

История изучения маховского отражения ударной волны от клина

Павел Викторович Булат,

Владимир Николаевич Усков,

Университет ИТМО

Аннотация. Рассматривается история изучения ударно-волновых структур, возникающих при набегании ударной волны на клин. Вводится понятие регулярного и маховского отражения. Рассмотрена трехволновая модель фон Неймана, содержащая ветвящуюся ударную волну, главный и отраженный разрыв, тангенциальный разрыв (поверхность скольжения) за линией пересечения ударных волн. Описаны эксперименты по изучению маховского отражения при малых числах Маха и малом угле при вершине клина. Приведены основные работы, посвященные парадоксу Неймана, когда при малых числах Маха маховское отражение в соответствии с теорией не может существовать, но, тем не менее, наблюдается в экспериментах. Работа полезна для инженеров и научных работников для составления общего представления о проблеме маховского отражения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: УДАРНАЯ ВОЛНА, ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ, МАХОВСКОЕ ОТРАЖЕНИЕ, МОДЕЛЬ НЕЙМАНА, ПАРАДОКС НЕЙМАНА.

ВВЕДЕНИЕ

Цель - показать на примере наиболее значимых научных работ, как происходило изучение явления маховского отражения ударной волны от клина. Рассматривается нерегулярное (маховское) отражение газодинамических разрывов (ГДР) от препятствий. Представлены исследования Маха и фон Неймана, положившие начало изучению различных видов тройных конфигураций ударных волн. Представлена история изучения тройных конфигураций, возникающих в сверхзвуковых струях и при отражении ударной волны от клина. Рассмотрены основные виды маховского отражения и их классификация.

Первые ударно-волновые структуры были описаны Э.Махом [1;1878]. В своей работе он описал два вида отражения ударной волны от наклонной поверхности:

- *регулярное отражение*, которое состоит из двух ударных волн: падающей волны, приходящей на твердую поверхность, и отраженной, исходящей из точки падения;

- *нерегулярное отражение*, которое состоит из трех ударных волн — падающей, отраженной и главной — имеющих общую тройную точку Т (рисунок 1).

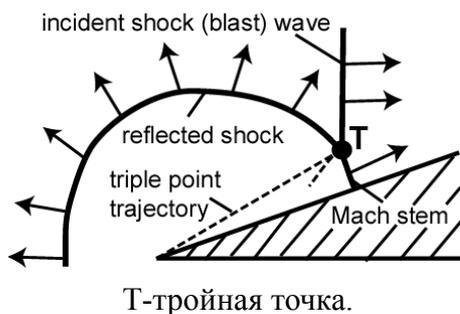


Рисунок 1 - Образование тройной конфигурации при набегании ударной волны на клин.

Такой вид отражения носит название простого Маховского, а соответствующая конфигурация, если она не содержит других нормальных разрывов, — *тройной конфигурации* (ТК) ударных волн.

Выполненный Э.Махом эксперимент заключался в следующем: в двух точках, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, одновременно проскакивали две искры, порождавшие две сферические ударные волны. Под этими точками помещалась поверхность, покрытая сажой. Ударные волны оставляли отчетливый след точек их пересечения, начинающийся посередине между точками инициализации волн. Далее отрезок на концах разделялся на две симметрично расходящиеся линии.

Полученная картина соответствует тому, что на ранней стадии взаимодействия ударные волны отражаются друг от друга так, как будто происходит отражение в регулярном режиме от воображаемой плоскости, расположенной посередине между точками инициализации волн. Затем образуется скачок Маха.

Поскольку на покрытой сажой поверхности оставались лишь траектории точек пересечения волн, Э.Маху потребовалось хорошее пространственное воображение,

чтобы реконструировать по этим следам общую картину ударно-волнового взаимодействия. Опыты Э.Маха интересны еще и тем, что положили начало изучению ударно-волновых структур. Долгое время изучение ударно-волновых структур (УВС) сводилось исключительно к рассмотрению маховского отражения ударной волны от клина. Позднее изучались и другие УВС, например, возникающие в сверхзвуковом течении между клиньями.

1. Трехволновая модель фон Неймана

Теоретическое исследование регулярного отражения и тройной конфигурации ударных волн было впервые выполнено фон Нейманом в 1943 году [2; 1943]. В описании ТК фон Нейман предположил, что из тройной точки исходит тангенциальный разрыв (поверхность скольжения τ), разделяющий потоки за отраженной σ_2 и за главной σ_c ударными волнами (Рисунок 2).

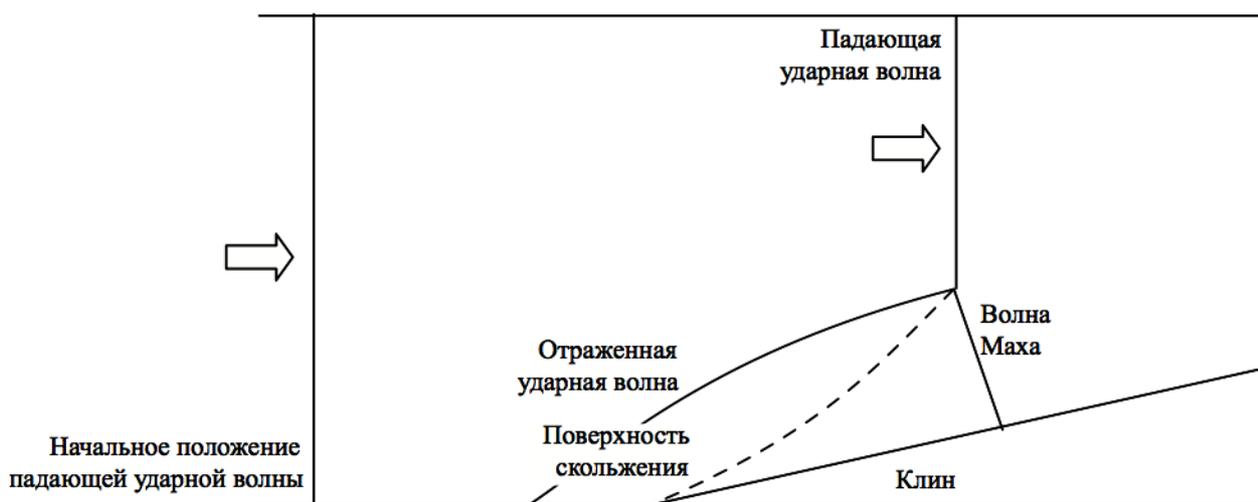


Рисунок 2 - Модель тройной конфигурации фон Неймана.

В реальности на поверхности скольжения всегда развивается слой смешения. Свойства тангенциальных и нормальных контактных разрывов рассмотрены в книге Ландау и Лифшица [3; 1953]. Такие разрывы являются неустойчивыми. Этот вид неустойчивости известен как неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Как показали экспериментальные исследования Брауна и Рошко, выполненные в 1974 году [4; 1974], и Рагаба и Ву, опубликованные в 1989 году [5; 1989], в стационарных двумерных течениях характерная толщина области неустойчивости Кельвина–

Гельмгольца растет линейно от продольной координаты вниз по потоку. Область неустойчивости быстро становится турбулентной зоной смешения.

Нейман сформулировал двух- и трехволновые теории отражения ударной волны от клина. Он же высказал идею о том, что отражение может быть правильным (*регулярным*) и неправильным (*нерегулярным*, как альтернатива правильному), а маховское отражение есть одно из возможных типов нерегулярного отражения. Нейман также качественно описал вид нерегулярного отражения, который назвал немаховским и который в последствии получил название „отражение Неймана“ [6].

В работе Бликни, Флэтчера и Вэймера [7; 1949] и других экспериментально проверялось предположение фон Неймана о существовании тангенциального разрыва за тройной точкой. Во многих экспериментах контактный разрыв наблюдался, а в тех случаях, когда он не наблюдался, теоретическое значение перепада плотностей по его сторонам не превосходило погрешности измерения, поэтому его и не удавалось зафиксировать. Таким образом, модель фон Неймана была доказана.

Вслед за экспериментальным подтверждением модель ТК Неймана была обоснована теоретически. Курант и Фридрихс [8; 1948] показали, что в рамках модели идеального газа три ударные волны могут существовать в одной точке только при наличии еще какой-либо поверхности разрыва. В своей работе Курант и Фридрихс также теоретически обосновали, что в зависимости от направления движения тройной точки (Т на рисунок 3) маховское отражение может быть разделено на три типа:

- *простое маховское* (тройная точка по мере продвижения ударной волны движется от поверхности клина, ножка Маха увеличивается, D_tMR на рисунке 3),
- *стационарное маховское* (тройная точка движется параллельно поверхности, S_tMR на рисунке 3) и
- *обращенное маховское отражение* (тройная точка движется по направлению к поверхности, I_nMR на рисунке 3).

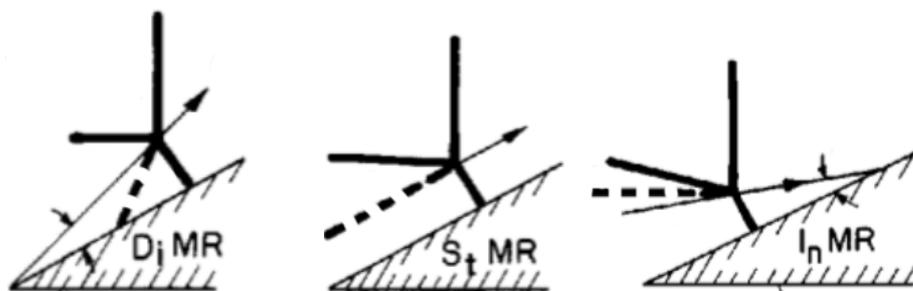


Рисунок 3 - Простое D_i MR, стационарное S_t MR и обращенное I_n MR (инверсное) маховское отражение ударной волны от клина.

В 1967 году Брид развил результат Куранта и Фридрихса на случай произвольных уравнений состояния газа [9; 1967]. В.Н.Усковым совместно с М.В.Чернышевым в 2008 г. было представлено полное исследование стационарных ТК, отвечающих модели фон Неймана [10; 2008], позднее обобщенное на нестационарный случай [11; 2008]. Модель фон Неймана для реального газа рассмотрена Ло для кислорода [12; 1970] и Бен-Дором [13; 1978] для азота и аргона. В этих работах калорические свойства газов описывались с помощью набора колебательных уровней энергии молекул, для каждого из которых была задана энергия его активации и его кратность. В работе Ли и Гласса [14; 1984] утверждается, что при расчете ТК в кислороде O_2 и азоте N_2 можно пользоваться моделью идеального газа, а при расчете в углекислом газе CO_2 и шестифтористой сере SF_6 необходимо использовать уже модель несовершенного газа. Сравнение различных моделей двухатомного несовершенного газа в приложении к расчету ТК было выполнено В.Н.Усковым и П.С.Мостовых [15; 2011].

2 Анализ применимости модели Фон Немана для малых углов клина и слабых ударных волн

Экспериментальные исследования взаимодействия бегущей ударной волны с неподвижным клином, выполненные Смитом в 1945 году [16; 1945], показали зависимость характера отражения волны от угла при вершине клина. Смит установил также, что при больших скоростях падающей ударной волны на отраженной ударной волне в маховском отражении образуется излом. Такую ТК Смит назвал *сложным маховским отражением* (Рисунок 4а). В 1951 году Уайт [17; 1951] обнаружил, что при еще больших скоростях падающей ударной волны

отраженная ударная волна сама выступает как падающая и образует вторую тройную конфигурацию. Данную УВС называют *двойным маховским отражением* или отражением Маха-Уайта (Рисунок 4б).

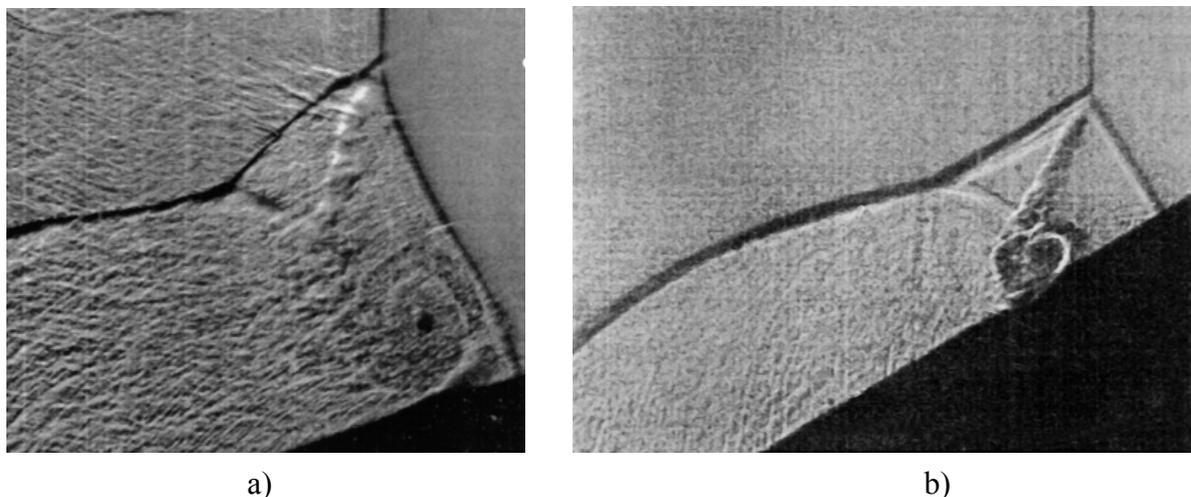


Рисунок 4 - Сложное (а) и двойное (б) маховское отражение.

Подробный обзор состояния этого вопроса приведен в работе Бликни и Тауба [18; 1949]. Как отмечают авторы, наблюдается неудовлетворительное соответствие результатов экспериментов предсказаниям теории фон Неймана для малых углов клина и в области значений параметров, близкой к переходу от регулярного к Маховскому отражению. Несовпадение экспериментальных данных и предсказаний теории, как следует из обзора, не может быть объяснено несправедливостью предположений фон Неймана о структуре ТК.

Решению данной проблемы посвящены работы Баргманна [19; 1945], Лайтхилла [20; 1949] и Тинга и Людлоффа [21; 1951], в которых используются приближенные аналитические методы расчета полей газодинамических параметров в рассматриваемом течении. В этих работах угол при вершине клина рассматривается как малый параметр, по которому проводится разложение решения. В качестве нулевого приближения рассматривается течение, реализующееся при нулевом угле при вершине клина. Флэтчер и др. [22; 1951] опубликовали экспериментальные данные для клина с углом при вершине десять градусов. Сравнение с выполненными ранее расчетами показало, что теоретически

полученные результаты качественно хорошо повторяют эксперимент, но количественно заметно отличаются от него.

Экспериментальные исследования и теоретический метод анализа ударных поляр, предложенный в 1956 году Кавамура и Сайто [23; 1956], также не дали удовлетворительного соответствия между теорией и экспериментом. Бликни и Тауб в упомянутой выше обзорной статье на основании полученных ими экспериментальных результатов и экспериментальных данных Смита построили зависимость угла клина, при котором происходит переход к маховскому отражению падающей ударной волны, от её интенсивности. По их данным, переход происходит в области, где регулярное отражение теоретически невозможно (необходимый угол разворота потока превышает предельный угол разворота на ударной волне). Этот критерий получил название критерия отсоединения (ударной поляры от оси ординат) или критерия фон Неймана. Результаты Смита экспериментально подтвердили Кавамура и Сайто. Выяснилось также, что с увеличением интенсивности ударных волн область малых углов при вершине клина, при которых теория фон Неймана далека от эксперимента, уменьшается. Напротив, область углов, при которых происходит переход от Маховского отражения к регулярному и теоретически возможны оба типа отражения, увеличивается.

Обратив внимание на тот факт, что в некотором диапазоне углов клина ударная поляра пересекается как с осью ординат, так и с верхней ветвью изомахи, т.е. теоретически возможны, как регулярное, так и маховское отражение, Нейман предложил и другой критерий перехода от регулярного отражения к маховскому, несколько неудачно назвав его "критерием механического равновесия". В соответствии с этим критерием переход должен происходить в момент пересечения ударной поляры с изомахой в её вершине, т.е. интенсивность ножки Маха в данном случае равняется максимальной для заданного числа Маха, определяющего изомаху (рисунок 5). Возникающая при этом УВС называется **Стационарной Маховской Конфигурацией** (СМК). Именно поэтому данный критерий был назван В.Н.Усковым **критерием СМК**.

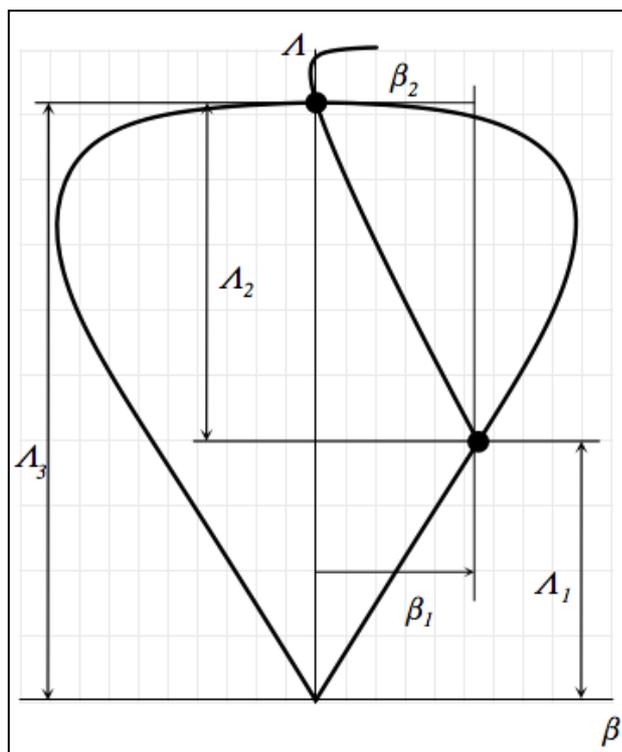


Рисунок 5 - Решение на плоскости поляр, соответствующее переходу от регулярного отражения к нерегулярному в соответствии с критерием СМК.

На рисунке 5: β_1 - угол разворота потока на входящем скачке, β_2 - угол разворота потока на отраженном скачке, λ_1 - логарифм интенсивности входящего скачка, λ_2 - логарифм интенсивности отраженного скачка, λ_3 - логарифм интенсивности ножки Маха. Последующие исследования показали, что часто имеет место гистерезис, т.е. при увеличении угла переход от регулярного отражения к нерегулярному происходит при интенсивности близкой к критерию отсоединения, а при уменьшении угла наклона скачка обратный переход ближе к критерию СМК. Этому вопросу посвящено большое количество работ.

Поиску иных критериев и/или подтверждению критерия фон Неймана в 70-е - 80-е годы XX-ого века были посвящены многочисленные экспериментальные исследования, проводившиеся в ударных трубах. Современное состояние вопроса подробно освещено в монографии Бен-Дора [24; 2007]. В ходе экспериментов критерий отсоединения был подтвержден Хендерсоном и Лоззи [25; 1975] для стационарных течений двухатомных газов при числах Маха набегающей волны от 1 до 4, Хорнунгом и Кичакоффом [26; 1977] для аргона и чисел Маха падающей ударной волны вплоть до 16, в псевдостационарных случаях - Хорнунгом,

Оэртелем и Сандеманом [27; 1979], для псевдостационарных течений, простого, сложного и двойного Маховского отражения - в работах Бен-Дора и Гласса 1979–1980 годов [28; 1979], [29; 1980]; для стационарного течения - Хорнунгом и Робинсоном [30; 1982].

3 Четырехволновая модель Гудерлея для маховского отражения слабой ударной волны и другие модели

Помимо модели фон Неймана, было предложено несколько других возможных локальных картин течения в тройной точке маховского отражения. В 1959 году Стернберг [31; 1959] высказал предположение, что в ближайшей окрестности тройной точки поверхность тангенциального разрыва не является полностью сформировавшейся. Стернберг произвел расчет течения в окрестности тройной точки ТК с учетом вязкости газа.

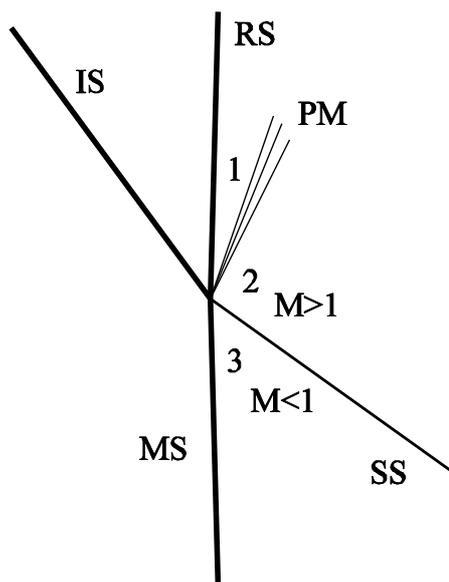
Описание тройной точки вообще без использования УДС на ГДР, т. е. без использования соотношений Рэнкина–Гюгонио, было впервые предпринято в 1964 году в работе Сакураи [32; 1964]. Он получил приближенное аналитическое решение уравнений Навье-Стокса в малой окрестности тройной точки. Сакураи нашел газодинамические параметры в окрестности тройной точки в зависимости от полярного угла и показал, что при очень малых значениях интенсивности скачков полученная им теория лучше соответствует эксперименту, чем теория фон Неймана. При больших интенсивностях скачков, напротив, теория фон Неймана более точна. Такой результат представляется естественным. В малой окрестности точки интерференции сильно влияние реальных свойств газа, а ударные волны нельзя считать бесконечно тонкими. По мере удаления от точки интерференции снижается точность разложения уравнений в ряд по малому параметру.

Стоит упомянуть и вовсе экзотические гипотезы. В работе Дулова [33; 1973] и в работе Дулова и Лукьянова [34; 1984] было высказано предположение, что из тройной точки выходит не один, а два тангенциальных разрыва, однако это предположение не нашло экспериментального подтверждения и не получило математического развития. В настоящее время модель фон Неймана считается общепризнанной. Тем не менее, остался необъясненным парадокс Неймана [35]. Напомним, что для чисел Маха, меньших особого числа

$$M_T = \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (1)$$

решение для нерегулярного отражения ударной волны от стенки с образованием тройной точки отсутствует, тем не менее, оно наблюдается экспериментально [36], γ - показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. На протяжении почти сорока лет проводили эксперименты [37, 38, 39], порой весьма тонкие, которые однозначно продемонстрировали, что трехволновая теория не работает [40] при отражении слабых ударных волн с числом Маха набегающего потока меньше M_T .

Гудерлеем для случая слабых ударных волн (малых чисел Маха) была предложена четырехволновая модель (рисунок 6) с дополнительной волной разрежения за отраженным разрывом [41; 1947], [42; 1964]. Похожая модель исследовалась в работе Е.И.Васильева и А.Н.Крайко [43; 1999].



IS - падающий скачок, RS - отраженный скачок, MS - ножка Маха, PM - волна разрежения
Прандтля-Майера, SS - тангенциальный разрыв.

Рисунок 5 - Конфигурация УВС в четырехволновой модели Гудерлея.

Долгое время не удавалось получить и численное решение для такого рода потоков, пока Е.И.Васильев [44] не продемонстрировал, что все дело в недостаточной точности численных методов, влиянии "схемной" вычислительной вязкости и паразитных осцилляций решения, а течение отвечает

"четырёхволновой" модели Гудерлея [45]. Для этого был использован численный метод с выделением разрывов [46].

4 Критерий перехода к маховскому отражению в осесимметричном случае

Развитие реактивной техники в 50-е годы XX-ого века вызвало серию работ, посвященных изучению проблемы появления диска Маха в сверхзвуковых газовых струях, истекающих из сопел Лавалья. Эти диски, представляющие собой прямые скачки уплотнения на оси струи, хорошо видны при запуске ракетных и воздушно-реактивных двигателей.

Критерий отсоединения фон Неймана кажется очевидным в плоской задаче, но как происходит образование тройной точки при отражении скачка от оси симметрии в осесимметричном случае, ведь при приближении к оси симметрии падающий скачок искривляется, интенсивность его растет? Следовательно, тройную точку можно разместить в разных местах на скачке и УДС на тангенциальном разрыве будут выполнены. Как отобрать нужное решение - этому вопросу были посвящены многочисленные работы.

На невозможность регулярного отражения скачка уплотнения от оси симметрии без образования диска Маха было впервые указано еще в работе Д.А.Мельникова [47; 1962]. Действительно, на оси симметрии должны выполняться условия равенства нулю угла наклона вектора скорости и кривизны линии тока за отраженным скачком, но при $y=0$ это невозможно. При приближении падающего скачка к оси симметрии его кривизна K_σ стремится к бесконечности, т.к. $K_\sigma \sim y^{-1}$, поэтому всегда создаются условия образования маховского диска в нерасчетной струе. Для расчета течений с отражением скачка уплотнения от оси симметрии Мельниковым был предложен приближенный метод расчета, в котором размер Маховского «диска» являлся эмпирически задаваемой величиной. В работах [48; 1990] и [49; 2012] представлены уточнения доказательства Мельникова невозможности существования конфигурации регулярного отражения сильного ГДР от оси симметрии.

Подробный анализ данного вопроса выполнен в [50; 1989], где обсуждаются различные имеющиеся в литературе гипотезы перехода от регулярного отражения скачка уплотнения от оси к нерегулярному (маховскому). Наиболее известная из них это, так называемая, модель Аббета [51; 1971], модернизированная в работах Дэша [52; 1981]. Аббет предположил, что в критическом сечении за диском Маха выполняется условие «горла течения», т.е. скорость течения становится равной местной скорости звука (рисунок 6). Если задавать на падающем скачке положение тройной точки, то тем самым определяются начальные условия для расчета течения, ограниченного диском Маха и тангенциальным разрывом.

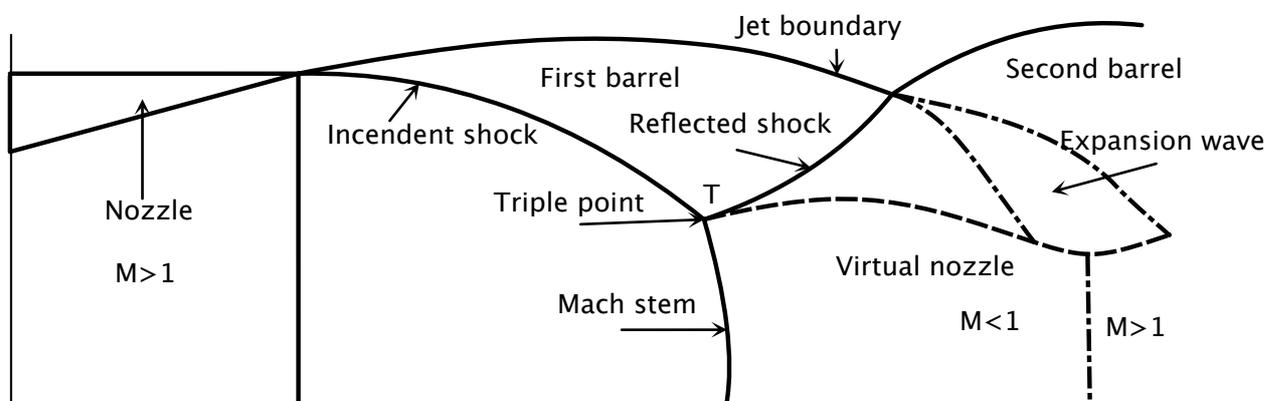


Рисунок 6 - Пояснения к процедуре Аббета нахождения положения диска Маха в сверхзвуковой осесимметричной струе.

Считая это течение одномерным, можно выполнить расчет также, как в сопле Лавалья. Если в результате расчета в минимальном сечении течения за диском Маха скорость равна местной скорости звука, то в процедуре Аббета - Дэша считается, что положение диска Маха в струе выбрано верно. Последовательное развитие данной модели Дэшем [53, 54] показало, что она близка к результатам эксперимента только на отдельных режимах течения и проще рассчитывать диск Маха с помощью неявных методов решения параболизированных уравнений Навье-Стокса [55]. Среди других моделей хорошо подтверждается критерий, согласно которому образование диска Маха происходит при достижении интенсивности падающего скачка значения $J=J_0$, соответствующего **стационарной маховской конфигурации** (СМК). В СМК (рисунок 5) главный скачок уплотнения является прямым.

Характерная интенсивность J_0 получается из решения кубического уравнения, соответствующего пересечению поляр в вершине основной поляры

$$\begin{aligned} A_3 &= 1 - \varepsilon^2, \\ A_2 &= -\left((1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)J_m + 1 + \varepsilon^2\right), \\ \sum_{k=0}^3 A_k J_0^k &= 0, \quad A_1 = \varepsilon(1 + J_m)[(1 - \varepsilon)J_m - 2], \\ A_0 &= (1 - \varepsilon)J_m(J_m - 1), \\ J_m &= (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Косвенным обоснованием критерия J_0 служит решение задачи первого порядка о тройных конфигурациях ударных волн (скачков), полученное В.Н.Усковым еще в его докторской документации и опубликованное в 2012 г. [56]. Суть его состоит в том, что если в каждой точке висячего (падающего на ось симметрии) скачка производить формальный расчет тройной конфигурации ударных волн (Рисунок 7), то при интенсивностях $J < J_0$ тройная конфигурация относится к типу ТК-1 и исходящий тангенциальный разрыв τ имеет положительную кривизну (1 и 2 на рисунке 7). В точке скачка, где $J = J_0$ ($StMR$), кривизна τ становится отрицательной, что соответствует сложившимся эмпирическим представлениям о форме тангенциального разрыва.

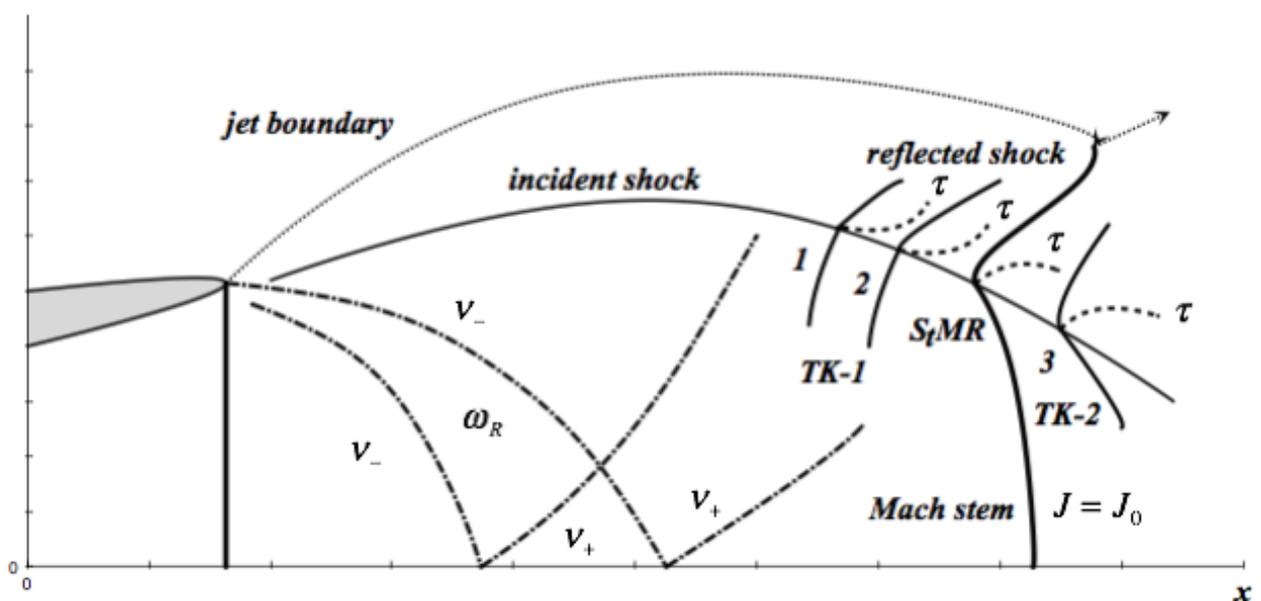


Рисунок 7 - К обоснованию модели стационарной маховской конфигурации для диска Маха в сверхзвуковой недорасширенной струе.

Тройная конфигурация соответствует переходному типу ТК-1/2 (*СМК-StMR*). При расположении тройной точки ниже по потоку (точка 3 на рисунке 7), тройная конфигурация будет относиться к типу ТК-2. Критерий стационарной маховской конфигурации был строго доказан П.В.Булатом в 2012 г [57], с использованием теории особенностей гладких отображений, развитой для ударных волн под руководством В.И.Арнольда. Сравнение результатов расчетов с экспериментом показало хорошее совпадение. В работе [58; 2003] разработан метод оценки размеров маховского скачка в перерасширенной струе, причем зависимость его размера от нерасчетности монотонна и принимает нулевое значение при параметрах струи, соответствующих критерию фон Неймана.

Таким образом, вопрос о критерии перехода к маховскому отражению в осесимметричном случае можно считать закрытым. Переход осуществляется при достижении падающей ударной волной интенсивности J_0 , соответствующей СМК.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено нерегулярное отражение разрыва от клина, плоскости и оси симметрии, плоской стенки. Представлена информация о диске Маха в сверхзвуковых струях. Показано, что в точке зарождения диска Маха на висячем скачке интенсивность этого скачка должна быть равна особой интенсивности J_0 , соответствующей пересечению ударной поляры отраженного скачка с вершиной ударной поляры, построенной по числу Маха набегающего потока. В иных случаях вопрос о критерии перехода к маховскому отражению остался открытым. Имеются области неоднозначности решения. При малых интенсивностях ударных волн теория предсказывает невозможность маховского отражения ударной волны от препятствия, но оно наблюдается в экспериментах. Это явление известно как парадокс фон Неймана. Эксперименты также демонстрируют гистерезис характеристик отражения в зависимости от направления изменения угла наклона скачка (уменьшение или увеличение). Изучение нерегулярного отражения ударных волн остается важнейшей задачей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Mach, E. Uber den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume. Sitzungsbr. Akad. Wiss. Wien, Bd. 78. - 1878. - S. 819–838.
- 2 Neumann, J. Oblique reflection of shocks. In: Collected Works, Pergamon, Vol. 6, 1943.
- 3 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. См.: Гидродинамика. - М.: - Физматлит. - 2003. - 736 с.
- 4 Brown G.L., Roshko A. (1974) On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech. Vol. 64. Is. 4. July. P. 775–816.
- 5 Ragab S.A., Wu J.L. (1989) Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers. Physics of Fluids A. Vol. 1. Is. 6, p. 957–966.
- 6 Neumann, J. // Collected works. Oxford–London–N.Y.– Paris: Pergamon Press, 1963. 427 p.
- 7 Bleakney, W., Fletcher, C.H., Weimer, D.K. The Density Field in Mach Reflection of Shock Waves. Physical Review. Vol. 76. - 1949. - P. 323–324.
- 8 Courant, R., Friedrichs, K.O. Supersonic flow and shock waves. - New York. - 1948.
- 9 Breed, B.R. Impossibility of three confluent shocks in two-dimensional irrotational flow. Physics of Fluids. Vol. 10. - 1967. - P. 21.
- 10 Усков В.Н., Чернышов М. В. 2009. “Тройные Конфигурации Стационарных Ударных Волн.” Актуальные проблемы защиты и безопасности: Труды Двенадцатой Всероссийской научно-практической конференции. Технические средства противодействия терроризму и оружие нелетального действия. Том 1.:С. 420–435.
- 11 Uskov V.N., Mostovykh P. S. 2008. “Triple Configurations of Traveling Shock Waves in Inviscid Gas.” Flws-Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. Vol. 49 (No.3):P. 347–353.
- 12 Law C.K. (1970) Diffraction of strong shock waves by a sharp compressive corner. University of Toronto Institute for Aerospace Studies (UTIAS) Technical Note No. 150. July.
- 13 Ben-Dor G. (1978) Regions and transitions of nonstationary oblique shock-waves diffractions in perfect and imperfect gases. University of Toronto Institute for Aerospace Studies (UTIAS) Report No. 232.

- 14 Lee J.-H., Glass I.I. (1984) Pseudo-stationary oblique-shock-wave reflections in frozen and equilibrium air. // Progress of Aerospace Sciences. Vol. 21. P. 33–80.
- 15 Uskov V.N., Mostovykh P. S. 2011. “Triple-Shock-Wave Configurations: Comparison of Different Thermodynamic Models for Diatomic Gases.” Proceedings 28th International Symposium on Shock Waves. Paper No. :P. 1–7.
- 16 Smith, L.G. Photographic investigations of the reflection of plane shocks in air. Office of Scientific Research and Development. - 1945. - No. 6271.
- 17 White, D.R. An experimental survey of the Mach reflection of shock waves. Princeton University, Department of Physics, Technical Report II-10, Princeton, N.J., USA. - 1951.
- 18 Bleakney W., Taub A.H. (1949) Interaction of Shock Waves. Reviews of Modern Physics. Vol. 21. P. 584–605.
- 19 Bargmann V. (1945) On nearly glancing reflection of shocks. AMP Report 108.2R NDRC.
- 20 Lighthill M.J. (1949) Proc. Roy. Soc. (London). Series A. Vol. 198. P. 454–470.
- 21 Ting L., Ludloff H.F. (1951) J. Aeronaut. Sci. Vol. 18. P. 143.
- 22 Fletcher C.H., Taub A.H., Bleakney W. (1951) The Mach Reflection of Shock Waves at Nearly Glancing Incidence. Rev. Mod. Phys. Vol. 23. P. 271–286.
- 23 Kawamura R., Saito H. (1956) Reflection of Shockwaves—1 Pseudo-Stationary Case. Journal of the Physical Society of Japan. Vol. 11, No. 5, May, p. 584–592.
- 24 Ben-Dor G. (2007) Shock wave reflection phenomena. Springer.
- 25 Henderson L.F., Lozzi A. (1975) Experiments on transition of Mach reflexion. J. Fluid Mech. Vol. 68. P. 139–155.
- 26 Hornung H.G., Kychakoff G. (1977) Proceedings 11th International Symposium on Shock Tubes and Waves (Seattle). P. 296–302.
- 27 Hornung H.G., Oertel H., Sandeman R.J. (1979) Transition to Mach reflection of shock waves in steady and pseudosteady flow with and without relaxation. J. Fluid Mech. Vol. 90. P. 541.
- 28 Ben-Dor G., Glass I.I. (1979) Domains and boundaries of non-stationary oblique shock-wave reflexions. 1. Diatomic gas. J. Fluid Mech. Vol. 92. Part 3. P. 459–496.
- 29 Ben-Dor G., Glass I.I. (1980) Domains and boundaries of non-stationary oblique shock-wave reflexions. 2. Monatomic gas. J. Fluid Mech. Vol. 96. Part 4. P. 735–756.

- 30 Hornung H.G., Robinson M.L. (1982) Transition from regular to Mach reflection of shock waves. Part 2. The steady-flow criterion. *J. Fluid Mech.* Vol. 123. P. 155–164.
- 31 Sternberg J. (1959) Triple-Shock-Wave Intersections. *Physics of Fluids.* Vol. 2. P. 179–206.
- 32 Sakurai A. (1964) On the problem of weak Mach reflection. *Journal of the Physical Society of Japan.* Vol. 19, No. 8, August, p. 1440–1450.
- 33 Dulov V.G. (1973) Motion of triple configuration of shock waves with formation of wake behind branching point. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* Vol. 14, No. 6, P. 791–797.
- 34 Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. (1984) Газодинамика процессов истечения. Наука, Новосибирск.
- 35 Neuman J. *Collected works.* Oxford: Pergamon press, 1963. V.6. P. 239-299.
- 36 White D.R. An experimental survey of shock waves // *Proc. 2nd Midwest Conf. On Fluid Mechanics.* Columbus: Ohio State Univ. Press, 1952. No 3. FJ. 253-262.
- 37 Henderson L.F., Siegenthaler A. Experiments on the diffraction of weak blast waves: The von Neumann paradox // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1980. V. 369. P. 537-555.
- 38 Colella P., Henderson L.F. The von Neumann paradox for the diffraction of weak shock waves // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 213. P. 71-94.
- 39 Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S. Mach reflection of a weak shock waves // *Trans. Japan Soc. Mech. Engng.* 1994. V. 60. No 575. P. 2281-2286
- 40 Olim M., Devey J.M. A revised three-shock solution for the Mach reflection of weak shocks // *Shock Waves.* 1992. V. 2. P. 167-176.
- 41 Guderley K. (1947) Considerations on the Structure of mixed subsonic supersonic flow patterns, HQ Air Materiel Command, Wright Field, Dayton, Ohio, Technical Report F-TR-2168-ND.
- 42 Guderley K.G. (1962) The theory of transonic flow, Translated from the German by J.R. Moszynski. Oxford, New York, Pergamon Press, p. 344.
- 43 Васильев Е. И., Крайко А. Н. Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1999. Т. 39, No 8. С. 1393–1404.
- 44 Vasilev E. I. Four-wave scheme of weak Mach shock waves interaction under the von Neumann paradox conditions // *Fluid Dynamics.* -1999. -V.34.- N3.- p.421.
- 45 Гудерлей К.Г. Теория околосвуковых течений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - 421с.

- 46 Vasilev E., Olkhovsky M. // 27th ISSW: Book of proceedings. 2009. P. 322.
- 47 Мельников Д.А. (1962) Отражение скачков уплотнения от оси симметрии. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. No 3, С. 24–30.
- 48 Рылов А.И. (1990). К вопросу о невозможности регулярного отражения стационарной ударной волны от оси симметрии. // Прикладная математика и механика. Том 54. Вып. 2. С. 245–249.
- 49 Исакова Н.П., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. (2012) Об усилении слабых ударных волн в осесимметричном сверхзвуковом потоке и их отражении от оси симметрии. // Прикладная математика и механика. Том 76. Вып. 4. С. 623–645.
- 50 Авдудевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г. Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. - М.: Машиностроение, 1989. – 320 с.
- 51 Abbett M.J., Mach Disk in Underexpanded Exhaust Plumes, AIAA Journal, Vol. 9, March 1971, pp.512-514.
- 52 Dash S.M. Thorpe R.D. Shock – Capturing Model of One- and Two- Phase Supersonic Exhaust Flow. – AIAA J., vol. 19, July 1981, pp. 842-851.
- 53 Dash S.M., Wolf D.E. Interactiv Phenomen in Supersonic Jet Mixin Problems, Part. 1. – AIAA J., May 1984, pp. 905-913.
- 54 Dash S.M., Sinha N., York B.J. Implicit/Explicit Analysis of Interactive Phenomena in Supersonic Chemically – Reaching Mixing and Boundary Layer Problems. – AIAA paper 8517, 17 July 1985.
- 55 Dash S.M. Seiner J.M., Wolf D.E. Analysis of Turbulent underexpanded Jets. Part. 2: Parabolized Navier Stokes Model, SCIPVIS. – AIAA J., vol. 23, 23, May 1985.
- 56 Uskov V.N., Mostovykh. P. S. (2012). Differential Characteristics of shock wave and triple-shock-wave configuration. 20th International Shock Interaction Symposium, P. 211–214.
- 57 Булат П.В., Продан Н.В., Усков В. Н. Обоснование применения модели стационарной маховской конфигурации к расчету диска маха в сверхзвуковой струе. Журнал Фундаментальные Исследования., 2012, № 11(Ч. 1), С. 168–175.
- 58 Омельченко А.В., Усков В.Н., Чернышов М.В. Об одной приближенной аналитической модели течения в первой бочке перерасширенной струи // Письма в Журнал технической физики. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 56-62. Англ. перевод: Omel'chenko A.V., Uskov V.N., Chernyshev M.V. An Approximate Analytical Model of Flow in the First Barrel of an Overexpanded Jet // Technical Physics Letters. 2003. Vol. 29. No. 3. Pp. 243-245.