

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ С КУСОЧНО ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

Подорога А. В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва

e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com

Podoroga A. V. Numerical study of a quasilinear conservation law with a piecewise linear flux function. The basic concepts related to the quasi-linear scalar conservation law are presented. The main idea of a shocks movement method is given. This method allows us to accurately calculate the solutions of the considered quasi-linear equation. We particularly emphasize a special case of a nonconvex flux function, which presents difficulties in the theory. We use the computer program implementing the shocks movement method to perform a large number of numerical experiments with different data.

Keywords: quasi-linear equation, scalar conservation law, numerical methods, Oleinik condition.

Изложены основные понятия, связанные с квазилинейным скалярным законом сохранения. Представлена основная идея метода движения разрывов, с помощью которого можно точно вычислять решения рассматриваемого квазилинейного уравнения. Специально оговорен особый случай невыпуклой функции потока, представляющей значительные трудности при теоретическом исследовании. Компьютерная программа, реализующая метод движения разрывов, позволяет проводить большое количество численных экспериментов с различными исходными данными.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, скалярный закон сохранения, численные методы, условие Олейник.

Во многих областях математической физики и естествознания возникает квазилинейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (1)$$

с аргументами $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$. Общая теория подобных уравнений изложена в [1]–[3]. Запись (1) часто называют *законом сохранения*, а заданную нелинейность $f(u)$ трактуют как *функцию потока*.

При конкретном выборе $f(u)$ возникает то или иное уравнение. Например, если $f(u) = u^2/2$, получаем *уравнение Хопфа*

$$u_t + uu_x = 0, \quad u = u(x, t). \quad (2)$$

Если же $f(u) = u(1 - u)$, получаем простейшее *уравнение дорожного движения*

$$u_t + (1 - 2u)u_x = 0, \quad u = u(x, t). \quad (3)$$

В отмеченных примерах функция потока является выпуклой: для уравнения (2) она будет выпуклой вниз, а для уравнения (3) — выпуклой вверх. Предположение о выпуклости функции потока существенно облегчает теоретическое и численное исследование уравнения (1).

Типичной для уравнения (1) является задача Коши с поставленным начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

При работе с задачей (1), (4) встречаются две основные трудности.

1) Классическое решение часто отсутствует. Возникают обобщенные решения с сильными разрывами (*ударными волнами*).

2) Нет принципа единственности решения. Одному условию (4) может отвечать бесконечно много разных обобщенных решений.

Для учета первого обстоятельства уравнение (1) обычно заменяют интегральным тождеством

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = f(u(\alpha, t)) - f(u(\beta, t)), \quad (5)$$

выполненным при почти всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и почти всех $t \geq 0$. Возможно, что обобщенное решение $u = u(x, t)$ имеет сильный разрыв $x = \xi(t)$ со значениями

$$u^+ = u^+(t) = u(\xi(t) + 0, t), \quad u^- = u^-(t) = u(\xi(t) - 0, t) \quad (6)$$

справа и слева от него. Тогда из (5) следует известное *условие Гюгоннио*

$$\xi'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (7)$$

характеризующее скорость движения разрыва $x = \xi(t)$ (см. [3, с. 221]).

Для отбора единственного “наиболее правильного” обобщенного решения вводят специальное *неравенство* (условие) *Олейник* [4], связывающее “допустимые” разрывы решения с заданной функцией потока $f(u)$. Так, для выбранного разрыва $x = \xi(t)$ со значениями (6) справа и слева от него, неравенство Олейник требует, чтобы

$$(f(u) - l(u))(u^+ - u^-) \geq 0 \quad (8)$$

при всех промежуточных значениях u между u^+ и u^- . Здесь линейная функция

$$l(u) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} (u - u^-) + f(u^-)$$

определяет секущую, соединяющую точки $(u^-, f(u^-))$ и $(u^+, f(u^+))$ на графике функции $f(u)$.

Учет перечисленных соображений при численном решении задачи Коши (1), (4) весьма непросто. Требуются специальные модификации численных методов (см. [5]–[7]). Короткий обзор возможных подходов, связанных с квазилинейными уравнениями дорожного движения см. в работе [8].

На наш взгляд особого внимания заслуживает простой и эффективный *метод движения разрывов*, также упомянутый в [8]. Сфера применения этого метода весьма широка. Действуем в общей ситуации. Рассматриваем квазилинейное дифференциальное уравнение (1) с произвольным кусочно гладким законом сохранения $f(u)$. Выберем начальное условие (4) с кусочно непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией $\varphi(x)$.

Аппроксимируем $f(u)$ близкой *кусочно линейной* функцией $f_0(u)$. Аппроксимируем $\varphi(x)$ близкой *кусочно постоянной* функцией $\varphi_0(x)$. Считаем, что

$$|f(u) - f_0(u)| \leq \delta, \quad |\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leq \delta \quad (9)$$

для всех допустимых значений $u \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$ с достаточно малым $\delta > 0$.

Составим “близкую” к (1), (4) задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_0(u)}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x). \end{cases} \quad (10)$$

Используя специфику выбора $f_0(u)$ и $\varphi_0(x)$, для задачи (10) можно указать конструктивный алгоритм построения точного решения $u = u(x, t)$, основанный только на условии Гюгонио (7) и неравенстве Олейник (8) с заменой там функции $f(u)$ на функцию $f_0(u)$ из задачи (10).

Опишем основную идею алгоритма. Кусочно постоянная функция $\varphi_0(x)$ интерпретируется как набор разрывов с заданными координатами x_i и соответствующими значениями $u_i^+ = \varphi_i^+$, $u_i^- = \varphi_i^-$ справа и слева на разрывах. Затем происходит эволюция разрывов при $t > 0$. Действуем следующим образом. Условие Гюгонио (7) задает скорость движения выбранного разрыва с координатой $x_i = \xi_i(t)$. Так как решение $u(x, t)$ оказывается кусочно постоянным, то скорость $\xi_i'(t)$ не зависит от времени. Это позволяет без особых затрат вычислять моменты времени, в которых разрывы пересекаются. Каждая итерация по времени t происходит от одного момента пересечения разрывов до другого — следующего момента пересечения разрывов. Если разрывы пересекаются, они объединяются в один результирующий разрыв, у которого значение плотности справа соответствует значению плотности справа для самого правого из пересекающихся разрывов, а значение плотности слева — значению плотности слева для самого левого из пересекающихся разрывов.

Кроме условия Гюгонио (7), все разрывы должны удовлетворять неравенству Олейник (8). Если разрыв $x = \xi(t)$ в момент времени $t_0 \geq 0$ не удовлетворяет неравенству (8), то такой разрыв заменяется на несколько новых “промежуточных” разрывов, каждый из которых уже удовлетворяет неравенству Олейник. Новые разрывы начинают эволюционировать из точки $(\xi(t_0), t_0)$ по условию Гюгонио (7), образуя *веер разрывов* на плоскости (x, t) . Благодаря кусочно линейной структуре функции потока $f_0(u)$ число новых построенных разрывов всегда конечно. Подробнее про построение веера разрывов для выпуклой вверх функции потока см. [8]. В случае выпуклой вниз функции потока алгоритм изменяется *mutatis mutandis*. Если же функция потока $f_0(u)$ кусочно линейна, но не выпукла ни вверх, ни вниз, то исходный алгоритм требует специальных поправок, связанных с построением вспомогательной функции $f_0^*(u)$,

позволяющей строить “правильные” разрывы. Поясним этот момент чуть подробнее.

Итак, рассматриваем кусочно линейную функцию потока $f_0(u)$ без всяких требований выпуклости. Допустим, что в момент времени $t_0 \geq 0$ имеется разрыв с координатой $x_0 = \xi(t_0)$ и значениями u^+ , u^- , не удовлетворяющими неравенству Олейник (8). Для построения веера “правильных” разрывов, удо-

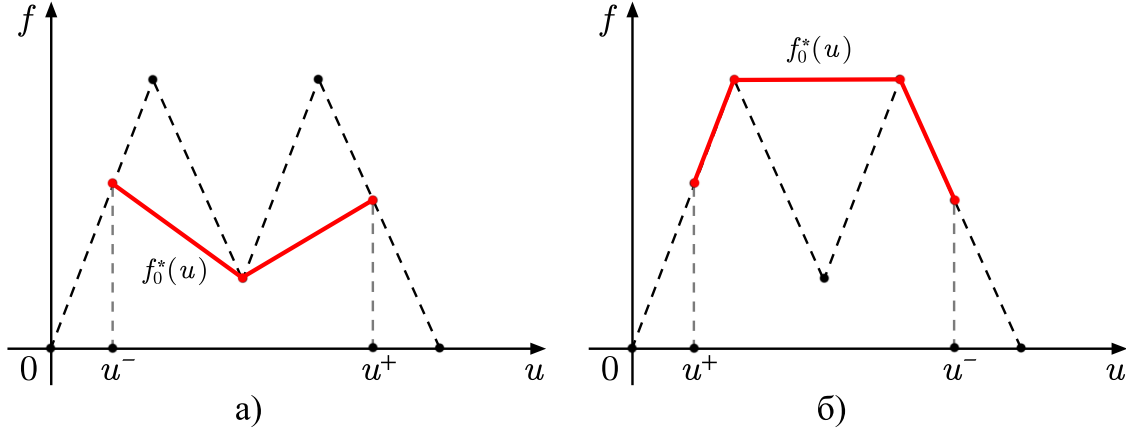


Рис. 1: Пунктиром показана типичная не выпуклая (ни вниз, ни вверх) функция потока $f_0(u)$. Жирной сплошной обозначена вспомогательная функция $f_0^*(u)$. Случай а) соответствует $u^- < u^+$, когда $f_0^*(u)$ является выпуклой вниз огибающей функции потока на $[u^-, u^+]$. Здесь “плохой” разрыв заменяется на два новых разрыва. Случай б) соответствует $u^+ < u^-$, когда $f_0^*(u)$ является выпуклой вверх огибающей функции потока на $[u^+, u^-]$. Здесь “плохой” разрыв заменяется на три новых разрыва.

влетворяющих неравенству (8), используем вспомогательную функцию $f_0^*(u)$. Эта кусочно линейная функция определяется для всех значений u на промежутке между u^+ и u^- . Если $u^- < u^+$, то функция $f_0^*(u)$ строится как выпуклая вниз огибающая функции $f_0(u)$ на отрезке $[u^-, u^+]$; если же $u^- > u^+$, то $f_0^*(u)$ строится как выпуклая вверх огибающая функции $f_0(u)$ на отрезке $[u^+, u^-]$ (примеры см. на рис. 1). В зависимости от количества линейных участков построенной вспомогательной функции $f_0^*(u)$ исходный “неправильный” разрыв заменяется на несколько “правильных” разрывов. Например, в случае а) на рис. 1 “плохой” разрыв распадается на два новых разрыва, а в случае б) — на три новых разрыва. Несложно проверить, что для построенных новых разрывов, определенных абсциссами точек излома функции $f_0^*(u)$, неравенство Олейник будет выполняться.

Численные расчеты показывают, что при подходящей аппроксимации (9) с достаточно малым $\delta > 0$ точное решение задачи (10), получаемое по методу движения разрывов, будет весьма близким к решению исходной задачи Коши (1), (4) на протяжении длительного промежутка времени $0 \leq t \leq T = T(\delta)$. Для L -периодических решений по x (в так называемой задаче “на кольце”) близость решений сохраняется неограниченно долго по $t \in (0, +\infty)$, поскольку действует специальный принцип стабилизации решений (см. [8]–[10]).

Представленный алгоритм позволяет с компьютерной точностью конструировать решения задачи (10), опираясь лишь на аналитические свойства этих решений. Метод движения разрывов дает возможность проводить большое число экспериментов, выбирая произвольные кусочно гладкие функции потока $f(u)$ и аппроксимируя их с допустимой погрешностью. В докладе будет продемонстрирована работа компьютерной программы, основанной на методе движения разрывов, для различных функций потока и при разных начальных условиях.

Список литературы

- [1] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнение с частными производными первого порядка (учебное пособие). – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
- [2] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с. (Evans L. C. Partial Differential Equations.)
- [3] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 296 с. (Lax P. D. Hyperbolic Partial Differential Equations. AMS, 2006.)
- [4] Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 2(86). – С. 165–170.
- [5] Harten. A., Hyman J., Lax P. D. On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks // Comm. Pure Appl. Math. 1976. Vol. 29. No. 3 – P. 297–322.
- [6] Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сборник, 1959. – 47(89), № 3. – С. 271–306.
- [7] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 656 с.
- [8] Подорога А. В., Тихонов И. В. Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017. – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. – С. 216–225.
- [9] Панов Е. Ю. Об асимптотике при больших временах периодических обобщенных энтропийных решений скалярных законов сохранения // Матем. заметки, 2016. – Т. 100. Вып. 1. – С. 133–143.
- [10] Подорога А. В., Тихонов И. В. О предельных состояниях замкнутых транспортных потоков на кольцевой автодороге // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016. – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 222–228. (См. также Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016. № 2. Материалы конференций. – С. 271–279.)