М. О. Корпусов, Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 103–162

УДК 517.538

М. О. Корпусов

Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа

Рассматриваются задачи Коши для класса нелинейных уравнений соболевского типа. Показывается, что для таких задач существует критический показатель, зависящий от размерности пространства $\mathbb{R}^N$, в зависимости от которого локальное слабое решение либо существует и единственно, либо не существует.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: критический показатель Фуджиты, нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, локальная разрешимость, нелинейная емкость.

DOI: 10.4213/im8285

§ 1. Введение

В работе рассматриваются задачи Коши для нелинейных уравнений соболевского типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u+|u|^q)+\Delta u=0, \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad u'(x,0)=u_1(x); \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\Delta u+|u|^q=0, \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad u'(x,0)=u_1(x); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u+\Delta u+|u|^q=0, \qquad u(x,0)=u_0(x); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u-\Delta^2 u+|u|^q=0, \qquad u(x,0)=u_0(x) \tag{1.4}$$

при $q>1$ и $x\in\mathbb{R}^N$, $t>0$ и с соответствующими начальными условиями. Мы покажем, что критическим показателем для данных задач, при надлежащем определении их слабых решений, является величина

$$q_{\mathrm{cr}}=\begin{cases}\dfrac{N}{N-2}, & \text{если } N\geqslant 3,\\ +\infty, & \text{если } N=1,2,\end{cases} \tag{1.5}$$

совпадающая (по теореме типа Лиувилля) с критическим показателем для эллиптического уравнения

$$\Delta u+|u|^q=0 \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N, \quad q>1.$$

Причем если $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$, то слабые решения задач (1.2), (1.3) и (1.4) отсутствуют даже локально во времени. В случае задачи Коши (1.1) ситуация становится сложнее и интереснее – выявлена зависимость критического показателя от начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Если же $q > q_{\mathrm{cr}}$ (при $N = 3$), то при малых начальных данных $u(x, 0) = u_0(x)$ и $u'(x, 0) = u_1(x)$ в случае задачи Коши (1.1), при произвольных начальных функциях $u(x, 0) = u_0(x)$ и $u'(x, 0) = u_1(x)$ в случае задачи Коши (1.2) и при произвольной начальной функции $u(x, 0) = u_0(x)$ в случае задач Коши (1.3) и (1.4) имеет место локальная во времени разрешимость в классическом смысле. Отметим, что при этом классические решения являются слабыми. Кроме того, исследован вопрос о локальной разрешимости всех задач Коши в сильном обобщенном смысле при $N \geqslant 3$ в случае $q > q_{\mathrm{cr}}$.

У задачи Коши (1.4) имеется другой критический показатель

$$p_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} \dfrac{N+2}{N-2}, & \text{если } N \geqslant 3, \\ +\infty, & \text{если } N = 1, 2, \end{cases} \tag{1.6}$$

такой, что при $q_{\mathrm{cr}} < q \leqslant p_{\mathrm{cr}}$ эта задача (1.4) не имеет глобального во времени нетривиального слабого решения (хотя локальное решение, как мы покажем в § 3, существует), причем ясно, что $q_{\mathrm{cr}} < p_{\mathrm{cr}}$ при $N \geqslant 3$. Таким образом, для некоторых нелинейных соболевских уравнений имеет место своеобразная ситуация наличия нескольких критических показателей.

Кроме того, в заключение мы рассмотрим еще две задачи Коши для соболевских уравнений с градиентными нелинейностями:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \qquad u(x, 0) = u_0(x); \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \tag{1.8}$$

для которых критическим показателем *мгновенного разрушения* или *локальной разрешимости* является величина

$$r_{\mathrm{cr}} \equiv \begin{cases} \dfrac{N}{N-1}, & \text{если } N \geqslant 2, \\ +\infty, & \text{если } N = 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Впервые явление полного разрушения (“complete blow-up”) было обнаружено для уравнения

$$-\Delta u = |x|^{-2}u^2, \qquad u \geqslant 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N \tag{1.10}$$

в работе Х. Брезиса и К. Кабрэ [1]. Для линейного параболического уравнения с сингулярным потенциалом мгновенное разрушение (“instantaneous blow-up”) было получено в работе [2]. Для нелинейного сингулярного параболического уравнения

$$u_t - \Delta u = |x|^{-2}u^2, \quad u \geqslant 0, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{1.11}$$

вопрос о мгновенном разрушении был впервые рассмотрен в работе Ф. Б. Вейслера [3]. Отметим, что в этих трех работах использовался метод сравнения и техника доказательства была довольно сложной. В работах С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери (см. монографию [4], а также библиографию к ней) с использованием оригинального метода нелинейной емкости результаты о полном и мгновенном разрушении были получены гораздо более простым и эффективным образом и для уравнений высокого порядка.

В дальнейшем мгновенное разрушение в нелинейных параболических и гиперболических уравнениях рассматривалось в работах В. А. Галактионова и Х. Л. Вазкеза [5], Дж. Голдстейна и И. Комбе [6], Й. Гиги и Н. Умеды [7], Е. И. Галахова [8], [9] и других авторов. При этом в некоторых из этих работ использовался метод исследования, основанный на принципе сравнения (для параболических уравнений), а в работах Е. И. Галахова развит метод С. И. Похожаева, основанный на методе нелинейной емкости, что позволило гораздо быстрее и эффективнее получить достаточные условия отсутствия решений как для параболических, так и для гиперболических уравнений, включая уравнения высокого порядка (не соболевские).

Впервые вопрос о мгновенном разрушении в неклассических соболевских уравнениях был изучен в работе [10]. В этой работе была, в частности, рассмотрена следующая задача:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx}+u)=u_{xx}, \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad u(0,t)=u(l,t), \quad l>0. \tag{1.12}$$

Как следствие теоремы 4.1 работы [10] был получен результат о несуществовании ограниченного решения этой задачи на сколь угодно малом промежутке времени при условии, что $l \in (0,\pi]$. Этот результат обусловлен тем, что под знаком производной по времени находится оператор $\partial_x^2+\mathrm{I}$. Далее такого рода результаты возникали при исследовании линейных уравнений соболевского типа, имеющих вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u+\lambda u)+\Delta u=0 \quad \text{при} \quad \lambda>0, \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N,$$

в том случае, когда число λ попадает на спектр оператора Δ в ограниченной области Ω (см. обзор [11]). В частности, в [11] изложен метод вырожденных полугрупп исследования линейных уравнений соболевского типа с сингулярным оператором при старшей производной. В дальнейшем эффект мгновенного разрушения для линейных и нелинейных уравнений соболевского типа не рассматривался, поскольку исследователей интересовал вопрос о достаточных условиях существования решений.

Более того, новым результатом, полученным в настоящей работе, является то, что хотя в рассмотренных уравнениях отсутствуют сингулярные коэффициенты вида $|x|^{-\alpha}$ или $t^{-\beta}$, а начальные функции могут быть класса $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, тем не менее решение отсутствует.

В рассмотренных задачах эффект мгновенного разрушения проявлялся тогда, когда – как в уравнении имелась сингулярность или когда – как в работе [7] – от начальной функции требовалось нестандартное условие роста.

В уравнениях (1.1)–(1.3) явных сингулярностей нет, а на начальные функции мы не налагаем никаких специфических условий роста. Однако эти уравнения не разрешены относительно старшей производной, а в уравнении (1.1) оператор

$$\mathbb{A}(u) \equiv \Delta u + |u|^q \quad \text{при} \quad q > q_{\mathrm{cr}}, \quad N \geqslant 3$$

имеет нетривиальное ядро. Видимо, именно наличие оператора $-\Delta$ при старшей производной по времени и влияет на появления эффекта мгновенного разрушения, поскольку если вместо него имелся, например, оператор $-\Delta + \mathrm{I}$, то такого эффекта уже не было.

Отметим, что вопрос о несуществовании глобального во времени решения для задачи Коши (1.3) был рассмотрен в работе [12]. При этом использовался метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Митидиери. Например, была рассмотрена задача Коши для дифференциального неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u \geqslant |u|^q, \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad q > 1.$$

Кроме того, в работе [13] было проведено исследование вопроса о глобальной неразрешимости для уравнений соболевского типа с дробным порядком производной по времени.

Однако ни в этих работах, ни в работах других авторов вопрос о мгновенном разрушении для уравнений соболевского типа не рассматривался.

Наконец, широкий спектр результатов относительно разрушения и локальной разрешимости соболевских уравнений был получен в работе [14] (см. также библиографию в [14]). Отметим, что в настоящей статье мы выявили зависимость критического показателя задачи Коши (1.1) от начальных функций (см. по этому поводу работу [15]).

Автор выражает признательность рецензенту за ценные замечания относительно результатов работы, позволившие существенно улучшить содержание статьи.

§ 2. Один пример мгновенного разрушения

В этом параграфе мы рассмотрим один пример, где для доказательства мгновенного разрушения применяется метод нелинейной емкости. Возможно, сам пример не нов, однако метод нелинейной емкости для доказательства мгновенного разрушения ранее не применялся.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_{xt} = |u|^q, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

где $q > 1$. Дадим определение слабого решения.

Определение 1. Функция класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q(0,T;\mathbb{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)), \qquad u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^1),$$

удовлетворяющая интегральному равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^1} \left[u\phi_{xt}(x,t) - |u|^q \phi(x,t)\right] dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^1} u_0(x)\phi_x(x,0)\, dx = 0 \tag{2.2}$$

для всех $\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \times [0,T])$ таких, что

$$\operatorname{supp}_x \phi(x,t) \Subset \mathbb{R}^1 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad t \in [0,T], \quad \phi(x,T) = 0,$$

называется *локальным во времени слабым решением задачи Коши* (2.1).

Методом нелинейной емкости докажем, что локальное во времени слабое решение задачи Коши (2.1) отсутствует. С этой целью рассмотрим пробную функцию следующего специального вида:

$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t), \qquad \phi_2(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]), \tag{2.3}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}; \\ 0, & \text{если } t = T. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\phi_1(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \qquad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 0, & \text{если } s \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Заметим, что носитель функции $\phi_{1x}(x)$ принадлежит замкнутой области

$$\Omega_R = \left[\frac{R}{2}, R\right].$$

Поэтому в (2.2) область интегрирования интегралов по x

$$\int_{\mathbb{R}^1} u\phi_{xt}(x,t)\, dx, \qquad \int_{\mathbb{R}^1} u_0(x)\phi_x(x,0)\, dx$$

сужается до множества Ω_R. Таким образом, используя неравенство Гёльдера при указанном специальном выборе пробной функции (2.3), мы получим следующие цепочки неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{\Omega_R} u(x,t)\phi_{1x}(x)\phi_{2t}(t)\, dx\, dt\right| \\
&\qquad \leqslant \int_0^T \int_{\Omega_R} \phi_1^{1/q}(x)\phi_2^{1/q}(t)|u(x,t)| \frac{|\phi_{1x}(x)|}{\phi_1^{1/q}(x)} \frac{|\phi_{2t}(t)|}{\phi_2^{1/q}(t)}\, dx\, dt \\
&\qquad \leqslant \left(\int_0^T \int_{\Omega_R} \frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)} \frac{|\phi_{2t}(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\, dx\, dt\right)^{1/q'} \left(\int_0^T \int_{\Omega_R} \phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\, dx\, dt\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_R} u_0(x)\phi_x(x,0)\, dx\right| &\leqslant \int_{\Omega_R} |u_0(x)||\phi_{1x}(x)|\, dx \\
&\leqslant \left(\int_{\Omega_R} |\phi_{1x}(x)|^{q'}\, dx\right)^{1/q'} \left(\int_{\Omega_R} |u_0(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

С учетом этих неравенств мы приходим к следующей оценке:

$$\left(\int_0^T \frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt\right)^{1/q'}\left(\int_{\Omega_R}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int_0^T\int_{\Omega_R}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt\right)^{1/q}$$
$$+\left(\int_{\Omega_R}|\phi_{1x}(x)|^{q'}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int_{\Omega_R}|u_0(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\geqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Очевидно, что правая часть неравенства (2.6) при замене $\mathbb{R}^1$ на Ω_R может только уменьшиться:

$$\int_0^T\int_{\Omega_R}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt.$$

Используя неравенство Гёльдера для чисел:

$$ab\leqslant\frac{a^{q'}}{q'}+\frac{b^q}{q},\qquad a,b\geqslant 0,\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

получаем:

$$\left(\int_0^T \frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt\right)^{1/q'}\left(\int_{\Omega_R}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int_0^T\int_{\Omega_R}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt\right)^{1/q}$$
$$\leqslant\frac{1}{q'}\int_0^T \frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt\int_{\Omega_R}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx+\frac{1}{q}\int_0^T\int_{\Omega_R}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt$$
$$\leqslant\frac{1}{q'}\int_0^T \frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt\int_{\mathbb{R}^1}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx+\frac{1}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt.$$

Несложные преобразования приводят к следующему неравенству:

$$\int_0^T \frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt\int_{\mathbb{R}^1}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx+q'\left(\int_{\mathbb{R}^1}|\phi_{1x}(x)|^{q'}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int_{\mathbb{R}^1}|u_0(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$
$$\geqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}\phi_1(x)\phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt. \tag{2.7}$$

С помощью замены переменных $y=x/R$ мы получаем следующие равенства:

$$\int_{\mathbb{R}^1}|\phi_{1x}(x)|^{q'}\,dx=R^{1-q'}\int_{1/\sqrt{2}\leqslant|y|\leqslant 1}|\phi_{1y}(y)|^{q'}\,dy,$$
$$\int_{\mathbb{R}^1}\frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx=R^{1-q'}\int_{1/\sqrt{2}\leqslant|y|\leqslant 1}\frac{|\phi_{1y}(y)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(y)}\,dy.$$

Заметим, что существуют функции $\phi_2(t)$ вида (2.4), для которых конечен интеграл

$$\int_0^T\frac{|\phi_2'(t)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(t)}\,dt<+\infty.$$

Для интеграла
$$I(R) \equiv \int_{\mathbb{R}^1} \frac{|\phi_{1x}(x)|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx$$
имеет место предельное равенство
$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0. \tag{2.8}$$

Подставим полученные соотношения в (2.7) и перейдем к пределу при $R \to +\infty$, тогда, принимая во внимание (2.8), получим равенство
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^1} \phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt = 0 \quad \text{для всех} \quad T > 0. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что $u(x,t) = 0$ для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0,T]$. Сделаем предположение, что $u_0(x) \neq 0$ на множестве положительной меры Лебега. Полученное противоречие доказывает результат о мгновенном разрушении слабого решения задачи Коши (2.1).

§ 3. Критический показатель

В этом параграфе мы рассмотрим по отдельности задачи Коши (1.1), (1.2) и (1.3) при $t \in [0,T]$, $T > 0$. При этом мы везде будем пользоваться следующими пробными функциями:
$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t), \qquad \phi_1(x) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N), \quad \phi_2(t) \in \mathbb{C}^{(k)}([0,T]), \tag{3.1}$$
где $k = 2$ в случае уравнений (1.1), (1.2) и $k = 1$ в случае уравнения (1.3), а функция $\phi_1(x)$ имеет вид
$$\phi_1(x) = \phi_0\biggl(\frac{|x|^2}{R^2}\biggr), \qquad \phi_0(s) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } s \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.2}$$
$$\phi_0(s) \in \mathbb{C}^{(\infty)}([0,+\infty)).$$

Пусть $t \in [0,T]$. Потребуем, чтобы функция $\phi_2(t)$ удовлетворяла следующим условиям:
$$\underbrace{\phi_2(T) = \phi_2'(T) = \cdots = \phi_2^{(k-1)}(T)}_{k} = 0.$$

Пусть
$$\Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}, \qquad \partial\Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R\}, \quad R > 0.$$

Очевидно, что
$$\phi_1(x)|_{x\in\partial\Omega_R} = \frac{\partial\phi_1(x)}{\partial n_x}\bigg|_{x\in\partial\Omega_R} = 0.$$

3.1. Задача Коши (1.1).

Определение 2. *Локальным слабым решением задачи Коши* (1.1) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N),$$

которая для любых функций

$$\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad \operatorname{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^N \times [0,T], \quad \phi(x,T) = \phi'(x,T) = 0,$$

удовлетворяет следующему равенству:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dx\, dt \left[u\Delta\phi'' + u\Delta\phi + |u|^q \phi''\right] + B_1 = 0, \tag{3.3}$$

где

$$B_1 = B_1(u_0, u_1, \phi) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dx \big[\phi'(x,0)|u_0|^q - q\phi(x,0)|u_0|^{q-2}u_0u_1 + u_0(x)\Delta\phi'(x,0) - u_1(x)\Delta\phi(x,0)\big]. \tag{3.4}$$

Замечание 1. Равенство (3.3) получено интегрированием по частям из уравнения (1.1) в предположении достаточной гладкости решения.

Теперь возьмем в качестве пробной функции $\phi(x,t)$ произведение (3.1), причем пусть

$$\phi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \qquad t \in [0,T].$$

Стандартным путем метода нелинейной емкости [4] с использованием неравенства Гёльдера получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T |\phi_2''|\, dt\right)^{1/q'} \left(\int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\, dx\right)^{1/q'} \\
&\qquad\times \left(\int_0^T \int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} \phi_1(x)\phi_2''(t)|u|^q\, dx\, dt\right)^{1/q} \\
&+ \left(\int_0^T \frac{\phi_2^{q'}(t)}{|\phi_2''|^{1/(q-1)}}\, dt\right)^{1/q'} \left(\int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\, dx\right)^{1/q'} \\
&\qquad\times \left(\int_0^T \int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} \phi_1(x)\phi_2''(t)|u|^q\, dx\, dt\right)^{1/q} + B_1(R,\phi) \\
&\geqslant \int_0^T \int_{\Omega_R} \phi_1(x)\phi_2''(t)|u|^q\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$B_1(R,\phi) \equiv \int_{\Omega_R} \left[\frac{2}{T}\phi_1|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\phi_1 + \frac{2}{T}u_0\Delta\phi_1 + u_1\Delta\phi_1\right] dx. \tag{3.6}$$

Отдельно рассмотрим следующие величины:

$$I_1 = \int_0^T |\phi_2''|\,dt, \qquad I_2 = \int_0^T \frac{\phi_2^{q'}}{|\phi_2''|^{1/(q-1)}}\,dt, \qquad I_3 = \int_{\Omega_R} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\,dx.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$I_1 = \frac{2}{T}, \qquad I_2 = c_1 T^{(q+1)/(q-1)}, \qquad I_3 = c_2 R^{N-2q'},$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2^{1/(q-1)}(2q'+1)}, \qquad c_2 = \int_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^{q'}}{\phi_0^{1/(q-1)}}\,d\xi.$$

Используя неравенство Гёльдера, приходим к следующим оценкам:

$$\left|\int_{\Omega_R} u_0(x)\Delta\phi_1(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_{\Omega_R} |u_0|^q\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega_R} |\Delta\phi_1(x)|^{q'}\,dx\right)^{1/q'},$$

$$\left|\int_{\Omega_R} u_1(x)\Delta\phi_1(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_{\Omega_R} |u_1|^q\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega_R} |\Delta\phi_1(x)|^{q'}\,dx\right)^{1/q'},$$

причем

$$\int_{\Omega_R} |\Delta\phi_1(x)|^{q'}\,dx \leqslant c_3 R^{N-2q'},$$

где константа c_3 не зависит от $R>0$. А поскольку $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$, то при $R\to+\infty$

$$\int_{\Omega_R} u_0(x)\Delta\phi_1(x)\,dx,\ \int_{\Omega_R} u_1(x)\Delta\phi_1(x)\,dx \to 0,$$

если $q\in(1,q_{\mathrm{cr}}]$. Кроме того, при $R\to+\infty$

$$\int_{\Omega_R}\left[\frac{2}{T}\phi_1|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\phi_1\right]dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{2}{T}|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\right]dx,$$

так как $|u_0|^q$, $|u_0|^{q-2}u_0u_1 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Поэтому

$$\lim_{R\to+\infty} B_1(R,\phi) = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{2}{T}|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\right]dx. \tag{3.7}$$

Следовательно, переходя в (3.5) к пределу, мы получим

$$\frac{T^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{2}{T}|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\right]dx \geqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,dx\,dt. \tag{3.8}$$

Достаточным условием невыполнения неравенства (3.8) является следующее:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{2}{T}|u_0|^q + q|u_0|^{q-2}u_0u_1\right]dx \leqslant 0. \tag{3.9}$$

Замечание 2. Рассмотрим все возможные случаи относительно начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

(i) Заметим, что для любых фиксированных $u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$ и $u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$ при условиях

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q \, dx > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 \, dx < 0 \quad \text{и} \quad 1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}} \tag{3.10}$$

имеет место априорная оценка времени существования слабого решения задачи Коши (1.1):

$$T < T_0 \equiv 2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q \, dx \biggl(-q \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 \, dx \biggr)^{-1} \tag{3.11}$$

и при $T \geqslant T_0$ локальные нетривиальные слабые решения задачи Коши не существуют.

(ii) Если же

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q \, dx > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 \, dx \geqslant 0 \quad \text{и} \quad 1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}, \tag{3.12}$$

то имеет место следующая априорная оценка:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \biggl[T|u_0|^q + \frac{T^2}{2} q |u_0|^{q-2} u_0 u_1 \biggr] \, dx \geqslant \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx \, dt \quad \text{для всех} \quad T > 0. \tag{3.13}$$

(iii) Третий важный случай таков:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q \, dx = 0, \qquad 1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}, \tag{3.14}$$

$$u_1(x) \neq 0 \quad \text{на множестве ненулевой меры Лебега.} \tag{3.15}$$

В этом случае справедливо равенство $u(x,t) = 0$ почти всюду для $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0,T]$. Поскольку время $T > 0$ в данном случае является произвольным, мы приходим к выводу о несуществовании нетривиальных локальных слабых решений, т. е. в данном случае мы имеем дело с *мгновенным разрушением*. Данный эффект имеет место при $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$, где критический показатель q_{cr} определен формулой (1.5).

3.2. Задача Коши (1.2).

Определение 3. *Локальным слабым решением задачи Коши* (1.2) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N),$$

которая для любых функций

$$\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^N \times [0,T], \quad \phi(x,T) = \phi'(x,T) = 0,$$

удовлетворяет следующему равенству:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dx\,dt\,\bigl[u\Delta\phi'' + u\Delta\phi + |u|^q\phi\bigr] + B_2 = 0, \tag{3.16}$$

где

$$B_2 = B_2(u_0, u_1, \phi) = \int_{\mathbb{R}^N} dx\,\bigl[u_0(x)\Delta\phi'(x,0) - u_1(x)\Delta\phi(x,0)\bigr]. \tag{3.17}$$

Возьмем в качестве $\phi(x,t)$ функцию вида (3.1), причем в качестве пробной функции $\phi_2(t)$ возьмем следующую:

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}; \\ 0, & \text{если } t \geqslant T. \end{cases} \tag{3.18}$$

Следуя стандартной схеме метода нелинейной емкости [4], получим неравенство

$$\begin{aligned} &\biggl(\int_{T/2}^T \frac{|\phi_2''|^{q'}}{\phi_2^{1/(q-1)}}\,dt\biggr)^{1/q'} \biggl(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\,dx\biggr)^{1/q'} \\ &\qquad\qquad \times \biggl(\int_{T/2}^T \int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} |u|^q\phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt\biggr)^{1/q} \\ &\quad + \biggl(\int_0^T |\phi_2|\,dt\biggr)^{1/q'} \biggl(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\,dx\biggr)^{1/q'} \\ &\qquad\qquad \times \biggl(\int_0^T \int_{R/2\leqslant|x|^2\leqslant R} |u|^q\phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt\biggr)^{1/q} + B_2(R,\phi) \\ &\quad \geqslant \int_0^T \int_{\Omega_R} |u|^q\phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь нужно отметить, что существует пробная функция $\phi_2(t)$ такая, что нелинейная емкость

$$\int_{T/2}^T \frac{|\phi_2''|^{q'}}{\phi_2^{1/(q-1)}}\,dt$$

сходится (см. [4]). Более того, имеет место равенство

$$\int_{T/2}^T \frac{|\phi_2''|^{q'}}{\phi_2^{1/(q-1)}}\,dt = c_0 T^{1-2q'}.$$

Точно так же, как ранее, в предположении, что $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$, $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$, в силу теоремы Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла получим предельное свойство

$$\lim_{R\to+\infty} B_2(R,\phi) = 0, \tag{3.20}$$

откуда заключаем, что справедливо неравенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi_2(t)|u|^q\,dx\,dt \leqslant 0.$$

В силу произвольности $T > 0$ приходим к выводу об отсутствии в данном случае $(1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}})$ нетривиальных локальных слабых решений, т. е. в данном случае имеет место *мгновенное разрушение*.

Замечание 3. Отметим, что при условии $q > q_{\mathrm{cr}}$ $(N \geqslant 3)$ существует слабое глобальное решение задачи Коши (1.2). Действительно, достаточно взять в качестве $u_0(x)$ положительное решение уравнения

$$\Delta u_0 + |u_0|^q = 0, \qquad q > q_{\mathrm{cr}}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

а начальную функцию $u_1(x)$ положить равной нулю.

3.3. Задача Коши (1.3).

Определение 4. *Локальным слабым решением задачи Коши* (1.3) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N),$$

которая для любых функций

$$\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^N \times [0,T], \quad \phi(x,T) = 0,$$

удовлетворяет следующему равенству:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dx\,dt\,\bigl[-u\Delta\phi' + u\Delta\phi + |u|^q\phi\bigr] - B_3 = 0, \tag{3.21}$$

где

$$B_3 = B_3(u_0,\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} dx\,u_0(x)\Delta\phi(x,0). \tag{3.22}$$

В качестве пробной функции $\phi(x,t)$ возьмем функцию вида (3.1), где

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}; \\ 0, & \text{если } t \geqslant T. \end{cases}$$

Снова пользуясь стандартной схемой метода нелинейной емкости [4], получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{T/2}^T \frac{|\phi_2'|^{q'}}{\phi_2^{1/(q-1)}}\,dt\right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\,dx\right)^{1/q'} \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{T/2}^T \int_{R/2 \leqslant |x|^2 \leqslant R} |u|^q \phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int_0^T |\phi_2|\,dt\right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\phi_1|^{q'}}{\phi_1^{1/(q-1)}}\,dx\right)^{1/q'} \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_0^T \int_{R/2 \leqslant |x|^2 \leqslant R} |u|^q \phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt\right)^{1/q} + B_3(R,\phi) \\
&\geqslant \int_0^T \int_{\Omega_R} |u|^q \phi_1(x)\phi_2(t)\,dx\,dt.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Поскольку $u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$, мы заключаем, что

$$\lim_{R\to+\infty} B_3(R,\phi) = 0.$$

В результате приходим к выводу о *мгновенном разрушении* при условии, что $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$.

Замечание 4. При условии $q > q_{\mathrm{cr}}$ $(N \geqslant 3)$ существует слабое глобальное решение задачи Коши (1.3). Действительно, достаточно взять в качестве $u_0(x)$ положительное решение уравнения

$$\Delta u_0 + |u_0|^q = 0, \qquad q > q_{\mathrm{cr}}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

3.4. Задача Коши (1.4).

Определение 5. *Локальным слабым решением задачи Коши* (1.4) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N),$$

которая для любых функций

$$\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^N \times [0,T], \quad \phi(x,T) = 0,$$

удовлетворяет следующему равенству:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dx\,dt\,\bigl[u\Delta\phi' + u\Delta^2\phi - |u|^q\phi\bigr] + B_4 = 0, \tag{3.24}$$

где

$$B_4 = B_4(u_0,\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} dx\,u_0(x)\Delta\phi(x,0). \tag{3.25}$$

Точно так же, как и в предыдущем пункте, приходим к выводу о том, что при выполнении неравенства $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$ имеет место мгновенное разрушение, т. е. у задачи Коши (1.4) при $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$ отсутствуют слабые нетривиальные локальные во времени решения.

Определение 6. *Слабым решением задачи Коши* (1.4) мы назовем функцию $u(x,t)$, принадлежащую классу

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+), \quad u_0(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.26}$$

и удовлетворяющую равенству

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} dx\,dt\,\bigl[u\Delta\phi' + u\Delta^2\phi - |u|^q\phi\bigr] + B_4 = 0, \tag{3.27}$$

$$B_4 = B_4(u_0,\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} dx\,u_0(x)\Delta\phi(x,0), \tag{3.28}$$

для всех $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$.

Возьмем в качестве $\phi(x,t)$ функцию

$$\phi(x,t) = \phi_0\left(\frac{t}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 0, & \text{если } s \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.29}$$

После стандартных рассуждений метода нелинейной емкости [4] приходим к выводу, что имеет место предельное свойство

$$\lim_{R\to+\infty} B_4(R,\phi) = 0 \quad \text{при} \quad 1 < q \leqslant p_{\mathrm{cr}}.$$

Поэтому отсутствует глобальное во времени слабое нетривиальное решение задачи Коши (1.4), где критический показатель p_{cr} определен формулой (1.6). Отсюда следует, что при $q_{\mathrm{cr}} < q \leqslant p_{\mathrm{cr}}$ нет глобальных слабых решений, хотя могут существовать локальные.

§ 4. Априорные оценки сильных решений задач Коши (1.2), (1.3) и (1.4)

В предыдущем параграфе мы показали, что слабых локальных решений нет при выполнении условия $1 < q \leqslant q_{\mathrm{cr}}$ в том случае, когда соответствующие начальные функции принадлежат классу $\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$. В этом параграфе мы дадим определения сильных решений указанных задач Коши и получим априорные оценки, из которых следует разрушение их решений за конечное время при больших начальных функциях.

Определение 7. *Сильным решением задачи Коши* (1.2) назовем функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T];\mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N)\bigr) \cap \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T];\mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)\bigr),$$

обладающую свойствами

$$u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N), \qquad u_1(x) \in \mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N),$$

и удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bigl[(\nabla u'', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |u|^q\phi(x)\bigr]\,dx = 0 \tag{4.1}$$

для всех $\phi(x) \in \mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ и $t \in [0,T]$.

Определение 8. *Сильным решением задачи Коши* (1.3) назовем функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T];\mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)\bigr)$$

с начальными условиями

$$u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N),$$

удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bigl[(\nabla u', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |u|^q\phi(x)\bigr]\,dx = 0 \tag{4.2}$$

для всех $\phi(x) \in \mathbb{H}^1_0(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ и $t \in [0,T]$.

Определение 9. *Сильным решением задачи Коши* (1.4) назовем функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{H}_0^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)\big)$$

с начальными условиями

$$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{H}_0^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N),$$

удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big[(\nabla u', \nabla\phi(x)) + \Delta u \Delta\phi(x) - |u|^q\phi(x)\big]\,dx = 0 \tag{4.3}$$

для всех $\phi(x) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{H}_0^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ и $t \in [0,T]$.

Замечание 5. Известные гильбертовы пространства $\mathbb{H}_0^1(\mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{H}_0^2(\mathbb{R}^N)$ определяются как пополнения пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно норм

$$\|\nabla u\|_2 \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|\Delta u\|_2 \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2\,dx\right)^{1/2}$$

соответственно.

4.1. Задача Коши (1.2)**.** Далее мы воспользуемся модификацией энергетического метода Х. А. Левина (см. [16]), изложенной в работе [17]. Обозначим через $\|\cdot\|_2$ норму гильбертова пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Пусть $u(x,t)$ – сильное решение задачи Коши (1.2) при некотором $T > 0$. Введем функционалы

$$\Phi_1(t) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2, \qquad J_1(t) \equiv \|\nabla u'\|_2^2, \tag{4.4}$$

определенные на классе сильных решений и связанные очевидным неравенством

$$(\Phi_1'(t))^2 \leqslant 2\Phi_1(t)J_1(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

Возьмем сначала в качестве ϕ в равенстве (4.1) само сильное решение $u(x,t)$. Тогда получим равенство

$$\frac{d^2\Phi_1(t)}{dt^2} - J_1(t) + \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx. \tag{4.6}$$

Теперь возьмем в качестве функции ϕ производную по времени $u'(x,t)$ сильного решения. Тогда

$$\frac{1}{2}\,\frac{dJ_1(t)}{dt} + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{q+1}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx. \tag{4.7}$$

Интегрируя последнее равенство по t, получим

$$\frac{q+1}{2}J_1(t) + \frac{q+1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + E_{10} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx, \tag{4.8}$$

где

$$E_{10} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0\,dx - \frac{q+1}{2}\bigl[\|\nabla u_0\|_2^2 + \|\nabla u_1\|^2\bigr]. \tag{4.9}$$

Из равенств (4.6) и (4.8) следует, что

$$\Phi_1'' - E_{10} = \frac{q+3}{2}J_1 + \frac{q-1}{2}\|\nabla u\|_2^2. \tag{4.10}$$

Из неравенства (4.5) и равенства (4.10) мы получаем неравенство

$$\Phi_1\Phi_1'' - \frac{q+3}{4}(\Phi_1')^2 - E_{10}\Phi_1 \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Справедлива следующая теорема [17].

Теорема 1. *Пусть для задачи Коши* (1.2) *выполнены условия*

$$\Phi_1'(0) > (\beta_1\Phi_1(0))^{1/2} > 0, \qquad \beta_1 = \begin{cases} -\dfrac{4E_{10}}{q+1}, & \text{если } E_{10} < 0,\\ 0, & \text{если } E_{10} \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\Phi_1(t) \geqslant \bigl[\Phi_1^{(1-q)/4}(0) - A_1 t\bigr]^{-4/(q-1)}, \qquad t \in [0,T], \tag{4.13}$$

где

$$A_1 \equiv \frac{q-1}{4}\Phi_1^{-(q+3)/4}(0)\bigl[(\Phi_1'(0))^2 - \beta_1\Phi_1(0)\bigr]^{1/2} > 0.$$

4.2. Задача Коши (1.3). Рассмотрим теперь сильные решения задачи Коши (1.3). Пусть при некотором $T > 0$ такое решение существует. Введем функционалы

$$\Phi_2(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u\|_2^2(s)\,ds + \frac{1}{4}\|\nabla u_0\|_2^2, \quad J_2(t) \equiv \int_0^t \|\nabla u'\|_2^2(s)\,ds + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2, \tag{4.14}$$

связанные между собой дифференциальным неравенством

$$(\Phi_2')^2 \leqslant 2\Phi_2(t)J_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{4.15}$$

Как и ранее, из определения 8 сильного решения задачи Коши (1.3) получим два энергетических равенства

$$\frac{d^2\Phi_2(t)}{dt^2} + \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx, \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{dt}J_2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{q+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx. \tag{4.17}$$

Интегрируя (4.17), мы приходим к равенству

$$(q+1)J_2(t) + \frac{q+1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + E_{20} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx, \tag{4.18}$$

где

$$E_{20} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0 \, dx - (q+1)\|\nabla u_0\|_2^2. \tag{4.19}$$

Из (4.16) и (4.18) получим следующее равенство:

$$\Phi_2'' = (q+1)J_2 + \frac{q-1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + E_{20}. \tag{4.20}$$

Принимая во внимание (4.15), приходим к искомому неравенству

$$\Phi_2\Phi_2'' - \frac{q+1}{2}(\Phi_2')^2 - E_{20}\Phi_2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{4.21}$$

Справедлива следующая теорема [17].

Теорема 2. *Пусть для задачи Коши (1.3) выполнены условия*

$$\Phi_2'(0) > (\beta_2\Phi_2(0))^{1/2} > 0, \qquad \beta_2 = \begin{cases} -\dfrac{2E_{20}}{q}, & \text{если } E_{20} < 0; \\ 0, & \text{если } E_{20} \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\Phi_2(t) \geqslant \bigl[\Phi_2^{(1-q)/2}(0) - A_2 t\bigr]^{-2/(q-1)}, \quad t \in [0,T], \tag{4.23}$$

где

$$A_2 \equiv \frac{q-1}{2}\Phi_1^{-(q+1)/2}(0)\bigl[(\Phi_2'(0))^2 - \beta_2\Phi_2(0)\bigr]^{1/2} > 0.$$

Замечание 6. Условие (4.22), при котором имеет место априорная оценка (4.23), можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0 \, dx > \frac{q+2}{2}\|\nabla u_0\|_2^2. \tag{4.24}$$

Однако это условие не является оптимальным в том смысле, что мы можем получить другую самостоятельную априорную оценку на функционал от решения. Поэтому мы сейчас предложим другой вариант вывода априорной оценки снизу.

Действительно, введем функционалы

$$\Phi_3(t) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2, \qquad J_3(t) \equiv \|\nabla u'\|_2^2, \tag{4.25}$$

которые связаны между собой очевидным соотношением

$$(\Phi_3'(t))^2 \leqslant 2\Phi_3(t)J_3(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{4.26}$$

Из определения 8 сильного решения выводим следующие энергетические равенства:

$$\frac{d\Phi_3(t)}{dt} + \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u \, dx, \tag{4.27}$$

$$J_3(t) + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{q+1}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx. \tag{4.28}$$

Поскольку по определению (4.25) имеем $J_3(t) \geqslant 0$, то из равенства (4.28) получаем, что при выполнении условия

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0\,dx \geqslant \frac{q+1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 \tag{4.29}$$

имеет место импликация

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx \geqslant \frac{q+1}{2}\|\nabla u\|_2^2 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx \geqslant \|\nabla u\|_2^2. \tag{4.30}$$

Но тогда, в силу определения (4.25) функционала $\Phi_3(t)$, из равенства (4.27) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{4.31}$$

Теперь из (4.27) и (4.28) мы получаем равенство

$$\frac{d^2\Phi_3}{dt^2} + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u\,dx = (q+1)J_3 + \frac{q+1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2, \tag{4.32}$$

из которого вытекает, что

$$\frac{d^2\Phi_3}{dt^2} = (q+1)J_3 + \frac{q-1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 \geqslant (q+1)J_3. \tag{4.33}$$

Неравенства (4.26) и (4.33) приводят к следующему дифференциальному неравенству:

$$\Phi_3\Phi_3'' - \frac{q+1}{2}(\Phi_3')^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \tag{4.34}$$

которое влечет за собой неравенство

$$\Phi_3(t) \geqslant \left[\Phi_3^{-(q-1)/2}(0) - \frac{q-1}{2}\Phi_3'(0)\Phi_3^{-(q+1)/2}(0)t\right]^{-2/(q-1)}, \tag{4.35}$$

справедливое при дополнительных условиях

$$\left.\frac{d\Phi_3(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0\,dx - \|\nabla u_0\|_2^2 > 0, \qquad \|\nabla u_0\|_2^2 > 0. \tag{4.36}$$

Однако более слабое, чем (4.24), условие (4.29) можно, в свою очередь, существенно ослабить. Действительно, рассмотрим равенство (4.27) и предположим, что в начальный момент времени выполнены условия (4.36). Тогда, поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N))$, найдется такой момент времени $t_3 > 0$, что

$$\frac{d\Phi_3(t)}{dt} > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,t_3). \tag{4.37}$$

Поэтому на полуинтервале $t \in [0,t_3)$ выполнено итоговое неравенство (4.33), а с ним и неравенство (4.34), из которого вытекает, что

$$\frac{\Phi_3'(t)}{\Phi_3^\alpha(t)} \geqslant \frac{\Phi_3'(0)}{\Phi_3^\alpha(0)} > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,t_3), \quad t_3 \in (0,T]. \tag{4.38}$$

Следовательно, неравенство (4.37) имеет место и при $t = t_3$. Продолжая наши рассуждения, мы получим, что неравенство (4.37) имеет место при всех $t \in [0, T]$, а значит, неравенство (4.35) верно на отрезке $t \in [0, T]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для задачи Коши* (1.3) *выполнены условия*

$$\Phi_3'(0) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0 \, dx - \|\nabla u_0\|_2^2 > 0, \qquad \|\nabla u_0\|_2^2 > 0.$$

Тогда на отрезке $t \in [0, T]$ *имеет место неравенство*

$$\Phi_3(t) \geqslant \left[\Phi_3^{-(q-1)/2}(0) - \frac{q-1}{2} \Phi_3'(0) \Phi_3^{-(q+1)/2}(0) t \right]^{-2/(q-1)}.$$

Замечание 7. Теоремы 1 и 2, 3 означают, что при выполнении указанных в этих теоремах условий задачи Коши (1.2) и (1.3) при $q > q_{\mathrm{cr}}$ не имеют глобальных сильных решений.

Замечание 8. Обе полученные априорные оценки (4.23) и (4.35) имеют самостоятельное значение. Действительно, рассматривать имеет смысл только случай $q > q_{\mathrm{cr}}$, который, в свою очередь, имеет смысл только при $N \geqslant 3$. Поэтому при $N = 3$ имеем $q > 3$, но при этом $0 < 2/(q-1) < 1$, а значит, особенность выражения (4.35) вида

$$[a - bt]^{-2/(q-1)}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad t \in \left[0, \frac{a}{b}\right),$$

интегрируемая. С другой стороны, при выполнении условия (4.24) интеграл по времени от $\Phi_3(t)$ имеет априорную оценку снизу с той же особенностью.

Замечание 9. При условиях

$$q = \frac{N+2}{N-2} \quad \text{и} \quad N \geqslant 3 \tag{4.39}$$

имеется очевидная глобальная априорная оценка для сильного решения задачи Коши (1.3). Действительно, если в определении 8 сильного решения формально положить $\phi = u(x, t)$, то получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q u \, dx.$$

Используя известное неравенство (теорему вложения Соболева)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q+1} \, dx \right)^{1/(q+1)} \leqslant b \|\nabla v\|_2 \quad \text{для любых} \quad v \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{R}^N), \tag{4.40}$$

при условии (4.39) мы приходим к следующему дифференциальному неравенству:

$$\Phi'(t) + 2\Phi(t) \leqslant 2b^{q+1} \Phi^{(q+1)/2}, \qquad \Phi(t) = \|\nabla u\|_2(t),$$

из которого легко получаем неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \frac{e^{-2t}}{[\Phi_0^{(1-q)/2} - b^{q+1} + b^{q+1}e^{-(q-1)t}]^{2/(q-1)}} \leqslant \left(\frac{1}{b^{q+1}}\right)^{2/(q-1)} \tag{4.41}$$

при условии, что

$$\|\nabla u_0\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{b^{q+1}}\right)^{1/(q-1)}.$$

4.3. Задача Коши (1.4)**.** Воспользуемся функционалами (4.14), связанными соотношением (4.15). Рассуждая так же, как в п. 4.2, мы приходим к неравенству (4.21), в котором

$$E_{20} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^q u_0\,dx - \frac{q+1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{q+1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2. \tag{4.42}$$

Используя результат теоремы 2, мы получим, что имеет место априорная оценка (4.23) при условии

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|^q u_0(x)\,dx > \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{q+1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2, \qquad q > 1. \tag{4.43}$$

§ 5. Локальная однозначная разрешимость в классическом смысле задач Коши (1.1)–(1.4) при $N \geqslant 3$

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о достаточных условиях локальной по времени разрешимости в классическом смысле задач Коши (1.1)–(1.4).

5.1. Задача Коши (1.1)**.** Дадим следующее определение.

Определение 10. *Классическим решением задачи Коши* (1.1) будем называть функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T]; \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)\bigr), \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q,$$

удовлетворяющую уравнению (1.1) поточечно. В этом случае будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу (K).

Естественно, с необходимостью получаем, что

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\bigr) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N).$$

Замечание 10. Под пространством $\mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\bigr)$ мы понимаем банахово пространство функций, дифференцируемых дважды по x почти всюду,

$$u(x), u_{x_i}(x), u_{x_i x_j}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad i,j = \overline{1,N},$$

с нормой

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} \biggl[|u(x)| + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}(x)| + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}(x)|\biggr].$$

Замечание 11. Из определения 10 с необходимостью получаем, что $q > N$ при $N \geqslant 3$. Но тогда

$$\frac{N}{N-2} \leqslant N < q.$$

Следовательно, мы всегда находимся в ситуации $q > q_{\mathrm{cr}}$ при $N \geqslant 3$.

Введем вспомогательное нелинейное интегральное уравнение при $N \geqslant 3$:

$$u(x,t) = g(x,t) + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\, dy - \int_0^t ds\,(\sin(t-s)) c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\, dy, \tag{5.1}$$

где

$$g(x,t) \equiv \left(u_0(x) - c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(y)|^q}{|x-y|^{N-2}}\, dy\right)\cos t \\ + \left(u_1(x) - qc_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(y)|^{q-2}u_0(y)u_1(y)}{|x-y|^{N-2}}\, dy\right)\sin t, \tag{5.2}$$

$$c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Теорема 4. *В классе* (K) *задача Коши* (1.1) *эквивалентна интегральному уравнению* (5.1).

Доказательство. Обозначим через $\hat{u}(\xi) = \hat{F}[u](\xi)$ преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^N$ в смысле пространства $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^N)$ распределений медленного роста. Тогда в силу принадлежности u классу (K) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$, $|u|^q \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$. В этом случае из (1.1) получим следующее равенство в $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\hat{u}(\xi,t) - \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q}(\xi,t)\right) + \hat{u}(\xi,t) = 0, \tag{5.3}$$

которое в рассматриваемом классе приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\hat{u}(\xi,t) = \left(\hat{u}_0(\xi) - \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q}(\xi,0)\right)\cos t + \left(\hat{u}_1(\xi) - \frac{1}{|\xi|^2}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{|u|^q}(\xi,0)\right)\sin t \\ + \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q}(\xi,t) - \int_0^t ds\,(\sin(t-s))\frac{1}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q}(\xi,s). \tag{5.4}$$

Заметим, что если $f \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$, то $\hat{F}[f*g] = \hat{F}[f]\hat{F}[g]$ в смысле $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^N)$. Поскольку $\alpha > N$ и $|x|^{2-N} \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, то $|u|^q \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$ и, следовательно, из (5.4) получим интегральное уравнение (5.1).

Таким образом, каждое решение задачи Коши (1.1) в классе (K) является решением интегрального уравнения (5.1).

Обратное утверждение вытекает из свойств ньютоновского потенциала при условии, что решение принадлежит классу (K). Действительно, из определения 10 вытекает, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{(1)}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^N))$. Кроме того, имеет место неравенство

$$\bigl||u|^q(x,t)-|u|^q(y,t)\bigr| \leqslant q\max\bigl\{|u|^{q-1}(x,t)|u_{x_i}(x,t)|,\ |u(y,t)|^q\,|u_{y_i}(y,t)|\bigr\}|x-y|.$$

Следовательно, $|u(x,t)|^q\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{(0,\gamma)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ при всех $\gamma\in(0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$v(x,t)\equiv(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}u(x,t),\qquad \alpha>0, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} f(x,t)\equiv{}&\biggl(v_0(x)-\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v_0(y)|^q\,dy\biggr)\cos t\\ &+\biggl(v_1(x)-q\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v_0(y)|^{q-2}v_0(y)v_1(y)\,dy\biggr)\sin t, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} K_N(x,y)\equiv\frac{c_0}{|x-y|^{N-2}}\,\frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}},\\ v_0(x)\equiv(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}u_0(x),\qquad v_1(x)\equiv(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}u_1(x). \end{gathered} \tag{5.7}$$

С учетом этих обозначений интегральное уравнение (5.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(x,t)={}&f(x,t)+\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v|^q(y,t)\,dy\\ &-\int_0^t ds\,\sin(t-s)\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v|^q(y,s)\,dy. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Введем основное банахово пространство

$$\mathbb{B}\equiv\mathbb{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N) \tag{5.9}$$

с нормой

$$\|v(x,t)\|\equiv\operatorname*{ess.\,sup}_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]}|v(x,t)|.$$

Выберем замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество этого банахова пространства:

$$B_{n\varepsilon}\equiv\bigl\{v(x,t)\in\mathbb{B}\colon \|v\|\leqslant n\varepsilon\bigr\}\quad\text{при некотором}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Предположим, что $\|v_0\|\leqslant\varepsilon$ и $\|v_1\|\leqslant\varepsilon$. В классе $v(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$ интегральное уравнение (5.8) эквивалентно следующему:

$$\bigl(I-K(v)*\bigr)\frac{dv}{dt}=f'(x,t)-\int_0^t ds\,(\cos(t-s))\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v|^q(y,s)\,dy, \tag{5.10}$$

где оператор $K*$ имеет явный вид

$$K(v)*w\equiv q\int_{\mathbb{R}^N}K_N(x,y)|v(y)|^{q-2}v(y)w(y)\,dy. \tag{5.11}$$

Нам надо получить достаточные условия существования обратного оператора $(I-K(v)*)^{-1}$. Для этого нужно вычислить норму оператора $K(v)*\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$. Имеет место оценка сверху

$$\|K(v)*\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \equiv \sup_{\|w\|\leqslant 1} \|K(v)*w\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \leqslant qc_1\|v\|^{q-1}, \tag{5.12}$$

$$c_1 \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x,y)\,dy.$$

Если при этом $v\in B_{n\varepsilon}$, то имеет место оценка

$$\|K(v)*\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \leqslant qc_1(n\varepsilon)^{q-1} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при достаточно малом} \quad \varepsilon>0. \tag{5.13}$$

Таким образом, мы можем представить оператор $(I-K(v)*)^{-1}\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ в виде сходящегося ряда Неймана:

$$(I-K(v)*)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty}[K(v)*]^m. \tag{5.14}$$

Поэтому интегро-дифференциальное уравнение (5.10) эквивалентно уравнению

$$\frac{dv}{dt} = (I-K(v)*)^{-1}\left[f'(x,t) - \int_0^t ds\,(\cos(t-s))\int_{\mathbb{R}^N} dy\,K_N(x,y)|v|^q(y,s)\right]. \tag{5.15}$$

Введем следующее обозначение:

$$L(v) \equiv (I-K(v)*). \tag{5.16}$$

В силу представления (5.14) имеет место оценка

$$\left\|L^{-1}(v_1)-L^{-1}(v_2)\right\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty}\left\|[K(v_1)*]^m-[K(v_2)*]^m\right\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}}. \tag{5.17}$$

Используя метод математической индукции, в силу (5.12) можно доказать, что имеет место следующая оценка:

$$\left\|[K(v_1)*]^m-[K(v_2)*]^m\right\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \leqslant m(qc_1(n\varepsilon)^{q-1})^{m-1}\|K(v_1)*-K(v_2)*\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \tag{5.18}$$

для всех $v_1,v_2\in B_{n\varepsilon}$. Кроме того, можно доказать, что при $q\geqslant 2$

$$\begin{aligned}\|K(v_1)*-K(v_2)*\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} &\leqslant q(q-1)c_1\max\bigl\{\|v_1\|^{q-2},\|v_2\|^{q-2}\bigr\}\|v_1-v_2\| \\ &\leqslant q(q-1)c_1(n\varepsilon)^{q-2}\|v_1-v_2\|\end{aligned} \tag{5.19}$$

для всех $v_1,v_2\in B_{n\varepsilon}$.

Таким образом, из (5.17)–(5.19) вытекает искомая оценка

$$\|L^{-1}(v_1)-L^{-1}(v_2)\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \leqslant c_2(\varepsilon)\|v_1-v_2\|, \qquad qc_1(n\varepsilon)^{q-1}\leqslant\frac{1}{2} \tag{5.20}$$

для всех $v_1, v_2 \in B_{n\varepsilon}$, где

$$c_2(\varepsilon) \equiv q(q-1)c_1(n\varepsilon)^{q-2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}, \qquad q \geqslant 2.$$

Запишем теперь уравнение (5.15) в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = A(v), \qquad v(0) = v_0, \tag{5.21}$$

где

$$A(v) \equiv (I - K(v)*)^{-1} \left[f'(x,t) - \int_0^t ds\,(\cos(t-s)) \int_{\mathbb{R}^N} dy\, K_N(x,y)|v|^q(y,s) \right]. \tag{5.22}$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|A(v_1) - A(v_2)\| &\leqslant \|L^{-1}(v_1) - L^{-1}(v_2)\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \\ &\times \left\| f'(x,t) - \int_0^t ds\,(\cos(t-s)) \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x,y)|v_1(y,s)|^q\, dy \right\| \\ &+ \|L^{-1}(v_2)\|_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}} \left\| \int_0^t ds\,(\cos(t-s)) \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x,y) \big| |v_1|^q - |v_2|^q \big|\, dy \right\|. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Из этой оценки для всех $v_1, v_2 \in B_{n\varepsilon}$ вытекает следующее неравенство:

$$\|A(v_1) - A(v_2)\| \leqslant c_3(\varepsilon, T)\|v_1 - v_2\|, \tag{5.24}$$

где

$$c_3(\varepsilon, T) \equiv c_2(\varepsilon)\big[2\varepsilon + (q+1)c_1\varepsilon^q + c_1 T(n\varepsilon)^q\big] + 2Tc_1(n\varepsilon)^{q-1}.$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|A(v)\| \leqslant 2\big[2\varepsilon + (q+1)c_1\varepsilon^q + c_1 T(n\varepsilon)^q\big]. \tag{5.25}$$

Перепишем уравнение (5.21) в виде

$$v(t) = H(v) \equiv v_0 + \int_0^t A(v)(s)\, ds. \tag{5.26}$$

Пусть $T > 0$ – произвольное фиксированное, тогда выберем указанное ранее натуральное число n так, чтобы было выполнено неравенство $n > 4T + 1$. Выберем теперь $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы одновременно выполнялись условия

$$qc_1(n\varepsilon)^{q-1} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad c_3(\varepsilon, T) \leqslant \frac{1}{2}, \qquad 2T\big[2\varepsilon + (q+1)c_1\varepsilon^q + c_1 T(n\varepsilon)^q\big] \leqslant (n-1)\varepsilon.$$

Тогда оператор $H(v)$ действует из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$ и является сжимающим на $B_{n\varepsilon}$ при указанном фиксированном n. В силу теоремы о сжимающих отображениях приходим к выводу о существовании единственного решения операторного уравнения (5.26) в пространстве $\mathbb{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ при малых начальных данных $v_0(x), v_1(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что

$$\mathbb{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N) = \mathbb{L}^\infty([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Используя метод повышения гладкости решения абстрактного интегрального уравнения ("бутстрэп"-метод) и учитывая явный вид операторного уравнения (5.26), мы приходим к следующим импликациям:

$$\begin{aligned} v(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)) \quad &\Longrightarrow \quad v(x,t) \in \mathbb{AC}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)) \\ &\Longrightarrow \quad v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)). \end{aligned}$$

Теперь мы должны доказать, что $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$. С этой целью перепишем уравнение (5.21) в виде

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{m=0}^{+\infty} \bigl[K(v(t))*\bigr]^m d(x,t), \qquad d(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)\bigr). \tag{5.27}$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{dv}{dt}\right\| \leqslant \|A(v)\| \leqslant 2\bigl[2\varepsilon + (q+1)c_1\varepsilon^q + Tc_1(n\varepsilon)^q\bigr].$$

Следовательно, для таких $\varepsilon > 0$ ряд в правой части уравнения (5.27) дифференцируем при $t \in [0,T]$. Значит, $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$. В силу эквивалентности (в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$) уравнений (5.8) и (5.15) приходим к выводу о существовании единственного решения

$$v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)), \qquad v_0(x), v_1(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N),$$

интегрального уравнения (5.8) при достаточно малых начальных данных $v_0(x)$ и $v_1(x)$.

Значит, для любого фиксированного $T > 0$ и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ при выполнении условий

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \qquad |u_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}$$

существует единственное решение интегрального уравнения (5.1) класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T];\mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^N)\bigr) \quad \text{при} \quad N < \alpha \leqslant q. \tag{5.28}$$

Теперь мы потребуем выполнения условий $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)$ и

$$|\nabla_x u_0(x)| \leqslant \frac{c_4}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \qquad |\nabla_x u_1(x)| \leqslant \frac{c_4}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}} \tag{5.29}$$

при некотором $c_4 > 0$. Отметим, что тогда правая часть интегрального уравнения (5.1) будет дифференцируемой по $x \in \mathbb{R}^N$ и при этом будет справедлива следующая оценка:

$$
\begin{gathered}
|\nabla_x u|(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} \leqslant 2c_4 + \int_{\mathbb{R}^N} G_N(x,y)|v_0(y)|^q\,dy \\
+ q\int_{\mathbb{R}^N} G_N(x,y)|v_0(y)|^{q-1}|v_1(y)|\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} G_N(x,y)|v|^q(y,t)\,dy \\
+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} G_N(x,y)|v|^q(y,t)\,dy\,dt,
\end{gathered}
$$

$$
G_N(x,y) \equiv (N-2)c_0 \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x-y|^{N-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2}}, \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q, \tag{5.30}
$$

из которой в силу результата леммы 4 (см. § 8) вытекает неравенство

$$
|\nabla_x u(x,t)|(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} \leqslant c_5(\varepsilon,T) \equiv 2c_4 + (q+1)k_1\varepsilon^q + (T+1)k_1(n\varepsilon)^q. \tag{5.31}
$$

Поскольку $u(x,t)$ принадлежит классу (5.28), мы можем продифференцировать обе части уравнения (5.1) по времени и получить равенство

$$
\begin{gathered}
u'(x,t) = g'(x,t) + c_0 q\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q-2}(y,t)u(y,t)u'(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \\
- \int_0^t ds\,(\cos(t-s))c_0\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\,dy,
\end{gathered} \tag{5.32}
$$

которое тоже можно продифференцировать по времени:

$$
\begin{gathered}
u''(x,t) = g''(x,t) + c_0 q\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q-2}(y,t)u(y,t)u''(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \\
+ c_0 q(q-1)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q-2}(y,t)(u'(y,t))^2}{|x-y|^{N-2}}\,dy - c_0\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \\
+ \int_0^t ds\,(\sin(t-s))c_0\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\,dy.
\end{gathered} \tag{5.33}
$$

Правые части уравнений (5.32) и (5.33) дифференцируемы по $x \in \mathbb{R}^N$. Поступая точно так же, как при выводе оценки (5.31), получим, что существует такая постоянная $c_6(\varepsilon,T) > 0$, что

$$
\left|\nabla_x u^{(k)}(x,t)\right|(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} \leqslant c_6(\varepsilon,T), \qquad k=1,2. \tag{5.34}
$$

Поэтому

$$
u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T];\mathbb{W}^{1,+\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^N)\cap\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)\bigr).
$$

Теперь можно продифференцировать обе части интегрального уравнения (5.1) по x_i $(i=\overline{1,N})$ и перебросить производную с ядра $|x-y|^{2-N}$ на соответствующую функцию. Тогда получим равенство

$$
\begin{gathered}
u_{x_i}(x,t) = g_{x_i}(x,t) + c_0 q\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q-2}(y,t)u(y,t)u_{y_i}(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \\
- \int_0^t ds\,(\sin(t-s))c_0 q\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q-2}(y,s)u(y,s)u_{y_i}(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\,dy,
\end{gathered} \tag{5.35}
$$

где

$$
\begin{aligned}
g_{x_i}(x,t) \equiv \biggl(u_{0x_i}(x) - c_0 q \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(y)|^{q-2}u_0(y)u_{0y_i}(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy\biggr)\cos t \\
+ \biggl(u_{1x_i}(x) - qc_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(y)|^{q-2}u_0(y)u_{1y_i}(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy\biggr)\sin t \\
- q(q-1)c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(y)|^{q-2}u_{0y_i}(y)u_1(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \sin t. \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Потребуем, чтобы функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ принадлежали классу $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$. Тогда правая часть уравнения (5.35) дифференцируема по $x_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,N}$. При этом если начальные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$
|u_{0x_ix_j}(x)| \leqslant \frac{c_7}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \quad |u_{1x_ix_j}(x)| \leqslant \frac{c_7}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \qquad i,j = \overline{1,N}, \tag{5.37}
$$

с некоторым $c_7 > 0$, то при некотором $c_8 = c_8(\varepsilon, T)$ справедлива оценка

$$
|u_{x_ix_j}(x,t)| \leqslant \frac{c_8}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0. \tag{5.38}
$$

Уравнения (5.32) и (5.33) приводят к соответствующим оценкам вида (5.38) для производных по времени решения $u(x,t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $T > 0$ – произвольное фиксированное число, тогда для любых начальных функций*

$$
u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\bigr) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N), \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q,
$$

таких, что

$$
|u_0(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \qquad |u_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}},
$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует единственное классическое решение класса (K) *задачи Коши* (1.1).

5.2. Задача Коши (1.2). Решение будем искать в классе (K) (см. определение 10 в начале п. 5.1). Тем же, что и ранее, способом убеждаемся, что в классе (K) задача Коши (1.2) эквивалентна следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$
u(x,t) = u_0(x)\cos t + u_1(x)\sin t + \int_0^t ds(\sin(t-s))c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\,dy, \tag{5.39}
$$

где

$$
c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.
$$

В обозначениях (5.5)–(5.7) из интегрального уравнения (5.39) получим следующее интегральное неравенство:

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v_0\|_\infty + \|v_1\|_\infty + c_1 \int_0^t ds\, \|v\|_\infty^q(s). \tag{5.40}$$

Из этого неравенства в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [18] вытекает априорная оценка

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant \frac{\|v_0\|_\infty + \|v_1\|_\infty}{[1-(q-1)(\|v_0\|_\infty + \|v_1\|_\infty)^{q-1}c_1 t]^{1/(q-1)}} \tag{5.41}$$

при

$$t \in [0, t_0), \qquad t_0 \equiv (q-1)^{-1} c_1^{-1} [\|v_0\|_\infty + \|v_1\|_\infty]^{1-q}. \tag{5.42}$$

Методом сжимающих отображений можно получить более сильный результат, нежели теорема 5, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для произвольных начальных данных*

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\bigr) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N), \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q,$$

найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное решение класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T_0); \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)\bigr),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x,t)| = +\infty.$$

Кроме того, имеет место следующая оценка снизу: $T_0 \geqslant t_0$.

Замечание 12. Классическое решение класса (K) задачи Коши (1.2), вообще говоря, не является сильным в смысле определения 7, однако оно является слабым при условии, что $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

5.3. Задача Коши (1.3)**.** Дадим следующее определение.

Определение 11. *Классическим решением задачи Коши* (1.3) при $N \geqslant 3$ будем называть функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T]; \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)\bigr), \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q,$$

удовлетворяющую уравнению (1.3) поточечно. В этом случае будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу (K).

Естественно, с необходимостью получаем, что

$$u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\bigr) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N).$$

Как и ранее, убеждаемся в эквивалентности задачи Коши (1.3) в классе (K) следующему интегральному уравнению:

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\, dy, \tag{5.43}$$

где

$$c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Из интегрального уравнения (5.43) в обозначениях (5.5)–(5.7) получим

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant \|v_0\|_\infty e^{-t} + c_1 \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \|v\|_\infty^q(s), \tag{5.44}$$

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant \frac{\|v_0\|_\infty e^{-t}}{[1 - c_1\|v_0\|_\infty^{q-1}(1-e^{-(q-1)t})]^{1/(q-1)}}. \tag{5.45}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Для произвольной начальной функции*

$$u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\big([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N\big) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N), \qquad 3 \leqslant N < \alpha \leqslant q,$$

найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное решение класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0,T_0); \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)\big),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x,t)| = +\infty.$$

Кроме того, справедливы следующие два утверждения:

$$\|v_0\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{c_1}\right)^{1/(q-1)} \implies \|v\|_\infty(t) \leqslant \left(\frac{1}{c_1}\right)^{1/(q-1)} \implies T_0 = +\infty,$$

$$\|v_0\|_\infty > \left(\frac{1}{c_1}\right)^{1/(q-1)} \implies T_0 \geqslant -\frac{1}{q-1} \ln\left(1 - \frac{1}{c_1\|v_0\|_\infty^{q-1}}\right),$$

где

$$\|v\|_\infty \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x,t)|.$$

Замечание 13. Если начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна, то и $u(x,t) \geqslant 0$. Из результатов книги [14] (§ 5.7) вытекает, что если выполнено неравенство

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_0^q(x) u_0^q(y)}{|x-y|^{N-2}}\, dx\, dy > \int_{\mathbb{R}^N} u_0^{q+1}(x)\, dx,$$

то классического неотрицательного решения класса (K) задачи Коши (1.3) не существует глобально во времени, т. е. $T_0 < +\infty$.

Замечание 14. Классическое решение класса (K) задачи Коши (1.3), вообще говоря, не является сильным в смысле определения 8, однако оно является слабым при условии, что $u_0(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

5.4. Задача Коши (1.4) при $N = 3$. Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t)u_0(y)\,dy \\ + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t-s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|y-z|^{N-2}} |u|^q(z,s)\,dz\,dy, \tag{5.46}$$

где

$$\mathscr{E}_0(x,t) \equiv \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}, \qquad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \tag{5.47}$$

$$c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Отметим, что можно ввести ядро

$$R_N(x,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t) \frac{c_0}{|y|^{N-2}}\,dy, \tag{5.48}$$

которое вычисляется непосредственно (см. § 8, лемма 5), и мы приходим к выражению

$$R_N(x,t) = c_N \frac{\vartheta(t)}{t^{(N-3)/2}|x|} \int_{-|x|/(2\sqrt{t})}^{|x|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\,dr, \quad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \tag{5.49}$$

Поэтому нелинейное уравнение (5.46) можно переписать в следующем виде:

$$u(x,t) = g_0(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} R_N(x-y,t-s)|u|^q(y,s)\,dy\,ds, \tag{5.50}$$

где

$$g_0(x,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t)u_0(y)\,dy. \tag{5.51}$$

Предположим, что $N = 3$, тогда ядро $R_3(x,t)$ интегрального уравнения (5.50) имеет интегрируемую особенность по времени t:

$$R_3(x,t) = c_3 \frac{\vartheta(t)}{|x|} \int_{-|x|/(2\sqrt{t})}^{|x|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\,dr, \qquad c_3 = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}}, \tag{5.52}$$

причем для производной по времени t этой функции справедливо равенство

$$R_3'(x,t) = -\frac{1}{2(4\pi t)^{3/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{5.53}$$

а для самой функции $R_3(x,t)$ имеют место оценки

$$0 \leqslant R_3(x,t) \leqslant \frac{c_3 a}{2t^{1/2}} \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{5.54}$$

При $N = 3$ из интегрального уравнения (5.50) получим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$v(x,t) = f_0(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y,t-s)|v|^q(y,s)\,dy\,ds, \tag{5.55}$$

где мы использовали обозначения

$$v(x,t) \equiv u(x,t)(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}, \qquad v_0(x) \equiv u_0(x)(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}, \tag{5.56}$$

$$f_0(x,t) \equiv g_0(x,t)(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}, \qquad F(x,y,t) \equiv \frac{c_3}{c_0} K_3(x,y) \int_{-|x-y|/(2\sqrt{t})}^{|x-y|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\,dr. \tag{5.57}$$

Отметим, что в силу леммы 6 из § 8 (при $|x| \geqslant \varepsilon > 0$) и представления

$$g_0(x,t) = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|z|^2/4} u_0\left(x - z\sqrt{t}\right) dz$$

при $|x| < \varepsilon$ получаем, что если $v_0(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$, то $f_0(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$. Далее в силу свойств ядра $K_3(x,y)$, участвующего в определении ядра $F(x,y,t)$, приходим к выводу о справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой начальной функции* $u_0(x) \in \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^3)$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *что при* $N = 3$ *интегральное уравнение* (5.50) *имеет единственное решение класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0,T; \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^3)\bigr), \qquad 3 < \alpha \leqslant q, \tag{5.58}$$

для любого $T \in (0,T_0)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0^-} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^3} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x,t)| = +\infty. \tag{5.59}$$

Таким образом, в силу этой леммы существует единственное решение класса (5.58) интегрального уравнения (5.46) при $N = 3$. Наша задача заключается в "повышении" гладкости решения этого уравнения. Прежде всего отметим, что из вида уравнения (5.55) следует, что при $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$ решение $u(x,t)$ принадлежит классу

$$u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T_0); \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^3)). \tag{5.60}$$

Теперь введем функцию

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_0}{|x-y|} |u|^q(y,t)\,dy. \tag{5.61}$$

Напомним равенство

$$\nabla_x \frac{1}{|x-y|^{N-2}} = (2-N) \frac{\overrightarrow{x-y}}{|x-y|^N} \quad \text{при} \quad x \neq y.$$

Для всех $t \in [0, T]$ при любом $T < T_0$ градиент по x функции $f(x,t)$ допускает следующую оценку сверху:

$$|\nabla_x f(x,t)| \leqslant c_0 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \frac{1}{[1+|y|^2]^{\alpha/2}}\, dy\, \|v\|^q \leqslant c_2 \|v\|^q \tag{5.62}$$

в силу леммы 4 из § 8 при $3 < \alpha \leqslant q$, где мы использовали обозначение

$$\|v\| \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^3} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x,t)|. \tag{5.63}$$

Следовательно, имеет место оценка Липшица

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\nabla_x f(x,t)|\, |x_1 - x_2| \leqslant c_2 \|v\|^q\, |x_1 - x_2| \tag{5.64}$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$, равномерная по $t \in [0,T]$. В силу оценки (5.64) при дополнительном условии $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ справедлива теорема 12 первой главы работы [19], из которой вытекает, что функция $u(x,t)$ является решением следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_0}{|x-y|} |u|^q(y,t)\, dy, \qquad q > 3, \tag{5.65}$$

в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,2)}((0,T_0)\times\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}([0,T_0); \mathbb{C}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^3)). \tag{5.66}$$

Чтобы продолжить повышение гладкости решения уже интегро-дифференциального уравнения (5.65), нужно сделать дополнительное предположение:

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{(0,\gamma)}(\mathbb{R}^3) \quad \text{при некотором} \quad \gamma \in (0,1]. \tag{5.67}$$

Замечание 15. Под $\mathbb{C}^{(0,\gamma)}(\mathbb{R}^3)$ мы понимаем пространство глобально непрерывных по Гёльдеру функций, а пространство локально непрерывных по Гёльдеру функций мы обозначаем через $\mathbb{C}^{(0,\gamma)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

В этом случае $g_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(0,\gamma)}(\mathbb{R}^3)$ равномерно по $t \in [0,T]$ при любом фиксированном $T \in (0,T_0)$. Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\nabla_x R_3(x,t) = c_3 \frac{\overrightarrow{x}}{|x|^3} \int_{-|x|/(2\sqrt{t})}^{|x|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\, dr + c_3 \frac{\overrightarrow{x}}{|x|^2} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-|x|^2/(4t)} \tag{5.68}$$

при $x \neq 0$, $t \neq 0$. Введем обозначение

$$h(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} R_3(x-y, t-s) |u|^q(y,s)\, dy\, ds. \tag{5.69}$$

В силу (5.68) и лемм 3, 4 из § 8 (при $3 < \alpha \leqslant q$) имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} &|\nabla_x h(x,t)| \\ &\leqslant c_4 \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x-y|^2} \frac{1}{[1+|y|^2]^{\alpha/2}} + \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{[1+|y|^2]^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \right] |v|^q(y,s)\, dy \\ &\leqslant c(T) \|v\|^q \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{5.70}$$

при любом фиксированном $T \in (0, T_0)$. Следовательно, функция $h(x,t)$ допускает оценку

$$|h(x_1,t) - h(x_2,t)| \leqslant c(T)\|v\|^q\,|x_1 - x_2| \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3, \tag{5.71}$$

а уж тем более является локально непрерывной по Гёльдеру с показателем $\gamma \in (0,1]$. Таким образом, правая часть интегрального уравнения (5.50) является по переменной $x \in \mathbb{R}^3$ локально непрерывной по Гёльдеру с показателем $\gamma \in (0,1]$ равномерно относительно $t \in [0,T]$ для любого фиксированного $T \in (0,T_0)$. Стало быть,

$$|u(x_1,t) - u(x_2,t)| \leqslant b(S,T)|x_1 - x_2|^\gamma \quad \text{при} \quad x_1, x_2 \in S, \quad \gamma \in (0,1] \tag{5.72}$$

для произвольного замкнутого, ограниченного множества $S \in \mathbb{R}^3$ и всех $t \in [0,T]$ при любом фиксированном $T \in (0,T_0)$, т. е. $u(x,t)$ принадлежит $\mathbb{C}^{(0,\gamma)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ равномерно по $t \in [0,T]$.

Таким образом, в силу классических дифференциальных свойств ньютоновского потенциала приходим к выводу о том, что функция $f(x,t)$, определенная формулой (5.61), принадлежит классу

$$f(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,\alpha)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \quad \text{равномерно по} \quad t \in [0,T],$$

причем

$$\Delta_x f(x,t) = -|u|^q.$$

Тем самым, решение интегро-дифференциального уравнения (5.65) является также решением уравнения

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right) + |u|^q = 0, \tag{5.73}$$

а в силу (5.50) приходим к выводу, что $u(x,0) = u_0(x)$. Теперь нам надо доказать, что на самом деле решение $u(x,t)$ уравнения (5.73) является решением уравнения (1.4). Прежде всего отметим, что при $t > 0$ функция $g_0(x,t)$, определенная формулой (5.51), обладает свойством

$$g_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\big((0,T_0); \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^3)\big).$$

Поэтому, в частности, имеем

$$\Delta_x \frac{\partial g_0(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta_x g_0(x,t) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Введем обозначение

$$g(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} R_3(x-y, t-s)|u|^q(y,s)\,dy\,ds. \tag{5.74}$$

Эта функция дифференцируема по t, и ее производная имеет вид

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = c_4 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|^q}{|x-y|}\,dy - \frac{c_3}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-|x-y|^2/(4(t-s))}|u|^q(y,s)\,dy\,ds, \tag{5.75}$$

где
$$c_4 = c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\, dr.$$
Из представления (5.75) в силу того, что функция $|u|^q$ принадлежит $\mathbb{C}^{(0,\gamma)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ равномерно по $t \in [0,T]$, и классических свойств Ньютоновского и теплового потенциалов заключаем, что
$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}\big((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)\big).$$
Следовательно, из интегрального уравнения (5.50) при $N = 3$ делаем вывод, что $u'(x,t) \in \mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3))$. Ранее было доказано, что $u(x,t) \in \mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3))$. Таким образом, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3))$. Стало быть, отсюда и из равенства (5.73) получаем, что решение $u(x,t)$ уравнения (5.73) является решением уравнения
$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \Delta^2 u + |u|^q = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$$
Теперь наша задача – доказать, что решение интегрального уравнения (5.50) принадлежит классу $u(x,t) \in \mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(4)}(\mathbb{R}^3))$. Пока мы знаем только, что решение этого уравнения принадлежит классу $u(x,t) \in \mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3))$.

Замечание 16. То, что мы доказали существование $\Delta^2 u$ поточечно, конечно, не означает, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(4)}(\mathbb{R}^3)$.

Для дальнейшего повышения гладкости решения интегрального уравнения (5.50) нам нужно сделать следующее ограничительное предположение:
$$u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\big([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^3\big) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad 3 < \alpha \leqslant q. \tag{5.76}$$
Из уравнения (5.50) получим
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}_0(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_i(x-y,t-s)|u|^q(y,s)\, dy\, ds, \tag{5.77}$$
где
$$K_i(x-y,t-s) = \frac{\partial R_3(x-y,t-s)}{\partial x_i}.$$
Отсюда в силу леммы 1 из § 5 и лемм 6 и 7 из § 8 вытекает, что
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty\big(0,T;\mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^3)\big) \quad \text{при} \quad T \in (0,T_0). \tag{5.78}$$
Из уравнения (5.46) в рассматриваемом классе получаем
$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}_0(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}\, dy \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}_0(x-y,t-s) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_0}{|y-z|} q|u(z,s)|^{q-2}u(z,s)\frac{\partial u(z,s)}{\partial z_i}\, dz\, dy.\end{aligned} \tag{5.79}$$

Теперь введем функцию

$$f_i(x,t) = q\int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_0}{|x-y|}|u|^{q-2}(y,t)u(y,t)\frac{\partial u(y,t)}{\partial y_i}\,dy, \qquad i=\overline{1,N}. \tag{5.80}$$

Для функции $f_i(x,t)$ в силу леммы 4 из § 8 (при $3<\alpha\leqslant q$) имеет место следующая равномерная по $t\in[0,T]$ оценка:

$$\begin{aligned}|f_i(x_1,t)-f_i(x_2,t)| &\leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]}|\nabla_x f(x,t)|\,|x_1-x_2| \\ &\leqslant c_5\|v\|^{q-1}\|v_{x_i}\|\,|x_1-x_2|,\end{aligned} \tag{5.81}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму (5.63). Следовательно, в силу теоремы 10 из [19, гл. 1] имеем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\in\mathbb{C}^{(1,2)}((0,T_0)\times\mathbb{R}^3) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\in\mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)). \tag{5.82}$$

Повторяя рассуждения (5.77)–(5.81), но уже для функций вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\,\partial x_j} \quad \text{при} \quad i,j=\overline{1,N},$$

получим, что

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}\in\mathbb{C}^{(1,2)}((0,T_0)\times\mathbb{R}^3) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\in\mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)). \tag{5.83}$$

Стало быть, мы доказали, что $u(x,t)\in\mathbb{C}((0,T_0);\mathbb{C}^{(4)}(\mathbb{R}^3))$.

Дадим следующее определение.

Определение 12. *Классическим решением задачи Коши* (1.4) на цилиндре $(t,x)\in(0,T_0)\times\mathbb{R}^3$ будем называть функцию $u(x,t)$, обладающую свойствами

$$\begin{gathered}u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\bigl((0,T_0);\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)\bigr)\cap\mathbb{C}\bigl((0,T_0);\mathbb{C}^{(4)}(\mathbb{R}^3)\bigr)\cap\mathbb{C}\bigl([0,T_0);\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)\bigr),\\ u(x,t)\in\mathbb{L}^\infty\bigl(0,T;\mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^3)\bigr), \qquad 3<\alpha\leqslant q,\end{gathered}$$

для любого $T\in(0,T_0)$ и удовлетворяющую уравнению (1.1) поточечно. В этом случае будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу (K).

Точно так же, как для задачи Коши (1.1), можно доказать следующий результат.

Теорема 8. *Задача Коши* (1.4) *в классе* (K) *эквивалентна интегральному уравнению* (5.46) *при* $N=3$.

Отметим, что в предыдущих рассуждениях можно считать гёльдеровский параметр γ равным 1. Итак, мы доказали следующий важный результат.

Теорема 9. *Для любой начальной функции*

$$u_0(x)\in\mathbb{W}^{2,\infty}\bigl([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^3\bigr)\cap\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3), \qquad 3<\alpha\leqslant q,$$

найдется такое $T_0 > 0$, *что задача Коши* (1.4) *имеет единственное решение класса* (K), *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}|u(x,t)| = +\infty. \tag{5.84}$$

Принимая во внимание результат п. 3.4, приходим к следующей теореме.

Теорема 10. *Если* $N = 3$, $3 < q \leqslant 5$, *то*

$$u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}\big([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^3\big) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^3), \qquad 3 < \alpha \leqslant q,$$

причем функция $u_0(x)$ *не обращается в нуль всюду на* $\mathbb{R}^3$, *имеет место неравенство* $0 < T_0 < +\infty$ *и, стало быть, справедливо* (5.84).

Замечание 17. Используя результат того же п. 3.4, приходим к выводу о том, что при $1 < q \leqslant 3$ и $N = 3$ имеет место мгновенное разрушение решений задачи Коши (1.4), т. е. при любом $T > 0$ отсутствует нетривиальное локальное слабое решение при условии $u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$. Вопрос о том, существует ли глобальное слабое решение при $q > p_{\mathrm{cr}}$ и $N \geqslant 3$, пока открыт. Заметим, кроме того, что и при малых начальных условиях в силу результата теоремы 10 нет глобальных нетривиальных слабых решений при $3 < q \leqslant 5$, $N = 3$ и $u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$.

Замечание 18. При $N = 3$ критический показатель $q_{\mathrm{cr}} = 3$ является точным для задач Коши (1.2)–(1.4), поскольку при $1 < q \leqslant 3$ локальных во времени нетривиальных слабых решений нет, а при $q > 3$ каждая из этих задач Коши имеет единственное локальное слабое решение. В случае задачи (1.1) при $N = 3$ ситуация следующая: если

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|^q\,dx = 0, \qquad u_1(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N),$$
$$u_1(x) \neq 0 \quad \text{на множестве ненулевой меры Лебега},$$

то при $1 < q \leqslant 3$ локальных нетривиальных слабых решений нет, а при $q > 3$ для любого фиксированного $T > 0$ и достаточно малой начальной функции $u_1(x)$ локальное слабое решение существует и единственно.

§ 6. Локальная разрешимость задач Коши (1.1)–(1.4) в сильном обобщенном смысле при $N \geqslant 3$

Сделаем общее для этого параграфа предположение:

$$q > \frac{N}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3. \tag{6.1}$$

Рассмотрим следующий нелинейный интегральный оператор:

$$A(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}}|u|^q(y)\,dy, \qquad c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \quad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}. \tag{6.2}$$

Воспользуемся свойством потенциала Рисса (см., например, работу [20]) и получим, что

$$A(u)\colon \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N), \quad \text{где} \quad p_1 = \frac{N}{2}(q-1), \tag{6.3}$$

и имеет место оценка

$$\|A(u)\|_{p_1} \leqslant a_{q,N}\|u\|^q_{p_1}, \qquad 0 < a_{q,N} < +\infty. \tag{6.4}$$

Действительно, справедливо неравенство

$$\|A(u)\|_{p_1} \leqslant a_{q,N}\||u|^q\|_{r_1} \quad \text{где} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{2}{N}, \quad r_1 q = p_1, \quad r_1 > 1.$$

Отсюда при выполнении условия (6.1) получим, что $r_1 > 1$. При любых $u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ имеет место оценка

$$\|A(u_1) - A(u_2)\|_{p_1} \leqslant q a_{q,N} \max\bigl\{\|u_1\|^{q-1}_{p_1}, \|u_2\|^{q-1}_{p_1}\bigr\}\|u_1 - u_2\|_{p_1}. \tag{6.5}$$

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\|A(u_1) - A(u_2)\|_{p_1} &\leqslant a_{q,N}\bigl\||u_1|^q - |u_2|^q\bigr\|_{r_1} \\
&\leqslant q a_{q,N}\bigl\|\max\{|u_1|^{q-1}, |u_2|^{q-1}\}|u_1 - u_2|\bigr\|_{r_1} \\
&\leqslant q a_{q,N}\bigl\|\max\{|u_1|^{q-1}, |u_2|^{q-1}\}\bigr\|_{r_1 q_1}\|u_1 - u_2\|_{r_1 q_2}, \qquad q_2 = q, \quad q_1 = \frac{q}{q-1},
\end{aligned}$$

откуда после арифметических преобразований получим (6.5). Теперь нас интересуют дифференциальные свойства (в смысле соболевских пространств) оператора $A(u)$. Прежде всего введем обозначения

$$g(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}} f(y)\,dy, \qquad g_i(x) \equiv (2-N)c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} f(y)\,dy \tag{6.6}$$

при $f \in \mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$. Из теоремы 1 в [20, гл. 5] вытекает, что $g_i(x) \in \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)$ при

$$p_2 = \frac{q-1}{q+1}N. \tag{6.7}$$

Используя плотность вложения $\mathbb{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ в $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$ при $p > 1$, можно доказать, что $g_i(x)$ является слабой производной функции $g(x)$ относительно частной производной $\partial/\partial x_i$. Это несложное доказательство мы отнесли в приложение (см. лемму 8 в § 8).

Введем следующее соболевское пространство:

$$\mathbb{W}^{1,p_1,p_2}(\mathbb{R}^N) \equiv \bigl\{v(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N),\ \partial_{x_i} v(x) \in \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)\bigr\}, \tag{6.8}$$

которое, очевидно, является банаховым относительно нормы

$$\|v\|_{p_1,p_2} \equiv \|v\|_{p_1} + \|\nabla v\|_{p_2}.$$

Замечание 19. Соболевское пространство $\mathbb{W}^{1,p_1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ является, в других обозначениях, “энергетическим” банаховым пространством $\mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ – пополнением $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ по норме $\|\nabla u\|_{p_2}$. Действительно, поскольку $p_1 = p_2^*$, то в силу известного результата (теорема вложения Соболева)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1} \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N) \tag{6.9}$$

эти два банахова пространства совпадают и норма $\|v\|_{p_1,p_2}$ эквивалентна норме $\|\nabla v\|_{p_2}$.

Таким образом, мы доказали, что оператор $A(u)$, определенный формулой (6.2), действует следующим образом:

$$A(u)\colon \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{W}^{1,p_1,p_2}(\mathbb{R}^N), \tag{6.10}$$

причем справедливы оценки

$$\|A(u)\|_{p_1,p_2} \leqslant c_{q,N}\|u\|_{p_1}^q \quad \text{для любой} \quad u(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N), \tag{6.11}$$

$$\|A(u_1) - A(u_2)\|_{p_1,p_2} \leqslant qc_{q,N}\max\bigl\{\|u_1\|_{p_1}^{q-1}, \|u_2\|_{p_1}^{q-1}\bigr\}\|u_1 - u_2\|_{p_1} \tag{6.12}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$, где $0 < c_{q,N} < +\infty$.

Замечание 20. Продолжить изучение сглаживающих свойств нелинейного оператора $A(u)$ без сильно ограничительных предположений на размерность N пространства $\mathbb{R}^N$, а также на величину q нельзя, поэтому мы ограничимся полученным свойством (6.10).

6.1. Задачи Коши (1.2) и (1.3). Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение (5.39) при начальных условиях $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Для задачи Коши (1.2) справедливо следующее неравенство:

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \|u_0\|_{p_1} + \|u_1\|_{p_1} + a_{q,N}\int_0^t \|u\|_{p_1}^q(s)\,ds, \tag{6.13}$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [18] вытекает априорная оценка

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \frac{\|u_0\|_{p_1} + \|u_1\|_{p_1}}{[1 - (q-1)(\|u_0\|_{p_1} + \|u_1\|_{p_1})^{q-1}a_{q,N}t]^{1/(q-1)}} \tag{6.14}$$

при

$$t \in \bigl[0, (q-1)^{-1}a_{q,N}^{-1}[\|u_0\|_{p_1} + \|u_1\|_{p_1}]^{1-q}\bigr).$$

Для задачи Коши (1.3) справедливо неравенство

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \|u_0\|_{p_1}e^{-t} + a_{q,N}\int_0^t e^{-(t-s)}\|u\|_{p_1}^q(s)\,ds, \tag{6.15}$$

из которого в силу той же теоремы получим априорную оценку

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \frac{\|u_0\|_{p_1}e^{-t}}{[1 - a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}(1 - e^{-(q-1)t})]^{1/(q-1)}}. \tag{6.16}$$

Имеет место следующая импликация:

$$\|u_0\|_{p_1} \leqslant \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_{p_1}(t) \leqslant \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)}, \tag{6.17}$$

а если

$$\|u_0\|_{p_1} > \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)}, \tag{6.18}$$

то априорная оценка (6.16) справедлива при

$$t \in \left[0, -\frac{1}{q-1}\ln\left(1 - \frac{1}{a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}\right)\right).$$

Используя свойства (6.4), (6.5) и метод сжимающих отображений, а также сглаживающее свойство (6.10), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 11. *Для любых* $u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.39) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T_0); \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)), \tag{6.19}$$

причем либо $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \|u\|_{p_1} = +\infty. \tag{6.20}$$

Кроме того, справедлива оценка снизу на время T_0:

$$T_0 \geqslant \frac{1}{(q-1)a_{q,N}[\|u_0\|_{p_1} + \|u_1\|_{p_1}]^{q-1}}.$$

Аналогичным образом для интегрального уравнения (5.43) устанавливается следующая теорема, содержащая также очевидное утверждение о глобальной разрешимости при малой начальной функции $u_0(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема 12. *Для любой* $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.43) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0); \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)), \tag{6.21}$$

причем либо $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \|u\|_{p_1} = +\infty. \tag{6.22}$$

Кроме того, справедливы следующие два утверждения:

$$\|u_0\|_{p_1} \leqslant \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_{p_1}(t) \leqslant \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \quad \Longrightarrow \quad T_0 = +\infty,$$

$$\|u_0\|_{p_1} > \left(\frac{1}{a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \quad \Longrightarrow \quad T_0 \geqslant -\frac{1}{q-1}\ln\left(1 - \frac{1}{a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}\right).$$

Замечание 21. В силу неравенства (6.9) предельные свойства (6.20) и (6.22) влекут за собой предельное свойство

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \|\nabla u\|_{p_2} = +\infty \tag{6.23}$$

в случае $T_0 < +\infty$.

Замечание 22. В частном случае

$$q = \frac{N+2}{N-2}, \qquad p_1 = \frac{2N}{N-2}, \qquad p_2 = 2$$

при выполнении следующих условий:

$$u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{почти всюду,}$$

$$u_0(x) \neq 0 \quad \text{на множестве ненулевой меры Лебега,}$$

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_0^q(x) u_0^q(y)}{|x-y|^{N-2}}\, dx\, dy > \int_{\mathbb{R}^N} u_0^{q+1}(x)\, dx$$

имеет место неравенство (см. [14, § 5.7]) $0 < T_0 < +\infty$, т. е. выполнено предельное свойство (6.22).

Дадим определения сильных обобщенных решений задач Коши (1.2) и (1.3).

Определение 13. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (1.2) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N),$$

удовлетворяющую следующему интегральному равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(\nabla u'', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |u|^q \phi(x)\right] dx = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{6.24}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 14. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (1.3) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N),$$

удовлетворяющую следующему интегральному равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(\nabla u', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |u|^q \phi(x)\right] dx = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{6.25}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Замечание 23. Из условий $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(k)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N))$, $k = 1, 2$, определений 13 и 14 следует, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(k)}([0,T]; \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N))$, причем $|u|^q(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N))$ при

$$r_1 = \frac{N}{2}\frac{q-1}{q} > 1, \quad \text{где} \quad q > \frac{N}{N-2} \quad \text{и} \quad N \geqslant 3.$$

Поэтому интегральные равенства (6.24) и (6.25) корректны.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Решения интегральных уравнений* (5.39) *и* (5.43) *соответствующих классов*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{и} \quad u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N))$$

при условиях $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ *и* $u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ *являются сильными обобщенными решениями задач Коши* (1.2) *и* (1.3) *соответственно.*

Доказательство. Мы проведем доказательство только для задачи Коши (1.2), поскольку для задачи Коши (1.3) утверждение теоремы доказывается аналогично.

Прежде всего заметим, что если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N))$ – решение интегрального уравнения (5.39), то оно также является решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}} |u|^q(y,t)\,dy, \tag{6.26}$$

причем

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N), \qquad u'(x,0) = u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N).$$

Далее, введем скобки двойственности $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ между пространством основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ и пространством обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. Тогда из поточечного уравнения (6.26) получим следующее равенство:

$$\left\langle \Delta\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + u(x,t)\right) + |u|^q, \phi(x) \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T] \tag{6.27}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что справедлива импликация

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L}^{p'}(\mathbb{R}^N) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad p>1, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

В этом случае имеет место равенство скобок двойственности:

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N), \quad \phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N). \tag{6.28}$$

Теперь равенство (6.27) можно переписать в виде

$$\left\langle \Delta\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + u(x,t)\right), \phi(x) \right\rangle + \langle |u|^q, \phi(x) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. В свою очередь последнее равенство можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + u(x,t)\right), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \right\rangle - \langle |u|^q, \phi(x) \rangle = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством скобок двойственности (6.28) и тем, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)), \quad |u|^q(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N)),$$

чтобы получить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big[(\nabla u'', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |u|^q\phi(x)\big]\,dx = 0 \quad \text{при} \quad t\in[0,T] \tag{6.29}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Замечание 24. В частном случае

$$q = \frac{N+2}{N-2}, \qquad p_1 = \frac{2N}{N-2}, \qquad p_2 = 2$$

определения 13 и 14 сильных обобщенных решений задач Коши (1.2) и (1.3) совпадают с определениями 7 и 8 (см. § 4) сильных решений этих задач Коши. Поэтому в этом случае справедливы все априорные оценки § 4 для решений этих задач Коши.

6.2. Задача Коши (1.1). Для целей этого пункта нам необходимо изучить свойства следующего нелинейного интегрального оператора:

$$L(u)w \equiv \left(I - q\int_{\mathbb{R}^N} dy\,\frac{c_0}{|x-y|^{N-2}}|u|^{q-2}(y)u(y)\right)w \tag{6.30}$$

при $u \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ и $w \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Нетрудно доказать, что нелинейный оператор $L(u)$ при любом фиксированном $u \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ действует из $\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Вычислим норму оператора

$$B(u)w \equiv q\int_{\mathbb{R}^N} dy\,\frac{c_0}{|x-y|^{N-2}}|u|^{q-2}(y)u(y)w(y) \tag{6.31}$$

как действующего из $\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Действительно, в силу оценки (6.4) получаем

$$\|B(u)\| \equiv \sup_{\|w\|_{p_1}\leqslant 1} \|B(u)w\|_{p_1} \leqslant q a_{q,N}\|u\|_{p_1}^{q-1}. \tag{6.32}$$

Кроме того, в силу (6.5) справедлива оценка

$$\|B(u_1) - B(u_2)\| \leqslant q(q-1)a_{q,N}\max\bigl\{\|u_1\|_{p_1}^{q-2}, \|u_2\|_{p_1}^{q-2}\bigr\}\|u_1-u_2\|_{p_1} \tag{6.33}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ и при дополнительном условии $q \geqslant 2$. Сделаем предположение о том, что $\|u\|_{p_1} \leqslant n\varepsilon$, где некоторое фиксированное $n \in \mathbb{N}$ и достаточно малое фиксированное $\varepsilon > 0$ таковы, что выполняется неравенство

$$q a_{q,N}(n\varepsilon)^{q-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теперь нам необходимо вычислить норму (6.32) для оператора $B^m(u)$. Действительно, по индукции можно доказать, что имеет место следующая оценка:

$$\|B^m(u)\| \leqslant \bigl(q a_{q,N}\|u\|_{p_1}^{q-1}\bigr)^m \leqslant \bigl(q a_{q,N}(n\varepsilon)^{q-1}\bigr)^m \leqslant \frac{1}{2^m}, \qquad m \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6.34}$$

В силу этой оценки при указанных условиях относительно фиксированного $u \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ мы приходим к выводу о том, что оператор $L^{-1}(u)$ можно представить сходящимся рядом Неймана:

$$L^{-1}(u) \equiv \sum_{m=0}^{+\infty} B^m(u), \qquad \|L^{-1}(u)\| \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = 2. \tag{6.35}$$

Далее, буквально повторяя рассуждения п. 4.1, с учетом новых обозначений приходим к следующему утверждению.

Теорема 14. *Пусть $T > 0$ – произвольное фиксированное и $q \geqslant 2$. Тогда для любых начальных функций*

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$$

таких, что

$$\|u_0\|_{p_1} \leqslant \varepsilon, \qquad \|u_1\|_{p_1} \leqslant \varepsilon,$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует единственное решение интегрального уравнения (5.1) класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)).$$

Дадим следующее определение.

Определение 15. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (1.1) назовем функцию класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N),$$

удовлетворяющую следующему интегральному равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(\nabla u'', \nabla \phi(x)) - (|u|^q)'' \phi(x) + (\nabla u, \nabla \phi(x)) \right] dx = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{6.36}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ при $q \geqslant 2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Решение интегрального уравнения (5.1) класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N))$$

при условии $u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.1).

6.3. Задача Коши (1.4). Рассмотрим интегральное уравнение (5.46). Введем обозначение

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t) g(y,t)\, dy, \qquad g(y,t) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N), \quad t \in [0,T].$$

Отметим, что, в силу неравенства Юнга для сверток (см., например, [20])

$$\|h_1 * h_2\|_p \leqslant \|h_1\|_{q_1} \|h_2\|_{q_2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - 1,$$

справедлива следующая оценка:

$$\|f\|_{p_1} \leqslant \|\mathscr{E}_0\|_1 \|g\|_{p_1}, \qquad \|\mathscr{E}_0\|_1 = 1. \tag{6.37}$$

Заметим, что имеет место оценка

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \|u_0\|_{p_1} + a_{q,N} \int_0^t \|u\|_{p_1}^q(s)\, ds. \tag{6.38}$$

Отсюда в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [18] приходим к априорной оценке

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \frac{\|u_0\|_{p_1}}{[1-(q-1)a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1} t]^{1/(q-1)}}, \qquad t \in \left[0, \frac{1}{a_{q,N}(q-1)\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}\right). \tag{6.39}$$

Используя свойства (6.4), (6.5), мы можем доказать следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (5.46).

Лемма 2. *Для любой функции $u_0(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.46) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)) \quad \textit{при любом} \quad T \in (0,T_0), \tag{6.40}$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0^-} \|u\|_{p_1} = +\infty. \tag{6.41}$$

Кроме того, время T_0 существования решения допускает следующую оценку снизу:

$$T_0 \geqslant \frac{1}{(q-1)a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}.$$

Теперь наша задача заключается в повышении гладкости решения интегрального уравнения (5.46) при надлежащей гладкости начального условия $u_0(x)$. Прежде всего предположим, что начальная функция $u_0(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ обладает следующим свойством:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(x-y) - 2u_0(x) + u_0(x+y)|^{p_1}}{|y|^{N-2+2p_1}}\, dx\, dy < +\infty, \tag{6.42}$$

тогда в силу классических свойств тепловых потенциалов (см., например, [21]) из вида интегрального уравнения (5.46) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{L}^{p_1}(0,T;\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{при любом} \quad T \in (0,T_0) \tag{6.43}$$

для $i, j = \overline{1, N}$. Отметим, что отсюда вытекает гёльдеровская непрерывность (см. лемму 9 в § 8)

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(0,1/p_1)}([0,T];\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)), \tag{6.44}$$

поэтому определена функция $u(x,0) \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ и из интегрального уравнения (5.46) получим, что $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду. Теперь отметим, что интегральное уравнение (5.46) влечет за собой равенство

$$\left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - A(u), \phi(x,t) \right\rangle\!\!\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (0,T)), \tag{6.45}$$

где символом $\langle\!\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\!\rangle$ мы обозначили скобки двойственности между пространством основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ и пространством обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N \times (0,T))$. Отметим, что справедлива импликация

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L}^{p_1'}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N \times (0,T)).$$

Стало быть, имеет место равенство скобок двойственности:

$$\langle\!\langle f, \phi \rangle\!\rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt \quad \text{для всех} \quad f(x,t) \in \mathbb{L}^{p_1}((0,T) \times \mathbb{R}^N).$$

Следовательно, поскольку все слагаемые в равенстве (6.45) принадлежат пространству $\mathbb{L}^{p_1}(0,T;\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N))$, приходим к интегральному равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - A(u)\right] \phi(x,t)\,dx\,dt = 0 \tag{6.46}$$

для всех $\phi(x,t) \in \mathscr{D}((0,T) \times \mathbb{R}^N)$. Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = A(u) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{6.47}$$

причем по доказанному решение $u(x,t)$ последнего уравнения принадлежит классу

$$u(x,t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_1,t,x}((0,T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_1)}([0,T];\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)) \tag{6.48}$$

при любом $T \in (0,T_0)$.

Теперь, в дополнение к (6.42), предположим, что $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ и слабая производная $\partial_{x_i} u_0(x)$ этой функции обладает свойством

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_{x_i} u_0(x-y) - 2\partial_{x_i} u_0(x) + \partial_{x_i} u_0(x+y)|^{p_2}}{|y|^{N-2+2p_2}}\,dx\,dy < +\infty. \tag{6.49}$$

Тогда из интегрального уравнения (5.46) получим в слабом смысле, что имеет место равенство

$$\partial_{x_i} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t)\partial_{y_i} u_0(y)\,dy \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_0(x-y,t-s)\partial_{y_i} A(u)(y,s)\,dy\,ds. \tag{6.50}$$

Кроме того, при $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ справедливо неравенство

$$\|\partial_{x_i} u\|_{p_2}(t) \leqslant \|\partial_{x_i} u_0\|_{p_2} + c_{q,N} \int_0^t \|u\|_{p_1}^q(s)\, ds, \quad i = \overline{1, N}, \tag{6.51}$$

из которого, во-первых, получаем включение $\partial_{x_i} u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N))$, а во-вторых, с учетом априорной оценки (6.39), выводим априорную оценку

$$\|\partial_{x_i} u\|_{p_2}(t) \leqslant \|\partial_{x_i} u_0\|_{p_2} - c_{q,N}\|u_0\|_{p_1} + \frac{b_{q,N}}{(t_0 - t)^{1/(q-1)}}, \qquad i = \overline{1, N}, \tag{6.52}$$

$$b_{q,N} \equiv c_{q,N}(q-1)\left(\frac{1}{(q-1)a_{q,N}}\right)^{q/(q-1)}, \qquad t_0 \equiv \frac{1}{(q-1)a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}.$$

Рассуждая точно так же, как при доказательстве свойства (6.48), получим, что

$$\partial_{x_i} u(x, t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_2,t,x}((0, T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_2)}([0, T]; \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad i = \overline{1, N}, \tag{6.53}$$

при любом $T \in (0, T_0)$. Из уравнения (6.47) мы получим равенство

$$\left\langle \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right) + |u|^q, \phi(x) \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \tag{6.54}$$

и для почти всех $t \in [0, T]$. Далее стандартным образом приходим к следующему равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big[(\nabla u', \nabla\phi(x)) - (\nabla\Delta u, \nabla\phi(x)) - |u|^q\phi(x)\big]\, dx = 0.$$

Дадим определение сильного обобщенного решения задачи Коши (1.4).

Определение 16. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (1.4) назовем функцию $u(x, t)$ класса

$$u(x, t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_1,t,x}((0, T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_1)}([0, T]; \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)),$$
$$\partial_{x_i} u(x, t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_2,t,x}((0, T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_2)}([0, T]; \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad i = \overline{1, N},$$

удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big[(\nabla u', \nabla\phi(x)) - (\nabla\Delta u, \nabla\phi(x)) - |u|^q\phi(x)\big]\, dx = 0 \tag{6.55}$$

для почти всех $t \in [0, T]$ и всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, причем $u(x, 0) = u_0(x)$ почти всюду, $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$ и функция $u_0(x)$ обладает свойствами (6.42) и (6.49).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 16. *Для любой начальной функции $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_2}(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющей условиям* (6.42) *и* (6.49), *найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.46) *класса*

$$u(x, t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_1,t,x}((0, T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_1)}([0, T]; \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)),$$
$$\partial_{x_i} u(x, t) \in \mathbb{W}^{1,2}_{p_2,t,x}((0, T) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(0,1/p_2)}([0, T]; \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N)), \qquad i = \overline{1, N},$$

для любого $T \in (0, T_0)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство* (6.41). *Кроме того, время* T_0 *существования решения допускает следующую оценку снизу*:

$$T_0 \geqslant \frac{1}{(q-1)a_{q,N}\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}. \tag{6.56}$$

Это решение является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.4).

Наконец, в силу результата п. 3.4 мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 17. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 16 *выполнено свойство* $u_0(x) \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^N)$, *функция* $u_0(x)$ *отлична от нуля на множестве ненулевой меры Лебега и справедливо неравенство*

$$\frac{N}{N-2} < q \leqslant \frac{N+2}{N-2} \quad \text{\textit{при}} \quad N \geqslant 3.$$

Тогда имеет место неравенство $0 < T_0 < +\infty$ *и справедливо предельное свойство* (6.41).

Замечание 25. Представляет значительный интерес доказать глобальную во времени разрешимость задачи Коши (1.4) при условиях “малости” начальной функции $u_0(x)$ и

$$q > \frac{N+2}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Для этого нужно получить глобальную априорную оценку решения по норме $\|u\|_{p_1}$ или по норме $\|\nabla u\|_{p_2}$. Отметим, что при $q = (N+2)/(N-2)$, $N \geqslant 3$ и малой начальной функции $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ глобальная разрешимость в сильном смысле имеет место для задачи Коши (1.3), а для задачи Коши (1.4) такой разрешимости нет.

Замечание 26. Из интегрального уравнения (5.46) можно получить еще одну априорную оценку по норме $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Действительно, воспользуемся снова неравенством Юнга для сверток (см., например, [20]), в котором положим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - 1, \qquad q_1 = p_1', \qquad q_2 = p_1, \qquad r = +\infty.$$

Тогда из интегрального уравнения (5.46) получаем следующую оценку:

$$\|u\|_\infty(t) \leqslant \|\mathscr{E}_0\|_{p_1'}(t)\|u_0\|_{p_1} + a_{q,N}\int_0^t \|\mathscr{E}_0\|_{p_1'}(t-s)\|u\|_{p_1}^q(s)\,ds, \tag{6.57}$$

$$\|\mathscr{E}_0\|_{p_1'}(t) = \frac{k_1}{t^\lambda}, \qquad \lambda = \frac{N}{2}(p_1'-1) \in (0,1) \quad \text{при} \quad q > 2 + \frac{2}{N}.$$

Теперь воспользуемся априорной оценкой (6.39), которую для удобства представим в виде

$$\|u\|_{p_1}(t) \leqslant \frac{k_2}{(t_0-t)^{1/(q-1)}},$$

где

$$t_0 = \frac{1}{a_{q,N}(q-1)\|u_0\|_{p_1}^{q-1}}, \qquad k_2 = \left(\frac{1}{(q-1)a_{q,N}}\right)^{1/(q-1)}.$$

Отдельно рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{s^\lambda (t_0 - t + s)^{q/(q-1)}}\,ds &= \frac{1}{(t_0-t)^{q/(q-1)}}\int_0^t \frac{1}{s^\lambda (1 + s(t_0-t)^{-1})^{q/(q-1)}}\,ds \\ &= \frac{1}{(t_0-t)^{1/(q-1)+\lambda}}\int_0^{t/(t_0-t)} \frac{1}{\sigma^\lambda (1+\sigma)^{q/(q-1)}}\,d\sigma \\ &\leqslant \frac{1}{(t_0-t)^{1/(q-1)+\lambda}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^\lambda (1+\sigma)^{q/(q-1)}}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Тогда из неравенства (6.57) мы получим априорную оценку

$$\|u\|_\infty(t) \leqslant \frac{k_1\|u_0\|_{p_1}}{t^\lambda} + \frac{k_3}{(t_0-t)^{\lambda+1/(q-1)}},$$

$$k_3 = a_{q,N}k_1k_2^q \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^\lambda(1+\sigma)^{q/(q-1)}}\,d\sigma,$$

при $t \in (0, t_0)$. Априорные $\mathbb{L}^p$-оценки в случае $p \in (p_1, +\infty)$ получаются из (6.39) и последней априорной оценки интерполяцией.

§ 7. Некоторые дальнейшие результаты

В этом параграфе мы рассмотрим еще две задачи Коши при $N \geqslant 3$ для соболевских уравнений с градиентными нелинейностями:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \tag{7.2}$$

при $q > 1$ и $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$. Дадим определения сильных обобщенных решений этих задач Коши в цилиндре $[0,T] \times \mathbb{R}^N$ при некотором $T > 0$.

Определение 17. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (7.1) мы назовем функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)), \quad u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N), \qquad q > 1,$$

удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big[(\nabla u', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |\nabla u|^q \phi(x)\big]\,dx = 0 \tag{7.3}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $t \in [0,T]$.

Определение 18. *Сильным обобщенным решением задачи Коши* (7.2) мы назовем функцию

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathscr{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)), \quad u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N), \qquad q > 1,$$

удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(\nabla u'', \nabla\phi(x)) + (\nabla u, \nabla\phi(x)) - |\nabla u|^q \phi(x)\right] dx = 0 \tag{7.4}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $t \in [0,T]$.

Используя, как и в § 2, метод нелинейной емкости, можно доказать, что при условии

$$q \in (1, r_{\mathrm{cr}}], \qquad r_{\mathrm{cr}} \equiv \begin{cases} \dfrac{N}{N-1}, & \text{если } N \geqslant 2, \\ +\infty, & \text{если } N = 1, \end{cases} \tag{7.5}$$

не существует локальных нетривиальных сильных обобщенных решений этих задач Коши таких, что

$$u \in \mathbb{L}^q(0,T; \mathscr{D}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{при} \quad T > 0,$$

если $u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, т. е. имеет место мгновенное разрушение сильных обобщенных решений.

Пусть теперь

$$q \in \left(\frac{N}{N-1}, 2\right) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3. \tag{7.6}$$

Рассмотрим следующие вспомогательные интегральные уравнения:

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\, dy, \tag{7.7}$$

$$u(x,t) = u_0(x)\cos t + u_1(x)\sin t + \int_0^t ds\,(\sin(t-s)) c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^q(y,s)}{|x-y|^{N-2}}\, dy, \tag{7.8}$$

где

$$c_0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Изучение этих интегральных уравнений идентично, поскольку различие заключается только в вопросах гладкости и получения априорных оценок. Введем следующий интегральный оператор:

$$B(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}} |\nabla u|^q\, dy. \tag{7.9}$$

Будем использовать результаты работы [20]. Определим величину

$$p_3 \equiv N(q-1) < N \quad (\text{тогда} \;\; p_4 \equiv p_3^* = \frac{N(q-1)}{2-q}).$$

Замечание 27. Если мы докажем локальную разрешимость в сильном обобщенном смысле задач Коши (7.1) и (7.2) при $p = p_3$, то в силу условия (7.6) будет выполнено неравенство $p_3 > q$. В этом случае решение будет принадлежать классу

$$u \in \mathbb{L}^q(0, T; \mathscr{D}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{при} \quad T > 0,$$

т. е. решение будет локально существовать в слабом смысле.

При этом оператор $B(u)$ действует следующим образом:

$$B(u)\colon \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N). \tag{7.10}$$

Кроме того, легко устанавливаются оценки

$$\|\nabla B(u)\|_{p_3} \leqslant d_{q,N} \|\nabla u\|^q_{p_3} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N), \tag{7.11}$$

$$\|\nabla B(u_1) - \nabla B(u_2)\|_{p_3} \leqslant q d_{q,N} \max\bigl\{\|\nabla u_1\|^{q-1}_{p_3}, \|\nabla u_2\|^{q-1}_{p_3}\bigr\} \times \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{p_3} \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N). \tag{7.12}$$

Отметим, что из интегральных уравнений (7.7) и (7.8) вытекают неравенства

$$\|\nabla u\|_{p_3} \leqslant \|\nabla u_0\|_{p_3} e^{-t} + d_{q,N} \int_0^t e^{-(t-s)} \|\nabla u\|^q_{p_3}(s)\, ds, \tag{7.13}$$

$$\|\nabla u\|_{p_3} \leqslant \|\nabla u_0\|_{p_3} + \|\nabla u_1\|_{p_3} + d_{q,N} \int_0^t \|\nabla u\|^q_{p_3}(s)\, ds. \tag{7.14}$$

Используя метод сжимающих отображений, мы приходим к следующим двум теоремам.

Теорема 18. *Для любой функции $u_0(x) \in \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N)$ найдется $T_0 > 0$ такое, что существует единственное решение интегрального уравнения (5.43) класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N)),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0^-} \|\nabla u\|_{p_3} = +\infty. \tag{7.15}$$

Кроме того, справедливы следующие два утверждения:

$$\|\nabla u_0\|_{p_3} \leqslant \left(\frac{1}{d_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \implies \|\nabla u\|_{p_3}(t) \leqslant \left(\frac{1}{d_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \implies T_0 = +\infty,$$

$$\|\nabla u_0\|_{p_3} > \left(\frac{1}{d_{q,N}}\right)^{1/(q-1)} \implies T_0 \geqslant -\frac{1}{q-1} \ln\biggl(1 - \frac{1}{d_{q,N} \|\nabla u_0\|^{q-1}_{p_3}}\biggr).$$

Указанное решение является сильным обобщенным решением задачи Коши (7.1) при $p = p_3$.

Теорема 19. *Для любых функций* $u_0(x), u_1(x) \in \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N)$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.39) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T_0); \mathscr{D}^{1,p_3}(\mathbb{R}^N)),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \|\nabla u\|_{p_3} = +\infty. \tag{7.16}$$

Кроме того, имеет место оценка снизу на время T_0:

$$T_0 \geqslant \frac{1}{(q-1)d_{q,N}[\|\nabla u_0\|_{p_3} + \|\nabla u_1\|_{p_3}]^{q-1}}.$$

Указанное решение является сильным обобщенным решением задачи Коши (7.2) *при* $p = p_3$.

Теперь мы приступим к изучению случая $q > 3$ при $N \geqslant 3$. Прежде всего заметим, что ранее рассмотренное весовое пространство Лебега

$$v(x) \in \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N) \quad \left(\Longrightarrow\ |v(x)| \leqslant \frac{c}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}} \quad \text{почти всюду}\right)$$

и функция $v(x)$ измерима, является, очевидно, банаховым. Относительно функции $u_0(x)$ из интегрального уравнения (7.7) сделаем следующие предположения:

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N), \qquad |\nabla_x u_0(x)| \in \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N). \tag{7.17}$$

Будем искать решение интегрального уравнения (7.7) в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^N), \qquad \partial_{x_i} u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty\big(0,T; \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N)\big) \tag{7.18}$$

при $i = \overline{1,N}$. В силу результата леммы 4 (см. § 8) при условии $3 < \alpha \leqslant q$ из (7.17) и (7.18) вытекает, что правая часть интегрального уравнения (7.7) дифференцируема и имеет место равенство

$$v_i(x,t) = \partial_{x_i} u_0(x) e^{-t} - (N-2)c_0 \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} |\nabla u|^q(y,s)\, dy, \tag{7.19}$$

где $v_i(x,t) \equiv \partial_{x_i} u(x,t)$ и $i = \overline{1,N}$. Используя метод сжимающих отображений, находим, что в классе

$$\partial_{x_i} u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty\big(0,T; \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbb{R}^N)\big) \tag{7.20}$$

существует единственное непродолжаемое решение (с $T_0 > 0$) системы интегральных уравнений (7.19) в этом банаховом пространстве. В силу этого из интегрального уравнения (7.7) следует, что $u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T; \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$ для всех $T \in (0,T_0)$.

Используя “бутстрэп”-метод, приходим к выводу, что решение $u(x,t)$ на самом деле принадлежит классу

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T_0);\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)\bigr), \tag{7.21}$$

$$\partial_{x_i} u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\bigl([0,T_0);\mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^N)\bigr) \quad \text{при} \quad i=\overline{1,N}, \tag{7.22}$$

причем имеет место поточечное равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}} |\nabla u|^q(y,t)\,dy, \qquad x\in\mathbb{R}^N, \quad t\geqslant 0. \tag{7.23}$$

Отсюда следует, что

$$\left\langle \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\right) + |\nabla u|^q, \phi(x)\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \tag{7.24}$$

при $t\in[0,T_0)$. Далее стандартным образом устанавливаем, что (7.24) влечет за собой равенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bigl[(\nabla u',\nabla\phi) + (\nabla u,\nabla\phi) - |\nabla u|^q\phi\bigr]\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \tag{7.25}$$

при $t\in[0,T]$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 20. *Для любой начальной функции $u_0(x)$ класса (7.17) при условии $3<\alpha\leqslant q$ найдется такое $T_0>0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи Коши (7.1) класса (7.21) и (7.22), причем либо $T_0=+\infty$, либо $T_0<+\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0^-} \operatorname*{ess.\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty.$$

Если при этом выполнено условие

$$|\nabla_x u_0(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}} \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N$$

для достаточно малого $\varepsilon>0$, то $T_0=+\infty$.

Для задачи Коши (7.2) справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 21. *Для любых начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ класса*

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N),$$
$$|\nabla_x u_0(x)|, |\nabla_x u_1(x)| \in \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^N),$$

при условии $3<\alpha\leqslant q$ найдется такое $T_0>0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи Коши (7.1) класса

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,T_0);\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)),$$
$$\partial_{x_i} u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T_0);\mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)};\mathbb{R}^N)\bigr) \quad \text{при} \quad i=\overline{1,N},$$

причем либо $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0^-} \operatorname*{ess.\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} [1 + |x|^2]^{\alpha/(2q)} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty.$$

Замечание 28. Остаются открытыми вопросы о локальной разрешимости в случае $2 \leqslant q \leqslant 3$, $N \geqslant 3$ и в случае $2 < q \leqslant 3$, $N = 2$. Решение вопроса о локальной разрешимости при $q > 3$, $N = 2$ не составляет труда и почти полностью повторяет доказательства теорем 20 и 21.

§ 8. Приложение

Лемма 3. *В случае* $N \geqslant 3$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy\, K_N(x,y) = c_0 \int_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x-y|^{N-2}(1+|y|^2)^{\alpha/2}} \leqslant \begin{cases} c_1, & 0 \leqslant |x| < \varepsilon; \\ c_2 |x|^{\alpha/q-1}, & |x| \geqslant \varepsilon > 0, \end{cases}$$

при $3 < \alpha \leqslant q$. *Тогда*

$$c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x,y)\, dy < +\infty.$$

Доказательство. Пусть

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{1}{|y|^{N-2}[1+|x-y|^2]^{\alpha/2}} = c \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{r \sin\theta}{[1+|x|^2+r^2-2|x| r\cos\theta]^{\alpha/2}},$$
$$a = 1 + |x|^2 + r^2, \qquad b = 2|x| r.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\sin\theta}{(a - b\cos\theta)^{\alpha/2}} &= \int_{-1}^{1} dz\, \frac{1}{(a-bz)^{\alpha/2}} \\ &= \frac{1}{b^{\alpha/2}}\, \frac{2}{\alpha-2} \left[\frac{1}{(a/b-1)^{\alpha/2-1}} - \frac{1}{(a/b+1)^{\alpha/2-1}} \right], \\ I = \frac{2c}{\alpha-2} \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} dr & \left[\frac{1}{[1+(r-|x|)^2]^{\beta/2}} - \frac{1}{[1+(r+|x|)^2]^{\beta/2}} \right] \\ \equiv \frac{1}{|x|}(I_1 + I_2), & \qquad \beta \equiv \alpha - 2. \end{aligned}$$

Пусть $|x| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда

$$I_1 = \frac{2c}{\alpha-2} \int_0^{+\infty} dr\, \frac{1}{[1+(r-|x|)^2]^{\beta/2}} = \frac{2c}{\alpha-2} \int_{-|x|}^{+\infty} dz\, \frac{1}{(1+z^2)^{\beta/2}} < +\infty,$$
$$I_2 = \frac{2\pi}{\alpha-2} \int_0^{+\infty} dr\, \frac{1}{[1+(r+|x|)^2]^{\beta/2}} \leqslant \frac{2c}{\alpha-2} \int_0^{+\infty} dr\, \frac{1}{(1+r^2)^{\beta/2}},$$

где $\alpha > 3$.

Пусть $0 \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$. Предположим, что $\beta > 1$. Тогда с помощью замен переменных выражение для I приводим к виду

$$I = \frac{2c}{\alpha - 2}\frac{1}{|x|}\int_{-|x|}^{|x|} dz\, \frac{1}{(1+z^2)^{\beta/2}} \leqslant \frac{2c}{\alpha-2}\,\frac{1}{|x|}\cdot 2|x| \leqslant \frac{4c}{\alpha-2}.$$

Лемма доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Справедливы следующие неравенства: при* $N \geqslant 3$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy\, G_N(x,y) = (N-2)c_0 \int_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x-y|^{N-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2}}$$
$$\leqslant \begin{cases} c_1, & 0 \leqslant |x| < \varepsilon, \\ c_2\bigl|\ln|x|\bigr|\,|x|^{\alpha/q+1-\alpha}, & |x| \geqslant \varepsilon > 0, \quad \alpha \in (2,3), \\ c_3|x|^{\alpha/q-1}, & |x| \geqslant \varepsilon > 0, \quad \alpha > 3. \end{cases}$$

В частности, если $3 < \alpha \leqslant q$ *или*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q} < 1, \qquad \alpha \in (2,3) \quad \left(\Longrightarrow\ q > \frac{3}{2}\right),$$

то

$$k_1 \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_N(x,y)\, dy < +\infty.$$

Доказательство. Фактически необходимо исследовать следующий интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\sin\theta}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\alpha/2}}. \tag{8.1}$$

Сначала предположим, что $|x| \leqslant \varepsilon$. Тогда интеграл I можно оценить сверху следующим образом:

$$I \leqslant \pi \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r)^{\alpha/2}}$$
$$= \pi \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{(1+(r-|x|)^2)^{\alpha/2}} = \pi \int_{-|x|}^{+\infty} dr \frac{1}{(1+r^2)^{\alpha/2}} < +\infty, \qquad \alpha > 1.$$

Теперь предположим, что $|x| \geqslant \varepsilon > 0$. Разобьем интеграл I на две части:

$$I \equiv I_1 + I_2 = \int_0^{\delta} dr \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\sin\theta}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\alpha/2}}$$
$$+ \int_{\delta}^{+\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\sin\theta}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\alpha/2}}, \qquad \delta > 0.$$

Оценим интеграл I_1 (при этом потребуем, чтобы параметры ε и δ удовлетворяли условиям $\varepsilon > \delta$ и $\delta \in (0,1)$):

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \pi \int_0^\delta dr\, \frac{1}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r)^{\alpha/2}} \leqslant \pi \int_0^\delta dr\, \frac{1}{(1+|x|^2-2\delta|x|)^{\alpha/2}} \\ &\leqslant \pi \int_0^\delta dr\, \frac{1}{(1-\delta^2+(|x|-\delta)^2)^{\alpha/2}} = \frac{\pi\delta}{(|x|-\delta)^\alpha}. \end{aligned}$$

Оценим теперь интеграл I_2. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\delta^{+\infty} dr \int_{-1}^{1} \frac{dz}{(1+|x|^2+r^2-2|x|rz)^{\alpha/2}} \\ &= \frac{1}{|x|}\,\frac{1}{\alpha-2}\int_\delta^{+\infty} dr\, \frac{1}{r}\,\frac{1}{(1+(r-|x|)^2)^{(\alpha-2)/2}} \\ &\quad - \frac{1}{|x|}\,\frac{1}{\alpha-2}\int_\delta^{+\infty} dr\, \frac{1}{r}\,\frac{1}{(1+(r+|x|)^2)^{(\alpha-2)/2}} \equiv \frac{1}{(\alpha-2)|x|}(I_{21}-I_{22}). \end{aligned}$$

Интеграл I_{22} оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\delta/|x|}^{+\infty} d\rho\, \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(1+|x|^2(1+\rho)^2)^{(\alpha-2)/2}} \\ &\leqslant \frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\int_{\delta/|x|}^{+\infty} d\rho\, \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(\rho+1)^{\alpha-2}} \leqslant c_1 \frac{|\ln|x||}{|x|^{\alpha-2}} \quad \text{при} \quad \alpha > 2. \end{aligned}$$

Интеграл I_{21} оценивается следующим образом: при $\alpha \in (2,3)$

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{\delta/|x|}^{+\infty} d\rho\, \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(1+|x|^2(\rho-1)^2)^{(\alpha-2)/2}} \\ &\leqslant \frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\int_{\delta/|x|}^{+\infty} d\rho\, \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{|\rho-1|^{\alpha-2}} \leqslant c_2 \frac{\bigl|\ln|x|\bigr|}{|x|^{\alpha-2}}, \end{aligned}$$

а при $\alpha > 3$

$$I_{21} \leqslant \frac{1}{\delta}\int_\delta^{+\infty} dr\, \frac{1}{(1+(r-|x|)^2)^{(\alpha-2)/2}} = \frac{1}{\delta}\int_{\delta-|x|}^{+\infty} \frac{d\rho}{(1+\rho^2)^{(\alpha-2)/2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Для ядра $R_N(x,t)$ имеет место формула*

$$R_N(x,t) = c_N \frac{\vartheta(t)}{t^{\frac{N-3}{2}}|x|}\int_{-|x|/\sqrt{t}}^{|x|/\sqrt{t}} e^{-r^2}\,dr, \qquad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где $c_N = 4c_0\omega_N/(4\pi)^{N/2}$, $N \geqslant 3$.

Доказательство. По определению,

$$R_N(x,t) = c_0 \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} \exp\biggl\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\biggr\}\frac{1}{|y|^{N-2}}\,dy.$$

Принимая во внимание очевидное равенство $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
R_N(x,t) &= \frac{c_0\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\vartheta(t)}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)} \int_0^{+\infty} dr\, r \int_0^{\pi} d\theta\,(\sin\theta) e^{-r^2/(4t)-(\cos\theta)|x|r/(2t)} \\
&= \frac{c_0\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\vartheta(t)}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)} \int_0^{+\infty} dr\, r \frac{2t}{|x|r} \bigl[e^{-|x|r/(2t)} - e^{|x|r/(2t)}\bigr] e^{-r^2/(4t)} \\
&= \frac{2c_0\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\vartheta(t)}{t^{N/2-1}} \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} dr\, \bigl[e^{-(r+|x|)^2/(4t)} - e^{-(r-|x|)^2/(4t)}\bigr] \\
&= \frac{c_N}{2} \frac{\vartheta(t)}{t^{N/2-1}} \frac{1}{|x|} \int_{-|x|}^{|x|} e^{-r^2/(4t)}\, dr = c_N \frac{\vartheta(t)}{|x| t^{(N-3)/2}} \int_{-|x|/(2\sqrt{t})}^{|x|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\, dr.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 29. Отметим, что для всех $z \geqslant 0$

$$k(z) = \frac{1}{z}\int_{-z}^{z} e^{-r^2}\, dr \leqslant a < +\infty, \qquad k(z) \to +0 \quad \text{при} \quad z \to +\infty,$$

поэтому ядро $R_N(x,t)$ допускает оценку

$$0 \leqslant R_N(x,t) \leqslant \frac{c_N a}{2t^{(N-2)/2}} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Лемма 6. *Для функции*

$$I_3(x,t) \equiv \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|y|^2)^{\alpha/(2q)}}\, dy$$

справедлива следующая оценка:

$$I_3(x,t) \leqslant c|x|^{\alpha/q-1} \quad \textit{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon > 0, \quad 0 < \alpha \leqslant q.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
I_3(x,t) &= \frac{\omega_3}{(4\pi t)^{3/2}} (1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} e^{-|x|^2/(4t)} \\
&\qquad\qquad \times \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r}{(1+r^2)^{\alpha/(2q)}} e^{-r^2/(4t)} \int_0^{\pi} d\theta\,(\sin\theta) e^{(\cos\theta)|x|r/(2t)} \\
&\leqslant \frac{\omega_3}{(4\pi t)^{3/2}} (1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} e^{-|x|^2/(4t)} \int_0^{+\infty} dr\, \frac{2t}{r|x|} \bigl(e^{|x|r/(2t)} - e^{-|x|r/(2t)}\bigr) \\
&= \frac{2\omega_3}{(4\pi)^{3/2}} \frac{1}{t^{1/2}} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x|} \int_0^{+\infty} dr \bigl[e^{-[r-|x|]^2/(4t)} - e^{-[r+|x|]^2/(4t)}\bigr] \\
&= \frac{4\omega_3}{(4\pi)^{3/2}} (1+|x|^2)^{\alpha/(2q)} \frac{1}{|x|} \int_{-|x|/(2\sqrt{t})}^{|x|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\, dr.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$|K_i(x,t)| \leqslant \begin{cases} c_1, & 0 \leqslant |x| < \varepsilon, \\ c_2|x|^{\alpha/q-1}, & |x| \geqslant \varepsilon > 0, \end{cases} \qquad \text{при} \quad \alpha > 3,$$

где

$$K_i(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \biggl[c_3 \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \int_{-|x-y|/(2\sqrt{t})}^{|x-y|/(2\sqrt{t})} e^{-r^2}\, dr + c_3 \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-|x-y|^2/(2\sqrt{t})} \biggr] \frac{[1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}}{[1+|y|^2]^{\alpha/2}}\, dy, \qquad i = \overline{1,N}.$$

Доказательство. Имеем:

$$|K_i(x,t)| \leqslant c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\, dr \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\, dy + c_3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\, dy \equiv I_1 + I_2.$$

Для интеграла I_1 верна оценка из леммы 4. Для интеграла I_2 при $|x| \geqslant \varepsilon > 0$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} I_2 &= c_3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-|y|^2/(4t)} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}}\, dy \\ &= \frac{c_3 \cdot 2\pi}{(\alpha-2)\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} dr\, r e^{-r^2/(4t)} \int_0^{\pi} d\theta\, (\sin\theta) \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\alpha/2}} \\ &= c_4 \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x|} \\ &\qquad \times \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} dr\, e^{-r^2/(4t)} \biggl[\frac{1}{(1+(r-|x|)^2)^{(\alpha-2)/2}} - \frac{1}{(1+(r+|x|)^2)^{(\alpha-2)/2}} \biggr] \\ &\leqslant 4c_4 \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{|x|} \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, dr. \end{aligned}$$

Если $|x| < \varepsilon$, то для интеграла I_2 после замены переменных получаем

$$I_2 = c_3\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}^3} dz\, \frac{e^{-|z|^2/4}}{|z|} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}{(1+|x-z\sqrt{t}|)^{\alpha/2}} \leqslant c_4(T) \int_{\mathbb{R}^3} dz\, \frac{e^{-|z|^2/4}}{|z|} = c_5 < +\infty$$

при $t \in [0,T]$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Справедливо следующее равенство*:

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_i(x)\phi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g(x) \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}\, dx \quad \text{для любой} \quad \phi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Доказательство. Действительно, в силу плотности $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ в $\mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ для любой фиксированной функции $f(x) \in \mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ найдется такая последовательность $\{f_m(x)\} \subset \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, что

$$f_m \to f \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{r_1}(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Введем обозначение

$$g_{(m)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_0}{|x-y|^{N-2}} f_m(y)\,dy.$$

В силу [20, гл. 5, теорема 1] приходим к оценке

$$\|g - g_{(m)}\|_{p_1} \leqslant c\|f - f_m\|_{r_1},$$

из которой сразу же получаем, что

$$g_{(m)} \to g \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Кроме того, (классическая) частная производная функций $g_{(m)}(x)$ по x_i может быть записана в виде

$$\frac{\partial g_{(m)}(x)}{\partial x_i} = (2-N)c_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} f_m(y)\,dy,$$

причем в силу того же результата работы [20] имеем

$$\frac{\partial g_{(m)}}{\partial x_i} \to g_i \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Теперь зафиксируем произвольную функцию $\phi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, носитель которой принадлежит компакту K. Очевидно, что

$$\int_K \frac{\partial g_{(m)}(x)}{\partial x_i}\phi(x)\,dx = -\int_K g_{(m)}(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}\,dx,$$

откуда вытекает равенство

$$\int_K \left[\frac{\partial g_{(m)}(x)}{\partial x_i} - g_i(x)\right]\phi(x)\,dx + \int_K g_i(x)\phi(x)\,dx \\ = -\int_K \Big[g_{(m)}(x) - g(x)\Big]\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}\,dx - \int_K g(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Переход к пределу при $m \to +\infty$ доказывает утверждение леммы.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия*

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^{p_1}(0,T;\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)), \qquad u'(x,t) \in \mathbb{L}^{p_1}(0,T;\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N)).$$

Тогда функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{(0,1/p_1)}([0,T];\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N))$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u'(t)\,dt \quad \text{для любых} \quad t_1, t_2 \in [0,T], \quad t_1 < t_2.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|_{p_1} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|_{p_1}\,dt \leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u'\|_{p_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} |t_2 - t_1|^{1/p_1} \\ \leqslant \left(\int_0^T \|u'\|_{p_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} |t_2 - t_1|^{1/p_1}.$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. H. Brezis, X. Cabré, "Some simple nonlinear PDE's without solutions", *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **1**:2 (1998), 223–262.
2. X. Cabré, Y. Martel, "Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier [Existence versus instantaneous blow-up for linear heat equations with singular potentials]", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **329**:11 (1999), 973–978.
3. F. B. Weissler, "Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p", *Indiana Univ. Math. J.*, **29**:1 (1980), 79–102.
4. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: È. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, "A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
5. V. A. Galaktionov, J.-L. Vázquez, "The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations", Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999), *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **8**:2 (2002), 399–433.
6. J. A. Goldstein, I. Kombe, "Instantaneous blow up", *Advances in differential equations and mathematical physics* (Birmingham, AL, 2002), Contemp. Math., **327**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 141–150.
7. Y. Giga, N. Umeda, "On instant blow-up for semilinear heat equations with growing initial data", *Methods Appl. Anal.*, **15**:2 (2008), 185–195.
8. Е. И. Галахов, "Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач", *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 337–349; англ. пер.: E. I. Galakhov, "On the absence of local solutions of several evolutionary problems", *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 314–324.
9. Е. И. Галахов, "О мгновенном разрушении решений некоторых квазилинейных эволюционных задач", *Дифференц. уравнения*, **46**:3 (2010), 326–335; англ. пер.: E. I. Galakhov, "On the instantaneous blow-up of solutions of some quasilinear evolution problems", *Differ. Equ.*, **46**:3 (2010), 329–338.
10. B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, "Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **19**:2 (1965), 100–116.
11. Г. А. Свиридюк, "К общей теории полугрупп операторов", *УМН*, **49**:4(298) (1994), 47–74; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, "On the general theory of operator semigroups", *Russian Math. Surveys*, **49**:4 (1994), 45–74.
12. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, "О приложении метода нелинейной емкости к дифференциальным неравенствам соболевского типа", *Дифференц. уравнения*, **45**:7 (2009), 932–940; англ. пер.: M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, "Application of the nonlinear capacity method to differential inequalities of Sobolev type", *Differ. Equ.*, **45**:7 (2009), 951–959.
13. A. Alsaedi, M. S. Alhothuali, B. Ahmad, S. Kerbal, M. Kirane, "Nonlinear fractional differential equations of Sobolev type", *Math. Methods Appl. Sci.*, **37**:13 (2014), 2009–2016.
14. A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **15**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011, xii+648 pp.
15. С. И. Похожаев, "О зависимости критического показателя нелинейного уравнения теплопроводности от начальной функции", *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 946–953; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, "On the dependence of the critical exponent of the nonlinear heat equation on the initial function", *Differ. Equ.*, **47**:7 (2011), 955–962.

16. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathscr{F}(u)$”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
17. М. О. Корпусов, А. А. Панин, “О разрушении решения абстрактной задачи Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:5 (2014), 91–142; англ. пер.: M. O. Korpusov, A. A. Panin, “Blow-up of solutions of an abstract Cauchy problem for a formally hyperbolic equation with double non-linearity”, *Izv. Math.*, **78**:5 (2014), 937–985.
18. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.
19. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, М., 1965, 428 с.; пер. с англ.: A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc., 1964.
20. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, xiv+290 pp.
21. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, xi+648 pp.

Максим Олегович Корпусов
(Maxim O. Korpusov)
Физический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило в редакцию
14.08.2014