В первую очередь нас будет интересовать генератор в форме ГКС-Л (генератор вполне положительной полугруппы)

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] + \sum_i \left(\hat{C}^{(i)} \rho (\hat{C}^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{C}^{(i)})^\dagger \hat{C}^{(i)} \rho - \frac{1}{2} \rho (\hat{C}^{(i)})^\dagger \hat{C}^{(i)} \right), \quad (1.17)$$

где $\hat{H}$ содержит квадратичные и линейные члены по операторам рождения-уничтожения, $\hat{C}_i$ содержит линейные и скалярные члены. Установим явный вид такого генератора

Лемма 9. При $\hat{H} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + h^T \mathbf{a}$ и $\hat{C}^{(i)} = \gamma_i^T \mathbf{a} + c_i$ генератор (1.17) принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \quad (1.18)$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T, \quad l = \sum_i \bar{c}_i \gamma_i, \quad f = h + i \frac{l - \tilde{l}}{2}. \quad (1.19)$$

Более того, возможность написать Γ и f в виде (1.19) эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geq 0, \quad f = \tilde{f}. \quad (1.20)$$

Доказательство. 1) Сначала вычислим

$$\begin{aligned} & \hat{C}^{(i)} \rho (\hat{C}^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{C}^{(i)})^\dagger \hat{C}^{(i)} \rho - \frac{1}{2} \rho (\hat{C}^{(i)})^\dagger \hat{C}^{(i)} = \\ & = (\gamma_i^T \mathbf{a} + c_i) \rho (\tilde{\gamma}_i^T \mathbf{a} + \bar{c}_i) - \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}_i^T \mathbf{a} + \bar{c}_i) (\gamma_i^T \mathbf{a} + c_i) \rho - \frac{1}{2} \rho (\tilde{\gamma}_i^T \mathbf{a} + \bar{c}_i) (\gamma_i^T \mathbf{a} + c_i) = \\ & = \mathbf{a}^T \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T \rho \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \tilde{\gamma}_i \gamma_i^T \rho \mathbf{a} - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \tilde{\gamma}_i \gamma_i^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \left(\bar{c}_i \gamma_i - \frac{1}{2} c_i \tilde{\gamma}_i - \frac{1}{2} \bar{c}_i \gamma_i \right) \rho + \\ & + \rho \mathbf{a}^T \left(c_i \tilde{\gamma}_i - \frac{1}{2} c_i \tilde{\gamma}_i - \frac{1}{2} \bar{c}_i \gamma_i \right) + |c_i|^2 - \frac{1}{2} |c_i|^2 - \frac{1}{2} |c_i|^2 = \\ & = \mathbf{a}^T \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T \rho \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\gamma_i \tilde{\gamma}_i^T)^T \rho \mathbf{a} - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T (\gamma_i \tilde{\gamma}_i^T)^T \mathbf{a} - i \mathbf{a}^T \left(\frac{i}{2} (\bar{c}_i \gamma_i - c_i \tilde{\gamma}_i) \right) \rho + \\ & + i \rho \mathbf{a}^T \left(\frac{i}{2} (\bar{c}_i \gamma_i - c_i \tilde{\gamma}_i) \right). \end{aligned}$$

Суммируя по i и прибавляя к коммутатору с $\hat{H}$, приходим к (1.18).

2) Формула $\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T = \sum_i \gamma_i \gamma_i^+ E$ может быть переписана в виде $\Gamma E = \sum_i \gamma_i \gamma_i^+$, что эквивалентно эрмитовости и неотрицательности матрицы $\Gamma E = (\Gamma E)^+ \geq 0$. Перепишем эрмитовость в эквивалентной форме $\Gamma E = E \Gamma^+$, $\Gamma^T = E \bar{\Gamma} E = \tilde{\Gamma}$. Условие $f = \tilde{f}$ следует из полулинейности $\sim$ -сопряжения. Так как на h также наложено только условие $h = \tilde{h}$, то никаких дополнительных условий на f накладывать не нужно. $\square$

Замечание 2. Таким образом, все линейные члены могут быть полностью включены в $\hat{H}$, а c_i можно выбрать нулевыми. Возможность перенести скалярные члены из операторов $\hat{C}^{(i)}$ в гамильтониан является общей для произвольных генераторов ГКС-Л (см. [59, стр. 70], [9, стр. 168]).

Замечание 3. Квадратичный генератор ГКС-Л является частным случаем генератора (1.15) с дополнительным условием $\Gamma E \geq 0$. Однако, и в общем случае (1.15) условие $(\Gamma E)^+ = \Gamma E$ позволяет разложить $\Gamma E = \sum_i \gamma_i \gamma_i^+ - \sum_j \beta_j \beta_j^+$, что позволя-

ет всегда записать условно положительный квадратичный генератор как разность двух ГКС-Л генераторов вида (1.18) с параметрами $\Gamma_1 = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T$ и $\Gamma_2 = \sum_j \beta_j \tilde{\beta}_j^T$.

Члены $\hat{H}$ можно распределить между двумя генераторами произвольным образом, например, полностью включив $\hat{H}$ в первый генератор.

Замечание 4. Генераторы (1.17) могут совпадать при различных наборах $\hat{C}^{(i)}$. Форма же (1.18) в силу леммы 7 является однозначной. Кроме того, тот факт, что произвольная неотрицательная эрмитова матрица может быть разложена по одно-ранговым проекторам, количество которых не превышает её размерности $\Gamma E = \sum_i \gamma_i \gamma_i^+$, позволяет записать линдбладовский квадратичный генератор в форме (1.17), где i пробегает не более $2n$ значений.

Замечание 5. Если записать Γ и f в блочном виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

где $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $f_1, f_2 \in \mathbb{C}^n$, то условия (1.20) примут вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Gamma_{22}^+, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{12}^+, \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{21}^+, \\ v_1^+ \Gamma_{11} v_1 + 2\operatorname{Re}(v_1^+ \Gamma_{12} v_2) + v_2^+ \Gamma_{11}^+ v_2 &\geq 0, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}, \\ f_1 &= \bar{f}_2. \end{aligned}$$

Специально выделим генераторы, для которых $\hat{C}^{(i)} = (\hat{C}^{(i)})^\dagger$. Тогда генератор Линдблада принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] - \frac{1}{2} \sum_i [\hat{C}^{(i)}, [\hat{C}^{(i)}, \rho]]. \quad (1.21)$$

Мы будем называть такие генераторы генераторами типа *классической диффузии*. Такое определение связано с тем, что такой генератор является аналогом классического уравнения Фоккера–Планка, где роль частных производных играют супероператоры присоединённого действия операторов $\hat{H}, \hat{C}^{(i)}$, то есть $[\hat{H}, \cdot]$ и $[\hat{C}^{(i)}, \cdot]$. Как и производные, такие супероператоры удовлетворяют правилу Лейбница $[\hat{C}^{(i)}, \hat{X}\hat{Y}] = \hat{X}[\hat{C}^{(i)}, \hat{Y}] + [\hat{C}^{(i)}, \hat{X}]\hat{Y}$. Отметим, что генератор (2) имеет вид (1.21) при $\hat{C}^{(1)} = \sqrt{\gamma N} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$ и $\hat{C}^{(2)} = \sqrt{\gamma N} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}$. Как уже говорилось выше, генератор (2) возникает в высокотемпературном пределе. Это естественно с физической

точки зрения, так как при высокой температуре резервуара можно ожидать того, что шум, создаваемый взаимодействием с этим резервуаром, становится классическим. Доказательство того, что члены вида $\frac{1}{2}[\hat{C}^{(i)}, [\hat{C}^{(i)}, \rho]]$ могут возникать посредством усреднения по (классическому) винеровскому случайном процессу, можно найти в [37, стр. 203]. В терминах матрицы Γ такой вид означает, что к (1.20) необходимо добавить условие $\Gamma = \Gamma^T$. Решения уравнений с такими генераторами мы рассмотрим в пункте 1.10.2.

1.3.3 Генераторы, зависящие от времени

Мы также будем рассматривать генераторы (1.15) с коэффициентами, зависящими от времени

$$\mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H_t \mathbf{a} + f_t^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma_t \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma_t^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma_t^T \mathbf{a},$$

где

$$H_t = H_t^T = \tilde{H}_t, \quad \Gamma_t^T = \tilde{\Gamma}_t, \quad f_t = \tilde{f}_t,$$

в частности, генераторы вида ГКС-Л

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_t, \rho] + \sum_i \left(\hat{C}_t^{(i)} \rho (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger \hat{C}_t^{(i)} \rho - \frac{1}{2} \rho (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger \hat{C}_t^{(i)} \right), \quad (1.22)$$

где $\hat{H}_t$ содержит квадратичные и линейные члены по операторам рождения-уничтожения, $\hat{C}_t^{(i)}$ содержит линейные и скалярные члены. Аналогично лемме 9 вид (1.22) накладывает дополнительное условие $\Gamma_t E \geq 0$. Функции H_t, Γ_t, f_t здесь и далее будем считать непрерывными функциями времени.

Мы будем решать эволюционное уравнение (задачу Коши) вида

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t), \quad \rho_t|_{t=t_0} = \rho_{t_0} \quad (1.23)$$

Эволюционные операторы $\Phi_t : \rho_t = \Phi_t \rho_0$ теперь не образуют полугруппу. Тем не менее, двухвременные операторы эволюции $\Phi_{t, t_0} : \rho_t = \Phi_{t, t_0} \rho_{t_0}$ удовлетворяют условию пропагатора

$$\Phi_{t_3, t_1} = \Phi_{t_3, t_2} \Phi_{t_2, t_1} \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+.$$

1.4 Канонические преобразования и их обобщения

Под каноническими преобразованиями понимаются преобразования, сохраняющие коммутационные соотношения и взаимную сопряжённость операторов рождения и уничтожения. Такие преобразования мы будем называть вещественными или просто каноническими преобразованиями. Кроме того, можно рассмотреть комплексные канонические преобразования, отказавшись от второго условия. Первые могут быть реализованы унитарными преобразованиями (теорема фон Неймана) $\mathfrak{b} = \hat{U}\mathfrak{a}\hat{U}^\dagger$. Комплексные преобразования могут быть реализованы общими линейными преобразованиями $\mathfrak{b} = \hat{L}\mathfrak{a}\hat{L}^{-1}$.

Мы будем рассматривать только аффинные канонические преобразования

$$\mathfrak{b} = S\mathfrak{a} + h,$$

где матрица S удовлетворяет условиям

$$SJS^T = J$$

и, в вещественном случае,

$$\tilde{S} = S, \quad \tilde{h} = h.$$

Введём обозначения $Sp(2n, \mathbb{C}) = \{S : SJS^T = J\}$ и $Sp_\sim(2n, \mathbb{R}) = \{S : SJS^T = J, \tilde{S} = S\}$. Последнее обозначение вызвано тем, что $Sp_\sim(2n, \mathbb{R})$ — это элементы вещественной симплектической группы, но записанные в нестандартном и, более того, комплексном базисе. Такие преобразования могут быть реализованы с помощью оператора $\hat{L}$, являющегося экспонентой от квадратичного. Действительно, если $\hat{L} = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a}}$, то по лемме 4

$$\hat{L}\mathfrak{a}\hat{L}^{-1} = e^{JK}\mathfrak{a} + \frac{e^{JK} - I}{JK}Jg.$$

Соответствующие супероператоры, действующие на матрицы плотности, будем обозначать $\mathcal{U}_{S,h}$. Тогда $\mathcal{U}_{S,h}^{-1}(\mathfrak{a}) = \hat{L}\mathfrak{a}\hat{L}^{-1} = S\mathfrak{a} + h$.

Зададимся вопросом, как меняется генератор ГКС-Л при каноническом преобразовании:

Лемма 10. *Под действием линейного канонического преобразования генератор*

преобразуется по формуле $\mathcal{U}_{S,h}^{-1} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f} \mathcal{U}_{S,h} = \mathcal{L}_{H',\Gamma',f'}$, где

$$H' = S^T H S, \quad f' = S^T \left(f - i \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) h \right), \quad \Gamma' = S^T \Gamma S. \quad (1.24)$$

Доказательство. Вычислим $\mathcal{U}_{S,h}^{-1} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f} \mathcal{U}_{S,h}(\rho) = \hat{L} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\hat{L}^{-1} \rho \hat{L}) \hat{L}^{-1}$. Используя (1.18), получим

$$\begin{aligned} \hat{L} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\hat{L}^{-1} \rho \hat{L}) \hat{L}^{-1} &= -i \left[\frac{1}{2} \hat{L} \mathbf{a}^T \hat{L}^{-1} H \hat{L} \mathbf{a} \hat{L}^{-1} + f^T \hat{L} \mathbf{a} \hat{L}^{-1}, \rho \right] + \hat{L} \mathbf{a}^T \hat{L}^{-1} \rho \hat{L} \mathbf{a} \hat{L}^{-1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{L} \mathbf{a}^T \hat{L}^{-1} \Gamma^T \hat{L} \mathbf{a} \hat{L}^{-1} \rho - \frac{1}{2} \rho \hat{L} \mathbf{a}^T \hat{L}^{-1} \Gamma^T \hat{L} \mathbf{a} \hat{L}^{-1} = \\ &= -i \left[\frac{1}{2} (S \mathbf{a} + h)^T H (S \mathbf{a} + h) + f^T (S \mathbf{a} + h), \rho \right] + (S \mathbf{a} + h)^T \rho \Gamma (S \mathbf{a} + h) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (S \mathbf{a} + h)^T \Gamma^T (S \mathbf{a} + h) \rho - \frac{1}{2} \rho (S \mathbf{a} + h)^T \Gamma^T (S \mathbf{a} + h) = \\ &= -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T S^T H S \mathbf{a} + \mathbf{a}^T S^T \left(f - i \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) h \right), \rho \right] + \\ &\quad + \mathbf{a}^T \rho S^T \Gamma S \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (S^T \Gamma S)^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T (S^T \Gamma S)^T \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.24). □

Формулы (1.24) позволяют избавиться от линейных членов посредством канонического преобразования, если матрица $iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}$ невырождена. Кроме того, гамильтониан может быть приведён к канонической форме Вилльямсона (см. [137]).

1.4.1 Канонические преобразования, зависящие от времени

Также можно рассматривать канонические преобразования, зависящие от времени

$$\hat{L}_t \mathbf{a} \hat{L}_t^{-1} = S_t \mathbf{a} + h_t,$$

где $\hat{L}_t = e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + h_t^T \mathbf{a}}$.

Лемма 11. Пусть $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$, тогда канонически преобразованная матрица плотности ρ'_t , то есть $\rho_t = \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t)$, удовлетворяет уравнению $\dot{\rho}'_t = \mathcal{L}_{H'_t, \Gamma'_t, f'_t}(\rho'_t)$,

где

$$H'_t = S_t^T H_t S_t - i J S_t^{-1} \dot{S}_t, \quad f'_t = S_t^T \left(f_t - i \left(i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) h_t - i J \dot{h}_t \right),$$

$$\Gamma'_t = S_t^T \Gamma_t S_t.$$

Доказательство. Подставляя $\rho_t = \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t)$ в $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$, имеем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t) = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t)),$$

$$\mathcal{U}_{S_t}^{-1} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t) = \mathcal{U}_{S_t}^{-1} \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t} \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t).$$

Вычисляя левую часть данного равенства, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{S_t}^{-1} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t) &= \hat{L}_t \left(\frac{d}{dt} (\hat{L}_t^{-1} \rho'_t \hat{L}_t) \right) \hat{L}_t^{-1} = \left(\hat{L}_t \frac{d}{dt} \hat{L}_t^{-1} \right) \rho'_t + \dot{\rho}'_t + \rho'_t \left(\frac{d}{dt} \hat{L}_t \right) \hat{L}_t^{-1} = \\ &= \dot{\rho}'_t + \left[\rho'_t, \left(\frac{d}{dt} \hat{L}_t \right) \hat{L}_t^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Правая часть равенства может быть вычислена с помощью леммы 10. □

В частности, такими преобразованиями можно избавиться от гамильтоновой части уравнения $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$, если в качестве S_t выбрать решение уравнения $\dot{S}_t = i J S_t$ с начальным условием $S_0 = I$.

1.5 Гауссовские состояния

1.5.1 Матрицы плотности, заданные как экспоненты от квадратичных форм

В первую очередь, введём следующее определение (см. [35, стр. 217]).

Определение 6. Состояние ρ называется *гауссовским*, если его характеристическая функция $\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}})$ представима в виде экспоненты от квадратичных и линейных форм по $\mathbf{z}$.

Явную формулу для $\chi_W(\mathbf{z})$ мы приведём ниже в пункте 1.5.5. Главным образом, мы будем интересоваться гауссовскими состояниями, заданными как экспо-

ненты от квадратичных операторов:

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s}. \quad (1.25)$$

Установим условия на коэффициенты, при которых формула (1.25) является самосопряжённой и имеет конечный след.

Лемма 12. Матрица ρ , задаваемая формулой (1.25), является самосопряжённой и имеет конечный след тогда и только тогда, когда

$$K = \tilde{K}, \quad KE < 0, \quad \tilde{g} = g, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Требование самосопряжённости оператора ρ эквивалентно требованию самосопряжённости оператора в экспоненте

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s = \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s \right)^\dagger = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T \tilde{K} \mathbf{a} + \tilde{g}^T \mathbf{a} + \bar{s}.$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях $\mathbf{a}$, получим $K = \tilde{K}$, $\tilde{g} = g$, $s = \bar{s}$.
Условие $K = \tilde{K}$ эквивалентно $KE = (KE)^+$. $\square$

1.5.2 Канонические формы и нормировка

Сформулируем в наших обозначениях следующее утверждение (см. [35, стр. 265],[69]).

Утверждение 1. Пусть $K = K^T = \tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $KE < 0$, тогда существует $S \in Sp_{\sim}(2n, \mathbb{R})$ такая, что K преобразуется к бидиагональному виду

$$K = -S \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} S^T, \quad (1.26)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — вещественная диагональная матрица с положительными коэффициентами $\lambda_i > 0$.

Кроме того, приведём в наших обозначениях доказательство утверждения, аналогичного формуле (11.67) в [35, стр. 275].

Утверждение 2. Если $K = K^T = \tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ такое, что $KE < 0$ и $g = \tilde{g} \in \mathbb{C}^{2n}$, то

$$e^s = \left(\text{tr} e^{\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a}} \right)^{-1} = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|} e^{\frac{1}{2} g^T \frac{1}{K} g}. \quad (1.27)$$

Доказательство. Выделяя полный квадрат, имеем

$$\text{tr} e^{(1/2) \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a}} \equiv \left(\text{tr} e^{(1/2) (\mathfrak{a} + K^{-1}g)^T K (\mathfrak{a} + K^{-1}g)} \right) e^{-(1/2) g^T K^{-1}g}.$$

Так как $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} + K^{-1}g$ является каноническим преобразованием (сдвигом), то соответствующее унитарное отображение сохраняет след:

$$\text{tr} e^{(1/2) (\mathfrak{a} + K^{-1}g)^T K (\mathfrak{a} + K^{-1}g)} = \text{tr} e^{(1/2) \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}}.$$

Тогда из (1.26) имеем

$$KJ = (SJ)^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} (SJ). \quad (1.28)$$

Здесь было использовано условие симплектичности $SJS^T = S$. Следовательно, $\det e^{-KJ} = e^{-\text{Tr}(KJ)} = 1$ и мы получаем

$$\begin{aligned} |\det(e^{KJ} - I)| &= \left| \det e^{-KJ} \det \left(2 \sinh \frac{KJ}{2} \right) \right| = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 2 \sinh \frac{\Lambda}{2} & 0 \\ 0 & -2 \sinh \frac{\Lambda}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\det \left(2 \sinh \frac{\Lambda}{2} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Вычисляя след матрицы $e^{\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}}$ с учётом (1.28), мы получаем

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}} &= \text{tr} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T S \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} S^T \mathfrak{a}} = \text{tr} \mathcal{U}_{S^T, 0} \left(e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{a}} \right) = \\ &= \text{tr} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{a}} = \text{tr} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger)} = \prod_{i=1}^n \text{tr}_i e^{-\frac{\lambda_i}{2} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger)}, \end{aligned}$$

где tr_i — след по той копии пространства ℓ_2 , где действуют операторы $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$. С

учётом

$$\mathrm{tr}_i e^{-\frac{\lambda_i}{2}(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger)} = \mathrm{tr}_i e^{-\lambda_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \frac{\lambda_i}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i n} e^{-\frac{\lambda_i}{2}} = \frac{e^{-\frac{\lambda_i}{2}}}{1 - e^{-\lambda_i}} = \frac{1}{2 \sinh \frac{\lambda_i}{2}},$$

используя (1.29), получим

$$\left(\mathrm{tr} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K \mathbf{a}} \right)^{-1} = \prod_{i=1}^n \sinh \frac{\lambda_i}{2} = \det \left(2 \sinh \frac{\Lambda}{2} \right) = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|}. \quad (1.30)$$

Таким образом, приходим к (1.27). □

1.5.3 Нормальные символы

В этом разделе мы получим формулы перехода от экспоненциального представления матрицы плотности к её нормальному символу $\rho(\mathbf{z})$, определяемому формулой (1.6).

В наших обозначениях левое и правое действие операторов рождения и уничтожения имеет вид (см. формулу (1.21) в [6, стр. 30])

$$(\mathbf{a}\rho)(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}), \quad (\rho \mathbf{a})(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}). \quad (1.31)$$

Для ясности приведём эти выражения в компонентах

$$\begin{aligned} (\hat{a}_i \rho)(\mathbf{z}) &= \left(z_i + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) \rho(\mathbf{z}), & (\hat{a}_i^\dagger \rho)(\mathbf{z}) &= \bar{z}_i \rho(\mathbf{z}), \\ (\rho \hat{a}_i)(\mathbf{z}) &= z_i \rho(\mathbf{z}), & (\rho \hat{a}_i^\dagger)(\mathbf{z}) &= \left(\bar{z}_i + \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \rho(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Пусть $K = K^T = \tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ такая, что $KE < 0$, $g = \tilde{g} \in \mathbb{C}^{2n}$, а $s \in \mathbb{R}$ определяется из условия нормировки $\mathrm{tr} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s} = 1$ (т.е. по формуле (1.27)), тогда нормально упорядоченная матрица плотности

$$e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + c} =: e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T R \mathbf{a} + q^T \mathbf{a} + r} :$$

(то есть её нормальный символ равен $e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R \mathbf{z} + q^T \mathbf{z} + r}$), где

$$R = -2 \left(E + J \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right)^{-1}, \quad q = RK^{-1}g, \quad e^r = \sqrt{\det(ER)} e^{\frac{1}{2}q^T R^{-1}q}. \quad (1.32)$$

Как и во всех других подкоренных выражениях в диссертации $\det(ER) > 0$ (см. замечания 6, 7).

Доказательство. Пусть $\rho = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}}$, тогда формула (1.9) (полагая $M = 0$ и собирая коэффициенты при f) может быть переписана в виде

$$\rho \mathbf{a} = e^{JK} \mathbf{a} \rho + \frac{e^{JK} - I}{JK} J g \rho. \quad (1.33)$$

Пусть $\rho(\mathbf{z})$ — нормальный символ ρ , тогда, с учётом (1.31), уравнение (1.33) примет вид

$$\left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}) = e^{JK} \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}) + \frac{e^{JK} - I}{JK} J g \rho(\mathbf{z}).$$

Подставим гауссовский анзац $\rho(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R \mathbf{z} + q^T \mathbf{z} + r}$. Приравнивая члены при первых и нулевых степенях $\mathbf{z}$, соответственно, мы получим следующие соотношения.

1) Коэффициенты при $\mathbf{z}$ имеют вид

$$I + \frac{E + J}{2} R = e^{JK} \left(I + \frac{E - J}{2} R \right). \quad (1.34)$$

Выражая R , получим первое из уравнений (1.32).

2) Коэффициенты при нулевой степени $\mathbf{z}$ имеют вид

$$\frac{E + J}{2} q = e^{JK} \frac{E - J}{2} q + \frac{e^{JK} - I}{JK} J g.$$

Выражая q , имеем

$$q = -2 \left(E + J \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right)^{-1} \frac{1}{JK} J g.$$

Принимая во внимание выражение для R , можно получить второе из уравнений (1.32).

3) Скалярный член r может быть получен из условия нормировки $\text{tr } \rho = 1$ и

формулы для следа оператора в терминах его нормального символа (см. формулу (2.34) в [6, стр. 48])

$$\mathrm{tr} \rho = \int \rho(\mathbf{z}) \frac{1}{\pi^n} d^{2n} \mathbf{z},$$

где $d^{2n} \mathbf{z} = d\mathrm{Re} z_1 d\mathrm{Im} z_1 \dots d\mathrm{Re} z_n d\mathrm{Im} z_n$ (такое определение соответствует статье [89], см. формулу (4.1)), а интеграл сходится в случае произвольного ядерного оператора ρ . Тогда условие нормировки принимает вид

$$\int e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R \mathbf{z} + q^T \mathbf{z} + r} \frac{1}{\pi^n} d^{2n} \mathbf{z} = 1.$$

Вычисляя гауссовский интеграл (см. формулу (2.16) в [6, стр. 62])

$$e^{-r} = \int e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R \mathbf{z} + q^T \mathbf{z}} \frac{1}{\pi^n} d^{2n} \mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{\det(ER)}} e^{-\frac{1}{2} q^T R^{-1} q},$$

мы получим третье из уравнений (1.32). □

Замечание 6. Прямым вычислением можно проверить $\tilde{R} = R$. Это равенство можно также получить, воспользовавшись тем, что символ самосопряжённого оператора является вещественнозначным (это следует, например, из теоремы 2.2 (i) в [29, стр. 163]). Тогда $\det(ER) = \det(E\tilde{R}) = \det(\bar{R}E) = \overline{\det(ER)}$. Таким образом, $\det(ER)$ является вещественным числом (более того, положительным, в силу вещественнозначности символа) и неоднозначности в выборе ветви корня не возникает.

Замечание 7. Существование решения уравнения (1.34), или, что эквивалентно, обратимость матрицы $E + J \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}}$ следует из существования нормального символа любого ограниченного (и тем более ядерного) оператора. Однако, она может быть проверена и непосредственно алгебраически. Так как $\det E = (-1)^n \neq 0$, то можно исследовать невырожденность матрицы $I + EJ \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}}$. Такая матрица является эрмитовой. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(I + EJ \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right)^+ &= I - \frac{I + e^{-J\bar{K}}}{I - e^{-J\bar{K}}} JE = I - E \frac{I + e^{-\tilde{J}\tilde{K}}}{I - e^{-\tilde{J}\tilde{K}}} \tilde{J} = \\ &= I - E \frac{I + e^{JK}}{I - e^{JK}} J = I + EJ \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}}. \end{aligned}$$

Поэтому для невырожденности такой матрицы достаточно проверить, что она яв-

ляется (строго) положительно определённой. Пусть $v \in \mathbb{C}^{2n}$ и $v \neq 0$, тогда

$$v^+ \left(I + EJ \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right) v = v^+ \left(I + EJ + 2EJ \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right) v.$$

Во-первых, распишем явно члены

$$v^+(I + EJ)v = v^+ \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \geq 0.$$

Во-вторых, преобразуем оставшиеся члены с учётом (1.28)

$$\begin{aligned} v^+ \left(2EJ \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}} \right) v &= 2v^+ EJ(SJ)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{e^\Lambda}{I - e^\Lambda} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-\Lambda}}{I - e^{-\Lambda}} \end{pmatrix} (SJ)v = \\ &= 2v^+(SJ)^+ JE \begin{pmatrix} \frac{e^\Lambda}{I - e^\Lambda} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-\Lambda}}{I - e^{-\Lambda}} \end{pmatrix} (SJ)v = 2(SJv)^+ \begin{pmatrix} \frac{I}{I - e^{-\Lambda}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-\Lambda}}{I - e^{-\Lambda}} \end{pmatrix} SJv > 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

в силу того, что $\frac{1}{1 - e^{-\lambda}} > 0$ и $\frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} > 0$ при $\lambda > 0$. Таким образом, мы получили $I + EJ \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}} > 0$, что ведёт как к обратимости матрицы в $E + J \frac{I + e^{KJ}}{I - e^{KJ}}$ в формуле (1.32), так и к $ER > 0$, что даёт прямое алгебраическое доказательство упоминавшегося в замечании 6 неравенства $\det(ER) > 0$.

Замечание 8. Отметим, что, в отличие от случая нормального символа операторов сжатия (см. [60]), в случае матриц плотности проблемы индекса, связанной с неоднозначностью функции корня от комплексного числа, не возникает.

Замечание 9. Преобразования к некоторым другим символам (см. [48], [47]) можно осуществить, заменив матрицу E на матрицу $E' = SES^T$, $S \in Sp(2n, \mathbb{C})$. В частности, для антинормального символа нужно положить $E' = -E$. Однако, в случае антинормального символа, формулы, аналогичные (1.32), будут иметь смысл только в том случае, если антинормальный символ существует.

Чтобы пояснить теорему 1, рассмотрим пример. Пусть $\rho = e^{-\frac{\lambda}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger) + s}$, $\lambda > 0$, где $e^s = 2 \sinh \frac{\lambda}{2}$ в соответствии с формулой (1.30). Тогда

$$K = - \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad g = 0.$$

По формулам (1.32) получим

$$R = - \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad q = 0, \quad e^r = 1 - e^{-\lambda}.$$

Таким образом, получим нормальный символ $\rho(z_1, \bar{z}_1) = (1 - e^{-\lambda})e^{-(1-e^{-\lambda})|z_1|^2}$. В пределе $\lambda \rightarrow +\infty$ получим $\rho(z_1, \bar{z}_1) \rightarrow e^{-|z_1|^2}$, то есть известную формулу для символа вакуумного состояния (см., например, [28, стр. 70], формула (3.2.10) при $n = 0$). Аналогично, с помощью замечания 9 можно вычислить соответствующий антинормальный символ $\overset{\circ}{\rho}(z_1, \bar{z}_1) = (e^\lambda - 1)e^{-(e^\lambda - 1)|z_1|^2}$, что соответствует формуле (3.1.25) с учётом (3.1.22) в [28, стр. 68].

1.5.4 Первые и вторые моменты

Гауссовские состояния могут быть полностью охарактеризованы с помощью первых и вторых моментов (см. [35, стр. 271]). Далее (см. (1.68), (1.69)) мы выразим динамику (1.23) в терминах этих величин. Поэтому введём следующие обозначения

Определение 7. *Определим вектор первых моментов (вектор средних) m матрицы плотности ρ по формуле*

$$m = \text{tr}(\mathfrak{a} \rho). \quad (1.36)$$

Определение 8. *Определим матрицу вторых центральных моментов D матрицы плотности ρ по формуле*

$$D = \text{tr} \left((\mathfrak{a} - m) (\mathfrak{a} - m)^T \rho \right). \quad (1.37)$$

Данное определение можно также переписать в виде

$$D = \text{tr}(\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rho) - m m^T. \quad (1.38)$$

Следствием самосопряжённости матрицы плотности является следующее утверждение.

Утверждение 3. *Вектор первых моментов и матрица вторых центральных мо-*

ментов произвольных матриц плотности удовлетворяют условиям

$$m = \tilde{m}, \quad D^T = \tilde{D}, \quad DE \geq 0.$$

Доказательство. Утверждение доказывается прямым вычислением. Действительно,

$$\tilde{m} \equiv E\bar{m} = E\overline{\text{tr}(\mathbf{a}\rho)} = E\text{tr}(\mathbf{a}^\dagger \rho^\dagger) = \text{tr}(\mathbf{a}\rho) = m.$$

Аналогично для $D = \tilde{D}$. Кроме того, по формуле (1.37) для произвольного вектора $f \in \mathbb{C}^{2n}$ получим

$$f^+ DE f = \text{tr} (f^+ (\mathbf{a} - m)(\mathbf{a} - m)^T E f \rho) = \text{tr} (f^+ (\mathbf{a} - m)(f^+ (\mathbf{a} - m))^\dagger \rho) \geq 0.$$

Таким образом, приходим к $DE \geq 0$. □

Неравенство $DE \geq 0$ ни что иное как принцип неопределённости Шредингера-Робертсона (см. оригинальную статью [119], и современное изложение в [12, Стр. 7] и [37, Стр. 33])

Кроме того, ККС (1.4) накладывают дополнительные ограничения на матрицу D , а именно на антисимметричную её часть.

Утверждение 4. Для произвольной матрицы плотности ρ , имеющей матрицу вторых центральных моментов D , верно

$$D - D^T = -J. \tag{1.39}$$

Доказательство. Транспонируя (1.38), имеем $D^T = \text{tr}((\mathbf{a} \mathbf{a}^T)^T \rho) - m m^T$. Тогда разность $D - D^T = \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T - (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)^T) \rho = \text{tr}[\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] \rho$. С учётом ККС (1.4) и нормировки матрицы плотности, получим $D - D^T = -\text{tr} J \rho = -J$. □

Сформулируем в наших обозначениях следующее утверждение [35, стр. 271]:

Утверждение 5. Пусть вектор $m \in \mathbb{C}^{2n}$ такой, что $m = \tilde{m}$ и матрица $D \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ такова, что

$$(DE)^+ = DE \geq 0, \quad D - D^T = -J, \tag{1.40}$$

тогда и только тогда существует единственное гауссовское состояние, вектор средних которого равен m , а матрица вторых центральных моментов равна D .

В силу (1.39) удобно работать с симметризованной матрицей вторых центральных моментов. В квантовом случае (см. [35, стр. 33], [73, Глава 8]) именно такую матрицу плотности принято называть матрицей ковариаций.

Определение 9. Назовём *матрицей ковариаций* C симметричную часть матрицы вторых центральных моментов

$$C = \frac{D + D^T}{2}. \quad (1.41)$$

Свяжем параметры матрицы плотности (1.25) с введёнными величинами.

Утверждение 6. Для гауссовского состояния (1.25) первые и вторые моменты могут быть вычислены по формулам

$$m = -K^{-1}g, \quad (1.42)$$

$$D = J \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}}, \quad C = -\frac{J}{2} \operatorname{cth} \frac{KJ}{2}. \quad (1.43)$$

Доказательство формулы для C , а также тот факт, что $m = 0$ при $g = 0$ можно найти в [35, стр. 275] (см. теорему 11.4.2). Формула для D следует из формулы для C и (1.39). Формула для m в общем случае может быть получена из формулы при $g = 0$ посредством канонического преобразования $\alpha \mapsto \alpha + K^{-1}g$.

Следствие 1. Пусть вектор $m \in \mathbb{C}^{2n}$ такой, что $m = \tilde{m}$ и матрица $D \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ такова, что

$$(DE)^+ = DE > 0, \quad D - D^T = -J, \quad (1.44)$$

тогда и только тогда существует единственное гауссовское состояние вида (1.25), вектор средних которого равен m , а матрица вторых центральных моментов равна D . При этом m и D однозначно связаны с K и g посредством формул (1.42) и (1.43).

Это следствие является комбинацией утверждений 5 и 6. Единственное дополнение: (строгая) положительность DE в случае, когда D определяется первой из формул (1.43), и обратимость этой формулы в случае (строгой) положительности DE . Положительность, по сути, уже была доказана в замечании 7 в формуле (1.35) (точнее, положительность матрицы, отличающейся от DE умножением на 2 и на E с двух сторон, что эквивалентно). Обратимость же формул (1.43) может

быть доказана посредством диагонализации эрмитовой положительной матрицы DE по аналогии с тем же замечанием 7.

С помощью теоремы 1 и утверждения 6 параметры нормальных символов также могут быть выражены в терминах первых и вторых моментов:

$$R = - \left(\frac{1}{2}E + C \right)^{-1}, \quad q = \left(\frac{1}{2}E + C \right)^{-1} m. \quad (1.45)$$

1.5.5 Характеристические функции

Матрицы плотности также могут быть охарактеризованы посредством характеристических функций (см. [35, стр. 470], [58, Глава 4]). Приведём формулы для них в случае гауссовских состояний:

$$\begin{aligned} \chi_W(\mathbf{z}) &\equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T C \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}, \\ \chi_N(\mathbf{z}) &\equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C + \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}, \\ \chi_A(\mathbf{z}) &\equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C - \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}. \end{aligned}$$

1.5.6 Энтропия, чистота, число частиц

Вычислим для гауссовского состояния

$$\text{tr} \rho^\tau = \text{tr} e^{\tau(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + c)} = \frac{(\sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|})^\tau}{\sqrt{|\det(e^{\tau KJ} - I)|}},$$

где была использована формула (1.27). В частности, при $\tau = 2$, получим чистоту гауссовского состояния

$$\text{tr} \rho^2 = \frac{(\sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|})^2}{\sqrt{|\det(e^{2KJ} - I)|}},$$

а дифференцируя при $\tau = 1$, получим энтропию

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\equiv -\text{tr } \rho \ln \rho = - \left(\frac{d}{d\tau} \text{tr } e^{\tau(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + c)} \right)_{\tau=1} = \\
&= - \left(\frac{d}{d\tau} \frac{(\sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|})^\tau}{\sqrt{|\det(e^{\tau KJ} - I)|}} \right)_{\tau=1} = \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{K J e^{KJ}}{e^{KJ} - I} \right) - \ln \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|}. \quad (1.46)
\end{aligned}$$

Это переписанная в наших обозначениях формула (11.73) из [35, стр. 276] (или формулы из [94, Раздела IV A], где они были получены, вероятно, впервые). Так как гауссовское состояние имеет максимальную энтропию среди всех состояний с заданными средними и матрицей ковариаций (см. [35, с. 278]), то данное выражение является верхней границей для других состояний с такой же матрицей ковариаций. Динамика энтропии будет обсуждаться в пункте 1.8.5.

Кроме того, введём оператор числа частиц

$$\hat{N} =: \frac{1}{2} \mathbf{a}^T E \mathbf{a} := \frac{1}{2} \mathbf{a}^T E \mathbf{a} - \frac{1}{4} \text{Tr } I. \quad (1.47)$$

В гауссовском состоянии с ковариационной матрицей C и вектором средних m среднее значение $\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(C - E/2)E + \frac{1}{2} m^T E m$.

1.6 Подходы к решению кинетического уравнения с квадратичным генератором

Данный раздел является центральным в главе. В нём несколькими независимыми способами будут получены гауссовские решения уравнения (1.23) в терминах уравнений для средних (1.68) и матриц вторых центральных моментов (1.70). В частности, в пункте 1.6.1 эти уравнения будут получены посредством подстановки матрицы плотности в виде экспоненты от квадратичной и линейной форм по операторам рождения-уничтожения. В пункте 1.6.2 эти уравнения будут получены посредством усреднения уравнений Гейзенберга. В пункте 1.6.3 уравнения (1.23) будут переписаны как уравнения в частных производных для нормального символа матрицы плотности (см. утверждение 10) и получены их гауссовские решения в терминах уравнений для коэффициентов форм, определяющих эти гаус-

совские решения (см. утверждение 11). В следствии 4 будет показано, что с учётом 1.45 эти уравнения также эквивалентны (1.68) и (1.70). В пункте 1.6.5 уравнения (1.68) и (1.70) будут получены ещё одним способом, основанном на динамике супероператоров, аналогичной динамике в представлении Гейзенберга для операторов.

1.6.1 Динамика матрицы плотности с квадратичным генератором

Мы будем решать задачу Коши (1.23) с начальным условием

$$\rho_0 = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_0 \mathbf{a} + g_0^T \mathbf{a} + s_0}, \quad (1.48)$$

где $K_0 = K_0^T = \tilde{K}_0$, $K_0 E < 0$, $g_0 = \tilde{g}_0$, а s_0 определяется из условия нормировки $\text{tr } \rho_0 = 1$.

Теорема 2. *Решение задачи Коши (1.23) с начальным условием (1.48) имеет вид $e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + s_t}$, где матрица K_t определяется из уравнения $D_t(e^{-K_t J} - I) = J$, а матрица D_t (матрица вторых центральных моментов) в свою очередь удовлетворяет линейному матричному уравнению*

$$\frac{d}{dt} D_t = J \left(iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) J + J \Gamma_t^T J, \quad (1.49)$$

g_t определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) = \left(iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) J \frac{1}{K_t J} g_t - i f_t, \quad (1.50)$$

а эволюция скалярного коэффициента определяется формулой

$$s_t = s_0 + \frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} g_t - \frac{1}{2} g_0^T J \frac{1}{K_0 J} g_0 - \ln \frac{\sqrt{|\det(e^{K_0 J} - I)|}}{\sqrt{|\det(e^{K_t J} - I)|}}, \quad (1.51)$$

при условии, что решение (1.49) удовлетворяет (1.44) в любой момент времени $t \geq 0$.

Доказательство. Перепишем (1.23) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = & -i \frac{1}{2} \mathbf{a}^T H_t \mathbf{a} - i f_t^T \mathbf{a} + i \rho_t \frac{1}{2} \mathbf{a}^T H_t \mathbf{a} \rho_t^{-1} + i \rho_t \frac{1}{2} f_t^T \mathbf{a} \rho_t^{-1} + \mathbf{a}^T \rho_t \Gamma_t \mathbf{a} \rho_t^{-1} - \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma_t^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \rho_t \mathbf{a}^T \Gamma_t^T \mathbf{a} \rho_t^{-1}.\end{aligned}$$

Группируя члены при различных комбинациях ρ_t и ρ_t^{-1} , имеем

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = & \mathbf{a}^T \left(-i H_t - \frac{1}{2} \Gamma_t^T \right) \mathbf{a} - i \mathbf{a}^T f_t + \rho_t \left(\mathbf{a}^T \left(i H_t - \frac{1}{2} \Gamma_t^T \right) \mathbf{a} + i \mathbf{a}^T f_t \right) \rho_t^{-1} + \\ & + \mathbf{a}^T \Gamma_t \rho_t \mathbf{a} \rho_t^{-1}.\end{aligned}$$

Симметризуя квадратичные формы в предыдущем уравнении по формуле (1.7), получим

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = & \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \tilde{M}_t \mathbf{a} - i \mathbf{a}^T f_t + \rho_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M_t \mathbf{a} + i \mathbf{a}^T f_t \right) \rho_t^{-1} + \\ & + \mathbf{a}^T \Gamma_t \rho_t \mathbf{a} \rho_t^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma_t^T J),\end{aligned}\quad (1.52)$$

где введено обозначение $M_t = i H_t - \frac{1}{2}(\Gamma_t + \Gamma_t^T)$.

Подставляя $\rho_t = e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + s_t}$ в это уравнение и принимая во внимание лемму 5, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = & \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ & + \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} (\text{sh}(K_t J) - K_t J) \frac{1}{K_t J} g_t + s_t \right),\end{aligned}\quad (1.53)$$

тогда, с учётом леммы 4, мы получим

$$\begin{aligned}\rho_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M_t \mathbf{a} + i \mathbf{a}^T f_t \right) \rho_t^{-1} = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-K_t J} M_t e^{J K_t} \mathbf{a} + \left(e^{-K_t J} M_t \frac{e^{J K_t} - I}{J K_t} J g_t + i e^{-K_t J} f_t \right)^T \mathbf{a} + \\ + \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} M_t + i f_t^T \right) \frac{e^{J K_t} - I}{J K_t} J g_t\end{aligned}\quad (1.54)$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T \Gamma_t \rho_t \mathbf{a} \rho_t^{-1} &= \mathbf{a}^T \Gamma_t e^{JK_t} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma_t J \frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\Gamma_t e^{JK_t} + e^{-K_t J} \Gamma_t^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr} (\Gamma_t J e^{K_t J}) + \mathbf{a}^T \Gamma_t J \frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t.\end{aligned}\quad (1.55)$$

Подставляя (1.53), (1.54), (1.55) в (1.52) и приравнявая квадратичные и линейные формы, соответственно, мы получим:

1) Квадратичные формы:

$$e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} = \tilde{M}_t + e^{-K_t J} M_t e^{JK_t} + \Gamma_t e^{JK_t} + e^{-K_t J} \Gamma_t^T.$$

Умножая на J , получим

$$e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} = \tilde{M}_t J + e^{-K_t J} M_t J e^{K_t J} + \Gamma_t J e^{K_t J} + e^{-K_t J} \Gamma_t^T J. \quad (1.56)$$

Тогда, умножая на $e^{K_t J}$, получим

$$\frac{d}{dt} e^{K_t J} = -e^{K_t J} (-\tilde{M}_t J) + M_t J e^{K_t J} - e^{K_t J} (-\Gamma_t J) e^{K_t J} + \Gamma_t^T J.$$

Собирая члены вида $(e^{K_t J} - I)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (e^{K_t J} - I) &= (e^{K_t J} - I) (\tilde{M}_t + \Gamma_t) J + (M_t + \Gamma_t) J (e^{K_t J} - I) + \\ &+ (e^{K_t J} - I) \Gamma_t J (e^{K_t J} - I) + (\tilde{M}_t + M_t + \Gamma_t + \Gamma_t^T) J.\end{aligned}$$

Так как $\tilde{M} + M + \Gamma + \Gamma^T = 0$, то, деля на $(e^{K_t J} - I)$ слева и справа, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{e^{K_t J} - I} = -(\tilde{M}_t + \Gamma_t) J \frac{1}{e^{K_t J} - I} - \frac{1}{e^{K_t J} - I} (M_t + \Gamma_t) J - \Gamma_t J. \quad (1.57)$$

Здесь было использовано тождество

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{e^{K_t J} - I} = -(e^{K_t J} - I) \left(\frac{d}{dt} (e^{K_t J} - I) \right) (e^{K_t J} - I).$$

Транспонируя (1.57) и умножая на J справа, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^{K_t J} - I} \right)^T J &= \left(\frac{1}{e^{K_t J} - I} \right)^T J(\tilde{M}_t + \Gamma_t^T)J + \\ &+ J(M_t + \Gamma_t^T) \left(\frac{1}{e^{K_t J} - I} \right)^T J + J\Gamma_t^T J. \end{aligned}$$

С учётом $((e^{K_t J} - I)^{-1})^T J = (e^{-JK_t} - I)^{-1}J = J(e^{-K_t J} - I)^{-1} = D_t$ получим (1.49).

2) Линейные члены:

$$\begin{aligned} e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) &= -if_t + e^{-K_t J} M_t \frac{e^{JK_t} - I}{JK_t} J g_t + \\ &+ ie^{-K_t J} f_t + \Gamma_t J \frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t. \end{aligned} \quad (1.58)$$

С учётом (1.56)

$$\begin{aligned} e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) &= e^{-K_t J} \left(\frac{d}{dt} e^{K_t J} \right) \frac{1}{K_t J} g_t + (I - e^{-K_t J}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} \right) = \\ &= \tilde{M}_t J \frac{1}{K_t J} g_t + e^{-K_t J} M_t J e^{K_t J} \frac{1}{K_t J} g_t + \Gamma_t J e^{K_t J} \frac{1}{K_t J} g_t + e^{-K_t J} \Gamma_t^T J \frac{1}{K_t J} g_t + \\ &+ (I - e^{-K_t J}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) \end{aligned}$$

уравнение (1.58) примет вид

$$\begin{aligned} (I - e^{-K_t J}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) &= -i(I - e^{-K_t J})f - \\ &- e^{-K_t J} (M_t + \Gamma_t^T) J \frac{1}{K_t J} g_t - (\tilde{M}_t + \Gamma_t) J \frac{1}{K_t J} g_t. \end{aligned}$$

Так как $M_t + \Gamma_t^T = -(\tilde{M}_t + \Gamma_t)$, то мы получим

$$(I - e^{-K_t J}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) = -i(I - e^{-K_t J})f_t + (I - e^{-K_t J})(M_t + \Gamma_t^T) J \frac{1}{K_t J} g_t.$$

Деля на $(I - e^{-K_t J})$, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) = (M_t + \Gamma_t^T) J \frac{1}{K_t J} g_t - i f_t.$$

С учётом $M_t = i H_t - \frac{1}{2}(\Gamma_t + \Gamma_t^T)$ приходим к (1.50).

3) Скалярные члены

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} (\text{sh}(K_t J) - K_t J) \frac{1}{K_t J} g_t + s_t \right) = \\ = -\frac{1}{2} \text{Tr} (\Gamma_t J (I + e^{K_t J})) + \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} M_t + i f_t^T \right) \frac{e^{J K_t} - I}{J K_t} J g_t. \end{aligned} \quad (1.59)$$

С учётом (1.58) и (1.56) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{K_t J} - I}{(K_t J)^2} g_t \right) = \\ = \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} M_t + i f_t^T \right) \frac{e^{J K_t} - I}{J K_t} J g_t. \end{aligned}$$

Подставляя в (1.59), имеем

$$\frac{d}{dt} \left(s_t - \frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} g_t \right) = -\frac{1}{2} \text{Tr} (\Gamma_t J (I + e^{K_t J})). \quad (1.60)$$

По формуле Лиувилля-Остроградского

$$\det \frac{1}{e^{K_t J} - I} = \det \frac{1}{e^{K_0 J} - I} \exp \left(\int_0^t \text{Tr} (e^{K_\tau J} - I) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{e^{K_\tau J} - I} d\tau \right).$$

Из уравнения (1.57) имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left((e^{K_\tau J} - I) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{e^{K_\tau J} - I} \right) &= -\text{Tr} (\tilde{M}_\tau + \Gamma_\tau + M_\tau + \Gamma_\tau) J - \text{Tr} \Gamma_\tau J (e^{K_\tau J} - I) = \\ &= -\text{Tr} \Gamma_\tau J (e^{K_\tau J} + I). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{|\det(e^{K_t J} - I)|}} = \frac{1}{\sqrt{|\det(e^{K_0 J} - I)|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr} \Gamma J (e^{K_\tau J} + I) d\tau \right). \quad (1.61)$$

Интегрируя (1.60) по времени с учётом (1.61) получим (1.51).

С учётом следствия 1 получим, что (1.49), (1.50), (1.51) действительно определяют решение задачи Коши (1.23) с начальным условием (1.48), если решение (1.49) удовлетворяет (1.44) в любой момент времени $t \geq 0$. $\square$

Замечание 10. Далее (см. следствие 6) мы покажем, что условий ГКС-Л генератора $\Gamma_t E \geq 0$ достаточно, чтобы (1.49) удовлетворяло (1.44) и (1.49), (1.50), (1.51) определяли (однозначно) гауссовское решение задачи Коши (1.23) с начальным условием (1.48).

Замечание 11. Отметим, что выражение для скалярного члена (1.51) согласуется с условием нормировки и формулой (1.30).

Замечание 12. Вообще говоря, не всякое гауссовское состояние имеет вид (1.25), а именно, такое представление гауссовского состояния возможно в том и только том случае, когда ρ невырождено. В частности, чистые гауссовские состояния (или, что то же, сжатые состояния) не представимы в виде (1.25). Однако, их можно представить в виде пределов матриц плотности вида (1.25), для этого достаточно вместо сжатия вакуумного состояния рассматривать сжатие температурного состояния и устремлять температуру к нулю. При этом D_t и $(K_t J)^{-1} g_t$ будут иметь конечные пределы.

1.6.2 Динамика в представлении Гейзенберга

В данном пункте мы получим динамику средних и ковариаций на основе решения сопряжённого уравнения необратимой квантовой эволюции (уравнения необратимой квантовой эволюции в представлении Гейзенберга).

Лемма 13. *Сопряжённый формальный генератор положительной полугруппы имеет вид*

$$\mathcal{L}_{H, \Gamma, f}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \hat{X} \right] + \mathbf{a}^T \hat{X} \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \hat{X} - \frac{1}{2} \hat{X} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}. \quad (1.62)$$

Данную формулу иногда удобно (в частности, при доказательстве следующей далее леммы 14) переписать в виде

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \hat{X} \right] + \frac{1}{2} \left([\mathbf{a}^T, \hat{X}] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [\hat{X}, \mathbf{a}] \right). \quad (1.63)$$

Сопряжённый генератор определён, в частности, на ядерных операторах, так же, как и исходный. В случае бозонов генераторы и сопряжённые генераторы, вычисленные на матрицах плотности, наиболее просто связаны (они отличаются лишь константой)

Следствие 2. Пусть $\rho \in \mathfrak{S}_N(\otimes_{j=1}^n \ell_2)$, тогда сопряжённый генератор $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*$ может быть выражен через генератор $\mathcal{L}_{-H,\Gamma^T,-f}$ по формуле

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\rho) = \mathcal{L}_{-H,\Gamma^T,-f}(\rho) - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma^T J \rho. \quad (1.64)$$

Доказательство. Перепишем (1.62) в виде

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T (-H) \mathbf{a} + (-f)^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-H,\Gamma^T,-f}^*(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T (-H) \mathbf{a} + (-f)^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} \rho - \\ - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma^T J. \end{aligned}$$

Сравнивая, приходим к (1.64). □

Так как $\text{Tr} \Gamma^T J = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma^T - \Gamma) J$, то в случае классической диффузии $\Gamma^T = \Gamma$ диссипатор симметричен $\mathcal{L}_{0,\Gamma,0}^* = \mathcal{L}_{0,\Gamma,0}$. Кроме того, из этого следует, что в случае классической диффузии формально $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(I) = 0$ и соответствующие отображения Φ_t являются бистохастическим.

Лемма 14. Действие сопряжённого генератора на операторы рождения и уничтожения, а также на их попарные произведения определяется формулами

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\mathbf{a}) = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} + iJf, \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^* (\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T) &= J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T + \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + J\Gamma^T J + \\ &\quad + iJf \mathfrak{a}^T - i\mathfrak{a} f^T J.\end{aligned}\quad (1.66)$$

Доказательство. Доказательство основано на прямой подстановке операторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T$ в (1.63).

1) Пусть $g \in \mathbb{C}^{2n}$. Вычислим по лемме 3

$$i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, g^T \mathfrak{a} \right] = g^T (iJH \mathfrak{a} + iJf). \quad (1.67)$$

В силу ККС (1.5) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} ([\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}] \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) &= -\frac{1}{2} (g^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] g) = \\ &= \frac{1}{2} (g^T J \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T J g) = g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a}.\end{aligned}$$

В силу произвольности g приходим к (1.65).

2) Пусть $g, h \in \mathbb{C}^{2n}$. По правилу Лейбница для коммутатора и (1.67) имеем:

$$\begin{aligned}i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, g^T \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T h \right] &= i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, g^T \mathfrak{a} \right] \mathfrak{a}^T h + \\ &\quad + i g^T \mathfrak{a} \left[\frac{1}{2} \mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T h \right] = \\ &= g^T (iJH \mathfrak{a} + iJf) \mathfrak{a}^T h + g^T \mathfrak{a} h^T (iJH \mathfrak{a} + iJf) = \\ &= i g^T (JH \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T - \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T H J + Jf \mathfrak{a}^T - \mathfrak{a} f^T J) h.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} ([\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T h] \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}]) = \\ &= \frac{1}{2} (g^T \mathfrak{a} [\mathfrak{a}^T, \mathfrak{a}^T h] \Gamma^T \mathfrak{a} + [\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}] \mathfrak{a}^T h \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \mathfrak{a}^T h + \mathfrak{a}^T \Gamma^T g^T \mathfrak{a} [\mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}]) = \\ &= g^T \mathfrak{a} \frac{1}{2} ([\mathfrak{a}^T, h^T \mathfrak{a}] \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [h^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) + \frac{1}{2} ([\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}] \Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) h^T \mathfrak{a} + \\ &\quad + [\mathfrak{a}^T \Gamma^T, g^T \mathfrak{a}] [\mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}] [\mathfrak{a}^T h, \Gamma^T \mathfrak{a}] = \\ &= g^T \mathfrak{a} h^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a} + g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a} h^T \mathfrak{a} + g^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] \Gamma^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] h =\end{aligned}$$

$$= g^T \left(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} J + J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a} \mathbf{a}^T + J \Gamma^T J \right) h.$$

В силу произвольности h и g приходим к (1.66). $\square$

Данная лемма позволяет получить уравнения для первого и второго (нецентрального) моментов матрицы плотности, эволюционирующих в соответствии с уравнением (1.23).

Следствие 3. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению (1.23), тогда первые и вторые моменты удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d}{dt} m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJ f_t, \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle + \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + \\ + iJ f_t m_t^T - i m_t f_t^T J + J \Gamma_t^T J. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Здесь m_t определяется формулой (1.36) и $\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle \equiv \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \rho_t)$.

Уравнения (1.68) и (1.69) получаются непосредственно из (1.65) и (1.66), соответственно, путём усреднения по состоянию ρ_t . Отметим, что эти уравнения не требуют гауссовского вида матрицы плотности.

Решение уравнения (1.69) требует знания решений уравнения (1.68). Оказывается, если перейти к уравнению для вторых центральных моментов, то оно ”расщепится” с уравнением (1.68). Как мы увидим далее (см. пункт 1.7.3), такое расщепление особенно удобно в случае, когда линейные члены генератора зависят от времени, а квадратичные постоянны. А именно, для матрицы D_t справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению (1.23), тогда матрица вторых центральных моментов D_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} D_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J \Gamma_t^T J. \quad (1.70)$$

Здесь D_t определяется формулой (1.37).

Доказательство. Транспонируя (1.68), имеем

$$\frac{d}{dt}m_t^T = m_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - if_t^T J.$$

Дифференцируя (1.38), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D_t &= \frac{d}{dt}(\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle) - \left(\frac{d}{dt}m_t \right) m_t^T - m_t \left(\frac{d}{dt}m_t^T \right) = \\ &= J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle + \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + \\ &\quad + iJf_t m_t^T - im_t f_t^T J + J\Gamma_t^T J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t m_t^T - \\ &\quad - iJf_t m_t^T - m_t m_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + im_t f_t^T J = \\ &= J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) (\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle - m_t m_t^T) + \\ &\quad + (\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle - m_t m_t^T) \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J\Gamma_t^T J. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.70). □

В силу (1.39) антисимметричная часть матрицы D_t не эволюционирует, поэтому можно перейти к уравнению для симметричной части матрицы C_t

Утверждение 8. Пусть матрица D_t удовлетворяет уравнению (1.70), тогда матрица ковариаций $C_t = (D_t + D_t^T)/2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}C_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) C_t + C_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J. \quad (1.71)$$

Доказательство. Транспонируя (1.70), имеем:

$$\frac{d}{dt}D_t^T = D_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t^T + J\Gamma_t J.$$

Тогда, складывая это уравнение с (1.70) и деля на 2, в соответствии с определением

(1.41), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}C_t = \frac{\dot{M}_t + \dot{M}_t^T}{2} = & J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \frac{D_t + D_t^T}{2} + \\ & + \frac{D_t + D_t^T}{2} \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + \frac{J\Gamma_t J + J\Gamma_t^T J}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.71). $\square$

Покажем, кроме того, что уравнение (1.70) действительно сохраняет условие (1.39).

Утверждение 9. Пусть матрица D_t удовлетворяет уравнению (1.70). Тогда, если $D_0 - D_0^T = -J$, то $D_t - D_t^T = -J$.

Доказательство. По аналогии с предыдущим доказательством имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(D_t - D_t^T) = & J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) (D_t - D_t^T) + (D_t - D_t^T) \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + \\ & + J(\Gamma_t^T - \Gamma_t)J. \end{aligned}$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что $D_t - D_t^T = -J$ является стационарным решением данного уравнения. Действительно,

$$-J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - J \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J(\Gamma_t^T - \Gamma_t)J = 0.$$

Таким образом, в силу единственности решения линейного дифференциального уравнения, приходим к доказываемому утверждению. $\square$

Вид уравнения (1.70) обеспечивает сохранение условия $D_t E = (D_t E)^+$, а утверждение 9 обеспечивает сохранение антисимметричной части $D_t - D_t^T = -J$. Однако, условие $D_t E \geq 0$ может в случае произвольного формального генератора положительной динамики не выполняться. Если же для решения уравнения (1.70) с начальным условием D_0 , удовлетворяющим (1.40), в любой момент времени $t \geq 0$ выполнено $D_t E \geq 0$, то мы будем говорить, что соответствующий генератор *определяет корректную положительную динамику гауссовских состояний*.

1.6.3 Уравнение для символов

Ещё один подход к решению задачи (1.23) связан с переходом к уравнению в частных производных для нормальных символов матрицы плотности.

Утверждение 10. Если матрица ρ_t удовлетворяет задаче Коши (1.23), то соответствующий нормальный символ $\rho_t(\mathbf{z})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) - \mathbf{z}^T B_t^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) + i f_t^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) - \text{Tr } B_t \rho_t(\mathbf{z}), \quad (1.72)$$

где

$$Q_t = J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J - \frac{E}{2} \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \frac{E}{2}, \quad (1.73)$$

$$B_t^T = \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J. \quad (1.74)$$

Доказательство. Перепишем уравнение (1.23) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_t = \mathbf{a}^T \rho_t \Gamma \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) \mathbf{a} \rho_t + \rho_t \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left(iH_t - \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) \mathbf{a} + \\ + \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma_t J \rho_t - i f_t^T \mathbf{a} \rho_t + i \rho_t f_t^T \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Тогда с учётом (1.31) и обозначая $M_t = iH_t - \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}$, супероператор в правой части принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \Gamma_t \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \tilde{M}_t \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T M_t \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma_t J - i f_t^T \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) + i f_t^T \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (M + \tilde{M}_t + \Gamma_t + \Gamma_t^T) \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \left((\tilde{M}_t + \Gamma_t^T) \frac{E - J}{2} + (M_t + \Gamma_t) \frac{E + J}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \left(\frac{E+J}{2} \tilde{M}_t \frac{E-J}{2} + \frac{E-J}{2} M_t \frac{E+J}{2} + 2 \frac{E+J}{2} \Gamma_t \frac{E+J}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \\
& + i f_t^T \left(\frac{E+J}{2} - \frac{E-J}{2} \right) \mathbf{z} + \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \frac{E+J}{2} \tilde{M}_t + \frac{1}{2} \frac{E-J}{2} M_t + \frac{E+J}{2} \Gamma_t + \frac{1}{2} J \Gamma_t \right) = \\
& = -\mathbf{z}^T \left(-i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + i f_t^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \text{Tr} J \Gamma_t + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \left(J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J - \frac{E}{2} \left(-i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - J \left(i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \frac{E}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}.
\end{aligned}$$

С учётом обозначений (1.73) и (1.74) приходим к (1.72). $\square$

Отметим, что (1.72) не содержит членов, квадратичных по $\mathbf{z}$.

Утверждение 11. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_0 + r_0}$, то решение уравнения (1.72) имеет вид $\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$, где коэффициенты R_t, q_t, r_t удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{R}_t = -B_t^T R_t - R_t B_t + R_t Q_t R_t, \quad (1.75)$$

$$\dot{q}_t = (R_t Q_t - B_t^T) q_t - i R_t J f_t, \quad (1.76)$$

$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(Q_t R_t) - \text{Tr} B_t + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t + i f_t^T J q_t. \quad (1.77)$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (1.72) в виде

$\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$. Вычислим отдельно каждый член в выражении (1.72):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t} &= \left(\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{R}_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \dot{q}_t + \dot{r}_t \right) e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}, \\
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t} &= \left(\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t Q_t R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T R_t Q_t q_t + \frac{1}{2} \text{Tr}(R_t Q_t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t \right) e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}, \\
-\mathbf{z}^T B_t^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t} &= (-\mathbf{z}^T B_t^T R_t \mathbf{z} - \mathbf{z}^T B_t^T q_t) e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}, \\
i f_t^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t} &= (-i \mathbf{z}^T R_t J f_t + i f_t^T J q_t) e^{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}.
\end{aligned}$$

Подставляя в (1.72) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mathbf{z}$, приходим к (1.75), (1.76) и (1.77). $\square$

Отметим, что уравнение (1.77) согласовано с нормировкой (1.32). Покажем,

что решение для нормального символа согласовано с уравнениями для средних и матриц ковариаций, полученных ранее.

Следствие 4. При замене $C_t = -E/2 - R_t^{-1}$, $m_t = -R_t^{-1}q_t$ уравнения (1.75), (1.76), (1.77) сводятся к (1.68) и (1.71).

Доказательство. 1) Деля уравнение (1.75) на R_t^{-1} с двух сторон, получим

$$R_t^{-1}\dot{R}_t R_t^{-1} = -R_t^{-1}B_t^T - B_t R_t^{-1} + Q_t.$$

С учётом $\frac{d}{dt}R_t^{-1} = -R_t^{-1}\dot{R}_t R_t^{-1}$, имеем

$$\frac{d}{dt}(-R_t^{-1}) = (-R_t^{-1})B_t^T + B_t(-R_t^{-1}) + Q_t.$$

Выделяя $-E/2 - R_t^{-1}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{E}{2} - R_t^{-1}\right) = \left(-\frac{E}{2} - R_t^{-1}\right)B_t^T + B_t\left(-\frac{E}{2} - R_t^{-1}\right) + Q_t + \frac{EB_t^T + B_tE}{2}.$$

С учётом замены $C_t = -E/2 - R_t^{-1}$, выражения (1.74) для B_t и

$$\begin{aligned} Q_t + \frac{EB_t^T + B_tE}{2} &= J\frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}J - \frac{E}{2}\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J - J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\frac{E}{2} + \\ &+ \frac{E}{2}\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J + J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\frac{E}{2} = J\frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}J \end{aligned}$$

приходим к (1.71).

2) Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-R_t^{-1}q_t) &= \frac{d}{dt}(-R_t^{-1})q_t - R_t^{-1}\dot{q}_t = -R_t^{-1}B_t^T q_t - B_t R_t^{-1}q_t + Q_t q_t + \\ &+ (-Q_t + R_t^{-1}B_t^T)q_t + iJf_t = B_t(-R_t^{-1}q_t) + iJf_t. \end{aligned}$$

С учётом $m_t = -R_t^{-1}q_t$ приходим к (1.68). □

1.6.4 Эволюция негауссовских матриц плотности

Если матрица плотности имеет антинормальный символ, то она может быть разложена по когерентным состояниям (см., например, формулу (7.6) в [89] или

формулу (4) в [126])

$$\rho = \int \mathring{\rho}(\mathbf{z}) |z\rangle\langle z| \frac{d^{2n}\mathbf{z}}{\pi^n}, \quad (1.78)$$

где $\mathring{\rho}(\mathbf{z})$ — антинормальный символ оператора ρ . Можно и в общем случае рассматривать такое разложение, рассматривая антинормальный символ как обобщённую функцию (см. [7, стр. 86]). В частности, под антинормальным символом самого когерентного состояния можно понимать дельта-функцию (см. [9, стр. 216]).

Поэтому для начала вычислим эволюцию когерентного состояния:

Лемма 15. *Нормальный символ супероператора эволюции в соответствии с задачей Коши (1.23) равен*

$$\langle u | \Phi_t(|z\rangle\langle z|) | u \rangle = \frac{1}{\sqrt{\det(\frac{I}{2} + C_t E)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{u} - m_t)^T (\frac{E}{2} + C_t)^{-1} (\mathbf{u} - m_t)}, \quad (1.79)$$

где m_t решение уравнения (1.68) с начальным условием $m_0 = \mathbf{z}$, а C_t является решением уравнения (1.71) с начальным условием $C_0 = \frac{1}{2}E$.

Доказательство. Когерентное состояние $|z\rangle\langle z|$ имеет матрицу ковариаций $C_0 = \frac{1}{2}E$ и вектор средних, равный $\mathbf{z}$. Тогда в соответствии со следствием 3 и утверждением 8 получим, что $\Phi_t(|z\rangle\langle z|)$ является гауссовским состоянием ρ_t со средним и матрицей ковариаций, удовлетворяющими (1.68) и (1.71). Нормальный символ оператора может быть определён по формуле $\rho_t(\mathbf{u}) = \langle u | \rho_t | u \rangle$. Поэтому квадратичные формы, определяющие нормальный символ, могут быть вычислены по формулам (1.45). Скалярный фактор может быть определён из нормировки по третьей из формул (1.32). В результате приходим к (1.79). $\square$

В силу линейности решение уравнения (1.68) с начальным условием $\mathbf{z}$ может быть представлено в виде $m_t = G_t \mathbf{z} + l_t$. Явный вид G_t и l_t мы обсудим ниже в пункте 1.7.1.

Теорема 3. *Нормальный символ матрицы плотности, эволюционирующей в со-*

ответствии с уравнением $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$, может быть определён по формуле

$$\begin{aligned} \rho_t(\mathbf{u}) = & \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{I}{2} + C_t E\right)}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\frac{E}{2} + C_t\right)^{-1} \mathbf{u}} \cdot \\ & \cdot \int \overset{\circ}{\rho}_0(\mathbf{z}) e^{(\mathbf{u} - l_t)^T \left(\frac{E}{2} + C_t\right)^{-1} G_t \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T G_t^T \left(\frac{E}{2} + C_t\right)^{-1} G_t \mathbf{z}} \frac{d^{2n} \mathbf{z}}{\pi^n}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

где $G_t \mathbf{z} + l_t$ — решение уравнения (1.68) с начальным условием $\mathbf{z}$, а C_t является решением уравнения (1.71) с начальным условием $C_0 = \frac{1}{2} E$. $\overset{\circ}{\rho}_0(\mathbf{z})$ — антинормальный символ начального условия.

Доказательство. Вычислим в соответствии с (1.78) и леммой 15

$$\begin{aligned} \rho_t(\mathbf{u}) &= \langle u | \Phi_t \left(\int \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{z}) |z\rangle \langle z| \frac{d^{2n} \mathbf{z}}{\pi^n} \right) | u \rangle = \int \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{z}) \langle u | \Phi_t(|z\rangle \langle z|) | u \rangle \frac{d^{2n} \mathbf{z}}{\pi^n} = \\ &= \int \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{z}) \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{I}{2} + C_t E\right)}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{u} - G_t \mathbf{z} - l_t)^T \left(\frac{E}{2} + C_t\right)^{-1} (\mathbf{u} - G_t \mathbf{z} - l_t)} \frac{d^{2n} \mathbf{z}}{\pi^n}. \end{aligned}$$

Раскрывая квадрат в экспоненте и вынося не зависящие от $\mathbf{z}$ члены за знак интеграла, приходим к (1.80). $\square$

1.6.5 Гейзенберговская эволюция супероператоров

Ещё один подход к решению уравнения $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$ основан на соответствии между операторами в $\mathcal{H}$ и векторами в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, которое в конечномерном случае задаётся подниманием тензорного индекса. Схематично такое соответствие может быть записано $|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \sim |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$. Тогда супероператоры вида $A \cdot B$ соответствуют операторам $A_1 B_2^\dagger$, где индексы нумеруют гильбертово пространство, в котором действуют операторы. Тогда из супероператоров умножения справа и слева на операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H}$ формально можно получить операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ (см. [14, с. 15], [78, с. 186]). Мы, однако, не будем использовать представление $\mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}$ как оператора в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ явно, используя это представление как наводящее соображение для введения супероператоров умножения на операторы рождения и уничтожения слева и справа:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \cdot \\ \cdot E \mathfrak{a} \end{pmatrix}.$$

Коммутационные соотношения аналогичны (1.5), а именно

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^T] = -J \oplus J \equiv -J_2. \quad (1.81)$$

Тогда уравнение $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t)$ принимает вид

$$\dot{\rho}_t = \frac{1}{2} \mathfrak{A}^T L_t \mathfrak{A} \rho_t + \mathfrak{A}^T F_t \rho_t + \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t J,$$

где введены обозначения

$$L_t \equiv \begin{pmatrix} -iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} & \Gamma_t E \\ E \Gamma_t^T & iE H_t E - E \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} & \Gamma_t E \\ E \Gamma_t^T & -iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \end{pmatrix}$$

и

$$F_t \equiv \begin{pmatrix} -if_t & iE f_t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -if_t & i\bar{f}_t \end{pmatrix}^T.$$

Соответствующий эволюционный оператор Φ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi_t = \left(\frac{1}{2} \mathfrak{A}^T L_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^T F_t + \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t J \right) \Phi_t. \quad (1.82)$$

По аналогии с доказательством леммы 4 введём динамику супероператоров по формуле $\mathfrak{A}_t = \Phi_t^{-1} \mathfrak{A} \Phi_t$.

Утверждение 12. Оператор $\mathfrak{A}_t \equiv \Phi_t^{-1} \mathfrak{A} \Phi_t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}_t = -J_2 L_t \mathfrak{A}_t - J_2 F_t. \quad (1.83)$$

Доказательство. Обращая (1.82) с учётом $\frac{d}{dt} \Phi_t^{-1} = -\Phi_t^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Phi_t \right) \Phi_t^{-1}$, получим

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^{-1} = -\Phi_t^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathfrak{A}^T L_t \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^T F_t + \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t J \right) \Phi_t^{-1}.$$

Тогда, дифференцируя $\mathfrak{A}_t = \Phi_t^{-1} \mathfrak{A} \Phi_t$, получим

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}_t = \left[\mathfrak{A}_t, \frac{1}{2} \mathfrak{A}_t^T L_t \mathfrak{A}_t + \mathfrak{A}_t^T F_t \right].$$

В результате, с учётом расширенных ККС (1.81), приходим к (1.83). $\square$

Замечание 13. Преимущество такой гейзенберговской эволюции супероперато-

ров над необратимой гейзенберговской эволюцией операторов состоит в том, что она сохраняет произведения супероператоров подобно унитарной эволюции операторов. Например, $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^T)_t \equiv \Phi_t^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^T\Phi_t = \Phi_t^{-1}\mathfrak{A}\Phi_t^{-1}\Phi_t\mathfrak{A}^T\Phi_t = \mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T$. Для необратимой динамики обычных операторов это, вообще говоря, не выполнено (см. [14]).

Следствие 5. Операторы $\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T$ и $\mathfrak{A}_t$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T) = -J_2 L_t \mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_t^T + \mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_t^T L_t^T J_2 - J_2 F_t \mathfrak{A}_t^T + \mathfrak{A}_t F_t^T J_2. \quad (1.84)$$

Доказательство. Транспонируя (1.83), имеем: $\frac{d}{dt}\mathfrak{A}_t^T = \mathfrak{A}_t^T L_t^T J_2 + F_t^T J_2$. Тогда, дифференцируя $\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T) &= \left(\frac{d}{dt}\mathfrak{A}_t\right)\mathfrak{A}_t^T + \mathfrak{A}_t\left(\frac{d}{dt}\mathfrak{A}_t^T\right)^T = \\ &= (-J_2 L_t \mathfrak{A}_t - J_2 F_t)\mathfrak{A}_t^T + \mathfrak{A}_t(\mathfrak{A}_t^T L_t^T J_2 + F_t^T J_2). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (1.84). □

Покажем, как можно получить уравнения (1.68) и (1.69) в рамках такого подхода. В первую очередь, докажем утверждение:

Утверждение 13. Следы от результатов действия супероператоров $\mathfrak{A}_t$ и $\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T$ на начальное состояние ρ_0 могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\mathrm{tr}(\mathfrak{A}_t\rho_0) = \begin{pmatrix} m_t \\ Em_t \end{pmatrix}, \quad \mathrm{tr}(\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_t^T\rho_0) = \begin{pmatrix} \langle \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rangle_t & \langle \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rangle_t E \\ E \langle \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rangle_t & E \langle \mathfrak{a} \mathfrak{a}^T \rangle_t E \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Доказательство. Отображение Φ_t сохраняет следы $\mathrm{tr} \Phi_t(X_t) = \mathrm{tr} X_t$. Поэтому для обратного отображения $\mathrm{tr} \Phi_t^{-1}(X_t) = \mathrm{tr} X_t$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\mathfrak{A}_t\rho_0) = \mathrm{tr}(\Phi_t^{-1}\mathfrak{A}\Phi_t\rho_0) = \mathrm{tr}(\mathfrak{A}\Phi_t\rho_0) = \mathrm{tr}(\mathfrak{A}\rho_t) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr} \mathfrak{a}\rho_t \\ E \mathrm{tr} \mathfrak{a}\rho_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \\ Em_t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили первую из формул (1.85), вторая может быть получена аналогично. □

Усредняя уравнение (1.83) с помощью первой из формул (1.85), получим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_t \\ Em_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) & -J\Gamma_t E \\ -JE\Gamma_t^T & JE \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ Em_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iJf_t \\ -iJEf_t \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения сводятся к уравнению (1.68) и тому же уравнению, домноженному слева на E .

Аналогично, при усреднении уравнения (1.84) мы получим четыре уравнения, эквивалентных (1.69) и отличающихся лишь умножением на E слева, справа и с обеих сторон.

1.7 Подходы к решению уравнений для средних и матриц ковариаций

В предыдущем разделе мы несколькими способами свели динамику с квадратичным генератором к уравнениям для динамики средних и матриц ковариаций, то есть к конечномерным линейным дифференциальным уравнениям. В данном разделе мы рассмотрим различные подходы к решению данных уравнений, а также несколько случаев зависимости или независимости коэффициентов от времени.

1.7.1 Общий случай

Как и в [128], мы отметим три основных подхода к решению дифференциального уравнения Ляпунова.

Во-первых, на уравнение (1.71) можно смотреть как на линейное дифференциальное уравнение, рассматривая C как вектор с $(2n)^2$ компонентами. Иногда может быть полезно записать это уравнение с помощью тензорных произведений. Произвольная симметричная матрица $V = V^T$ может быть представлена в виде $V = \sum_i v_i v_i^T$. Обозначим $|V\rangle\rangle = \sum_i v_i \otimes v_i$. Легко видеть, что $|V\rangle\rangle$ — это просто элементы матрицы V , построчно выстроенные в один вектор.¹ Тогда уравнение

¹Обозначение в виде удвоенных кет-векторов $|V\rangle\rangle$ для матрицы, выстроенной в вектор, получило широкое распространение в физической химии благодаря работам И. Пригожина (см., например, [113]), позже проникнув и в другие области науки, например, в квантовую теорию информации (см. [117]).

(1.71) может быть представлено в виде (см. [84, с. 23])

$$\frac{d}{dt}|C_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|C_t\rangle\rangle + \left| J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J \right\rangle\rangle, \quad (1.86)$$

где $B_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right)$. Аналогично, решение уравнения (1.70) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt}|D_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|D_t\rangle\rangle + |J\Gamma_t^T J\rangle\rangle.$$

Во-вторых, решение как уравнений Ляпунова (1.70)-(1.71), так и системы ОДУ (1.68) может быть выражено через матрицант [11, стр. 410-412] этой системы ОДУ.

Утверждение 14. Пусть G_t — решение задачи Коши

$$\dot{G}_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) G_t, \quad G_0 = I. \quad (1.87)$$

Тогда:

1) Динамика средних может быть описана уравнением

$$m_t = G_t m_0 + i \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J f_{t'} dt'. \quad (1.88)$$

2) Динамика вторых центральных моментов

$$D_t = G_t D_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'. \quad (1.89)$$

3) Динамика матрицы ковариаций

$$C_t = G_t C_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \frac{\Gamma_{t'} + \Gamma_{t'}^T}{2} J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'. \quad (1.90)$$

Доказательство. 1) По определению (1.87) матрица G_t является матрицантом (см. [11, стр. 408-412]) системы линейных уравнений (1.68).

2) Аналогично 1-му пункту, можно сослаться на то, что $G_t \cdot G_t^T$ является матрицантом системы линейных уравнений (1.70). Однако, в силу того, что система уравнений записана в матричном виде, а не в стандартном виде (1.86), покажем

что (1.89) является решением (1.70) явно. Перепишем (1.89) в виде

$$D_t = G_t \left(D_0 + \int_0^t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_{t'}^{-1})^T dt' \right) G_t^T.$$

Вычисляя производную по t , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_t &= \left(\frac{d}{dt} G_t \right) \left(D_0 + \int_0^t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_{t'}^{-1})^T dt' \right) G_t^T + \\ &+ G_t \left(D_0 + \int_0^t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_{t'}^{-1})^T dt' \right) \left(\frac{d}{dt} G_t \right)^T + G_t G_t^{-1} J \Gamma_t^T J (G_t^{-1})^T G_t. \end{aligned}$$

С учётом уравнения (1.87) и соответствующего транспонированного уравнения $\dot{G}_t^T = G_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J$ приходим к (1.70). Подстановка $t = 0$ в (1.89) приводит к тому, что интеграл обнуляется и $G_0 = G_0^T = I$ в силу начального условия в задаче Коши (1.87), то есть D_0 действительно является значением функции D_t в начальный момент времени. Таким образом, (1.89) действительно является решением задачи Коши (1.70) с начальным условием D_0 .

3) Можно провести доказательство, аналогичное 2-му пункту, с заменой D_t на C_t и Γ_t на $(\Gamma_t + \Gamma_t^T)/2$. Однако, можно и просто симметризовать (1.89), воспользовавшись определением 9. $\square$

В-третьих, решение можно представить в терминах только однородных линейных дифференциальных уравнений.

Утверждение 15. *Эволюция среднего определяется формулой*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) & iJf_t \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Матрица вторых моментов может быть определена по формуле $D_t = X_t Y_t^{-1}$, где матрицы X_t и Y_t могут быть получены из следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) & J \Gamma_t^T J \\ 0 & \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

с произвольным начальным условием, таким, что $X_0 Y_0^{-1} = D_0$. В частности,

можно положить $X_0 = D_0, Y_0 = I$.

Аналогично, матрица ковариаций может быть определена по формуле $C_t = X_t' Y_t^{-1}$, где матрицы X_t' и Y_t могут быть получены из следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_t' \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) & J \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} J \\ 0 & \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t' \\ Y_t \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

с произвольным начальным условием, таким, что $X_0' Y_0^{-1} = C_0$. В частности, можно положить $X_0' = C_0, Y_0 = I$.

Доказательство. 1) Первая строчка (1.91) в точности совпадает с (1.68), вторая является тривиальным тождеством.

2) Рассмотрим сначала вторую строчку (1.92), а именно $\dot{Y}_t = \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J Y_t$. Это уравнение можно переписать в виде $\frac{d}{dt} (Y_t^{-1})^T = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) (Y_t^{-1})^T$. Следовательно $(Y_t^{-1})^T$ можно выразить в терминах решения задачи Коши (1.87), а именно $(Y_t^{-1})^T = G_t (Y_0^{-1})^T$. Тогда выразим $Y_t = (G_t^{-1})^T Y_0$.

На первую строчку (1.92), то есть $\dot{X}_t = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) X_t + J \Gamma^T J Y_t$, удобно смотреть как на уравнение относительно X_t , рассматривая $J \Gamma^T J Y_t$ как неоднородность. Тогда его решение может быть также выражено в терминах G_t , а именно $X_t = G_t X_0 + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J Y_{t'} dt' = G_t X_0 + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_{t'}^{-1})^T Y_0 dt'$. Таким образом,

$$D_t = X_t Y_t^{-1} = G_t X_0 Y_0^{-1} G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_{t'}^{-1})^T G_t^T dt'.$$

С учётом того, что начальные условия удовлетворяют $D_0 = X_0 Y_0^{-1}$, приходим к (1.89).

3) Совершенно аналогично пункту 2 система (1.93) сводится к (1.90). $\square$

1.7.2 Уравнение с постоянными коэффициентами

В случае, если коэффициенты уравнений (1.68), (1.70) и (1.71) постоянны, то можно получить более явное решение.

Первый из рассмотренных в предыдущем пункте подход, основанный на уравнении (1.86), приводит к решению

$$|C_t\rangle\rangle = e^{\Xi t}|C_0\rangle\rangle + \frac{e^{\Xi t} - I_{4n^2}}{\Xi} \left| J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J \right\rangle\rangle, \quad (1.94)$$

где $\Xi = B \otimes I + I \otimes B$. Аналогично, получим

$$|D_t\rangle\rangle = e^{\Xi t}|D_0\rangle\rangle + \frac{e^{\Xi t} - I_{4n^2}}{\Xi} |J\Gamma^T J\rangle\rangle. \quad (1.95)$$

Второй подход из предыдущего пункта приводит к утверждению.

Утверждение 16. *Эволюция среднего определяется формулой*

$$m_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} m_0 + i \frac{e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} - I}{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)} Jf. \quad (1.96)$$

Матрица вторых центральных моментов

$$D_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} D_0 e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt} + \int_0^t e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t'} J\Gamma^T J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt'} dt'. \quad (1.97)$$

Матрица ковариаций

$$C_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} C_0 e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt} + \int_0^t e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t'} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt'} dt'. \quad (1.98)$$

Доказательство. 1) В случае постоянных коэффициентов решение уравнения (1.87) может быть выражено с помощью матричной экспоненты: $G_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t}$. Кроме того, отметим, что $G_t G_{t'}^{-1} = G_{t-t'}$. Тогда, вычислим интеграл в (1.88)

$$\int_0^t G_t G_{t'}^{-1} Jf dt' = \int_0^t e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)(t-t')} dt' Jf = \frac{e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} - I}{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)} Jf.$$

Таким образом, с учётом явного вида G_t решение (1.88) преобразуется в (1.96).

2) Транспонируя выражение для G_t , имеем $G_t^T = e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt}$. Тогда с помо-

щью замены переменной $t' \rightarrow t - t'$ преобразуем интеграл в (1.89)

$$\int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt' = \int_0^t G_{t-t'} J \Gamma^T J G_{t-t'}^T dt' = \int_0^t G_{t'} J \Gamma^T J G_{t'}^T dt',$$

тогда с учётом явных выражений для G_t и G_t^T решение (1.89) преобразуется в (1.97).

3) Аналогично, в случае постоянных коэффициентов (1.90) преобразуется в (1.98). $\square$

Утверждение 15 в случае постоянных коэффициентов переходит в следующее утверждение.

Утверждение 17. *Эволюция среднего определяется формулой*

$$\begin{pmatrix} m_t \\ 1 \end{pmatrix} = \exp \left[t \begin{pmatrix} J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) & iJf \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица вторых моментов может быть определена по формуле $D_t = X_t Y_t^{-1}$, где матрицы X_t и Y_t определяются

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \exp \left[t \begin{pmatrix} J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) & J \Gamma^T J \\ 0 & \left(iH - \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} D_0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Аналогично, матрица ковариаций может быть определена по формуле $C_t = X_t' Y_t^{-1}$, где матрицы X_t' и Y_t определяются

$$\begin{pmatrix} X_t' \\ Y_t \end{pmatrix} = \exp \left[t \begin{pmatrix} J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) & J \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} J \\ 0 & \left(iH - \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} C_0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В случае постоянных коэффициентов решения уравнений в утверждении 15 могут быть представлены с помощью матричных экспонент. $\square$

Замечание 14. Отметим, что решение (1.94) требует вычисления экспоненты от матрицы размера $(4n^2) \times (4n^2)$. Решение по формуле (1.97) требует вычисления экспоненты от матрицы размера $(2n) \times (2n)$, но требует интегрирования, которое может быть сделано методами, разработанными в работе [43]. Кроме того,

мы покажем (см. утверждение 26), что в случае наличия единственного стационарного состояния уравнения (1.70) с постоянными коэффициентами от этого интегрирования можно избавиться. При этом требуется вычисление стационарного состояния. Однако, это является уже чисто алгебраической задачей. Вычисление D_t в соответствии с утверждением 17 требует вычисления экспоненты от матрицы размера $(4n) \times (4n)$ и не требует интегрирования. Поэтому в общем случае утверждение 17 является наиболее удобным для численного вычисления D_t .

Множество численных и аналитических подходов к решению вещественных дифференциальных уравнений Ляпунова с постоянными коэффициентами можно найти в книге [84], многие из них можно обобщить на наш случай.

1.7.3 Уравнение с переменными линейными членами

Если от времени зависят только линейные члены в генераторе $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f_t}$, то решения для матриц C_t и D_t могут быть получены по формулам из предыдущего пункта. Изменяется только динамика средних.

Утверждение 18. *Эволюция среднего определяется формулой*

$$m_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} m_0 + i \int_0^t e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)(t-t')} J f_{t'} dt'. \quad (1.99)$$

Специально рассмотрим случай, когда функция f_t является суперпозицией конечного числа гармонических колебаний.

Утверждение 19. *Пусть функция f_t имеет вид $f_t = \sum_k \check{f}_k e^{i\omega_k t}$ и не выполнено условие резонанса, то есть $\det\left(J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right) - i\omega_k I\right) \neq 0, \forall k$, тогда (1.99) принимает вид*

$$m_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} m_0 + i \sum_k \frac{e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} - e^{i\omega_k t} I}{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right) - i\omega_k I} J \check{f}_k.$$

1.8 Свойства решений

Наиболее важным в данном разделе является пункт 1.8.1, в котором изучаются условия корректной положительной динамики гауссовских состояний. Кроме

того, в пункте 1.8.3 будут получены важные условия наличия стационарных гауссовских решений, к которым в процессе динамики стремится (на больших временах) произвольное начальное состояние.

1.8.1 Существование решений и условия положительности

В данном пункте центральную роль будет играть следующее определение:

Определение 10. Введём множество Σ_b векторов $x \in \mathbb{C}^{2n}$, для которых существует некоторая матрица D , удовлетворяющая условиям $(DE)^+ = DE \geq 0$ и $D - D^T = -J$, такая, что $DJx = 0$.

Напомним, что $^+$ мы называем эрмитово сопряжение векторов и матриц в $\mathbb{C}^{2n}$. Индекс b соответствует бозонному случаю, в следующей главе, посвященной фермионному случаю, у нас возникнет аналогичное множество Σ_f . Определение 10 поможет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема 4. Необходимое и достаточное условие существования положительной динамики гауссовских состояний

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_b. \quad (1.100)$$

Доказательство. Перепишем уравнение (1.70) в случае постоянных коэффициентов в виде

$$\frac{d}{dt} D_t E = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) D_t E + D_t E \left(J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \right)^+ + J \Gamma^T J E. \quad (1.101)$$

Чтобы решение этого уравнения определяло корректную динамику гауссовского состояния необходимо потребовать $D_t E \geq 0$ в любой момент времени. Или, что тоже самое, для произвольного вектора $v \in \mathbb{C}^{2n}$ функция времени $v^+ D_t E v$ положительна. В начальный момент времени эта функция имеет заведомо положительное значение (в силу того, что мы задаём D_0 как матрицу вторых моментов некоторой матрицы плотности). В силу непрерывности, чтобы стать отрицательной, эта функция должна стать равной нулю в некоторый момент времени t_1 . Пусть t_1 наименьший момент времени, такой, что $v^+ D_{t_1} E v = 0$ на некотором векторе v . Тогда условие существования положительной динамики $\frac{d}{dt} v^+ D_t E v|_{t=t_1} \geq 0$

0. В силу $D_{t_1}E \geq 0$ из условия $v^+ D_{t_1}E v = 0$ следует $D_{t_1}E v = 0$ и $v^+ D_{t_1}E = 0$. Тогда из (1.101) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v^+ D_t E v|_{t=t_1} = & v^+ J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) D_{t_1} E v + v^+ D_{t_1} E \left(J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \right)^+ v + \\ & + v^+ J \Gamma^T J E v = v^+ J \Gamma^T J E v. \end{aligned}$$

Таким образом, условие существования динамики эквивалентно $v^+ J \Gamma^T J E v \geq 0$ для векторов v , единственным ограничением на которые является то, чтобы $D E v = 0$ для некоторой матрицы вторых моментов D . Тогда с учётом замены $x = E J \bar{v}$ приходим к (1.100). $\square$

Замечание 15. Пока теорема 4 с определением 10 для множества Σ_b даёт весьма сложный критерий для определения, является ли заданный формальный генератор генератором корректной положительной динамики. Далее мы упростим этот критерий посредством упрощения описания множества Σ_b . Однако уже из этого определения видно, что это ограничение только на диссипатор (отсутствуют какие-либо дополнительные ограничения на параметры H, f генератора $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}$).

Замечание 16. В случае нестационарного генератора $\mathcal{L}_{H_t,\Gamma_t,f_t}$ выполнение условия (1.100) для матрицы Γ_t в произвольный момент времени является достаточным для того, чтобы этот генератор определял корректную положительную динамику. Если требовать, чтобы эволюционные операторы Φ_{t_1,t_2} были определены на произвольных матрицах плотности, то это условие является и необходимым.

Следствие 6. *Условия того, что генератор имеет вид ГКС-Л генератора, то есть $\Gamma E \geq 0$, достаточно для того чтобы генератор был генератором корректной положительной динамики.*

Доказательство этого следствия очевидно, так как $\Gamma E \geq 0$ по определению означает $x^+ \Gamma E x \geq 0$ для произвольных $x \in \mathbb{C}^{2n}$, поэтому оно заведомо выполнено и на множестве Σ_b .

Естественно задаться вопросом, существуют ли матрицы Γ , удовлетворяющие (1.100), но не $\Gamma E \geq 0$. Конкретный пример таких матриц будет рассмотрен в пункте 1.10.6. Для этого попытаемся упростить описание множества Σ_b .

Утверждение 20. Введём множества

$$\Sigma'_b = \{x \in \mathbb{C}^{2n} : x^+ J E x \geq 0\}, \quad (1.102)$$

$$\Sigma''_b = \{x \in \mathbb{C}^{2n} : x^+ J E x \geq 1\}. \quad (1.103)$$

Тогда для множества Σ_b выполнено

$$\Sigma''_b \subseteq \Sigma_b \subseteq \Sigma'_b. \quad (1.104)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, нам будет удобно проводить рассуждения в терминах вектора v , а уже в ответе перейти к вектору x .

Пусть $DEv = 0$, тогда с учётом самосопряжённости матрицы DE получим $v^+ DE = 0$. Транспонируя и умножая слева на E , получаем $D^T \bar{v} = 0$. С учётом (1.39) приходим к $(D + J)\bar{v} = 0$, или $DE\tilde{v} = -JE\tilde{v}$. Умножая слева на $\tilde{v}^+$, получаем $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} = \tilde{v}^+ DE\tilde{v} \geq 0$. Таким образом, на множество векторов v необходимо накладывать условие $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} \geq 0$. Переписывая условие $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} \geq 0$ с учётом замены $x = EJ\bar{v}$, приходим к $\Sigma_b \subseteq \Sigma'_b$.

Теперь докажем, что для каждого вектора v , удовлетворяющего условию $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} \geq 1$, найдётся матрица D , такая, что $DEv = 0$, и удовлетворяющая условиям (1.40). Условие $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} \geq 1$ можно переписать в виде $v^+ J E v \geq 1$. Обозначим $\lambda = v^+ J E v \geq 1$, тогда матрица $D = \frac{1}{2}(\lambda E - J)$ удовлетворяет условию $DEv = 0$. Кроме того, для DE выполнено условие (1.40):

$$DE = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda + 1)I_n & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)I_n \end{pmatrix} = (DE)^+ \geq 0.$$

Переписывая условие $-\tilde{v}^+ JE\tilde{v} \geq 1$, с учётом замены $x = EJ\bar{v}$ приходим к $\Sigma'_b \subseteq \Sigma_b$.

Таким образом, приходим к (1.104). □

Замечание 17. Отметим, что из $DE\tilde{v} = -JE\tilde{v}$ следует также, что $-v^+ JE\tilde{v} = v^+ DE\tilde{v} = 0$. Таким образом, может показаться, что нужно наложить ещё условие $-v^+ JE\tilde{v} = 0$. Однако, $-v^+ JE\tilde{v} = -v^+ J\bar{v} \equiv 0$. Тем не менее, аналогичное условие будет нетривиально в случае фермионов (см. утверждение 46).

Следствие 7. Для существования положительной динамики гауссовских состо-

яний необходимо

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_b'',$$

достаточно

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_b', \quad (1.105)$$

где Σ_b' и Σ_b'' определяются формулами (1.102) и (1.103).

Следствие 8. Достаточное условие существования положительной динамики гауссовских состояний

$$x^+ \Gamma E x \geq 0$$

для всех x , которые либо изотропны $x^+ J E x = 0$, либо принадлежат единичной псевдосфере $x^+ J E x = 1$.

Из достаточности (1.105) и явного вида Σ_b' (1.102) также непосредственно следует:

Утверждение 21. Если Γ удовлетворяет условию (1.105), то $\Gamma + \lambda J, \forall \lambda \geq 0$ также удовлетворяет (1.105).

1.8.2 Обращение динамики первых моментов

Несмотря на то, что эволюция в соответствии с уравнением ГКС-Л является необратимой, динамику первых моментов можно обратить в следующем смысле

Утверждение 22. Пусть динамика средних определяется уравнением

$$m_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} m_0, \text{ тогда существует такой ГКС-Л-генератор с } H' = -H, \Gamma' = \Gamma^T, \text{ что соответствующая эволюция } m' = e^{-J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} m'_0.$$

1.8.3 Предельные распределения, не зависящие от начального распределения

В первую очередь, сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 23. Если λ является собственным значением матрицы

$$B = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right), \text{ то } \bar{\lambda} \text{ также является собственным значением этой матрицы.}$$

Доказательство этого утверждения основано на свойстве $B = \tilde{B}$.

Утверждение 24. Пусть матрица $B = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)$ имеет собственные значения λ_i , тогда собственные значения матрицы $B \otimes I + I \otimes B$ имеют вид $\lambda_i + \lambda_j$.

Доказательство этого утверждения основано на приведении матрицы B к нормальной жордановой форме. Из утверждения 24 и (1.94) непосредственно следует:

Утверждение 25. Если матрица $J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)$ имеет только собственные значения с отрицательными вещественными частями, тогда (и только тогда) существует единственно предельное распределение c

$$m_{+\infty} = - \frac{I}{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)} Jif,$$

$$C_{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t'} J \Gamma^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J t'} dt'.$$

Тогда решение может быть представлено в виде

$$m_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} (m_0 - m_{+\infty}) + m_{+\infty},$$

$$C_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} (C_0 - C_{+\infty}) e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J t} + C_{+\infty}. \quad (1.106)$$

Более того, наличие стационарного решения C^{st} уравнения (1.71) с постоянными коэффициентами позволяет и в общем случае представить решение в подобном виде. При этом не требуется, чтобы C^{st} являлось матрицей ковариаций, но требуется $C'^{st} = (C^{st})^T = \tilde{C}^{st}$.

Утверждение 26. Пусть m^{st} и C^{st} — решения уравнений

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) C^{st} + C^{st} \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J = 0, \quad (1.107)$$

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) m^{st} + iJf = 0, \quad (1.108)$$

такие, что $C^{st} = (C^{st})^T = \tilde{C}^{st}$ и $m^{st} = \tilde{m}^{st}$, тогда решения уравнений (1.71) и

(1.68) с постоянными коэффициентами могут быть представлены в виде

$$m_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} (m_0 - m^{st}) + m^{st},$$

$$C_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} (C_0 - C^{st}) e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt} + C^{st}.$$

Замечание 18. Отметим, что свойства коэффициентов уравнений (1.107) и (1.108) таковы, что, если существует некоторое решение C^{st}, m^{st} этих уравнений, не обязательно удовлетворяющее $C^{st} = (C^{st})^T = \tilde{C}^{st}$ и $m^{st} = \tilde{m}^{st}$, то $(C^{st})^T, \tilde{C}^{st}$ также являются решениями уравнения (1.107), а $\tilde{m}^{st}$ является решением уравнения (1.108). Таким образом, если (1.107) и (1.108) имеют решения, то по ним всегда можно построить решения, удовлетворяющие $C^{st} = (C^{st})^T = \tilde{C}^{st}$ и $m^{st} = \tilde{m}^{st}$.

1.8.4 Квадратичные интегралы движения

Получим условия, при которых квадратичные по операторам рождения-уничтожения наблюдаемые постоянны в процессе эволюции. В силу уравнений Гейзенберга это эквивалентно обнулению сопряжённого генератора на таких наблюдаемых.

Утверждение 27. $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} \right) = 0$, где $M = M^T$, тогда и только тогда, когда

$$MJ \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) + \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) JM = 0, \quad (1.109)$$

$$iMJf + \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) Jg = 0. \quad (1.110)$$

Доказательство. С учётом (1.62), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} \right) &= \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^* (\mathbf{a} \mathbf{a}^T) M \right) + g^T \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^* (\mathbf{a}) = \\ &= \text{Tr} \left(\frac{1}{2} J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} \mathbf{a}^T M + \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) JM + \frac{1}{2} J \Gamma^T JM + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{1}{2} Jf \mathbf{a}^T M - i \frac{1}{2} \mathbf{a} f^T JM \right) + g^T J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} + i g^T Jf = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left(MJ \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) + \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) JM \right) \mathbf{a} + \end{aligned}$$

$$+\mathfrak{a}^T \left(iM J f + \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J g \right).$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях $\mathfrak{a}$, приходим к (1.109) и (1.110). □

Уравнение (1.109) при $\det M \neq 0$ можно представить в виде

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) M^{-1} + M^{-1} \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J = 0,$$

где M^{-1} — симметричная. Таким образом, наличие невырожденных квадратичных интегралов движения приводит к вырожденности уравнения (1.107) и, соответственно, неоднозначности его решения.

1.8.5 Динамика энтропии

Несмотря на то, что в любой момент времени можно посчитать энтропию по формуле (1.46), можно вычислить скорость изменения энтропии с помощью следующего утверждения.

Утверждение 28. *Производная энтропии $\mathcal{S}$ может быть вычислена по формуле*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S} = \frac{1}{2} \ln |\det(e^{KJ} - I)| + \text{Tr } KJ \left(\frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \frac{J}{2} \coth \frac{KJ}{2} - \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J \right). \quad (1.111)$$

Доказательство. Дифференцируя энтропию $\mathcal{S} \equiv -\text{tr } \rho \ln \rho$, имеем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S} = -\frac{d}{dt} \text{tr } \rho \ln \rho = -\text{tr } \dot{\rho} \ln \rho - \text{tr } \dot{\rho} = -\text{tr } \mathcal{L}(\rho) \ln \rho = -\text{tr } \rho \mathcal{L}^*(\ln \rho).$$

С учётом квадратичной подстановки $\rho = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + s}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{S} &= -\text{Tr } \rho \mathcal{L}^*(\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a}) - s = -\text{Tr } K \text{Tr}(\rho \mathcal{L}^*(\mathfrak{a} \mathfrak{a}^T)) - c = \\ &= -\text{Tr } K \dot{D} - s = -\text{Tr } K \dot{C} - s, \end{aligned}$$

где C — матрица ковариаций (1.43).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{S} + s = & -\operatorname{Tr} \left(KJ \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) C + KC \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \right. \\ & \left. + KJ \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J \right) = -\operatorname{Tr} \left(KJ \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) C + KJ \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J \right). \end{aligned}$$

Отдельно вычислим

$$\begin{aligned} -i \operatorname{Tr} KJHC &= i \operatorname{Tr} KJH \frac{J}{2} \coth \frac{KJ}{2} = -i \operatorname{Tr} \left(\coth \frac{JK}{2} \right) \frac{J}{2} HJK = \\ &= -i \operatorname{Tr} JK \left(\coth \frac{JK}{2} \right) \frac{J}{2} H = -i \operatorname{Tr} \left(\coth \frac{JK}{2} \right) JK \frac{J}{2} H = \\ &= -i \operatorname{Tr} \frac{J}{2} \left(\coth \frac{KJ}{2} \right) KJH = -i \operatorname{Tr} KJH \frac{J}{2} \left(\coth \frac{KJ}{2} \right) = \\ &= i \operatorname{Tr} KJHC. \end{aligned}$$

Таким образом, $i \operatorname{Tr} KJHC = 0$. В результате,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S} + s = -\operatorname{Tr} KJ \left(\frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} C + \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J \right).$$

Вычисляя коэффициент s по формуле (1.27), приходим к (1.111). $\square$

1.8.6 Стохастические интегралы движения и коммутаторы генераторов

В этом пункте ограничимся случаем генератора с постоянными коэффициентами. В случае классической системы с квадратичным гамильтонианом она является вполне интегрируемой, поэтому естественно задаться вопросом о том, как это можно увидеть с точки зрения теоремы Лиувилля (см. [1, §49]). А именно, необходимо построить n независимых интегралов движения в инволюции. Оказывается, что в случае, когда алгебраические кратности собственных чисел равны геометрическим, то все такие интегралы можно выбрать в виде квадратичных форм (см. [135]). Аналогичные им квантовые квадратичные операторы будут коммутировать. Приведём аналогичные интегралы в случае необратимой динамики

Утверждение 29. Супероператор $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^T L J_2 \mathfrak{A}$ коммутирует с оператором

$\frac{1}{2}\mathfrak{A}^T \mathcal{F}(LJ_2)J_2^{-1}\mathfrak{A}$, где $\mathcal{F}$ — функция, аналитическая в некоторой области, включающей собственные значения матрицы LJ_2 .

Такие супероператоры можно называть стохастическими интегралами движения в отличие от интегралов (1.109)-(1.110), которые являются детерминированными. Конечно, нельзя считать все такие интегралы независимыми. Более того, если $\mathcal{F}$ — чётная функция, то в силу (1.81) они пропорциональны тождественному супероператору. В квантовом случае не так просто говорить о независимости интегралов, но по аналогии с классическим обратимым случаем можно считать $\mathfrak{A}^T(LJ_2)^{2k+1}(J_2)^{-1}\mathfrak{A}$, $k = 0, \dots, 2n-1$ полным набором стохастических интегралов движения в случае отсутствия кратных собственных чисел у LJ_2 . Супероператор

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_t^T \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}_t) = \mathfrak{A}^T \operatorname{sh}(LJ_2 t) J_2^{-1} \mathfrak{A}$$

можно назвать производящей функцией стохастических интегралов движения, так как его $2n$ первых нечётных производных являются полным набором стохастических интегралов движения.

Коммутатор двух квадратичных формальных генераторов положительной полугруппы снова является таким генератором, так как переводит эрмитовы операторы в эрмитовы и переводит произвольный следовый оператор в оператор с нулевым следом. Поэтому приведём явные формулы для такого коммутатора:

Лемма 16. (Коммутатор двух супероператоров)

$$[\mathcal{L}_{H_1, \Gamma_1, f_1}, \mathcal{L}_{H_2, \Gamma_2, f_2}] = \mathcal{L}_{H_{12}, \Gamma_{12}, f_{12}}, \quad (1.112)$$

где

$$H_{12} = i \left(-H_1 J H_2 + H_2 J H_1 + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_1^T}{2} J \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} - \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} J \frac{\Gamma_1 - \Gamma_1^T}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} = & -i (H_1 J \Gamma_2 - \Gamma_2 J H_1 - H_2 J \Gamma_1 + \Gamma_1 J H_2) + \\ & + \frac{1}{2} (\Gamma_1^T J \Gamma_2 - \Gamma_1 J \Gamma_2^T - \Gamma_2^T J \Gamma_1 + \Gamma_2 J \Gamma_1^T), \end{aligned}$$

$$f_{12} = \left(-iH_2 + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} \right) J f_1 - \left(-iH_1 + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_1^T}{2} \right) J f_2.$$

Доказательство. Доказательство можно провести прямым вычислением. Удобно представить $\mathcal{L}_{H_i, \Gamma_i, f_i} = \mathcal{L}_{H_i, 0, 0} + \mathcal{L}_{0, \Gamma_i, 0} = \mathcal{L}_{0, 0, f_i}$, $i = 1, 2$. Тогда можно вычислить почленно

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{H_1, 0, 0}, \mathcal{L}_{H_2, 0, 0}] &= \mathcal{L}_{H_{12}, 0, 0}, & H_{12} &= -i(H_1 J H_2 - H_2 J H_1), \\ [\mathcal{L}_{H_1, 0, 0}, \mathcal{L}_{0, \Gamma_2, 0}] &= \mathcal{L}_{0, \Gamma_{12}, 0}, & \Gamma_{12} &= -i(H_1 J \Gamma_2 - \Gamma_2 J H_1); \end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_{0, \Gamma_1, 0}, \mathcal{L}_{0, \Gamma_2, 0}] = \mathcal{L}_{H_{12}, \Gamma_{12}, 0},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \frac{1}{2} (\Gamma_1^T J \Gamma_2 - \Gamma_1 J \Gamma_2^T - \Gamma_2^T J \Gamma_1 + \Gamma_2 J \Gamma_1^T) = \Gamma_{12}^T, \\ H_{12} &= i \left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_1^T}{2} J \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} - \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} J \frac{\Gamma_1 - \Gamma_1^T}{2} \right); \end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_{0, 0, f_1}, \mathcal{L}_{H_2, \Gamma_2, 0}] = \mathcal{L}_{0, 0, f_{12}}, \quad f_{12} = \left(-iH_2 + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2^T}{2} \right) J f_1.$$

Таким образом, приходим к (1.112). □

1.9 Связь с квантовыми каналами

В данном разделе мы обсудим связь бозонных гауссовских каналов и эволюционных отображений с квадратичным ГКС-Л генератором.

Квантовый гауссовский бозонный канал (вполне положительное отображение, переводящее гауссовские состояния в гауссовские) задаётся тройкой G^T, α, l (см. [35], стр. 283), которая определяет преобразование средних и матриц ковариаций

$$m' = Gm + l, \quad C' = GCG^T + \alpha.$$

Утверждение 30. Гауссовский канал, задаваемый отображением $e^{\mathcal{L}_{H, \Gamma, f} t}$ (при $\Gamma E \geq 0$), характеризуется тройкой

$$\begin{aligned} G &= e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t}, \quad l = \frac{e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} - I}{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)} J i f, \\ \alpha &= \int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J (t-t')} dt'. \end{aligned}$$

Доказательство данного утверждения следует непосредственно из утверждения 16. Условия гауссовского канала (см. неравенство (11.98) и теорему 11.6.1 в [35, Стр. 284]) в наших обозначениях имеют вид:

$$\left(\alpha - \frac{J}{2} + G \frac{J}{2} G^T \right) E \geq 0. \quad (1.113)$$

Его несложно проверить непосредственно если учесть, что

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J \Gamma^T J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J (t-t')} E = \\ & = \int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J (\Gamma E)^+ \left(e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J \right)^+ \geq 0. \end{aligned}$$

Симметричная часть $\int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J \Gamma^T J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J (t-t')}$ равна α , а антисимметричная может быть получена из утверждения 9, так как условие сохранения антисимметричной части матрицы D_t в процессе эволюции можно записать как

$$-\frac{J}{2} = -G \frac{J}{2} G^T + \int_0^t e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (t-t')} J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J (t-t')}.$$

Таким образом, получи (1.113).

При $t = 1$ введём обозначения

$$\begin{aligned} G_{H,\Gamma} &= e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)}, \quad l_{H,\Gamma,f} = \frac{e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)} - I}{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)} J i f, \\ \alpha_{H,\Gamma} &= \int_0^1 e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t'} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J t'} dt'. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Естественно задаться вопросом, можно ли восстановить параметры генератора H, Γ, f по параметрам канала $G_{H,\Gamma}, \alpha_{H,\Gamma}, l_{H,\Gamma,f}$. Представимость параметров гауссовского канала в виде (1.114) изучалась в [92, Утверждение 4].

Утверждение 31. Пусть $\det G_{H,\Gamma} \neq 0$, тогда

$$H = \frac{i}{2} (J \ln G_{H,\Gamma} - (\ln G_{H,\Gamma}^T) J), \quad f = i J \frac{\ln G_{H,\Gamma}}{G_{H,\Gamma} - I} l_{H,\Gamma,f}. \quad (1.115)$$

Пусть, кроме того, собственные числа матрицы $G_{H,\Gamma}$ по модулю меньше едини-

цы, тогда

$$\Gamma = J \ln G_{H,\Gamma} \left(\frac{I}{2} - C_{+\infty} J \right) + \left(\frac{I}{2} - J C_{+\infty} \right) (\ln G_{H,\Gamma}^T) J, \quad (1.116)$$

где $C_{+\infty} = (I - G_{H,\Gamma} \cdot G_{H,\Gamma}^T)^{-1} \alpha_{H,\Gamma}$.

Доказательство. Выразим из первой формулы (1.114)

$$iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} = -J \ln G_{H,\Gamma}. \quad (1.117)$$

Деля на i и симметризуя, получим первую из формул (1.115). Антисимметризуя (1.117), получим

$$\frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} = \frac{1}{2} (J \ln G_{H,\Gamma} + (\ln G_{H,\Gamma}^T) J). \quad (1.118)$$

Вторую из (1.114) перепишем в виде

$$l_{H,\Gamma,f} = \frac{G_{H,\Gamma} - I}{\ln G_{H,\Gamma}} J i f.$$

Выражая f , получим вторую из формул (1.115).

В случае, когда все собственные числа матрицы $G_{H,\Gamma}$ по модулю меньше единицы $\alpha_{H,\Gamma}$, можно выразить с помощью (1.106) через решение $C_{+\infty}$ уравнения

$$\ln G_{H,\Gamma} C_{+\infty} + C_{+\infty} \ln G_{H,\Gamma}^T + J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J = 0 \quad (1.119)$$

по формуле

$$\alpha_{H,\Gamma} = C_{+\infty} - G_{H,\Gamma} C_{+\infty} G_{H,\Gamma}^T.$$

Эту формулу можно обратить

$$C_{+\infty} = (I - G_{H,\Gamma} \cdot G_{H,\Gamma}^T)^{-1} \alpha_{H,\Gamma},$$

где $(I - G_{H,\Gamma} \cdot G_{H,\Gamma}^T)^{-1}$ можно понимать в смысле соответствующего ряда Тейлора (так как собственные числа $G_{H,\Gamma} \cdot G_{H,\Gamma}^T$ по модулю также меньше единицы). Тогда, выражая из (1.119)

$$\frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} = -J \ln G_{H,\Gamma} C_{+\infty} J - J C_{+\infty} \ln G_{H,\Gamma}^T J,$$

с учётом (1.118) получим (1.116). □

1.10 Частные случаи

Отметим, что матрица Γ удовлетворяет неравенству $\Gamma E \geq 0$, такому же, как и матрица вторых центральных моментов. Это не случайно, так как при выводе уравнений ГКС-Л из микроскопических соображений эта матрица так или иначе связана с корреляционными функциями резервуара (см. [46, стр. 168], [9, Глава 3]). В нашей работе мы не рассматриваем вывод уравнения ГКС-Л, но для прояснения физического смысла наших решений и классификации типичных классов уравнения ГКС-Л с квадратичным генератором нам будет удобно смотреть на Γ как на матрицу вторых моментов резервуара. Соответственно, $\frac{\Gamma + \Gamma^T}{2}$ имеет смысл матрицы ковариаций резервуара, а $\Gamma - \Gamma^T$ — матрицы средних коммутаторов.

1.10.1 Динамика без диссипатора

В первую очередь рассмотрим случай без диссипации, то есть положим $\Gamma = 0$. Тогда решения для средних (1.96) и матрицы ковариаций (1.98) принимают вид

$$m_t = e^{iJHt}m_0 + \frac{e^{iJHt} - I}{JH}Jf, \quad C_t = e^{iJHt}C_0e^{-iHJt}. \quad (1.120)$$

Отметим, что первое из этих уравнений совпадет с результатом преобразования линейных членов в соответствии с леммой 5. Явными вычислениями можно проверить, что этот результат совпадает с результатами работ [42], [6].

1.10.2 Классический резервуар

Рассмотрим уравнение ГКС-Л типа классической диффузии (1.21), то есть случай $\Gamma = \Gamma^T$. Как было сказано ранее, на $\Gamma - \Gamma^T$ можно смотреть как на матрицу средних коммутаторов и равенство её нулю соответствует коммутирующим переменным резервуара, поэтому можно говорить в этом случае о классическом резервуаре. Тогда эволюция средних (1.96) принимает вид

$$m_t = e^{iJHt}m_0 + \frac{e^{iJHt} - I}{JH}Jf. \quad (1.121)$$

Отметим, что эта формула полностью совпадает с первой из формул (1.120). То есть классический резервуар не влияет на динамику средних. Таким образом, несмотря на то, что система эволюционирует неунитарно, динамика её средних совпадает с предсказаниями унитарной эволюции. В то же время формула (1.98) принимает вид:

$$C_t = e^{iJHt} C_0 e^{-iHJt} + \int_0^t e^{iJHt'} J \Gamma J e^{-iHJt'} dt'. \quad (1.122)$$

Эта формула уже отличается от второй из формул (1.120). Отметим, что если умножить это равенство на E слева, то мы получим, что интегральная добавка, пропорциональная Γ , неотрицательна. Таким образом, величина $C_t E$ для системы в классическом резервуаре всегда больше, чем эта величина в случае унитарной эволюции (при тех же начальных условиях и таком же гамильтониане), то есть $C_t E \geq e^{iJHt} C_0 e^{-iHJt} E$. Суммируя, можно сказать, что помещение системы в классический резервуар не приводит к изменению динамики средних, но приводит к росту дисперсий. Отметим, однако, что мы говорим о помещении системы в резервуар в несколько формальном смысле, подразумевая, что роль резервуара учитывается только в диссипаторе. Но резервуар также может приводить к Лэмбовским и Штарковским сдвигам в гамильтониане (см. [9, стр. 194]). С другой стороны, в ряде случаев (см. [9, стр. 197, 212]) такими вкладами пренебрегают.

Такая динамика может быть описана классической диффузией в фазовом пространстве. Под диффузией в фазовом пространстве мы будем понимать динамику распределения вероятности в соответствии с уравнением Фоккера-Планка вида

$$\dot{\rho}(\mathbf{z}) = \{\mathcal{H}(\mathbf{z}), \rho(\mathbf{z})\} + \sum_{ij} \{\mathcal{F}_i, \{\mathcal{F}_j, \rho(\mathbf{z})\}\}, \quad (1.123)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона. В наших обозначениях её удобно записать как

$$\{\mathcal{X}(\mathbf{z}), \mathcal{Y}(\mathbf{z})\} = i \left(\frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)^T J \frac{\partial \mathcal{Y}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}.$$

Функция Гамильтона в нашем случае имеет те же коэффициенты линейной и квадратичной формы, что и соответствующий гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T H \mathbf{z} + f^T \mathbf{z}, \quad \{\cdot, \mathcal{H}\} = i \left(\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{z}} \right)^T J H \mathbf{z} + i \left(\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{z}} \right)^T J f.$$

Классический диссипатор имеет вид

$$\{\mathbf{z}^T, \Gamma\{\mathbf{z}, \cdot\}\} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T J \Gamma J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}.$$

В результате уравнение Фоккера-Планка в нашем случае принимает вид

$$\dot{\rho}(\mathbf{z}) = i(H\mathbf{z} + f)^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho(\mathbf{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T J \Gamma J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho(\mathbf{z}).$$

Отметим, что тот факт, что динамика средних (1.121) не содержит затухания, остаётся верным и для уравнения Фоккера-Планка в фазовом пространстве (1.123). Стохастическая динамика с линейным трением обычно описывается либо в пространстве скоростей [23, §21], либо с помощью заведомо негамильтонового уравнения Ланжевена [19, Глава 3, §3]. Однако, при выводе уравнения Фоккера-Планка на основе теории возмущений по методу, изложенному в [21], получаются уравнения именно в фазовом пространстве. Таким образом, не исключено, что линейное трение имеет квантовую природу (в смысле квантовых эффектов в резервуаре). С другой стороны, возможно описание систем с линейным трением посредством неквадратичных или нестационарных гамильтонианов (см. [17, стр. 50]).

Рассмотрим также частный случай чисто диссипативной динамики $H = 0$, тогда для средних получим равномерное движение

$$m_t = m_0 + iJft.$$

Для ковариаций также получаем равномерное изменение

$$C_t = C_0 + J\Gamma Jt,$$

то есть формулу Эйнштейна (см. [19]). Таким образом, получаем неограниченный рост дисперсий (отсутствие стремления к равновесию).

Как уже отмечалось выше (см. пункт 1.6.2), случай $H = 0$, $f = 0$ и $\Gamma = \Gamma^T$ соответствует симметричному генератору.

1.10.3 Равномерный бозонный резервуар

Пусть $\frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} = \gamma J$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Так как теперь коммутатор резервуара пропорционален коммутатору бозонных операторов, причём коэффициент пропорциональности является общим, то такой резервуар естественно называть равномерным бозонным резервуаром. Конкретные примеры (см. [9, стр. 212]), полученные в пределе слабой связи, показывают, что $\gamma > 0$ в случае равновесного резервуара. Случай $\gamma < 0$ соответствует резервуару с инверсной заселённостью.

Формула (1.96) примет вид

$$m_t = e^{-\gamma t} e^{iJHt} m_0 + i \frac{e^{-\gamma t} e^{iJHt} - I}{iJH - \gamma I} Jf. \quad (1.124)$$

Таким образом, при $f = 0$ динамика средних отличается от динамики средних (1.120) в отсутствии диссипации лишь множителем $e^{-\gamma t}$. В случае равновесного резервуара ($\gamma > 0$) этот множитель приводит к экспоненциальному затуханию средних. В случае инверсно заселённого резервуара ($\gamma < 0$) мы, напротив, получаем неограниченный экспоненциальный рост средних.

Динамика матрицы ковариаций (1.98) принимает вид

$$C_t = e^{-2\gamma t} e^{iJHt} C_0 e^{-iJHt} + \int_0^t e^{-2\gamma t'} e^{iJHt'} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J e^{-iJHt'} dt'. \quad (1.125)$$

При $\gamma > 0$, в соответствии с утверждением 25, матрица ковариаций стремится к стационарному состоянию. При $\gamma < 0$ ковариации экспоненциально растут.

При $H = 0$ (1.124) принимает вид

$$m_t = m_0 + \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} Jif,$$

а (1.125) примет вид

$$C_t = e^{-2\gamma t} C_0 + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J.$$

Предельное распределение

$$m_{+\infty} = \frac{1}{2\gamma} Jih, \quad C_{+\infty} = \frac{1}{2\gamma} J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J.$$

Для малых времён получаем квантовую формулу Эйнштейна

$$C_t = C_0 + 2\gamma(C_{+\infty} - C_0)t + O(t^2).$$

Заметим, что каждый элемент матрицы C_t монотонно стремится к $C_{+\infty}$.

1.10.4 Одномерный осциллятор

Такого типа модель рассматривалась в [97]. Без гамильтоновой части общий одномодовый случай рассматривался в [80, Пункт 4.1.1]. Соответствующие эволюционные отображения являются одномодовыми бозонными гауссовскими каналами. Полное исследование таких каналов можно найти в [93], [35, §11.7]. Общий вид параметров генератора без линейных членов

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \delta & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \bar{\delta} \end{pmatrix}, \quad b, \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}, a, \delta \in \mathbb{C}.$$

Наложим условие ГКС-Л генератора $\Gamma E \geq 0$, которое в данном случае примет вид $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1\gamma_2 \geq |\delta|^2$. Тогда вычислим

$$J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J = \begin{pmatrix} -\bar{\delta} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & -\delta \end{pmatrix},$$

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - ib & -ia \\ i\bar{a} & -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + ib \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \pm \sqrt{|a|^2 - b^2}.$$

Таким образом, при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $b^2 - |a|^2 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2 \neq 0$ в соответствии с утвер-

ждением 26 существует стационарное решение уравнения (1.71). Его явный вид

$$(C^{st})_{12} = (C^{st})_{21} = \frac{1}{2} \frac{\left(b^2 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2\right) \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 2 \operatorname{Re} \left((b - i \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}) \delta \bar{a} \right)}{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \left(b^2 - |a|^2 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2\right)},$$

$$(C^{st})_{11} = \overline{(C^{st})_{22}} = \frac{1}{2} \frac{|a|^2 \operatorname{Re} \delta + \left(ib - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right) \left(\bar{\delta} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \bar{a}\right)}{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \left(b^2 - |a|^2 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2\right)}.$$

Удобно отдельно рассмотреть случаи вещественных и комплексных собственных чисел.

1) При $|b| > |a|$ (случай комплексных $\lambda_{\pm}$), обозначив $\Delta = \sqrt{b^2 - |a|^2}$, получим

$$G_t = e^{-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}t} \begin{pmatrix} \cos(\Delta t) - \frac{ib \sin(\Delta t)}{\Delta} & -\frac{i\bar{a} \sin(\Delta t)}{\Delta} \\ \frac{ia \sin(\Delta t)}{\Delta} & \cos(\Delta t) + \frac{ib \sin(\Delta t)}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем явный вид динамики средних $m_t = G_t m_0$. Можно выписать и явный вид динамики матрицы ковариаций подобно тому, как это сделано в [97], однако полученные выражения будут весьма громоздкими и сложными для анализа. Поэтому упростим вид матрицы H посредством канонического преобразования. Каноническими преобразованиями можно сделать $a = 0$ (см. [136], [1, стр. 306-307]), тогда G_t имеет диагональный вид

$$G_t = e^{-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}t} \begin{pmatrix} e^{-ibt} & 0 \\ 0 & e^{ibt} \end{pmatrix}.$$

Тогда получим при $\gamma_1 \neq \gamma_2$

$$C_t = e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} \begin{pmatrix} e^{-2ibt} \left((C_0)_{11} + \frac{\bar{\delta}}{\gamma_1 - \gamma_2 + 2ib} \right) & (C_0)_{12} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \\ (C_0)_{21} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} & e^{2ibt} \left((C_0)_{22} + \frac{\delta}{\gamma_1 - \gamma_2 - 2ib} \right) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\delta}}{\gamma_1 - \gamma_2 + 2ib} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} & \frac{\delta}{\gamma_1 - \gamma_2 - 2ib} \end{pmatrix}.$$

В частности, легко видеть, что при $\gamma_1 > \gamma_2$ в пределе $t \rightarrow +\infty$ матрица ковариаций

стремится к стационарному состоянию

$$C_{+\infty} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\delta}}{\gamma_1 - \gamma_2 + 2ib} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} & \frac{\delta}{\gamma_1 - \gamma_2 - 2ib} \end{pmatrix}.$$

При $\gamma_1 > \gamma_2$ и $\delta = 0$ получаем широко известную (см., например, [9, стр. 212], [18, стр. 122], [26, стр. 220], [46, стр. 100]) модель затухающего осциллятора.

При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ по формуле (1.98) получим при $b \neq 0$

$$C_t = \begin{pmatrix} e^{-2ibt} \left((C_0)_{11} - i\frac{\bar{\delta}}{b} \right) + i\frac{\bar{\delta}}{b} & (C_0)_{12} + \gamma t \\ (C_0)_{21} + \gamma t & e^{2ibt} \left((C_0)_{22} + i\frac{\delta}{b} \right) - i\frac{\delta}{b} \end{pmatrix}.$$

2) При $|a| > b$ (случай вещественных $\lambda_{\pm}$), обозначив $\Delta = \sqrt{|a|^2 - b^2}$, получим

$$G_t = e^{-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}t} \begin{pmatrix} \text{ch}(\Delta t) - \frac{ib \text{sh}(\Delta t)}{\Delta} & -\frac{i\bar{a} \text{sh}(\Delta t)}{\Delta} \\ \frac{ia \text{sh}(\Delta t)}{\Delta} & \text{ch}(\Delta t) + \frac{ib \text{sh}(\Delta t)}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Каноническим преобразованием можно сделать $b = 0$ (см. [136], [1, стр. 306-307]), тогда вид матрицы G_t упрощается

$$G_t = e^{-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}t} \begin{pmatrix} \text{ch}(|a|t) & -\frac{ia \text{sh}(|a|t)}{|a|} \\ \frac{ia \text{sh}(|a|t)}{|a|} & \text{ch}(|a|t) \end{pmatrix}.$$

При $\gamma_1 > \gamma_2$ в пределе $t \rightarrow +\infty$ матрица ковариаций стремится к стационарному состоянию

$$C_{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2})^2 - |a|^2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \begin{pmatrix} -i\bar{a} & \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} & ia \end{pmatrix}.$$

1.10.5 Антидиагональный случай

В случае без диссипации важную роль играют генераторы, сохраняющие число частиц. Матрицы H для таких генераторов имеют блочно-антидиагональный вид. Диссипативным аналогом такого генератора можно считать генератор $\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}$, у которого матрицы H и Γ имеют блочно-антидиагональный вид, а именно

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \bar{\Omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.126)$$

Условия на ГКС-Л генератор $\Gamma_1 \geq 0, \Gamma_2 \geq 0$. В случае классического резервуара, то есть при $\Gamma_1 = \Gamma_2$, такой генератор сохраняет число частиц $\hat{N}$ (определённое формулой (1.47)) и в случае необратимой динамики. Тогда

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) = \begin{pmatrix} -i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} & 0 \\ 0 & i\Omega + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

имеет диагональный вид и вычисление экспоненты от такой матрицы сводится к вычислению экспонент от каждого блока

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t} & 0 \\ 0 & e^{\left(i\Omega + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t} \end{pmatrix},$$

что позволяет выписать решение также в блочном виде

$$C_t = \begin{pmatrix} C_t^{11} & C_t^{12} \\ (C_t^{12})^T & C_t^{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} C_t^{11} &= e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t} C_0^{11} e^{\left(-i\Omega + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2}\right)t}, & C_t^{22} &= e^{\left(i\Omega + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t} C_0^{22} e^{\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2}\right)t}, \\ C_t^{12} &= e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t} C_0^{12} e^{\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2}\right)t} + \int_0^t e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2}\right)t'} \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1^T}{2} e^{\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2}\right)t'} dt'. \end{aligned}$$

Применим полученные формулы к цепочке осцилляторов с равномерной диссипацией

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{k=1}^n \left(\omega a_k^\dagger a_k + \lambda (a_{k+1}^\dagger a_k + a_k^\dagger a_{k+1}) \right) + \lambda (a_1^\dagger a_n + a_n^\dagger a_1), \\ \mathcal{D}(\rho) &= \gamma_0 (N + 1) \sum_k \left(a_k \rho a_k^\dagger - \frac{1}{2} a_k^\dagger a_k \rho - \frac{1}{2} \rho a_k^\dagger a_k \right) + \\ &+ \gamma_0 N \sum_k \left(a_k^\dagger \rho a_k - \frac{1}{2} a_k a_k^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a_k a_k^\dagger \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 -i\Omega + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} &= -i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2} = \\
 &= \begin{pmatrix} -i\omega - \frac{\gamma_0}{2} & -i\lambda & 0 & \cdots & -i\lambda \\ -i\lambda & -i\omega - \frac{\gamma_0}{2} & -i\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -i\lambda & -i\omega - \frac{\gamma_0}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -i\lambda \\ -i\lambda & 0 & 0 & -i\lambda & -i\omega - \frac{\gamma_0}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

То есть матрица имеет вид циркулянта (см., например, [132]). Таким образом, динамика средних аналогична цепочке осцилляторов без диссипации, но с мнимой частотой $\omega - i\gamma_0/2$. Динамика без диссипации может быть получена посредством дискретного преобразования Фурье (см., например, [34, стр. 62])

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^n b_p e^{\frac{2\pi i}{n} kp}.$$

Тогда

$$\hat{H} = \sum_{p=1}^n \left(\omega + 2\lambda \cos \frac{2\pi p}{n} \right) b_p^\dagger b_p.$$

В результате получаем

$$\left(e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} \right) t} \right)_{kk'} = \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}}{n} \sum_{p=1}^n e^{-i\left(\omega + 2\lambda \cos \frac{2\pi p}{n} \right) t} e^{\frac{2\pi i}{n} (k-k')p}.$$

Кроме того, с учётом

$$\frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} = -\frac{\gamma_0}{2} I_n, \quad \frac{\Gamma_2^T + \Gamma_1}{2} = \gamma_0 \left(N + \frac{1}{2} \right) I_n,$$

получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} \right) t'} \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1^T}{2} e^{\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^T}{2} \right) t'} dt' &= \int_0^t \gamma_0 \left(N + \frac{1}{2} \right) e^{-\gamma_0 t'} I_n dt' = \\
 &= \left(N + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-\gamma_0 t}) I_n.
 \end{aligned}$$

Пусть начальное состояние является когерентным $C_t = \frac{1}{2}E$, тогда

$$C_t^{11} = 0, \quad C_t^{22} = 0, \quad C_t^{12} = \left(\frac{1}{2}e^{-\gamma_0 t} + \left(N + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-\gamma_0 t}) \right) I_n.$$

1.10.6 Положительная динамика

Пусть $\Gamma = -\Gamma^T = \gamma J$. Матрица ΓE не является знакоопределённой, поэтому такой генератор не имеет вид ГКС-Л генератора. Тем не менее, легко видеть, что динамика является положительной (см. например, утверждение 21 при $\Gamma E = 0$). Тогда (1.96) принимает вид

$$m_t = e^{\gamma t} e^{iJHt} m_0 + i \frac{e^{\gamma t} e^{iJHt} - I}{iJH + \gamma I} Jf.$$

Таким образом, динамика средних в таком резервуаре полностью аналогична (1.124) и отличается только заменой γ на $-\gamma$.

Динамика ковариаций при этом сильно упрощается и становится пропорциональна унитарной динамике. А именно, (1.98) принимает вид

$$C_t = e^{2\gamma t} e^{iJHt} C_0 e^{-iHJt}.$$

При этом динамика определена на произвольных матрицах ковариаций только при $\gamma > 0$. (См. [110].) Это, в частности, интересно с точки зрения рассмотрения в [16, Раздел 2]. Отметим, что при $H = 0$ получим $Q = -\gamma E$ и $QE < 0$, где Q определено в (1.73). Таким образом, на (1.72) можно смотреть как на уравнение Фоккера-Планка с отрицательным коэффициентом диффузии. Такие уравнения рассматривались в квантовой оптике (см. [138], [127]).

1.11 Некоторые примеры из квантовой оптики

Как мы видели в пункте 1.10.4, явные аналитические решения могут иметь громоздкий вид уже в случае одного осциллятора в резервуаре. Поэтому, хотя аналитические решения могут быть выписаны всегда, когда корни характеристического многочлена матрицы $B \equiv J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right)$ могут выражены аналитически как функции своих коэффициентов, но полученные громоздкие выражения не дают физически важных результатов. Такие физически важные свойства, как су-

ществование стационарного состояния или, наоборот, условия неограниченного возрастания интенсивностей, зависят только от знаков вещественных частей собственных чисел матрицы B . Покажем это на примере моделей, рассмотренных в [32, Глава 3]. Наличие собственных значений матрицы B с неотрицательными вещественными корнями там интерпретировалось как условие эффективного энергообмена между модами накачки (считавшимися заданными и классическими) и генерируемыми модами (считавшимися квантовыми).

Специально отметим, что данный раздел ни в коем случае не стоит воспринимать как сколько-нибудь полное исследование упоминаемых в нём моделей. Его цель — иллюстрация работы некоторых развитых в диссертации методов.

1.11.1 Трёхмодовый случай

В [64] и в [32, Пункт 3.1.1] была рассмотрена динамика с гамильтонианом

$$\hat{H} = i \left(\beta_1 (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) + \beta_2 (a_2^\dagger a_3^\dagger - a_2 a_3) + \gamma (a_1 a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3) \right).$$

Введём температурный диссипатор

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho) = & \sum_{i=1}^3 \mu_i (N_i + 1) \left(a_i \rho a_i^\dagger - \frac{1}{2} a_i^\dagger a_i \rho - \frac{1}{2} \rho a_i^\dagger a_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \mu_i N_i \left(a_i^\dagger \rho a_i - \frac{1}{2} a_i a_i^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a_i a_i^\dagger \right), \quad \mu_i \geq 0, N_i \geq 0. \end{aligned}$$

Исследуем локализацию корней матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1}{2} & 0 & -\gamma & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2}{2} & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ \gamma & 0 & -\frac{\mu_3}{2} & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & -\frac{\mu_1}{2} & 0 & -\gamma \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & -\frac{\mu_2}{2} & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \gamma & 0 & -\frac{\mu_3}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

Характеристическое уравнение

$$\left(\lambda^3 + \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{2} \lambda^2 + \left(\gamma^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \frac{\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3}{4} \right) \lambda + \frac{\gamma^2 \mu_2 - \beta_2^2 \mu_1 - \beta_1^2 \mu_3}{2} + \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{8} \right)^2 = 0.$$

По теореме Виета $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{2} < 0$. Таким образом, по крайней мере один корень отрицателен.

Критерий Рауса-Гурвица (см. [11, стр. 462-463])

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{2} \left(\gamma^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \frac{\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3}{4} \right) &> \\ &> \frac{\gamma^2 \mu_2 - \beta_2^2 \mu_1 - \beta_1^2 \mu_3}{2} + \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{8} > 0. \end{aligned}$$

Если хотя бы одно из неравенств не выполнено и в последнем случае не выполнено равенство, то уравнение имеет корни с положительными вещественными частями, что приводит к эффективной передаче энергии.

Равномерная диссипация

В случае равномерной диссипации $\mu_j = \mu$, $j = 1, \dots, 3$ вычисления значительно упрощаются. Собственные числа матрицы (1.127) имеют простой вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \gamma^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{\mu}{2}.$$

Условие эффективной передачи энергии имеет вид

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 - \gamma^2 > \frac{\mu^2}{4}.$$

При этом матрица (1.127) имеет одно положительное собственное значение, оставшиеся два собственных значения отрицательны. Динамика средних определяется матрицей

$$G_t = e^{-\frac{\mu}{2}t} e^{iJHt}.$$

Таким образом, средние эволюционируют так же, как и в [32, Пункт 3.1.1], но с дополнительным затухающим фактором $e^{-\frac{\mu}{2}t}$.

Диссипация в одной моде

В случае диссипации только в одной из трёх мод, то есть при $\mu_2 = \mu_3 = 0$, характеристическое уравнение принимает вид

$$\left(\lambda^3 + \frac{\mu_1}{2} \lambda^2 + (\gamma^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) \lambda - \frac{\beta_2^2 \mu_1}{2} \right)^2 = 0.$$

При $\mu_1 > 0$ по теореме Виета уравнение

$$\lambda^3 + \frac{\mu_1}{2} \lambda^2 + (\gamma^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) \lambda - \frac{\beta_2^2 \mu_1}{2} = 0$$

имеет, по крайней мере, один положительный вещественный корень, так как $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{\beta_2^2 \mu_1}{2} > 0$. Таким образом, введение одномодовой диссипации приводит к эффективной передаче энергии. Так как $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{\mu_1}{2} < 0$, то два оставшихся корня должны иметь отрицательные вещественные части.

1.11.2 Четырёхмодовый случай

В [44] и в [32, Пункт 3.1.2] была рассмотрена динамика с гамильтонианом

$$\hat{H} = i \left(\beta (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) + \gamma_1 (a_3^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_3) + \gamma_2 (a_4^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_4) \right).$$

Снова введём диссипатор

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho) = & \sum_{i=1}^4 \mu_i (N_i + 1) \left(a_i \rho a_i^\dagger - \frac{1}{2} a_i^\dagger a_i \rho - \frac{1}{2} \rho a_i^\dagger a_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^4 \mu_i N_i \left(a_i^\dagger \rho a_i - \frac{1}{2} a_i a_i^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a_i a_i^\dagger \right), \quad \mu_i \geq 0, N_i \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$B \equiv J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1}{2} & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2}{2} & 0 & -\gamma_2 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & -\frac{\mu_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & -\frac{\mu_4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & -\frac{\mu_1}{2} & 0 & -\gamma_1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_2}{2} & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\frac{\mu_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & -\frac{\mu_4}{2} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы B имеет вид

$$(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4)^2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{2}, \\ a_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \beta^2 + \frac{\mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4}{4}, \\ a_3 &= \frac{\gamma_2^2(\mu_1 + \mu_3) + \gamma_1^2(\mu_2 + \mu_4) - \beta^2(\mu_3 + \mu_4)}{2} + \frac{\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4}{8}, \\ a_4 &= \gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{\gamma_2^2\mu_1\mu_2 + \gamma_1^2\mu_2\mu_4 - \beta^2\mu_3\mu_4}{4} + \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{16}. \end{aligned}$$

Критерий Рауса-Гурвица (см. [11, стр. 462-463]) отрицательности вещественных частей всех решений этого уравнения

$$a_1a_2 > a_3, \quad a_1a_2a_3 > a_4a_1^2 + a_3^2, \quad a_4 > 0.$$

Если выполнены все три неравенства, то вектор средних значений затухает (стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$), а дисперсия стремится к равновесному значению. Если хотя бы одно из неравенств нарушено, то это приводит к эффективной передаче энергии.

Равномерная диссипация

Пусть $\mu_i = \mu, i = 1, \dots, 4$, тогда собственные числа имеют простой явный вид

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\mu + \sqrt{\beta^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \pm \sqrt{\beta^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\mu - \sqrt{\beta^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \mp \sqrt{\beta^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2} \right).\end{aligned}$$

Динамика средних отличается от динамики, определяемой формулой (3.10) из [32], только общим фактором $e^{-\frac{\mu}{2}t}$.

Глава 2

Фермионы

В данной главе рассматривается необратимая квантовая эволюция с генератором, квадратичным по фермионным операторам рождения и уничтожения. В отличие от главы 1, члены, линейные по этим операторам, не включаются в генератор в силу отличий канонических антикоммутационных соотношений от коммутационных. По аналогичным причинам рассматриваются только чётные гауссовские решения (см. определение 14). Основным результатом является теорема 6 и уравнение (38) для матрицы антиковариаций. В разделе 2.7 обсуждаются подходы к решению этого уравнения. Выражения для гауссовских решений в терминах нормальных символов даёт теорема 5. Однако, существенным отличием фермионного случая от бозонного является то, что эти символы необходимо рассматривать как функции антикоммутирующих переменных. В пункте 2.8.1 даются условия на параметры генератора, приводящие к положительной (но не обязательно вполне положительной) динамике гауссовских состояний. При этом интересные отличия от бозонного случая возникают в описании множеств из утверждения 46 (в сравнении с утверждением 20 для бозонного случая). В разделе 2.9, по аналогии с бозонным случаем, даётся связь параметров, задающих фермионные гауссовские квантовые каналы, и параметров соответствующих ГКС-Л генераторов.

2.1 Основные обозначения

В главе, посвящённой фермионам, мы иногда будем использовать для аналогичных объектов те же обозначения, что и в главе, посвящённой бозонам. Однако, это не может вызвать путаницы, так как данная глава может рассматриваться как

полностью автономная.

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2^n}$. В таком гильбертовом пространстве можно ввести n пар операторов рождения и уничтожения (см., например, [29, стр. 407] или [70, стр. 312]) по формулам

$$\begin{aligned} c_i &= (\otimes_{j=1}^{i-1} \sigma_3) \otimes \sigma^- \otimes (\otimes_{j=i+1}^n I_2), \quad i = 1, \dots, n, \\ c_i^\dagger &= (\otimes_{j=1}^{i-1} \sigma_3) \otimes \sigma^+ \otimes (\otimes_{j=i+1}^n I_2), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\sigma_3, \sigma^-, \sigma^+$ — матрицы Паули, а I_2 — единичная матрица:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Фермионные операторы рождения и уничтожения (2.1) удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям (КАС)

$$\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}, \quad \{c_i, c_j\} = 0.$$

Введём $2n$ -вектора $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n, c_1^\dagger, \dots, c_n^\dagger)^T$ операторов рождения-уничтожения. Тогда обозначим

$$f^T \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^T f \equiv \sum_{i=1}^n (f_i c_i + f_{i+n-1} c_i^\dagger), \quad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathbf{c}^T K \mathbf{c} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} c_i c_j + K_{i+n,j} c_i^\dagger c_j + K_{i,j+n} c_i c_j^\dagger + K_{i+n,j+n} c_i^\dagger c_j^\dagger), \quad \forall K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

Тогда КАС примут вид

$$\{f^T \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}\} = f^T E g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n}, \quad (2.2)$$

где матрица E определена в (1.3). По аналогии с (1.5), мы также будем писать

$$\{\mathbf{c}, \mathbf{c}^T\} = E, \quad (2.3)$$

где антикоммутатор векторов из операторов понимается в поэлементном смысле, то есть $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}^T\}_{ij} \equiv \{c_i, c_j\}$.

Для вычислений нам также понадобится $\sim$ -сопряжение. Мы сохраним определение 1. Однако теперь действие эрмитового сопряжения может быть представлено формулами $(g^T \mathbf{c})^\dagger = \tilde{g}^T \mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}^T K \mathbf{c})^\dagger = -\mathbf{c}^T \tilde{K} \mathbf{c}$, где $K = -K^T$.

По аналогии с бозонным случаем будем писать tr для следа матриц в пространстве $\otimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2$ и Tr для следа матриц в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$.

2.2 Вычисления с квадратичными и линейными формами

В данном разделе выведем ряд общих формул для вычислений с квадратичными и линейными операторами рождения-уничтожения. В первую очередь, перепишем (2.3) как коммутационные соотношения:

$$[\mathbf{c}, \mathbf{c}^T] = 2 \mathbf{c} \mathbf{c}^T - E. \quad (2.4)$$

Матрица квадратичной формы на фермионных операторах может быть антисимметризована по формуле

$$\mathbf{c}^T A \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \frac{A - A^T}{2} \mathbf{c} + \frac{1}{2} \text{Tr} A E, \quad (2.5)$$

что позволяет пользоваться только антисимметричными формами в вычислениях.

Выведем общие коммутационные соотношения для линейных и квадратичных форм

Лемма 17. Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T A \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \frac{1}{2} \mathbf{c}^T B \mathbf{c} + g^T \mathbf{c} \right] &= \frac{1}{2} \mathbf{c}^T (A E B - B E A) \mathbf{c} + \mathbf{c}^T (A E g - B E f) + \\ &+ \mathbf{c}^T (f g^T - g f^T) \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Доказательство. Сначала получим коммутационные соотношения для линейной

и квадратичной форм, являющихся произведениями двух линейных

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}^T f g^T \mathbf{c}, h^T \mathbf{c}] &= [f^T \mathbf{c}, h^T \mathbf{c}] g^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T f [g^T \mathbf{c}, h^T \mathbf{c}] = \\
&= (2f^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h - f^T E h) g^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T f (2g^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h - g^T E h) = \\
&= 2f^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h g^T \mathbf{c} - f^T E h g^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T f g^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h - \mathbf{c}^T f g^T E h = \\
&= 2\mathbf{c}^T f (g^T E h - g^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h) + 2\mathbf{c}^T f g^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T h - \mathbf{c}^T (f g^T + g f^T) E h = \\
&= 2\mathbf{c}^T f g^T E h - \mathbf{c}^T (f g^T + g f^T) E h = \mathbf{c}^T (f g^T - g f^T) E h.
\end{aligned}$$

Так как произвольная матрица может быть представлена как $A = \sum_i f_i g_i^T$, то по линейности получаем

$$[\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, h^T \mathbf{c}] = \mathbf{c}^T (A - A^T) E h = h^T E (A^T - A) \mathbf{c}.$$

В частности, если положить $A = -A^T$, то получим

$$[\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, h^T \mathbf{c}] = -2h^T E A \mathbf{c}. \quad (2.7)$$

Аналогично, чтобы получить коммутатор двух квадратичных форм, сначала вычислим (сразу положим $A = -A^T$)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, \mathbf{c}^T f g^T \mathbf{c}] &= [\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, \mathbf{c}^T f] g^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T f [\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}] = \\
&= 2\mathbf{c}^T A E f g^T \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^T f g^T E A \mathbf{c} = 2\mathbf{c}^T (A E f g^T - f g^T E A) \mathbf{c},
\end{aligned}$$

а затем, снова полагая $B = \sum_i f_i g_i^T$, получим

$$[\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, \mathbf{c}^T B \mathbf{c}] = 2\mathbf{c}^T (A E B - B E A) \mathbf{c}. \quad (2.8)$$

Раскладывая

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T A \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \frac{1}{2} \mathbf{c}^T B \mathbf{c} + g^T \mathbf{c} \right] &= \frac{1}{4} [\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, \mathbf{c}^T B \mathbf{c}] + \frac{1}{2} [\mathbf{c}^T A \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}] - \\
&\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{c}^T B \mathbf{c}, f^T \mathbf{c}] + [f^T \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}]
\end{aligned}$$

с учётом (2.7), (2.8), (1.4) получим (2.6). □

Нам также понадобится обкладывать квадратичные и линейные формы экспонентами от квадратичных форм

Лемма 18. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадратичных форм) Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \mathbf{c}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{c}^T B \mathbf{c} + g^T \mathbf{c} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \mathbf{c}} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T e^{AE} B e^{-EA} \mathbf{c} + g^T e^{-EA} \mathbf{c}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Обозначим $\mathbf{c}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \tau} \mathbf{c} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \tau}$. Такая функция удовлетворяет уравнению Гейзенберга

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{c}(\tau) = \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T(\tau) A \mathbf{c}(\tau), \mathbf{c}(\tau) \right].$$

Вычисляя коммутатор по формуле (2.7), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{c}(\tau) = -E A \mathbf{c}(\tau).$$

Его решение имеет вид $\mathbf{c}(\tau) = e^{-EA\tau} \mathbf{c}$. Подставляя в

$$e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \mathbf{c}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{c}^T B \mathbf{c} + g^T \mathbf{c} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T A \mathbf{c}} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T(1) B \mathbf{c}(1) + g^T \mathbf{c}(1),$$

получим (2.9). □

Лемма 19. (Производная экспоненты) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}[0, +\infty)$, тогда

$$\left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c}} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c}} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E \mathbf{c}, \quad (2.10)$$

причём матрица $\left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E$ антисимметрична.

Доказательство. По формуле Вилкокса-Фейнмана (см. [134], [43])

$$\left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c}} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c}} = \int_0^1 e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \tau} \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \dot{K}_t \mathbf{c} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \tau} d\tau.$$

В соответствии с леммой 18

$$e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \tau} \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \dot{K}_t \mathbf{c} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \tau} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T e^{K_t E \tau} \dot{K}_t E e^{-K_t E \tau} E \mathbf{c}.$$

Тогда снова пользуясь формулой Вилкокса-Фейнмана,

$$\int_0^1 e^{K_t E \tau} \dot{K}_t E e^{-K_t E \tau} E d\tau = \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E.$$

Таким образом, приходим к формуле (2.10). Кроме того,

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E \right)^T &= E e^{EK_t} \left(\frac{d}{dt} e^{-EK_t} \right) = \\ &= E \left(\frac{d}{dt} I \right) - E \left(\frac{d}{dt} e^{EK_t} \right) e^{-EK_t} = - \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E$ антисимметрична. $\square$

2.3 Квадратичные супероператоры

В данном разделе мы, по аналогии с разделом 1.3, введём квадратичные супероператоры, которые далее будем использовать как генераторы.

Определение 11. Под квадратичным фермионным супероператором мы будем понимать отображение $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n})$ вида

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathfrak{c}^T \Gamma \rho \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T \Gamma_L \mathfrak{c} \rho + \rho \mathfrak{c}^T \Gamma_R \mathfrak{c} + \rho g_R^T \mathfrak{c} + g_L^T \mathfrak{c} \rho + \lambda \rho, \quad \forall \rho \in \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n}), \quad (2.11)$$

где $\Gamma, \Gamma_L = -\Gamma_L^T, \Gamma_R = -\Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2^n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Для супероператоров можно ввести две ”естественные” инволюции:

Определение 12. Пусть $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n})$ — супероператор общего вида (2.11). Тогда определим супероператор $\mathcal{L}^* : \mathbb{C}^{2^n \times 2^n} \rightarrow \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ по формуле

$$\text{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \text{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)).$$

Определение 13. Пусть $\mathcal{L} : \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C}^{2^n})$ — супероператор общего вида (2.11). Тогда определим супероператор $\mathcal{L}^+ : \mathbb{C}^{2^n \times 2^n} \rightarrow \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ по формуле

$$\mathcal{L}^+(\rho) = (\mathcal{L}(\rho^\dagger))^\dagger.$$

Лемма 20. Пусть $\mathcal{L}$ — квадратичный супероператор, определённый формулой (2.11), тогда

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{c} \rho - \rho \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{c} + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{c} + \tilde{g}_R^T \mathbf{c} \rho + \bar{\lambda} \rho, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_L \hat{X} - \hat{X} \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{c} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{c} + \tilde{g}_L^T \mathbf{c} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}. \quad (2.13)$$

Доказательство. 1) Сначала вычислим

$$(\mathbf{c}^T f \rho^\dagger g^T \mathbf{c})^\dagger = (g^T \mathbf{c})^\dagger \rho (\mathbf{c}^T f)^\dagger = \mathbf{c}^T \tilde{g} \rho \tilde{f}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T (\widetilde{f g^T})^T \rho \mathbf{c}.$$

Так как произвольная матрица $\Gamma \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ может быть представлена в виде $\Gamma = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, то по линейности получаем $(\mathbf{c}^T \Gamma \rho^\dagger \mathbf{c})^\dagger = \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{c}$. Для остальных членов получаем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{c}^T \Gamma_L \mathbf{c} \rho^\dagger + \rho^\dagger \mathbf{c}^T \Gamma_R \mathbf{c} + \rho^\dagger g_R^T \mathbf{c} + g_L^T \mathbf{c} \rho^\dagger + \lambda \rho^\dagger)^\dagger = \\ & = \rho (\mathbf{c}^T \Gamma_L \mathbf{c})^\dagger + (\mathbf{c}^T \Gamma_R \mathbf{c})^\dagger \rho + (g_R^T \mathbf{c})^\dagger \rho + \rho (g_L^T \mathbf{c})^\dagger + \bar{\lambda} \rho = \\ & = -\rho \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{c} \rho + \tilde{g}_R^T \mathbf{c} \rho + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{c} + \bar{\lambda} \rho. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (2.12).

2) Аналогично, сначала вычислим

$$\text{tr}(\hat{X}^\dagger \mathbf{c}^T f \rho g^T \mathbf{c}) = \text{tr}(\mathbf{c}^T g \hat{X}^\dagger f^T \mathbf{c} \rho) = \text{tr}((\mathbf{c}^T (\widetilde{f g^T}) \hat{X} \mathbf{c})^\dagger \rho)$$

Снова разлагая $\Gamma = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, приходим к

$$\text{tr}(\hat{X}^\dagger \mathbf{c}^T \Gamma \rho \mathbf{c}) = \text{tr}(\mathbf{c}^T g \hat{X}^\dagger f^T \mathbf{c} \rho) = \text{tr}((\mathbf{c}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{c})^\dagger \rho).$$

Остальные члены

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(\hat{X}^\dagger (\mathbf{c}^T \Gamma_L \mathbf{c} \rho + \rho \mathbf{c}^T \Gamma_R \mathbf{c} + \rho g_R^T \mathbf{c} + g_L^T \mathbf{c} \rho + \lambda \rho) \right) = \\ & = \text{tr} \left((\hat{X}^\dagger \mathbf{c}^T \Gamma_L \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \Gamma_R \mathbf{c} \hat{X}^\dagger + g_R^T \mathbf{c} \hat{X}^\dagger + \hat{X}^\dagger g_L^T \mathbf{c} + \lambda \hat{X}^\dagger) \rho \right) = \\ & = \text{tr} \left((-\mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{c} \hat{X} - \hat{X} \mathbf{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{c} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{c} + \tilde{g}_L^T \mathbf{c} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X})^\dagger \rho \right). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (2.13). □

2.3.1 Формальный генератор положительной полугруппы

Сохраним определение 5 для формального генератора положительной полугруппы.

Лемма 21. $\mathcal{L}(\rho)$ — формальный генератор квантовой положительной полугруппы тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}, \quad (2.14)$$

где

$$H = -H^T = -\tilde{H}, \quad \Gamma^T = \tilde{\Gamma}.$$

Доказательство. Доказательство базируется на прямых вычислениях по лемме 20.

1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы (2.12), получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = -\Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

2) Из $\mathcal{L}^*(I) = 0$, с учётом формулы (2.13), получим

$$\frac{\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}^T}{2} + \tilde{\Gamma}_L + \tilde{\Gamma}_R = 0, \quad \tilde{g}_L + \tilde{g}_R = 0, \quad \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} E = 0.$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = i g_L$. Для квадратичных членов получим $\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R = \frac{1}{2}(\Gamma - \Gamma^T) = \frac{1}{2}(\Gamma^T - \Gamma)$. Кроме того, определим $H = i(\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R)$. Тогда $\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T - \Gamma)$, $\Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T - \Gamma)$. Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} E$, то $\lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma E = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} E$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически. Таким образом, получаем

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{c} - \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma^T E \rho.$$

С учётом формулы (2.5) получим (2.14). □

Мы будем рассматривать только генераторы без линейных членов, то есть с $f = 0$, такие генераторы будем обозначать $\mathcal{L}_{H,\Gamma}$.

2.3.2 Генератор ГКС-Л

Лемма 22. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T H \mathbf{c} + h^T \mathbf{c}$ ($H = H^T, H = -\tilde{H}$ и $h = \tilde{h}$) и $\hat{C}^{(i)} = \gamma_i^T \mathbf{c}$ генератор (2.11) принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}, \quad (2.15)$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T, \quad l = \sum_i \bar{c}_i \gamma_i, \quad f = h + i \frac{l - \tilde{l}}{2}. \quad (2.16)$$

Более того, возможность написать Γ и f в виде (2.16) эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geq 0, \quad f = \tilde{f}.$$

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 9.

Замечание 19. Замечания 2-4 к лемме 9 остаются в силе и в фермионном случае. А именно, можно сразу предполагать, что $\hat{C}^{(i)}$ не содержат скалярных членов. Произвольный формальный генератор положительной полугруппы можно представить в виде разности двух ГКС-Л генераторов. И вид (2.15) является однозначным, несмотря на неоднозначность Линдбладовского представления ГКС-Л генератора. Кроме того, мы сохраним и для случая фермионов определение генератора типа классической диффузии по формуле (1.21). В терминах параметров квадратичного генератора это, как и в случае бозонов, означает $\Gamma = \Gamma^T$.

2.3.3 Генераторы, зависящие от времени

Мы также будем рассматривать генераторы (2.14) с коэффициентами, зависящими от времени

$$\mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H_t \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma_t \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma_t^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma_t^T \mathbf{c},$$

где

$$H_t = -H_t^T = -\tilde{H}_t, \quad \Gamma_t^T = \tilde{\Gamma}_t,$$

в частности, генераторы типа ГКС-Л

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_t, \rho] + \sum_i \left(\hat{C}_t^{(i)} \rho (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger \hat{C}_t^{(i)} \rho - \frac{1}{2} \rho (\hat{C}_t^{(i)})^\dagger \hat{C}_t^{(i)} \right), \quad (2.17)$$

где $\hat{H}_t$ содержит квадратичные члены по операторам рождения-уничтожения, $\hat{C}_t^{(i)}$ содержит линейные члены. Аналогично лемме 22 они имеют вид (2.17) с дополнительным условием $\Gamma_t E \geq 0$. Функции H_t и Γ_t здесь и далее будем считать непрерывными функциями времени.

Мы будем решать эволюционное уравнение (задачу Коши) вида

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t), \quad \rho_t|_{t=t_0} = \rho_{t_0}. \quad (2.18)$$

Двухвременные операторы эволюции $\Phi_{t, t_0} : \rho_t = \Phi_{t, t_0} \rho_{t_0}$ удовлетворяют условию пропагатора

$$\Phi_{t_3, t_1} = \Phi_{t_3, t_2} \Phi_{t_2, t_1} \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+.$$

2.4 Канонические преобразования и их обобщения

Под каноническими преобразованиями в случае фермионов можно понимать преобразования, сохраняющие КАС (2.2) (или коммутационные соотношения (2.4)) и взаимную сопряжённость операторов рождения и уничтожения. Также можно рассматривать комплексные канонические преобразования.

Мы будем рассматривать только линейные канонические преобразования вида $\mathbf{b} = O\mathbf{c}$, где матрица O удовлетворяет условиям

$$O^T E O = E \quad (2.19)$$

и $\det O = 1$. В вещественном случае дополнительно накладываются условия $\tilde{O} = O$. Введём обозначение $O_\sim(2n, \mathbb{C}) = \{O : O^T E O = E, \det O = 1\}$ и $O_\sim(2n, \mathbb{R}) = \{O : O^T E O = E, \tilde{O} = O, \det O = 1\}$. Такие преобразования могут быть реализованы с помощью оператора $\hat{L}$, являющегося экспонентой от квадратичного, то есть $\hat{L} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c}}$,

$$\mathcal{U}_O^{-1}(\mathbf{c}) = \hat{L} \mathbf{b} \hat{L}^{-1} = O\mathbf{c}.$$

Преобразования коэффициентов генератора при каноническом преобразова-

нии могут быть получены по следующей лемме

Лемма 23. *Под действием линейного канонического преобразования генератор преобразуется по формуле $\mathcal{U}_O^{-1} \mathcal{L}_{H,\Gamma} \mathcal{U}_O = \mathcal{L}_{H',\Gamma'}$, где*

$$H' = O^T H O, \quad \Gamma' = O^T \Gamma O. \quad (2.20)$$

Доказательство. Вычислим $\mathcal{U}_O^{-1} \mathcal{L}_{H,\Gamma} \mathcal{U}_O(\rho) = \hat{L} \mathcal{L}_{H,\Gamma}(\hat{L}^{-1} \rho \hat{L}) \hat{L}^{-1}$. Используя (2.15), получим

$$\begin{aligned} \hat{L} \mathcal{L}_{H,\Gamma}(\hat{L}^{-1} \rho \hat{L}) \hat{L}^{-1} &= -i \left[\frac{1}{2} \hat{L} \mathfrak{c}^T \hat{L}^{-1} H \hat{L} \mathfrak{c} \hat{L}^{-1}, \rho \right] + \hat{L} \mathfrak{c}^T \hat{L}^{-1} \rho \Gamma \hat{L} \mathfrak{c} \hat{L}^{-1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{L} \mathfrak{c}^T \hat{L}^{-1} \Gamma^T \hat{L} \mathfrak{c} \hat{L}^{-1} \rho - \frac{1}{2} \rho \hat{L} \mathfrak{c}^T \hat{L}^{-1} \Gamma^T \hat{L} \mathfrak{c} \hat{L}^{-1} = \\ &= -i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T O^T H O \mathfrak{c}, \rho \right] + \mathfrak{c}^T O^T \rho \Gamma O \mathfrak{c} - \frac{1}{2} \mathfrak{c}^T O^T \Gamma^T O \mathfrak{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathfrak{c}^T O^T \Gamma^T O \mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (2.20). $\square$

В частности, в случае ГКС-Л генератора каноническое преобразование сохраняет условие $\Gamma E \geq 0$.

2.4.1 Канонические преобразования, зависящие от времени

Как и в разделе 1.4.1, можно рассматривать канонические преобразования, зависящие от времени

$$\hat{L}_t \mathfrak{c} \hat{L}_t^{-1} = O_t \mathfrak{c}.$$

Лемма 24. *Пусть $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t}(\rho_t)$, тогда канонически преобразованная матрица плотности ρ'_t , то есть такая, что $\rho_t = \mathcal{U}_{S_t}(\rho'_t)$, удовлетворяет уравнению $\dot{\rho}'_t = \mathcal{L}_{H'_t, \Gamma'_t}(\rho'_t)$, где*

$$H'_t = O_t^T H_t O_t - E O_t^{-1} \dot{O}_t, \quad \Gamma'_t = O_t^T \Gamma_t O_t. \quad (2.21)$$

Доказательство. Подставляя $\rho_t = \mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t)$ в $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t}(\rho_t)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t) &= \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t}(\mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t)), \\ \mathcal{U}_{O_t}^{-1} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t) &= \mathcal{U}_{O_t}^{-1} \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t} \mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t). \end{aligned}$$

Как и при доказательстве леммы 11, левая часть данного равенства принимает вид

$$\mathcal{U}_{O_t}^{-1} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_{O_t}(\rho'_t) = \hat{L}_t \left(\frac{d}{dt} (\hat{L}_t^{-1} \rho'_t \hat{L}_t) \right) \hat{L}_t^{-1} = \dot{\rho}'_t + \left[\rho'_t, \left(\frac{d}{dt} \hat{L}_t \right) \hat{L}_t^{-1} \right].$$

Правая часть равенства может быть вычислена с помощью леммы 23. $\square$

В частности, можно избавиться от гамильтоновой части генератора с помощью преобразования O_t , определяемого как решение уравнения $\dot{O}_t = E H_t O_t$ с начальным условием $O_0 = I$. Тогда по первой формуле (2.21) получим $H'_t = 0$.

2.5 Гауссовские состояния

2.5.1 Матрицы плотности, заданные как экспоненты от квадратичных форм

В первую очередь, введём определение

Определение 14. Состояние ρ называется **чётным гауссовским состоянием**, если его характеристическая функция $\chi_W(\theta) \equiv \text{tr}(\rho e^{\theta^T E c})$ представима в виде экспоненты от квадратичной формы по θ .

Явную формулу для $\chi_W(\theta)$ мы приведём ниже в пункте 2.5.5.

Тот факт, что рассматриваются именно чётные гауссовские состояния, является распространённым в случае фермионов. Во многом это связано с правилами суперотбора (см. [87], [57, Раздел V-D]).

Вновь мы интересуемся гауссовскими состояниями, заданными как экспоненты от квадратичных операторов (см. [57])

$$\rho = e^{\frac{1}{2} c^T K c + s}. \quad (2.22)$$

Отсутствие линейных членов в экспоненте соответствует чётным состояниям.

Лемма 25. Матрица $\rho = e^{\frac{1}{2} c^T K c + s}$, $K = -K^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, $s \in \mathbb{C}$ является эрмитовой и положительно определённой тогда и только тогда, когда

$$K = -\tilde{K}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Доказательство. Эрмитовость матрицы $\rho = \rho^\dagger$ эквивалентна эрмитовости оператора в показателе экспоненты

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c} + s = \left(\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c} + s \right)^\dagger = -\frac{1}{2}\mathbf{c}^T \tilde{K} \mathbf{c} + \bar{s}.$$

Приравнивая коэффициенты квадратичных форм и скалярные члены соответственно, получаем (2.23). Положительность следует из их экспоненциального вида и не накладывает дополнительных условий на коэффициенты. $\square$

2.5.2 Канонические формы и нормировка

Сформулируем в наших обозначениях следующие утверждения (см. [13, стр. 154], [91, стр. 15])

Утверждение 32. Матрица $K = -K^T = -\tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ может быть приведена к стандартному двудиагональному виду

$$K = O \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} O^T \quad (2.24)$$

посредством преобразования $O \in SO_\sim(2n, \mathbb{R})$.

Лемма 26. Пусть $K = -K^T = -\tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда

$$e^{-s} = \text{tr} e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c}} = \sqrt{\det(e^{KE} + I)}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Так как преобразование O , удовлетворяющее (2.19), сохраняет КАС (2.2), то оно является каноническим и потому сохраняет след. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c}} &= \text{tr} \exp \left(\frac{1}{2}\mathbf{c}^T \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c} \right) = \prod_{i=1}^n \text{tr}_i e^{\frac{1}{2}\lambda_i (c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger)} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(2 \text{ch} \frac{\lambda_i}{2} \right) = \det \left(2 \text{ch} \frac{\Lambda}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.24) следует, что матрица KE может быть диагонализирована преобразова-

нием (2.19)

$$KE = O \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} O^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \det(e^{KE} + I) &= \det O \det \begin{pmatrix} e^{-\Lambda} + 1 & 0 \\ 0 & e^{\Lambda} + 1 \end{pmatrix} (\det O)^{-1} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 \operatorname{ch} \frac{\Lambda}{2} & 0 \\ 0 & 2 \operatorname{ch} \frac{\Lambda}{2} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Lambda}{2}} \end{pmatrix} = \left(\det \left(2 \operatorname{ch} \frac{\Lambda}{2} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

С учётом (2.26), приходим к (2.25). □

Замечание 20. Отметим, что так как мы получили $\det(e^{KE} + I) = \left(\det \left(2 \operatorname{ch} \frac{\Lambda}{2} \right) \right)^2 > 0$, то неоднозначности в выборе ветви корня не возникает.

2.5.3 Нормальные символы

Обозначим $\rho(\boldsymbol{\theta})$ нормальный символ оператора ρ , где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n)^T$, тогда (см. [6]):

$$(\varsigma\rho)(\boldsymbol{\theta}) = \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \rho(\boldsymbol{\theta}), \quad (\rho\varsigma)(\boldsymbol{\theta}) = \rho(\boldsymbol{\theta}) \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E + J}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right), \quad (2.27)$$

где стрелка подчёркивает, что оператор дифференцирования действует справа.

Теорема 5. Пусть $K = -K^T = -\tilde{K} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, а s определяется из условия нормировки $\operatorname{Tr} \rho = 1$, тогда нормально-упорядоченная форма матрицы плотности

$$e^{\frac{1}{2}\varsigma^T K \varsigma + s} =: e^{\frac{1}{2}\varsigma^T R \varsigma + r} ;$$

имеет следующие коэффициенты

$$R = 2 \left(J + E \frac{e^{KE} + I}{e^{KE} - I} \right)^{-1}, \quad e^r = \frac{1}{\sqrt{\det R}}. \quad (2.28)$$

Доказательство. Для $\rho = e^{\frac{1}{2}\varsigma^T K \varsigma + s}$ формула (2.9) без квадратичных членов при-

нимает вид

$$\rho \mathfrak{c} = e^{-EK} \mathfrak{c} \rho.$$

Переходя к нормальным символам с учётом (2.27), получим

$$\rho(\boldsymbol{\theta}) \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E+J}{2} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}} \right) = e^{-EK} \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E-J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \rho(\boldsymbol{\theta}).$$

Подставляя $\rho(\boldsymbol{\theta}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T R \boldsymbol{\theta} + r}$ и приравнявая коэффициенты, получим

$$I - \frac{E+J}{2} R = e^{-EK} \left(I + \frac{E-J}{2} R \right).$$

Выражая R из этого уравнения, приходим к первой формуле (2.28).

Значение коэффициента r может быть получено из условия нормировки

$$\text{tr } \rho = \int \rho(\boldsymbol{\theta}) d^{2n} \boldsymbol{\theta} = 1,$$

более точно, вычисляя гауссовский интеграл

$$e^{-r} = \int e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T R \boldsymbol{\theta}} d^{2n} \boldsymbol{\theta} = \sqrt{\det R}.$$

Таким образом, приходим к второй формуле (2.28). □

2.5.4 Вторые моменты

Определение 15. Определим *матрицу вторых моментов* D состояния ρ по формуле

$$D = \text{tr}(\mathfrak{c} \mathfrak{c}^T \rho).$$

Утверждение 33. Для произвольной матрицы плотности ρ , имеющей матрицу вторых моментов D , верно

$$D^T = \tilde{D}, \quad DE \geq 0.$$

КАС (2.3) накладывают ограничения на симметричную часть матрицы D , а именно:

Утверждение 34. Для произвольной матрицы плотности ρ , имеющей матрицу вторых моментов D верно

$$D + D^T = E.$$

Сформулируем в наших обозначениях утверждение [91, Раздел 2.3]:

Утверждение 35. Пусть матрица $D \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ такова, что

$$(DE)^+ = DE \geq 0, \quad D + D^T = E. \quad (2.29)$$

Тогда и только тогда существует единственное чётное гауссовское состояние, матрица вторых центральных моментов которого равна D .

Антисимметричную часть матрицы D для фермионных гауссовских состояний иногда (см. [91], стр. 14) называют матрицей ковариаций по аналогии с бозонной матрицей ковариаций (1.41). Однако такое определение противоречит общему определению матрицы ковариаций для произвольных наборов операторов [35, с. 33]. Поэтому мы введём следующее определение.

Определение 16. Назовём *матрицей антиковариаций* A антисимметричную часть матрицы вторых моментов D

$$A = \frac{D - D^T}{2}. \quad (2.30)$$

Утверждение 36. Для гауссовского состояния (2.22) матрица вторых моментов и матрица антиковариаций могут быть вычислены по формулам:

$$D = E \frac{1}{1 + e^{KE}}, \quad (2.31)$$

$$A = -\frac{E}{2} \operatorname{th} \frac{KE}{2}. \quad (2.32)$$

В случае гауссовских состояний матрицу антиковариаций можно связать с матрицей R , определяющей нормальный символ оператора ρ :

$$R = 4(2J - EA^{-1}E)^{-1}, \quad A = -\frac{1}{2}E(2R^{-1} - J)^{-1}E.$$

2.5.5 Характеристические функции

В соответствии с определением из [57, Раздел VIII], получим для гауссовских состояний

$$\chi_W(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T E \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T A \boldsymbol{\theta}},$$

$$\chi_N(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2} \mathbf{c}} e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2} \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (A + \frac{1}{2} J) \boldsymbol{\theta}},$$

$$\chi_A(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i \boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2} \mathbf{c}} e^{i \boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2} \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (A - \frac{1}{2} J) \boldsymbol{\theta}}.$$

2.5.6 Энтропия

Утверждение 37. Энтропия гауссовского состояния (2.22) может быть вычислена по формуле

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \left(\ln \det(e^{KE} + I) - \text{Tr} \left(\frac{E}{2} \text{th} \frac{KE}{2} \right) \right). \quad (2.33)$$

Доказательство. Если обозначить усреднение по состоянию ρ как $\langle \cdot \rangle \equiv \text{tr}(\cdot \rho)$, то энтропия может быть записана в виде

$$\mathcal{S} = -\text{tr} \rho \ln \rho = -\langle \ln \rho \rangle.$$

Тогда, для гауссовского состояния (2.22)

$$\mathcal{S} = -s - \frac{1}{2} \langle \mathbf{c}^T K \mathbf{c} \rangle = -s - \frac{1}{2} \text{Tr} K^T \langle \mathbf{c} \mathbf{c}^T \rangle = -s + \frac{1}{2} \text{Tr}(KD) = -s + \frac{1}{2} \text{Tr}(KA).$$

С учётом (2.25) и (2.32) приходим к (2.33). □

2.6 Подходы к решению кинетического уравнения с квадратичным генератором

Как и раздел 1.6 данный раздел является центральным в главе. В нём несколькими независимыми способами будут получены гауссовские решения уравнения

(2.18) в терминах уравнений для матриц вторых моментов (2.35). В пункте 2.6.1 данные решения будут получены посредством экспоненциальной подстановки. В пункте 2.6.2 уравнения для матриц вторых моментов будут получены посредством усреднения уравнений динамики в представлении Гейзенберга. В пункте 2.6.3 мы получим гауссовские решения с помощью уравнений для символов.

2.6.1 Динамика матрицы плотности с квадратичным генератором

Мы будем решать задачу Коши (2.18) с начальным условием

$$\rho_0 = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_0 \mathbf{c} + s_0}. \quad (2.34)$$

Один из основных результатов работы может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Решение уравнения (2.18) с начальным условием (2.34) имеет вид $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c} + s_t}$, матрица K_t определяется из уравнения $D_t = E(I + e^{K_t E})^{-1}$, где D_t удовлетворяет линейному дифференциальному матричному уравнению*

$$\frac{d}{dt}D_t = E\left(-iH_t - \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right)D_t + D_t\left(iH_t - \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right)E + E\Gamma_t^T E, \quad (2.35)$$

а нормировочный коэффициент определяется из

$$s_t = s_0 - \frac{1}{2} \ln \det ED_0 + \frac{1}{2} \ln \det ED_t. \quad (2.36)$$

Доказательство. Домножим уравнение слева (2.18) на $(\rho_t)^{-1}$

$$\dot{\rho}_t(\rho_t)^{-1} = -i\frac{1}{2}\mathbf{c}^T H \mathbf{c} + i\frac{1}{2}\rho_t \mathbf{c}^T H \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} + \mathbf{c}^T \Gamma \rho_t \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} - \frac{1}{2}\rho_t \mathbf{c} \Gamma^T \mathbf{c}(\rho_t)^{-1}.$$

Сделаем подстановку $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K_t \mathbf{c} + s_t}$, где $K_t^T = -K_t$, и выпишем каждый член отдельно

$$\dot{\rho}_t(\rho_t)^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E \mathbf{c} + \dot{s}_t,$$

$$i\frac{1}{2}\rho_t \mathbf{c}^T H \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} = i\frac{1}{2}\mathbf{c}^T e^{K_t E} H E e^{-K_t E} E \mathbf{c},$$

$$\mathbf{c}^T \Gamma \rho_t \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} = \mathbf{c}^T \Gamma E e^{-K_t E} E \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \left(\Gamma E e^{-K_t E} E - e^{K_t E} \Gamma^T \right) \mathbf{c} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma E e^{-K_t E}),$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} \mathbf{c} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma^T E),$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\rho_t \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} &= \frac{1}{2}\rho_t \mathbf{c}^T \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} \mathbf{c}(\rho_t)^{-1} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma^T E) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{c}^T e^{K_t E} \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} E e^{-K_t E} E \mathbf{c} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma^T E). \end{aligned}$$

Теперь по отдельности приравняем квадратичные формы и скалярные коэффициенты:

1) Приравнявая квадратичные формы, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E &= -iH + ie^{K_t E} H E e^{-K_t E} E + \Gamma E e^{-K_t E} E - e^{K_t E} + \Gamma^T + \\ &+ \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} + e^{K_t E} \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} E e^{-K_t E} E. \end{aligned}$$

Умножая справа на $E e^{K_t E}$ и комбинируя члены, получим

$$\frac{d}{dt} e^{K_t E} = \left(-iH + \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} \right) E e^{K_t E} + \Gamma E - e^{K_t E} \Gamma^T E e^{K_t E} - e^{K_t E} \left(-iH - \frac{\Gamma - \Gamma^T}{2} \right) E.$$

Выделим $e^{K_t E} + I$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{K_t E} + I) &= -(e^{K_t E} + I) \Gamma^T E (e^{K_t E} + I) + \left(-iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E (e^{K_t E} + I) \\ &+ (e^{K_t E} + I) \left(iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E + \left(\Gamma + \Gamma^T + iH - \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} - iH - \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \right) E, \end{aligned}$$

тогда последний член обращается в нуль, после чего, деля с двух сторон на $e^{K_t E} +$

I , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{K_t E} + I)^{-1} &= \Gamma^T E + (e^{K_t E} + I)^{-1} \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E + \\ &+ \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E (e^{K_t E} + I)^{-1}. \end{aligned}$$

Умножая на E слева с учётом (2.31), получим (2.35).

2) Приравнявая скалярные члены, получим

$$\dot{s}_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma E e^{-K_t E}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma^T E).$$

Интегрируя, имеем

$$s_t = s_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}(\Gamma E (e^{-K_\tau E} - I)) d\tau.$$

Кроме того, из (2.35) получим

$$\text{Tr} \left((D_t E)^{-1} \frac{d}{dt} D_t E \right) = \text{Tr} (-(\Gamma + \Gamma^T) E + E \Gamma^T E D_t^{-1}) = \text{Tr} \Gamma E (e^{-K_t E} - I).$$

Тогда по формуле Лиувилля

$$\det(D_t E) = \det(D_0 E) e^{\int_0^t \text{Tr}(\Gamma E (e^{-K_\tau E} - I)) d\tau}.$$

Таким образом, приходим к (2.36). □

2.6.2 Динамика в представлении Гейзенберга

Лемма 27. *Сопряжённый генератор положительной полугруппы имеет вид*

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c}, \hat{X} \right] + \mathbf{c}^T \hat{X} \Gamma^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \hat{X} - \frac{1}{2} \hat{X} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}.$$

Как и в пункте 1.6.2, удобно переписать эту формулу в виде

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c}, \hat{X} \right] + \frac{1}{2} \left([\mathbf{c}^T, \hat{X}] \Gamma^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \Gamma^T [\hat{X}, \mathbf{c}] \right).$$

Лемма 28. Действие сопряжённого генератора на попарные произведения операторов рождения-уничтожения определяется формулами

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}^*(\mathfrak{c} \mathfrak{c}^T) = E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T + \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E + E\Gamma^T E. \quad (2.37)$$

Доказательство. 1) Пусть $g \in \mathbb{C}^{2n}$. Вычислим по лемме 2.6

$$i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T H \mathfrak{c}, g^T \mathfrak{c} \right] = i \mathfrak{c}^T H E g = -i g^T E H \mathfrak{c}. \quad (2.38)$$

Пусть $g, h \in \mathbb{C}^{2n}$. По правилу Лейбница для коммутатора и (2.38), имеем:

$$\begin{aligned} i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T H \mathfrak{c}, g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h \right] &= i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T H \mathfrak{c}, g^T \mathfrak{c} \right] \mathfrak{c}^T h + i g^T \mathfrak{c} \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T H \mathfrak{c}, \mathfrak{c}^T h \right] = \\ &= -i g^T E H \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h + i g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T H E h = -i g^T (E H \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T - \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T H E) h. \end{aligned}$$

2) Для вычисления действия диссипатора на $\mathfrak{c} \mathfrak{c}^T$ удобно разложить $\Gamma^T = \sum_{ij} x_i y_j^T$, где $x_i, y_i \in \mathbb{C}^{2n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ([\mathfrak{c}^T, g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h] \Gamma^T \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h, \mathfrak{c}]) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} ([\mathfrak{c}^T x_i, g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h] y_j^T \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T x_i [g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h, y_j^T \mathfrak{c}]) = \\ &= \sum_{ij} \left(\left[\mathfrak{c}^T x_i, \frac{1}{2} \mathfrak{c}^T \frac{gh^T - h^T g}{2} \mathfrak{c} \right] y_j^T \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T x_i \left[\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T \frac{gh^T - h^T g}{2} \mathfrak{c}, y_j^T \mathfrak{c} \right] \right) = \end{aligned}$$

с учётом леммы 17

$$\begin{aligned} &= \sum_{ij} \left(-\mathfrak{c}^T \frac{gh^T - h^T g}{2} E x_i y_j^T \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T x_i \frac{gh^T - h^T g}{2} E y_j \right) = \\ &= \sum_{ij} \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{c}^T g h^T E x_i \mathfrak{c}^T y_j + \frac{1}{2} \mathfrak{c}^T h g^T E x_i y_j^T \mathfrak{c} + \frac{1}{2} \mathfrak{c}^T x_i \mathfrak{c}^T g h^T E y_j - \frac{1}{2} \mathfrak{c}^T x_i \mathfrak{c}^T h g^T E y_j \right) = \end{aligned}$$

с учётом КАС (2.2)

$$= \sum_{ij} \left(-\frac{1}{2} g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T y_j x_i^T E h - \frac{1}{2} g^T E x_i y_j^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T h + \frac{1}{2} g^T E x_i y_j^T E h - \frac{1}{2} g^T \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T x_i y_j^T E h + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} g^T E x_i y_j^T E h - \frac{1}{2} g^T E y_j x_i^T \mathbf{c}^T h \Big) = \\
& = g^T \left(-\mathbf{c} \mathbf{c}^T \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} E - E \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \mathbf{c} \mathbf{c}^T + E \Gamma^T E \right) h.
\end{aligned}$$

В силу произвольности h и g приходим к (2.38). $\square$

Данная лемма позволяет получить уравнения для вторых (нецентральных) моментов матрицы плотности, эволюционирующих в соответствии с уравнением (1.23).

Следствие 9. Вторые моменты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} D_t = E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \Gamma_t^T E. \quad (2.39)$$

Отметим, что данное утверждение не требует, чтобы матрица плотности имела гауссовский вид. Более того, оно не требует обнуления средних.

Утверждение 38. Матрица антиковариаций удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} A_t = E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) A_t + A_t \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} E. \quad (2.40)$$

Доказательство. Транспонируя (2.39), получим

$$\frac{d}{dt} D_t^T = D_t^T \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) D_t^T + E \Gamma_t E.$$

Вычитая из (2.39) и деля на 2, в соответствии с определением (2.30), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} A_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} D_t - \frac{d}{dt} D_t^T \right) = E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) \frac{D_t - D_t^T}{2} \\
&+ \frac{D_t - D_t^T}{2} \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} E.
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (2.40). $\square$

Утверждение 39. Если в начальный момент времени $D_0 + D_0^T = E$, то $D_t + D_t^T = E$ в произвольный момент времени.

Доказательство. По аналогии с доказательством утверждения 38, складывая (2.39) и его транспонирование, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(D_t + D_t^T) = & E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) (D_t + D_t^T) + \\ & + (D_t + D_t^T) \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E(\Gamma_t^T + \Gamma_t)E. \end{aligned}$$

Явной подстановкой получаем, что $D_t + D_t^T = E$ — стационарное решение этого уравнения. Действительно,

$$E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E(\Gamma_t^T + \Gamma_t)E = 0.$$

Так как линейное дифференциальное уравнение имеет единственное решение, то приходим к доказываемому утверждению. $\square$

Как и в пункте 1.6.2, уравнение (2.39) сохраняет условия $(D_t E)^+ = D_t E$ и $D_t + D_t^T = E$, но может не сохранять условие $D_t E \geq 0$. Если же для решения уравнения (2.39) с начальным условием D_0 , удовлетворяющим (1.40), в любой момент времени $t \geq 0$ выполнено $D_t E \geq 0$, то, как и в бозонном случае, мы будем говорить, что соответствующий генератор *определяет корректную положительную динамику гауссовских состояний*.

2.6.3 Уравнение для символов

Как и в пункте 1.6.3, получим уравнение для нормального символа матрицы плотности.

Утверждение 40. Если матрица ρ_t удовлетворяет уравнению (2.18), то соответствующий нормальный символ $\rho_t(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_t(\theta) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_t(\theta) - \theta^T P_t^T \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_t(\theta) + \\ & + \theta^T (\Gamma_t - \Gamma_t^T) \theta - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t^T J \rho_t(\theta), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где

$$Q_t = J \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} J - \frac{E}{2} \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) \frac{E}{2}, \quad (2.42)$$

$$P_t^T = (\Gamma_t - \Gamma_t^T) J - \left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) E. \quad (2.43)$$

Доказательство. Перепишем уравнение (2.18) в виде

$$\dot{\rho}_t = \mathbf{c}^T \rho_t \Gamma_t \mathbf{c} + \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t - \Gamma_t^T}{2} \right) \mathbf{c} \rho_t + \rho_t \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left(iH_t + \frac{\Gamma_t - \Gamma_t^T}{2} \right) \mathbf{c} - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t^T E \rho_t.$$

Тогда с учётом (2.27) и обозначая $M_t = iH_t + \frac{\Gamma_t - \Gamma_t^T}{2}$, вычислим оператор в правой части (2.41), с учётом чётности $\rho_t(\boldsymbol{\theta})$:

$$\begin{aligned} & \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \Gamma_t \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \tilde{M}_t \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T M_t \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t^T E = \\ & = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (M_t - \tilde{M}_t + \Gamma_t - \Gamma_t^T) \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \left((\tilde{M}_t + \Gamma_t^T) \frac{E - J}{2} + (M_t + \Gamma_t) \frac{E + J}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \left(-\frac{E + J}{2} \tilde{M}_t \frac{E - J}{2} + \frac{E - J}{2} M_t \frac{E + J}{2} + \right. \\ & \quad \left. - \frac{E + J}{2} \Gamma_t \frac{E + J}{2} + \frac{E - J}{2} \Gamma_t^T \frac{E - J}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \\ & + \text{Tr} \left(\frac{E + J}{2} \Gamma_t - \frac{1}{2} \frac{E + J}{2} \tilde{M}_t - \frac{1}{2} \frac{E - J}{2} M_t - \frac{1}{2} \Gamma_t^T E \right) = \\ & = \boldsymbol{\theta}^T (\Gamma_t - \Gamma_t^T) \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \left((\Gamma_t - \Gamma_t^T) J - \left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) E \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t^T J + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \left(J \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} J - \frac{E}{2} \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) \frac{E}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

С учётом обозначений (2.42) и (2.43) приходим к (2.41). $\square$

Замечание 21. Отметим, что в отличие от утверждения 10 в правую часть (2.41) вошли члены, квадратичные по $\boldsymbol{\theta}$. Кроме того, матрица P_t не совпадает с матрицей B_t (в отличие от бозонного случая).

Утверждение 41. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_0 \boldsymbol{\theta} + r_0}$, то решение уравнения (2.41) имеет вид $\rho_t(\boldsymbol{\theta}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + r_t}$, где коэффициент R_t удовлетворяет уравнению:

$$\dot{R}_t = -R_t Q_t R_t - P_t^T R_t - R_t P_t + 2(\Gamma_t - \Gamma_t^T). \quad (2.44)$$

Доказательство. Подставим $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t}$ в (2.41) и выпишем каждый член по отдельности. Получим

$$\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t} = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \dot{R}_t \boldsymbol{\theta} + \dot{s}_t \right) e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T R_t^T Q_t R_t \boldsymbol{\theta} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T R_t Q_t R_t \boldsymbol{\theta} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t},$$

$$\boldsymbol{\theta}^T P_t^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t} = \boldsymbol{\theta}^T P_t^T R_t \boldsymbol{\theta} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (P_t^T R_t + R_t P_t) \boldsymbol{\theta} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R_t \boldsymbol{\theta} + s_t}.$$

Приравнявая коэффициенты при квадратичных формах по $\boldsymbol{\theta}$, приходим к (2.44). $\square$

Следствие 10. При замене $A_t = -\frac{1}{2}E(2R_t^{-1} - J)^{-1}E$ уравнение (2.44) сводится к (2.40).

Доказательство. Дифференцируя $A_t = -\frac{1}{2}E(2R_t^{-1} - J)^{-1}E$, получим

$$\dot{A}_t = -\frac{1}{2}E(2R_t^{-1} - J)^{-1} \left(-2 \frac{d}{dt} R_t^{-1} \right) (2R_t^{-1} - J)^{-1} E = 4A_t E \left(\frac{d}{dt} R_t^{-1} \right) E A_t. \quad (2.45)$$

С учетом (2.44) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_t^{-1} &= -R_t^{-1} \dot{R}_t R_t^{-1} = Q_t + R_t^{-1} P_t^T + P_t R_t^{-1} + 2R_t^{-1} (\Gamma_t^T - \Gamma_t) R_t^{-1} = \\ &= Q_t + \frac{1}{4} (E A_t^{-1} E + 2J) P_t^T + \frac{1}{4} P_t (E A_t^{-1} E + 2J) + \\ &\quad + \frac{1}{8} (E A_t^{-1} E + 2J) (\Gamma_t^T - \Gamma_t) (E A_t^{-1} E + 2J) = \\ &= Q_t + \frac{1}{2} J P_t^T + \frac{1}{2} P_t J + \frac{1}{2} J (\Gamma_t^T - \Gamma_t) J + \frac{1}{4} E A_t^{-1} E P_t^T + \frac{1}{4} P_t E A_t^{-1} E + \\ &\quad + \frac{1}{4} J (\Gamma_t^T - \Gamma_t) E A_t^{-1} E + \frac{1}{4} E A_t^{-1} E (\Gamma_t^T - \Gamma_t) J + \frac{1}{8} E A_t^{-1} E (\Gamma_t^T - \Gamma_t) E A_t^{-1} E. \end{aligned}$$

Подставляя в (2.45), имеем

$$\begin{aligned}\dot{A}_t = & A_t E(4Q_t + 2JP_t^T + 2P_t J + 2(\Gamma_t^T - \Gamma_t)) E A_t + \\ & + E(P_t^T + (\Gamma_t^T - \Gamma_t)J) E A_t + A_t E(P_t + J(\Gamma_t^T - \Gamma_t)) E + \frac{1}{2} E(\Gamma_t^T - \Gamma_t) E.\end{aligned}$$

С учётом

$$\begin{aligned}4Q_t + 2JP_t^T + 2P_t J + 2(\Gamma_t^T - \Gamma_t) &= 0, \\ P_t^T + (\Gamma_t^T - \Gamma_t)J &= -\left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right) E\end{aligned}$$

приходим к (2.40). □

2.7 Подходы к решению уравнений для матриц антиковариаций

2.7.1 Общий случай

Как и в пункте 1.7.1, мы рассмотрим три подхода к решению уравнений Ляпунова. Во-первых, уравнение (2.40) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}|A_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|A_t\rangle\rangle + \left|E\frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}E\right\rangle\rangle, \quad (2.46)$$

где

$$B_t = -E\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right),$$

а $|\cdot\rangle\rangle$, как и в пункте 1.7.1, обозначает построчное выстраивание матриц в столбец. Аналогично, уравнение (2.39) может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt}|A_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|A_t\rangle\rangle + |E\Gamma_t^T E\rangle\rangle. \quad (2.47)$$

Второй подход может быть сформулирован в виде утверждения:

Утверждение 42. Пусть G_t — решение задачи Коши

$$\dot{G}_t = -E\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right) G_t, \quad G_0 = I, \quad (2.48)$$

тогда:

1) Динамика вторых центральных моментов

$$D_t = G_t D_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} E \Gamma_{t'}^T E (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'.$$

2) Динамика матрицы ковариаций

$$A_t = G_t A_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} E \frac{\Gamma_{t'}^T - \Gamma_{t'}}{2} E (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'.$$

Доказательство данного утверждения полностью аналогично утверждению 14.

Наконец, третий подход основан на следующем утверждении:

Утверждение 43. Эволюция матрицы вторых моментов может быть определена по формуле $D_t = X_t Y_t^{-1}$, где матрицы X_t и Y_t могут быть получены из следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) & E \Gamma_t^T E \\ 0 & \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

с произвольным начальным условием, таким, что $X_0 Y_0^{-1} = D_0$. В частности, можно положить $X_0 = D_0, Y_0 = I$.

Аналогично, матрица антиковариации может быть определена по формуле $A_t = X'_t Y_t^{-1}$, где матрицы X'_t и Y_t могут быть получены из следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X'_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) & E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E \\ 0 & \left(-iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

с произвольным начальным условием, таким, что $X'_0 Y_0^{-1} = A_0$. В частности, можно положить $X'_0 = A_0, Y_0 = I$.

Доказательство этого утверждения также аналогично доказательству утверждения 15.

2.7.2 Уравнение с постоянными коэффициентами

В случае, если коэффициенты уравнений необратимой квантовой динамики постоянны, то можно получить более явное решение. В частности, решение уравнения (2.46) имеет вид

$$|A_t\rangle\rangle = e^{\Xi t}|A_0\rangle\rangle + \frac{e^{\Xi t} - I_{4n^2}}{\Xi} \left| E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E \right\rangle\rangle,$$

где $\Xi = B \otimes I + I \otimes B$. Аналогично, решение (2.47) может быть представлено в виде:

$$|D_t\rangle\rangle = e^{\Xi t}|D_0\rangle\rangle + \frac{e^{\Xi t} - I_{4n^2}}{\Xi} |E\Gamma^T E\rangle\rangle.$$

Далее, приведём интегральное представление решений уравнений (2.39) и (2.40).

Утверждение 44. *Матрица вторых центральных моментов:*

$$D_t = e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t} D_0 e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et} + \int_0^t e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t'} E\Gamma^T E e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et'} dt'.$$

Матрица антиковариаций:

$$A_t = e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t} A_0 e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et} + \int_0^t e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et'} dt'. \quad (2.49)$$

Наконец, представление решений уравнений (2.39) и (2.40) с помощью экспонент от $(4n) \times (4n)$ -матриц может быть получено с помощью следующего утверждения:

Утверждение 45. *Эволюция матрицы вторых моментов может быть определена по формуле $D_t = X_t Y_t^{-1}$, где матрицы X_t и Y_t могут быть получены по формуле*

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \exp \left[t \begin{pmatrix} E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) & E\Gamma^T E \\ 0 & \left(-iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} D_0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Аналогично, матрица антиковариаций может быть определена по формуле $A_t = X_t' Y_t^{-1}$, где матрицы X_t' и Y_t могут быть получены по формуле

$$\begin{pmatrix} X_t' \\ Y_t \end{pmatrix} = \exp \left[t \begin{pmatrix} E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) & E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E \\ 0 & \left(-iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_0 \\ I \end{pmatrix}.$$

2.8 Свойства решений

2.8.1 Существование решений и условия положительности

По аналогии с определением 10 из пункта 1.8 введём определение

Определение 17. Введём множество Σ_f векторов $x \in \mathbb{C}^{2n}$, для которых существует некоторая матрица D , удовлетворяющая условиям $(DE)^+ = DE \geq 0$ и $D + D^T = E$, такая, что $DE\bar{x} = 0$.

С помощью данного утверждения сформулируем аналог теоремы 4:

Теорема 7. Необходимое и достаточное условие существования положительной динамики гауссовских состояний

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_f. \quad (2.50)$$

Доказательство. Доказательство во многом похоже на доказательство теоремы 4, поэтому остановимся в первую очередь на отличиях. Теперь для корректной положительной динамики необходимо и достаточно, чтобы для вектора $DEv = 0$ было выполнено условие $v^+ E \Gamma^T v \geq 0$ (в силу уравнения (2.39)). С учётом замены $x = \bar{v}$ приходим к (2.50). $\square$

Утверждение 46. Введём множества

$$\Sigma'_f = \{x \in \mathbb{C}^{2n} : x^T E x = 0\}, \quad (2.51)$$

$$\Sigma''_f = \{x = (y^T \ 0)^T, y \in \mathbb{C}^n\} \cup \{x = (0 \ y^T)^T, y \in \mathbb{C}^n\}, \quad (2.52)$$

тогда для множества Σ_f выполнено

$$\Sigma''_f \subseteq \Sigma_f \subseteq \Sigma'_f. \quad (2.53)$$

Доказательство. Снова проведём доказательство в терминах вектора v , а затем сделаем замену $x = \bar{v}$.

Пусть $DEv = 0$, тогда с учётом КАС (2.2) получим, что $DE\tilde{v} = \tilde{v}$. Так как матрица DE эрмитова, а v и $\tilde{v}$ — её собственные вектора с различными собственными значениями, то они ортогональны $v^+\tilde{v} = 0$, или $v^T E v = 0$. С учётом замены $x = E\bar{v}$ приходим к $\Sigma_f \subseteq \Sigma'_f$.

Наоборот, если мы возьмём вектор вида $v = (\bar{y}^T \ 0)^T$, то он обнуляется матрицей DE , если положить $D = (J + E)/2$. Такая матрица удовлетворяет условиям (2.29). Аналогично вектор $v' = (0 \ \bar{y}^T)^T$ обнуляется матрицей $D' = (-J + E)/2$. Объединяя множества таких векторов, приходим к $\Sigma''_f \subseteq \Sigma_f$.

Таким образом, приходим к (2.53). □

Замечание 22. Отметим, что, в отличие от бозонного случая, условие $\tilde{v}^+ DE \tilde{v} = \tilde{v}^+ \tilde{v} \geq 0$ выполнено автоматически и не помогает сузить множество Σ'_f .

Следствие 11. Для существования положительной динамики гауссовских состояний необходимо

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma''_f,$$

достаточно

$$x^+ \Gamma E x \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma'_f,$$

где Σ'_f и Σ''_f определяются формулами (2.51) и (2.52).

2.8.2 Частичное обращение динамики вторых моментов

В фермионном случае два слагаемых формулы (2.49) можно интерпретировать следующим образом. Член $e^{E(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2})t} A_0 e^{(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2})Et}$ отличен от нуля $\Gamma = \Gamma^T$ и отвечает за классическую диффузию (см. пункт 2.10.2). Этот член при замене Γ на Γ^T (инвертировании резервуара) не изменяется. Оставшийся член

$$\int_0^t e^{E(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2})t'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2})Et'} dt'$$

связан с квантовыми особенностями резервуара. Он меняет знак при замене Γ на Γ^T и поэтому динамика такого квантового члена может быть обращена посредством инвертирования резервуара.

2.8.3 Предельные распределения, не зависящие от начального распределения

Как и в пункте 1.8.3, сформулируем утверждение:

Утверждение 47. Если λ является собственным значением матрицы $B = -E \left(iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right)$, то $\bar{\lambda}$ также является собственным значением этой матрицы.

Доказательство этого утверждения (как и утверждения 23) связано с инвариантностью матрицы B относительно $\sim$ -сопряжения: $B = \tilde{B}$.

Утверждение 48. Пусть матрица $B = -E \left(iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right)$ имеет собственные значения λ_i , тогда собственные значения матрицы $B \otimes I + I \otimes B$ имеют вид $\lambda_i + \lambda_j$.

Доказательство этого утверждения основано на приведении матрицы B к нормальной жордановой форме. Из утверждения 48 и представления уравнения (2.40) в виде (2.46) непосредственно следует (по аналогии с [84, с. 4]):

Утверждение 49. Если матрица $-E \left(iH + \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right)$ имеет только собственные значения с отрицательными вещественными частями, тогда (и только тогда) существует единственно предельное распределение s

$$A_{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) t'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E t'} dt'.$$

Тогда решение может быть представлено в виде

$$A_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} (A_0 - A_{+\infty}) e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J t} + A_{+\infty}.$$

Более того, наличие стационарного решения A^{st} уравнения (2.40) в случае постоянных коэффициентов позволяет и в общем случае представить решение в подобном виде. При этом не требуется, чтобы A^{st} являлось матрицей антиковариаций, но требуется $A^{st} = -(A^{st})^T = -\tilde{A}^{st}$.

Утверждение 50. Пусть A^{st} — решение уравнения

$$E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) A^{st} + A^{st} \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E + E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E = 0, \quad (2.54)$$

такое, что $A^{st} = -(A^{st})^T = -\tilde{A}^{st}$, тогда решение уравнения (2.40) с постоянными коэффициентами может быть представлено в виде

$$A_t = e^{J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)t} (A_0 - A^{st}) e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)Jt} + A^{st}.$$

Доказательство этого утверждения основано на прямой подстановке в (2.40) и единственности решения линейного дифференциального уравнения.

2.8.4 Квадратичные интегралы движения

Как и в пункте 1.8.4 исследуем сохранение наблюдаемых, квадратичных по операторам рождения-уничтожения

Утверждение 51. $\mathcal{L}_{H,\Gamma}^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{c}^T M \mathbf{c} \right) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$ME \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) + \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) EM = 0. \quad (2.55)$$

Доказательство. По формуле (2.37) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,\Gamma}^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{c}^T M \mathbf{c} \right) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{L}_{H,\Gamma}^* (\mathbf{c} \mathbf{c}^T) M^T = \text{Tr} \left(E \left(-iH - \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \right) \mathbf{c} \mathbf{c}^T M^T + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{c} \mathbf{c}^T \left(iH - \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \right) EM^T + E\Gamma^T EM^T \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left(ME \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) + \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) EM \right) \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю, приходим к (2.55). □

Как и в бозонном случае (см. пункт 1.8.4), невырожденные квадратичные интегралы приводят к неединственности решения уравнения (2.54).

2.9 Связь с квантовыми каналами

Фермионный гауссовский канал задаётся (см. [91, стр. 33]) преобразованием матрицы антиковариаций

$$A' = GAG^T + \alpha.$$

Свяжем параметры канала G, α с параметрами генератора H, Γ в момент времени t .

Утверждение 52. *Гауссовский канал, задаваемый отображением $e^{\mathcal{L}_{H,\Gamma}t}$, характеризуется парой*

$$G = e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t}, \quad \alpha = \int_0^t e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et'} dt'.$$

При $t = 1$ обозначим

$$G_{H,\Gamma} = e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)}, \quad \alpha_{H,\Gamma} = \int_0^1 e^{E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)t'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{E\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)Et'} dt'.$$

2.10 Частные случаи

Как и в разделе 1.10, в случае ГКС-Л генератора нам будет удобно думать о Γ как о матрице, пропорциональной матрице вторых центральных моментов резервуара.

2.10.1 Динамика без диссипатора

Пусть $\Gamma = 0$, тогда (2.49) принимает вид

$$A_t = e^{-iEHt} A_0 e^{iHEt}.$$

Можно проверить, что данный результат совпадает с результатом леммы 18.

2.10.2 Классический резервуар

Интересно, что в фермионном случае классический резервуар $\Gamma = \Gamma^T$ приводит к более простым уравнениям, чем в бозонном случае (1.122). А именно, (2.49) принимает вид

$$A_t = e^{-E(iH + \Gamma)t} A_0 e^{(iH - \Gamma)Et}.$$

2.10.3 Равномерный фермионный резервуар

Равномерный фермионный резервуар определим следующим условием $\frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} = \gamma E$, $\gamma > 0$. Тогда (2.49) принимает вид

$$A_t = e^{-2\gamma t} e^{-iEHt} A_0 e^{iHEt} + \int_0^t e^{-2\gamma t'} e^{-iEHt'} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E e^{iHEt'} dt'. \quad (2.56)$$

В случае чистой диссипации, то есть при $H = 0$, (2.56) принимает вид

$$A_t = e^{-2\gamma t} A_0 + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E.$$

При $t \rightarrow +\infty$ матрица антиковариаций A_t принимает вид $A_{+\infty} = \frac{1}{2\gamma} E \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} E$.

Отметим, что в фермионном случае можно одновременно наложить условие равномерного резервуара $\frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} = \gamma E$ и условие классичности $\Gamma = \Gamma^T$ из предыдущего пункта, получив следующую динамику матрицы антиковариаций:

$$A_t = e^{-2\gamma t} e^{-iEHt} A_0 e^{iHEt}.$$

2.10.4 Антидиагональный случай

Также как и бозонном случае (см. пункт 1.10.5), можно рассмотреть некоторый аналог унитарной динамики, сохраняющей число частиц, а именно, случай, когда H и Γ имеют, как и в (1.126), блочно-антидиагональный вид. Пусть квадратичные формы, определяющие квадратичный генератор $\mathcal{L}_{H,\Gamma}$, имеют вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\bar{\Omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = -\Omega^+, \Gamma_1 = \Gamma_1^+, \Gamma_2 = \Gamma_2^+. \quad (2.57)$$

Условия ГКС-Л генератора имеют вид $\Gamma_1 \geq 0, \Gamma_2 \geq 0$. Тогда получим

$$E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) = \begin{pmatrix} i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2} & 0 \\ 0 & -i\Omega - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2} \end{pmatrix},$$

$$J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Gamma_1^T - \Gamma_2}{2} \\ \frac{\Gamma_2^T - \Gamma_1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим, что экспонента (2.48) имеет блочно-диагональный вид, а именно:

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{-\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2}\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(i\Omega + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2}\right)t} \end{pmatrix}.$$

В результате, получим, что (2.49), в случае, когда параметры генератора определяются (2.57), принимает вид

$$A_t = \begin{pmatrix} A_t^{11} & A_t^{12} \\ -(A_t^{12})^T & A_t^{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_t^{11} &= e^{-\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2}\right)t} A_0^{11} e^{-\left(-i\Omega + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2}\right)t}, \\ A_t^{22} &= e^{-\left(i\Omega + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2}\right)t} A_0^{22} e^{-\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2}\right)t}, \\ A_t^{12} &= e^{-\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2}\right)t} A_0^{12} e^{-\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2}\right)t} + \\ &+ \int_0^t e^{-\left(-i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1^T + \Gamma_2}{2}\right)t'} \frac{\Gamma_1^T - \Gamma_2}{2} e^{-\left(i\bar{\Omega} + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2^T}{2}\right)t'} dt'. \end{aligned}$$

2.10.5 Одномодовая положительная полугруппа

В одномерном случае множества, определённые формулами (2.51) и (2.52), принимают вид

$$\begin{aligned} \Sigma'_f &= \{(x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{C}^2 : x_1 x_2 = 0\}, \\ \Sigma''_f &= \{(x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{C}^2 : x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Sigma'_f = \Sigma''_f$ и, с учётом утверждения 46, получим $\Sigma_f = \Sigma'_f = \Sigma''_f$. Общий вид матрицы Γ , удовлетворяющей условию $\Gamma^T = \tilde{\Gamma}$, в одномодовом случае:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \delta & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \bar{\delta} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \ \delta \in \mathbb{C}.$$

С учётом явного вида множества Σ_f условие (2.50) сведётся к $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, не накладывая никаких дополнительных условий на δ . С другой стороны, условие

$\Gamma E \geq 0$, как и в пункте 1.10.4, сведётся к $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 \gamma_2 \geq |\delta|^2$. Таким образом, при $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, но $\gamma_1 \gamma_2 < |\delta|^2$ мы получим положительную, но не вполне положительную динамику гауссовских состояний. Для примера рассмотрим случай

$$H = 0, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{C}.$$

Тогда (2.49) принимает вид

$$A_t = G_t A_0 G_t^T, \quad G_t = \begin{pmatrix} \text{ch}(|\delta|t) & -\frac{\delta}{|\delta|} \text{sh}(|\delta|t) \\ -\frac{\bar{\delta}}{|\delta|} \text{sh}(|\delta|t) & \text{ch}(|\delta|t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили явный пример положительной, но не вполне положительной динамики. В частности, это показывает, что условие (2.50) не сводится к $\Gamma E \geq 0$.

Заключение

В диссертации получены следующие результаты:

Разработан метод решения квадратичного уравнения необратимой квантовой динамики, основанный на экспоненциальной подстановке.

Несколькими методами уравнения необратимой квантовой динамики на гауссовских решениях сведены к уравнениям для средних и матриц ковариаций в фермионном случае и уравнениям для матриц вторых моментов в случае фермионов. Важно отметить, что при этом рассматриваются и случаи, когда коэффициенты этих уравнений явно зависят от времени.

Получены условия, когда формальный генератор задаёт полугруппу на гауссовских состояниях. В частности, рассмотрены условия на генератор, когда такая полугруппа вполне положительна.

Рассмотрены несколько подходов к решению уравнений Ляпунова (для матриц вторых центральных моментов) и уравнений для средних.

Отдельно рассмотрен случай постоянных коэффициентов генератора. Исследованы условия на генератор с постоянными коэффициентами на наличие и отсутствие предельных состояний. В случае бозонов рассмотрен случай, когда только линейные члены являются зависящими от времени, а квадратичные члены постоянны.

Рассмотрен ряд примеров и частных случаев, иллюстрирующих применение разработанных в работе методов.

Несмотря на то, что поставленные цели работы достигнуты, направление исследований, представленное в работе, является перспективным, так как полученные результаты приводят к новым содержательным вопросам. Полученные решения квадратичных моделей могут служить нулевыми приближением для теории возмущений, а также отправной точкой для численного решения более сложных моделей методом Монте-Карло.

Полученные в 1.8 и 2.8 условия поднимают проблему более удобного описа-

ния возникающих там множеств Σ_b и Σ_f . Результаты пункта 1.8.6 ставят вопрос о том, каким образом необходимо ввести понятие стохастических интегралов движения для уравнений ГКС-Л общего вида. Особенно остро стоит вопрос о полноте набора таких интегралов уже в случае квадратичных генераторов. Пример из пункта 1.10.2 может служить отправной точкой для изучения квазиклассического приближения уравнения ГКС-Л, а пример из пункта 1.10.5 — отправной точкой для рассмотрения уравнений ГКС-Л для квантовых полей.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 416 с.
2. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М. : Изд. ВИНТИ, 1964. — 292 с.
3. *Башаров А. М.* Квантовая теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений обобщенного ланжевеновского (невиновского) типа // ЖЭТФ. — 2012. — Т. 142, 3 (9). — С. 419—441.
4. *Башаров А. М.* Теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений // Оптика и спектроскопия. — 2014. — Т. 116, № 4. — С. 532—540.
5. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М. : Наука, 1965. — 236 с.
6. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — 2-е изд., дополн. — М. : Наука, 1986. — 320 с.
7. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнения Шредингера. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 392 с.
8. *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1947. — Вып. 11. — С. 77—90.
9. *Бройер Х. П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. — М.-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. — 824 с.
10. *Буданов В. Г.* Об одном уравнении для распутывания Т-экспонент с произвольными квадратичными генераторами // ТМФ. — 1987. — Т. 71, № 3. — С. 331—336.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.

12. *Додонов В. В., Манько В. И.* Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем // Труды ФИАН. — 1987. — Т. 183.
13. *Додонов В. В., Манько В. И.* Интегралы движения и динамика нестационарных квадратичных Ферми—Бозе-систем общего вида // Труды ФИАН. — 1983. — Т. 152. — С. 145—193.
14. *Додонов В. В., Манько В. И.* Матрицы плотности и функции Вигнера квазиклассических квантовых систем // Труды ФИАН. — 1986. — Т. 167. — С. 7—79.
15. *Додонов В. В., Манько В. И.* Эволюционные уравнения для матриц плотности линейных квантовых открытых систем // Труды ФИАН. — 1986. — Т. 176. — С. 40—45.
16. *Додонов В. В., Манько В. И., Манько О. В.* Квантовый нестационарный осциллятор // Труды ФИАН. — 1988. — Т. 190. — С. 171.
17. *Додонов В. В., Манько В. И., Скаржинский В. Д.* Неоднозначности вариационного описания классических систем и проблема квантования // Труды ФИАН. — 1982. — Т. 152. — С. 37—89.
18. *Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Рёнке Г.* Статистическая механика неравновесных процессов. Т. 2. — ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 296 с.
19. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 3: Теория неравновесных систем. — М. : Едиториал УРСС, 2016. — 448 с.
20. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 4: Квантовая статистика. — М. : КомКнига, 2014. — 352 с.
21. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Об уравнениях Фоккера—Планка, получаемых в теории возмущений с помощью метода, основанного на спектральных свойствах гамильтониана возмущений // Н. Н. Боголюбов. Избранные труды в трёх томах. Т. 2 / под ред. Ю. А. Митропольского. — Киев : Наукова Думка, 1970. — С. 5—76.
22. *Ландау Л. Д.* Проблема затухания в волновой механике // Ландау Л. Д. Собрание трудов. В 2-х томах. Т. 1 / под ред. Е. М. Лифшица. — М. : Наука, 1969. — С. 19—31.
23. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. Т. 10. — 2-е изд., испр. — ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 536 с.

24. *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М. : Наука, 1979. — 320 с.
25. *Оселедец В. И.* Вполне положительные линейные отображения, негамильтонова эволюция и квантовые стохастические процессы // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. — 1983. — Т. 20. — С. 52—94.
26. *Переломов А. М.* Обобщённые когерентные состояния и их применения. — М. : Наука, 1987. — 272 с.
27. *Печень А. Н.* Метод стохастической асимптотики в квантовой динамике : дис. ... канд. физ-мат. : 01.01.03 / Печень А. Н. — 2004.
28. *Скалли М. О., Зубайри М. С.* Квантовая оптика. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 512 с.
29. *Тахтаджян Л. А.* Квантовая механика для математиков. — М.-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. — 496 с.
30. *Теретёнков А. Е.* Квадратичная диссипативная эволюция гауссовских состояний // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 4. — С. 636—640.
31. *Теретёнков А. Е.* Квадратичная фермионная динамика с диссипацией // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, № 6. — С. 881—889.
32. *Тлячёв Т. В.* Метод канонических преобразований в теории сжатых состояний : дис. ... канд. физ-мат. : 01.04.02 / Тлячёв Т. В. — 2014.
33. *Трушечкин А. С.* Об общем определении производства энтропии в марковских открытых квантовых системах // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2017. — Т. 138. — С. 82—98.
34. *Хакен Х.* Квантовополевая теория твёрдого тела. — М. : Наука, 1980. — 344 с.
35. *Холево А. С.* Квантовые системы, каналы, информация. — М. : МЦМО, 2010. — 328 с.
36. *Холево А. С.* О гипотезе квантовых гауссовских оптимизаторов в случае $q = p$ // УМН. — 2017. — Т. 72, 6 (438). — С. 205—206.

37. *Холево А. С.* Статистическая структура квантовой теории. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — 192 с.
38. *Холево А. С.* Гауссовские оптимизаторы и проблема аддитивности в квантовой теории информации // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70, 2 (422). — С. 141—180.
39. *Холево А. С.* К доказательству мажоризационной теоремы для квантовых гауссовских каналов // УМН. — 2016. — Т. 71, 3 (429). — С. 197—198.
40. *Холево А. С.* О классической пропускной способности канала со стационарным квантовым гауссовским шумом // Теория вероятностей и ее применения. — 2017. — Т. 62, № 4. — С. 670—691.
41. *Чеботарев А. М., Тлячев Т. В., Радионов А. А.* Обобщенные сжатые состояния и многомерная формула факторизации // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, вып. 45. — С. 762—777.
42. *Чеботарев А. М., Тлячев Т. В., Радионов А. А.* Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, вып. 4. — С. 614—634.
43. *Чеботарев А. М., Теретёнков А. Е.* Операторные ОДУ и формула Фейнмана // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 6. — С. 943—948.
44. *Чиркин А. С., Шутов И. В.* О возможности невырожденного параметрического усиления оптических волн при низкочастотной накачке // Письма в ЖЭТФ. — 2007. — Т. 86, № 11. — С. 803—807.
45. *Accardi L., Kozyrev S.* Lectures on quantum interacting particle systems // Quantum interacting particle systems. — 2002. — Vol. 14. — P. 1–195.
46. *Accardi L., Lu Y. G., Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. — Berlin : Springer-Verlag, 2002. — 473 p.
47. *Agarwal G. S., Wolf E.* Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. II. Quantum mechanics in phase space // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 2, no. 10. — P. 2187–2205.
48. *Agarwal G. S., Wolf E.* Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. I. Mapping theorems and ordering of functions of noncommuting operators // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 2, no. 10. — P. 2161–2186.

49. *Alekseev P. S., Moroseev F. V.* Squeezed states in the semiclassical limit // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2009. — Vol. 108, no. 4. — P. 571–582.
50. *Alicki R., Lendi K.* Quantum Dynamical Semigroups and Applications. — Berlin : Springer-Verlag, 2007. — 137 p.
51. *Arnold L.* Stochastic differential equations. — New York : Wiley Interscience, 1974. — 228 p.
52. *Basharov A. M.* Spontaneous emission of the non-Wiener type // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, no. 3. — P. 376–393.
53. *Bausch R., Stahl A.* On the description of noise in quantum systems // Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. — Berlin, 1967. — Vol. 204, no. 1. — P. 32–46.
54. *Bravyi S.* Lagrangian representation for fermionic linear optics. — 2004. — arXiv: [quant-ph/0404180](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0404180).
55. *Bravyi S. B., Kitaev A. Y.* Fermionic quantum computation // Annals of Physics. — 2002. — Vol. 298, no. 1. — P. 210–226.
56. *Breuer H.-P., Kappler B., Petruccione F.* The time-convolutionless projection operator technique in the quantum theory of dissipation and decoherence // Annals of Physics. — 2001. — Vol. 291, no. 1. — P. 36–70.
57. *Cahill K. E., Glauber R. J.* Density operators for fermions // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 59, issue 1538.
58. *Carmichael H. J., Scully M. O.* Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker-Planck equations // Physics Today. — 2000. — Vol. 53, no. 3. — P. 78.
59. *Chebotarev A. M.* Lectures on quantum probability. — Mexico : Sociedad Matemática Mexicana, 2000. — 305 p.
60. *Chebotarev A. M., Tlyachev T. V.* Normal forms, inner products, and Maslov indices of general multimode squeezings // Mathematical Notes. — 2014. — Vol. 95, no. 5/6. — P. 721–737.

61. *Chebotaev A. M., Teretenkov A. E.* Singular value decomposition for the Takagi factorization of symmetric matrices // *Applied Mathematics and Computation*. — 2014. — Vol. 234. — P. 380–384.
62. *Chernikov N. A.* The system whose hamiltonian is a time-dependent quadratic // *Soviet Physics JETP*. — 1968. — Vol. 26, no. 3.
63. *Chirkin A. S., Saigin M. Y.* Four-mode entangled states in coupled nonlinear optical processes and teleportation of two-mode entangled CV state // *Physica Scripta*. — 2009. — Vol. 2009, T135. — P. 014029.
64. *Chirkin A. S., Saigin M. Y.* Statistic and information characterization of tripartite entangled states // *Journal of Russian Laser Research*. — 2007. — Vol. 28, no. 5. — P. 505–515.
65. *Chruściński D.* On time-local generators of quantum evolution // *Open Systems & Information Dynamics*. — 2014. — Vol. 21, no. 01/02. — P. 1440004.
66. *Chruściński D., Jurkowski J.* Memory in a nonlocally damped oscillator // *Quantum Bio-Informatics III*. — World Scientific, 2010. — P. 155–166.
67. *Chruściński D., Kossakowski A.* Non-Markovian quantum dynamics: local versus nonlocal // *Physical review letters*. — 2010. — Vol. 104, no. 7. — P. 070406.
68. *Chruściński D., Pascazio S.* A Brief History of the GKLS Equation // *Open Systems & Information Dynamics*. — 2017. — Vol. 24, no. 03. — P. 1740001.
69. *Colpa J.* Diagonalization of the quadratic boson hamiltonian // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1978. — Vol. 93, no. 3/4. — P. 327–353.
70. *Combes M., Robert D.* Coherent states and applications in mathematical physics. — Berlin : Springer-Verlag, 2012. — 415 p.
71. *Dalton B. J., Garraway B. M.* Non-Markovian decay of a three-level cascade atom in a structured reservoir // *Phys. Rev. A*. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 033809.
72. *Davies E. B.* Quantum theory of open systems. — London : Academic Press, 1976. — 171 p.
73. *De Gosson M. A.* Symplectic geometry and quantum mechanics. Vol. 166. — Berlin : Springer-Verlag, 2006. — 368 p.

74. *De Vega I., Alonso D.* Dynamics of non-Markovian open quantum systems // *Rev. Mod. Phys.* — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 015001.
75. *Dodonov V. V.* Nonclassical'states in quantum optics: asqueezed'review of the first 75 years // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics.* — 2002. — Vol. 4, no. 1. — R1.
76. *Dodonov V. V., Manko O. V.* Quantum damped oscillator in a magnetic field // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 1985. — Vol. 130, no. 1/2. — P. 353–366.
77. *Dodonov V. V., Man'ko V. I., Nikonov D. E.* Even and odd coherent states for multimode parametric systems // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Vol. 51, no. 4. — P. 3328.
78. *Dodonov V. V., Man'ko V. I.* Theory of nonclassical states of light. — London-New York : Taylor, Francis, 2003. — 384 p.
79. Exact matrix product solutions in the Heisenberg picture of an open quantum spin chain / S. R. Clark [et al.] // *New J. Phys.* — 2010. — Vol. 12, no. 2. — P. 025005.
80. *Ferraro A., Olivares S., Paris M.* Gaussian states in quantum information. — Napoli : Bibliopolis, 2005. — 192 p.
81. *Filippov S. N., Rybár T., Ziman M.* Local two-qubit entanglement-annihilating channels // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 012303.
82. *Fleming C. H., Hu B.* Non-Markovian dynamics of open quantum systems: stochastic equations and their perturbative solutions // *Annals of Physics.* — 2012. — Vol. 327, no. 4. — P. 1238–1276.
83. *Friedrichs K. O.* Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Part V. Fields modified by linear homogeneous forces // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1953. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–72.
84. *Gajic Z., Qureshi M. T. J.* Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control. — San Diego : Academic Press, 1995. — 272 p.
85. *Gardiner C., Zoller P.* Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. Vol. 56. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 370 p.

86. *Gemmer J., Michel M., Mahler G.* Quantum Thermodynamics. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 346 p.
87. *Giulini D.* Superselection rules // From Chemistry to Consciousness. — Berlin : Springer-Verlag, 2016. — P. 45–70.
88. *Glauber R., Man'ko V.* Damping and fluctuations in coupled quantum oscillator systems // Sov. Phys. JETP. — 1984. — Vol. 60. — P. 450–457.
89. *Glauber R. J.* Coherent and incoherent states of the radiation field // Physical Review. — 1963. — Vol. 131, no. 6. — P. 2766.
90. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821–825.
91. *Greplova E.* Quantum Information with Fermionic Gaussian States : Master's thesis / Greplova E. — 2013.
92. *Heinosaari T., Holevo A. S., Wolf M. M.* The semigroup structure of Gaussian channels. — 2009. — arXiv: [0909.0408](#).
93. *Holevo A. S.* One-mode quantum Gaussian channels: Structure and quantum capacity // Problems of Information Transmission. — 2007. — Vol. 43, no. 1. — P. 1–11.
94. *Holevo A. S., Shohma M., Hirota O.* Capacity of quantum Gaussian channels // Physical Review A. — 1999. — Vol. 59, no. 3. — P. 1820.
95. *Huang S., Agarwal G. S.* Entangling nanomechanical oscillators in a ring cavity by feeding squeezed light // New Journal of Physics. — 2009. — Vol. 11, no. 10. — P. 103044.
96. *Huang S., Agarwal G. S.* Squeezing of a nanomechanical oscillator. — 2009. — arXiv: [0909.4234](#).
97. *Isar A., Sandulescu A.* Damped quantum harmonic oscillator. — 2006. — arXiv: [quant-ph/0602149](#).
98. *Isar A.* Entanglement of formation for Gaussian states of two bosonic modes in a thermal environment // Rom. J. Phys. — 2013. — Vol. 58. — P. 1355.

99. *Ishizaki A., Fleming G. R.* Quantum coherence in photosynthetic light harvesting // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* — 2012. — Vol. 3, no. 1. — P. 333–361.
100. *Kitaev A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires // *Physics-Uspekhi.* — 2001. — Vol. 44, no. 10. — P. 131–136.
101. *Knill E.* Fermionic linear optics and matchgates. — 2001. — arXiv: [quant-ph/0108033](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0108033).
102. *Kosloff R.* Quantum thermodynamics: A dynamical viewpoint // *Entropy.* — 2013. — Vol. 15, no. 6. — P. 2100–2128.
103. *Lewis Jr H. R., Riesenfeld W.* An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field // *J. Math. Phys.* — 1969. — Vol. 10, no. 8. — P. 1458–1473.
104. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // *Communications in Math. Phys.* — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130.
105. Lindblad-and non-Lindblad-type dynamics of a quantum Brownian particle / S. Maniscalco [et al.] // *Physical Review A.* — 2004. — Vol. 70, no. 3. — P. 032113.
106. *Maimistov A. I., Basharov A. M.* Nonlinear optical waves. — Berlin : Springer-Verlag, 1999. — 656 p.
107. *Maniscalco S., Olivares S., Paris M. G.* Entanglement oscillations in non-Markovian quantum channels // *Physical Review A.* — 2007. — Vol. 75, no. 6. — P. 062119.
108. *Maniscalco S., Petruccione F.* Non-Markovian dynamics of a qubit // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Vol. 73, no. 1. — P. 012111.
109. *Maniscalco S., Piilo J., Suominen K. A.* Non-Markovian weak coupling limit of quantum Brownian motion // *The European Physical Journal D.* — 2009. — Vol. 55, no. 1. — P. 181.
110. Normal form decomposition for Gaussian-to-Gaussian superoperators / G. De Palma [et al.] // *J. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 56, no. 5. — P. 052202.
111. *Parthasarathy K. R.* Symplectic dilations, Gaussian states and Gaussian channels // *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics.* — 2015. — Vol. 46, no. 4. — P. 419–439.

112. Partial positive scaling transform: a separability criterion / O. V. Man'ko [et al.] // Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 339, no. 3. — P. 194–206.
113. *Petrosky T., Prigogine I.* The Liouville space extension of quantum mechanics // Advances in Chem. Phys. — 2009. — Vol. 99. — P. 1–120.
114. *Prosen T., Seligman T. H.* Quantization over boson operator spaces. — 2010. — arXiv: [1007.2921](#).
115. *Prosen T., Zunkovic B.* Exact solution of Markovian master equations for quadratic Fermi systems: thermal baths, open XY spin chains and non-equilibrium phase transition // New J. Phys. — 2010. — Vol. 12. — P. 025016.
116. *Puri R. R.* Mathematical methods of quantum optics. — Berlin : Springer-Verlag, 2001. — 285 p.
117. *Raginsky M.* A fidelity measure for quantum channels // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 290, no. 1. — P. 11–18.
118. *Risken H., Frank T.* The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Vol. 18. — Berlin : Springer-Verlag, 1996. — 454 p. — (Springer series in synergetics).
119. *Robertson H. P.* The Uncertainty Principle // Phys. Rev. — 1929. — Vol. 34, issue 1. — P. 163–164.
120. *Sandulescu A., Scutaru H., Scheid W.* Open quantum system of two coupled harmonic oscillators for application in deep inelastic heavy ion collisions // J. Phys. A: Mathematical and General. — 1987. — Vol. 20, no. 8. — P. 2121.
121. *Saygin M. Y., Chirkin A. S.* Simultaneous parametric generation and up-conversion of entangled optical images // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2010. — Vol. 111, no. 1. — P. 11–21.
122. *Semin V., Petruccione F.* Minimalistic analytical approach to non-Markovian open quantum systems // EPL. — 2016. — Vol. 113, no. 2. — P. 20004.
123. *Shaji A., Sudarshan E. C. G.* Who's afraid of not completely positive maps? // Physics Letters A. — 2005. — Vol. 341, no. 1–4. — P. 48–54.
124. *Simon R., Mukunda N., Dutta B.* Quantum-noise matrix for multimode systems: U(n) invariance, squeezing, and normal forms // Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 49. — P. 1567.

125. Squeezing Operator and Squeeze Tomography / O. Castanos [et al.] // Topics In Mathematical Physics, General Relativity And Cosmology In Honor Of Jerzy Plebanski. — World Scientific, 2006. — P. 109–120.
126. *Sudarshan E. C. G.* Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams // Physical Review Letters. — 1963. — Vol. 10, no. 7. — P. 277.
127. *Tan W., Li Y., Zhang W.* The solution of the Fokker-Planck equation with zero or negative diffusion coefficients in quantum optics // Opt. Comm. — 1987. — Vol. 64, no. 42. — P. 195–199.
128. *Teretenkov A. E.* Quadratic dissipative evolution of Gaussian states with drift // Math. Notes. — 2017. — Vol. 101, no. 2. — P. 341–351.
129. *Terhal B. M., Di Vincenzo D. P.* Classical simulation of noninteracting-fermion quantum circuits // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 032325.
130. *Tlyachev T. V., Chebotarev A. M., Chirkin A. S.* A new approach to quantum theory of multimode coupled parametric processes // Physica Scripta. — 2013. — Vol. 2013, T153. — P. 014060.
131. *Tlyachev T. V., Chebotarev A. M., Chirkin A. S.* Canonical transformations and multipartite coupled parametric processes // Physica Scripta. — 2014. — Vol. 2014, T160. — P. 014041.
132. Toeplitz and circulant matrices: A review / R. M. Gray [et al.] // Foundations and Trends in Communications and Information Theory. — 2006. — Vol. 2, no. 3. — P. 155–239.
133. *Trushechkin A. S., Volovich I. V.* Perturbative treatment of inter-site couplings in the local description of open quantum networks // EPL. — 2016. — Vol. 113, no. 3. — P. 30005.
134. *Wilcox R. M.* Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics // J. Math. Phys. — 1967. — Vol. 8, no. 4. — P. 962–982.
135. *Williamson J.* An algebraic problem involving the involutory integrals of linear dynamical systems // American J. Math. — 1940. — Vol. 62, no. 1. — P. 881–911.

136. *Williamson J.* On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // *American J. Math.* — 1936. — Vol. 58, no. 1. — P. 141–163.
137. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // *American J. Math.* — 1937. — Vol. 59, no. 3. — P. 599–617.
138. *Yuen H. P., Tombesi P.* Langevin equations with negative diffusion coefficients. A new approach to quantum optics // *Opt. Commun.* — 1986. — Vol. 59, no. 2. — P. 155–159.
139. *Siudzińska K., Chruściński D.* Memory kernel approach to generalized Pauli channels: Markovian, semi-Markov, and beyond // *Physical Review A.* — 2017. — T. 96, № 2. — C. 022129.
140. URL: <https://github.com/LeXMSU/Quadratica>.
141. URL: <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/9703/>.