

УДК 517.926

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Многообходные траектории-утки и их приложения

Исследуется случай, когда в двумерной релаксационной системе с цилиндрическим фазовым пространством общим образом пересекаются две различные кривые медленного движения. Устанавливается, что в данной ситуации могут возникать так называемые многообходные траектории-утки. Отличие их от обычных траекторий-уток состоит в том, что процесс перехода с устойчивой кривой медленного движения на неустойчивую сопровождается конечным числом асимптотически быстрых вращений фазовой точки вокруг оси цилиндра. Полученные результаты используются при асимптотическом анализе собственных значений краевой задачи типа Штурма–Лиувилля для сингулярно возмущенного линейного уравнения Шредингера.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, многообходные траектории-утки, асимптотика, краевые задачи типа Штурма–Лиувилля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8547>

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Основы асимптотической теории релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах были заложены Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко (см., например, статьи [1]–[5] и монографию [6]). Далее, в монографии [7] показано, что при некоторых предположениях весьма общего характера система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных представляет собой C^1 -возмущение определенным образом отвечающей ей релейной системы. Нарушение же упомянутых предположений приводит, как правило, к возникновению траекторий-уток – устойчиво-неустойчивых одномерных многообразий медленных движений.

Впервые траектории-утки обнаружили в 1978 г. французские математики Франсин Диенер и Марк Диенер с помощью нестандартного анализа. В дальнейшем этим методом траектории-утки изучались многими авторами (см. [8] и содержащуюся там библиографию). Одно время создавалось даже впечатление, что нестандартный анализ – наиболее адекватный инструмент исследования таких траекторий. Однако в [7] и в некоторых других работах (см., например, [9]–[11]) показано, что во всех возможных ситуациях траектории-утки

Работа выполнена при поддержке проекта 1875 госзадания на НИР № 2014/258 и при поддержке РФФИ, грант № 15-01-04066а.

допускают и стандартное описание с помощью техники классического асимптотического анализа.

В настоящей статье рассматривается ситуация, когда в двумерной автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при одной из производных имеются две различные кривые медленного движения, пересекающиеся друг с другом общим образом. Впервые с помощью техники нестандартного анализа существование траекторий-уток в упомянутом случае показано в работах [12], [13]. Стандартная версия соответствующих результатов содержится в статье [14]. Среди более поздних работ на эту тему отметим [15]–[17].

Ниже исследуется случай пересечения кривых медленного движения в двумерной системе с цилиндрическим фазовым пространством. Устанавливается существование в такой системе многообходных траекторий-уток.

Будем считать, что интересующая нас релаксационная система на плоскости записана в виде одного скалярного уравнения

$$\varepsilon \frac{d\theta}{dx} = f(x, \theta, \varepsilon, \mu), \quad (1.1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ и $|\mu| \ll 1$ – два малых параметра. Предполагаем, что

$$f(x, \theta, \varepsilon, \mu) \in C^\infty([a, b] \times \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0] \times [-\mu_0, \mu_0]), \quad f(x, \theta + T, \varepsilon, \mu) \equiv f(x, \theta, \varepsilon, \mu)$$

при некоторых $a < b$, $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, $T > 0$ и выполнены следующие предположения.

УСЛОВИЕ 1.1. В прямоугольнике $\Pi_0 = \{(x, \theta) : a \leq x \leq b, 0 < \theta < T\}$ уравнение $f(x, \theta, 0, 0) = 0$ имеет ровно два решения

$$\theta = \varphi_j(x) \in C^\infty([a, b]), \quad j = 1, 2. \quad (1.2)$$

Эти кривые естественно назвать кривыми медленного движения для уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$.

УСЛОВИЕ 1.2. Существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \quad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) < 0 \quad (> 0) \quad \text{при} \quad x - x_0 < 0 \quad (> 0).$$

Далее, на полуинтервале $a \leq x < x_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^j f'_\theta(x, \varphi_j(x), 0, 0) &> 0, \quad j = 1, 2, \\ f(x, \theta, 0, 0) &< 0 \quad \text{при} \quad \varphi_1(x) < \theta < \varphi_2(x), \\ f(x, \theta, 0, 0) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta < \varphi_1(x) \quad \text{и при} \quad \varphi_2(x) < \theta \leq T, \end{aligned}$$

а на полуинтервале $x_0 < x \leq b$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} (-1)^j f'_\theta(x, \varphi_j(x), 0, 0) &< 0, \quad j = 1, 2, \\ f(x, \theta, 0, 0) &< 0 \quad \text{при} \quad \varphi_2(x) < \theta < \varphi_1(x), \\ f(x, \theta, 0, 0) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta < \varphi_2(x) \quad \text{и при} \quad \varphi_1(x) < \theta \leq T. \end{aligned}$$

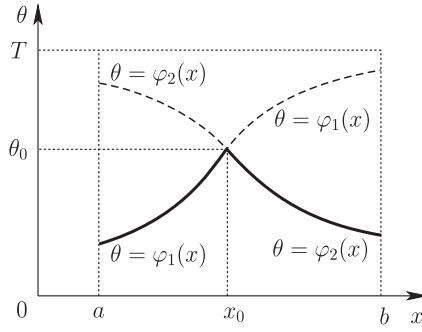
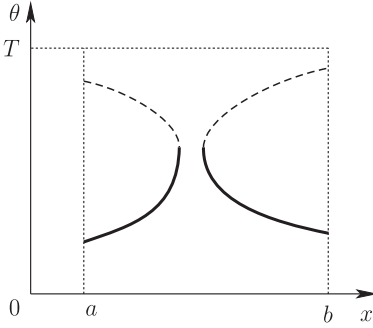
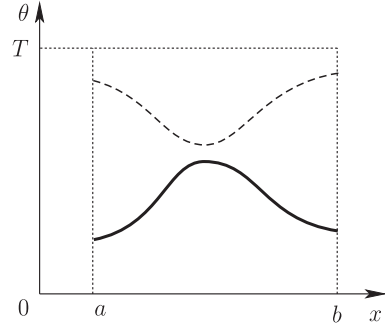


Рис. 1

Рис. 2. $\mu > 0$ Рис. 3. $\mu < 0$

Данное условие означает, что при $\varepsilon = \mu = 0$ расположение кривых (1.2) имеет вид, представленный на рис. 1. Следует отметить, что в силу периодичности функции f по переменной θ кривых медленного движения на самом деле счетное число: изображенная на рис. 1 пара кривых периодически повторяется в прямоугольниках

$$\Pi_n = \{(x, \theta) : a \leq x \leq b, nT < \theta < (n+1)T\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим далее, что устойчивые части этих кривых (в точках которых $f'_\theta < 0$) показаны сплошной линией, а неустойчивые (где $f'_\theta > 0$) – штриховой. Ясно также, что в точке (x_0, θ_0) , где $\theta_0 = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$, выполняется равенство $f'_\theta(x_0, \theta_0, 0, 0) = 0$.

УСЛОВИЕ 1.3. *Предполагаем, что*

$$\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0) > 0, \quad f'_\mu(x_0, \theta_0, 0, 0) > 0, \quad f''_{\theta\theta}(x_0, \theta_0, 0, 0) > 0. \quad (1.3)$$

Условия 1.1 и 1.2 вместе с первым неравенством из (1.3) обеспечивают версальное пересечение в точке (x_0, θ_0) кривых медленного движения (1.2). Вспомогательный же параметр μ характеризует “отход” от рассматриваемой особенности, который в силу второго неравенства из (1.3) происходит общим образом.

Последнее неравенство из (1.3) также характеризует некоторую общность положения. И наконец, условия 1.1–1.3 в совокупности обеспечивают показанную на рис. 2, 3 эволюцию по параметру μ кривых медленного движения, задающихся равенством $f(x, \theta, 0, \mu) = 0$.

Подчеркнем, что все сформулированные условия допускают проверку локальными методами. Действительно, пусть в некоторой точке (x_0, θ_0) , где $a < x_0 < b, 0 < \theta_0 < T$, имеют место соотношения

$$f(x_0, \theta_0, 0, 0) = f'_x(x_0, \theta_0, 0, 0) = f'_\theta(x_0, \theta_0, 0, 0) = 0, \quad f'_\mu(x_0, \theta_0, 0, 0) \neq 0. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение многочлен

$$P(\lambda) = p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3, \quad (1.5)$$

$$p_1 = f''_{\theta\theta}(x_0, \theta_0, 0, 0), \quad p_2 = 2f''_{x\theta}(x_0, \theta_0, 0, 0), \quad p_3 = f''_{xx}(x_0, \theta_0, 0, 0)$$

и будем считать, что он имеет два вещественных корня $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда стандартная теория ветвления [18] гарантирует существование у уравнения

$$f(x, \theta, 0, 0) = 0$$

в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$ двух таких решений $\theta = \varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, что $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = \theta_0$, $\varphi'_1(x_0) = \lambda_1$, $\varphi'_2(x_0) = \lambda_2$. Поэтому, выбирая числа a, b достаточно близкими к x_0 и, если необходимо, заменяя θ на $-\theta$, μ на $-\mu$ в уравнении (1.1), убеждаемся в справедливости условий 1.1–1.3. В свою очередь, условия 1.1–1.3 автоматически гарантируют выполнение свойств (1.4), а также существование у многочлена (1.5) двух различных корней $\lambda_1 = \varphi'_1(x_0)$, $\lambda_2 = \varphi'_2(x_0)$.

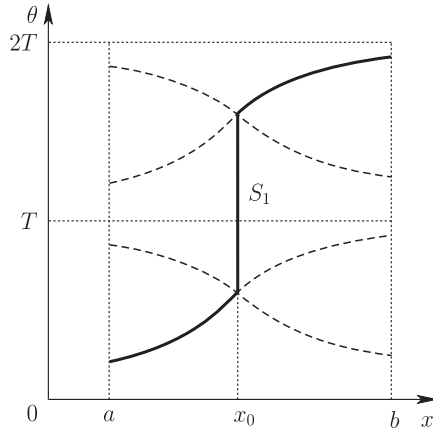


Рис. 4

Из условия 1.2 следует, что кривая

$$S_0 = \{(x, \theta) : a \leq x \leq b, \theta = \varphi_1(x)\} \quad (1.6)$$

распадается на устойчивую (при $x < x_0$) и неустойчивую (при $x > x_0$) части, а значит, является траекторией-уткой вырожденного уравнения $f(x, \theta, 0, 0) = 0$. Траекторию (1.6) будем называть уткой нулевой обходности. Что же касается n -обходных траекторий-уток, то они определяются равенствами

$$S_n = \{(x, \theta): a \leq x \leq x_0, \theta = \varphi_1(x)\} \cup \{(x, \theta): x = x_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + nT\} \\ \cup \{(x, \theta): x_0 \leq x \leq b, \theta = \varphi_1(x) + nT\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Характерной особенностью таких траекторий является наличие вертикального отрезка

$$\{(x, \theta): x = x_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + nT\},$$

который при изменении x проходится мгновенно и геометрически соответствует n полным оборотам точки (x, θ) вокруг оси цилиндра

$$C = \{(x, \theta): a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq T \pmod{T}\}. \quad (1.8)$$

Наглядное представление о траекториях (1.7) дают рис. 4 и рис. 5, относящиеся к случаю $n = 1$.

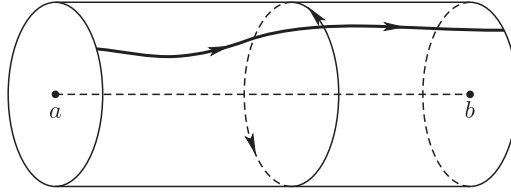


Рис. 5

Траекторией-уткой исходного уравнения (1.1) назовем любое его решение, имеющее в качестве нулевого приближения при $\varepsilon \rightarrow 0$ участок кривой (1.6) или (1.7) при $x_1 \leq x \leq x_2$, где $x_1 \in [a, x_0)$, $x_2 \in (x_0, b]$. В частности, траекторией-уткой с нулевым приближением, включающим кривую (1.7), будет решение (если оно существует) краевой задачи для уравнения (1.1) с граничными условиями

$$\theta|_{x=a} = \theta_1, \quad \theta|_{x=b} = \theta_2 + nT, \quad (1.9)$$

где

$$0 \leq \theta_1 < \varphi_2(a), \quad \varphi_2(b) < \theta_2 \leq T. \quad (1.10)$$

Исследование краевой задачи (1.1), (1.9) удобно прежде всего тем, что с ее помощью выделяется единственная n -обходная траектория-утка, т. е. намечается определенная стратегия “охоты на уток”.

Перед формулировкой основного результата проведем некоторую достройку кривой (1.7). А именно, введем в рассмотрение кривую $\Gamma_n = S_n \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_1 – вертикальный отрезок, соединяющий точки (a, θ_1) и $(a, \varphi_1(a))$, а Σ_2 – аналогичный отрезок с концами в точках $(b, \theta_2 + nT)$ и $(b, \varphi_1(b) + nT)$. Далее, положим

$$\mu_n = \frac{(2n+1)(\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)) + \varphi'_1(x_0) + \varphi'_2(x_0) - 2f'_\varepsilon(x_0, \theta_0, 0, 0)}{2f'_\mu(x_0, \theta_0, 0, 0)}. \quad (1.11)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия 1.1–1.3 и неравенства (1.10), а целое $n \geq 0$ произвольно фиксировано. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственное значение $\mu_n(\varepsilon)$, $\mu_n(0) = 0$ параметра μ , при котором краевая задача (1.1), (1.9) имеет решение $\theta = \theta_n(x, \varepsilon)$. Более того, для кривой

$$\Gamma_n(\varepsilon) = \{(x, \theta) : a \leq x \leq b, \theta = \theta_n(x, \varepsilon)\} \quad (1.12)$$

и функции $\mu_n(\varepsilon)$ имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_n(\varepsilon) = \Gamma_n, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = \mu_n. \quad (1.13)$$

При $n = 0$ сформулированная теорема доказана в работе [14]. В случае $n \geq 1$ ее обоснование приводится в следующем параграфе.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

2.1. Вспомогательные построения. Существование значения $\mu = \mu_n(\varepsilon)$, $\mu_n(0) = 0$ параметра μ , при котором краевая задача (1.1), (1.9) разрешима, вытекает из общих качественных соображений. Для того чтобы убедиться в этом, фиксируем достаточно малое $\mu \neq 0$ и рассмотрим решения

$$\theta = \theta_j(x, \varepsilon, \mu), \quad j = 1, 2; \quad \theta_1(a, \varepsilon, \mu) = \theta_1, \quad \theta_2(b, \varepsilon, \mu) = \theta_2 + nT \quad (2.1)$$

уравнения (1.1) при $0 < \varepsilon \ll 1$.

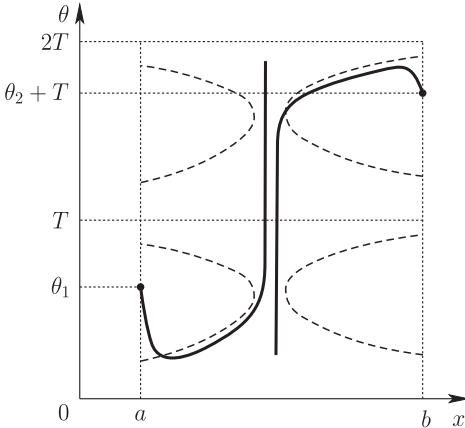


Рис. 6. $\mu > 0$

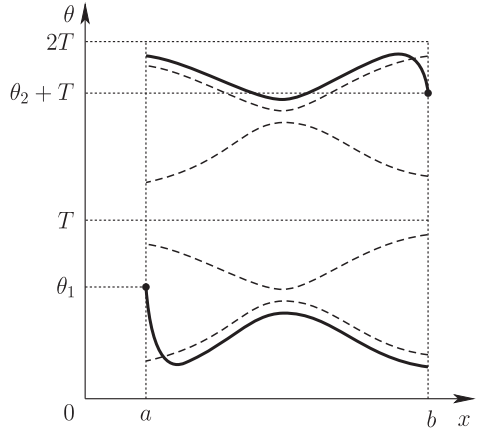


Рис. 7. $\mu < 0$

Пусть сначала $\mu > 0$. Тогда из неравенств (1.10) и характера расположения кривых медленного движения (см. рис. 2) заключаем, что решения (2.1) имеют вид, показанный на рис. 6 (изображен случай $n = 1$). Действительно, из результатов монографии [19] вытекает, что первое из них ведет себя следующим

образом. При увеличении x сначала происходит “падение” на устойчивую “медленную” кривую, т. е. асимптотически быстрое движение в асимптотически малой окрестности луча $\theta = \theta_1$ из точки (a, θ_1) до пересечения с упомянутой кривой. Далее движение протекает в ε -окрестности “медленной” кривой, а затем наблюдается срыв с нее (описанный в [6], [7]) и последующее быстрое движение вдоль некоторого вертикального луча до асимптотически больших значений θ . В случае второго решения (2.1) ситуация симметричная (см. рис. 6).

При $\mu < 0$ решения (2.1) имеют вид, показанный (для $n = 1$) на рис. 7, что также следует из неравенств (1.10) и взаимного расположения кривых медленного движения (см. рис. 3). А отсюда и из простых соображений непрерывности выводим существование хотя бы одного такого значения $\mu = \mu_n(\varepsilon)$, $\mu_n(0) = 0$, при котором решения (2.1) совпадут и, более того, для соответствующей кривой (1.12) будет выполняться первое предельное равенство из (1.13). Таким образом, в доказательстве нуждаются только факт единственности значения $\mu_n(\varepsilon)$ и второе предельное равенство из (1.13).

Из описанного выше качественного поведения решений (2.1) вытекает, что они при увеличении и уменьшении x соответственно продолжаются в любые достаточно малые фиксированные окрестности точек (x_0, θ_0) и $(x_0, \theta_0 + nT)$. А поскольку в силу периодичности уравнения (1.1) данные точки можно отождествить, то в первую очередь следует изучить упомянутое уравнение в окрестности особой точки (x_0, θ_0) .

Для удобства исследования вблизи (x_0, θ_0) приведем уравнение (1.1) к так называемой нормальной форме. Для этого выполним в нем замену переменных

$$\theta - \varphi_1(x) = \varkappa(\eta - \xi), \quad \theta - \varphi_2(x) = \varkappa(\eta + \xi), \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}{f''_{\theta\theta}(x_0, \theta_0, 0, 0)}}, \quad (2.2)$$

переводящую кривые (1.2) в прямые $\eta = \pm\xi$. В результате получим сингулярно возмущенное уравнение

$$\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma(\xi, \eta)(\eta^2 - \xi^2) + \mu\Delta_1(\xi, \eta, \varepsilon, \mu) + \varepsilon\Delta_2(\xi, \eta, \varepsilon, \mu), \quad (2.3)$$

в котором гладкие (в достаточно малой окрестности начала координат) функции γ и Δ_j , $j = 1, 2$, таковы, что

$$\begin{aligned} \gamma(0, 0) &= 1, \quad \Delta_1(0, 0, 0, 0) = \frac{2f'_\mu(x_0, \theta_0, 0, 0)}{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}, \\ \Delta_2(0, 0, 0, 0) &= \frac{2f'_\varepsilon(x_0, \theta_0, 0, 0) - \varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) назовем нормальной формой уравнения (1.1) и будем рассматривать его при $|\xi| \leq q$, $|\eta| \leq r$, где $q, r > 0$ достаточно малы.

Положим в (2.3)

$$\mu = \varepsilon\mu_n + \varepsilon^{3/2}\delta, \quad (2.5)$$

где $\delta \in \mathbb{R}$ – параметр порядка единицы (пробегающий некоторое фиксированное компактное множество Ω), за счет которого в последующем будет произведено

“сшивание” решений (2.1). В результате нормальная форма примет вид

$$\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma(\xi, \eta)(\eta^2 - \xi^2) + \varepsilon \Delta(\xi, \eta, \varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \delta), \quad (2.6)$$

где остаток

$$\Delta(\xi, \eta, \varepsilon, \nu) = \frac{1}{\varepsilon} (\mu \Delta_1(\xi, \eta, \varepsilon, \mu) + \varepsilon \Delta_2(\xi, \eta, \varepsilon, \mu)) \Big|_{\mu=\varepsilon\mu_n+\varepsilon\nu} \quad (2.7)$$

в силу (1.11), (2.4) обладает свойством

$$\Delta(0, 0, 0, 0) = 2n + 1. \quad (2.8)$$

2.2. Базовые леммы. Обозначим через

$$\eta = \mathcal{F}_j(\xi, \varepsilon, \delta), \quad j = 1, 2, \quad (2.9)$$

решения уравнения (2.6), отвечающие функциям

$$\theta_1(x, \varepsilon, \mu) \Big|_{\mu=\varepsilon\mu_n+\varepsilon^{3/2}\delta}, \quad (\theta_2(x, \varepsilon, \mu) - nT) \Big|_{\mu=\varepsilon\mu_n+\varepsilon^{3/2}\delta}.$$

Из результатов монографии [19] следует, что они определены при $-q \leq \xi \leq -q_0$ и $q_0 \leq \xi \leq q$ соответственно, где $q_0 > 0$ произвольно фиксировано и достаточно мало. Более того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для решений (2.9) равномерно по ξ из этих отрезков и по $\delta \in \Omega$ справедливы асимптотические представления

$$\mathcal{F}_j(\xi, \varepsilon, \delta) = \xi + \varepsilon a_1(\xi, \delta) + \varepsilon^{3/2} a_2(\xi, \delta) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \quad (2.10)$$

где

$$a_1(\xi, \delta) = \frac{1 - \Delta(\xi, \xi, 0, 0)}{2\xi\gamma(\xi, \xi)}, \quad a_2(\xi, \delta) = -\frac{\delta\Delta_1(\xi, \xi, 0, 0)}{2\xi\gamma(\xi, \xi)}. \quad (2.11)$$

Добавим еще, что эти представления остаются в силе при дифференцировании по δ .

При $\xi \rightarrow 0$ формулы (2.10) заведомо не работают, так как в этом случае (см. (2.4), (2.7), (2.8), (2.11))

$$a_1(\xi, \delta) = -\frac{n}{\xi} + \varkappa_1 + O(\xi), \quad a_2(\xi, \delta) = \frac{\varkappa_2}{\xi} + O(1), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{1}{2} (\Delta'_\xi(0, 0, 0, 0) + \Delta'_\eta(0, 0, 0, 0)) + n(\gamma'_\xi(0, 0) + \gamma'_\eta(0, 0)), \\ \varkappa_2 &= -\frac{1}{2} \delta \Delta_1(0, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Однако при $-q \leq \xi \leq -\varepsilon^{\lambda_1}$ и $\varepsilon^{\lambda_1} \leq \xi \leq q$, где $\lambda_1 = \text{const} \in (0, 1/2)$, их удается “подправить”.

ЛЕММА 2.1. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $-q \leq \xi \leq -\varepsilon^{\lambda_1}$ и $\varepsilon^{\lambda_1} \leq \xi \leq q$ соответственно и по $\delta \in \Omega$ справедливы асимптотические равенства*

$$\mathcal{F}_j(\xi, \varepsilon, \delta) = \xi + \varepsilon a_1(\xi, \delta) + \varepsilon^{3/2} a_2(\xi, \delta) + O(\varepsilon^{2-3\lambda_1}), \quad j = 1, 2. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим асимптотическое представление (2.14) при $j = 1$ (случай $j = 2$ разбирается аналогично). С этой целью подставим в уравнение (2.6) выражение $\eta = \xi + \varepsilon a_1(\xi, \delta) + \varepsilon^{3/2} a_2(\xi, \delta) + z$. В результате для определения z приходим к уравнению вида

$$\varepsilon \frac{dz}{d\xi} = h(\xi, \varepsilon, \delta)z + \Phi(z, \xi, \varepsilon, \delta) + \varepsilon^2 \Psi(\xi, \varepsilon, \delta), \quad (2.15)$$

где функции h, Φ, Ψ удовлетворяют условиям

$$h(\xi, \varepsilon, \delta) = h_0(\xi) + O(\varepsilon/\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad h_0(\xi) = 2\xi + O(\xi^2), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

$$\Phi(0, \xi, \varepsilon, \delta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, \xi, \varepsilon, \delta) \equiv 0, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, \xi, \varepsilon, \delta) \right| \leq M|z| \quad \text{при} \quad |z| \leq 1, \quad (2.17)$$

$$|\Psi(\xi, \varepsilon, \delta)| \leq \frac{M}{\xi^2}. \quad (2.18)$$

Здесь и ниже одной и той же буквой M обозначаются различные универсальные (не зависящие от ξ, ε и так далее) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

От уравнения (2.15) перейдем к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\xi, \varepsilon, \delta) = z(-q, \varepsilon, \delta) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} h(\sigma, \varepsilon, \delta) d\sigma \right] \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma}^{\xi} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] [\Phi(z, \sigma, \varepsilon, \delta) + \varepsilon^2 \Psi(\sigma, \varepsilon, \delta)] d\sigma, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где (см. (2.10))

$$z(-q, \varepsilon, \delta) = \mathcal{F}_1(-q, \varepsilon, \delta) + q - \varepsilon a_1(-q, \delta) - \varepsilon^{3/2} a_2(-q, \delta) = O(\varepsilon^2). \quad (2.20)$$

Используя свойства (2.16)–(2.18), (2.20), требование $\lambda_1 < 1/2$ и вытекающее из (2.16) неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma}^{\xi} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] d\sigma \leq \frac{M}{|\xi|},$$

несложно убедиться, что оператор, порожденный правой частью уравнения (2.19), преобразует некоторый шар пространства $C([-q, -\varepsilon^{\lambda_1}])$ с центром в нуле и радиусом порядка $\varepsilon^{2-3\lambda_1}$ в себя и является в нем сжимающим (с константой сжатия порядка $\varepsilon^{2-4\lambda_1}$). Поэтому единственным образом определяется гладкая по совокупности переменных функция $z(\xi, \varepsilon, \delta)$, принадлежащая упомянутому шару и являющаяся решением данного уравнения. Лемма 2.1 доказана.

В дополнение к установленной лемме заметим, что формулы (2.14) допускают дифференцирование по параметру δ . Этот факт устанавливается посредством анализа аналогичного (2.19), но уже линейного интегрального уравнения для $\partial z / \partial \delta$. Соответствующие вполне понятные выкладки опустим.

На следующем этапе выполним в уравнении (2.6) замены $\eta = \sqrt{\varepsilon} v$, $\xi = \sqrt{\varepsilon} \tau$, приводящие его к виду

$$\frac{dv}{d\tau} = \gamma(\sqrt{\varepsilon} \tau, \sqrt{\varepsilon} v)(v^2 - \tau^2) + \Delta(\sqrt{\varepsilon} \tau, \sqrt{\varepsilon} v, \varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \delta). \quad (2.21)$$

Далее, полагая в (2.21) $\varepsilon = 0$ и учитывая равенства (2.4), (2.8), приходим к модельному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = v^2 - \tau^2 + 2n + 1. \quad (2.22)$$

Отдельно остановимся на способе выбора частного решения уравнения (2.22), соответствующего интересующей нас траектории-утке. Для этого рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = v^2 - \tau^2 + \alpha \quad (2.23)$$

с параметром $\alpha \in \mathbb{R}$. В работе [14] установлено существование у него двух специальных решений $v = v_-(\tau, \alpha)$, $v = v_+(\tau, \alpha)$, определенных на промежутках $-\infty < \tau \leq -\bar{\tau}$ и $\bar{\tau} \leq \tau < +\infty$ соответственно, где $\bar{\tau} > 0$ достаточно велико, и обладающих следующими свойствами:

$$v_-(\tau, \alpha) = \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k-1}}{\tau^{2k-1}} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha-1}{2}, \quad (2.24)$$

$$v_+(\tau, \alpha) = -v_-(-\tau, \alpha)$$

(явные формулы для β_{2k-1} при $k \geq 2$ не приводим, поскольку в дальнейшем они не потребуются). Соотношения (2.24) свидетельствуют о том, что эти решения являются аналогами устойчивого $\eta = \xi$, $\xi < 0$, и неустойчивого $\eta = \xi$, $\xi > 0$, многообразий медленных движений уравнения (2.6).

Будем говорить, что при некотором α решения $v = v_{\pm}(\tau, \alpha)$ уравнения (2.23) сопряжены, если найдется такое решение $u(\tau, \alpha) \not\equiv 0$ вспомогательного линейного уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + (\alpha - \tau^2)u = 0, \quad (2.25)$$

что

$$v_-(\tau, \alpha) = v_+(\tau, \alpha) = v_0(\tau, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{u(\tau, \alpha)} \frac{d}{d\tau} u(\tau, \alpha). \quad (2.26)$$

Равенства (2.26) означают, что в этом случае решение $v_-(\tau, \alpha)$ продолжается на полюс $\tau \geq -\bar{\tau}$, имеет на ней конечное число особенностей полюсного типа (соответствующих нулям решения $u(\tau, \alpha)$ уравнения (2.25)) и, что самое главное, при $\tau \geq \bar{\tau}$ совпадает с решением $v_+(\tau, \alpha)$. Таким образом, можно утверждать, что функция $v_0(\tau, \alpha)$ из (2.26) является аналогом многообходной траектории-утки (обходы соответствуют полюсам этой функции).

Итак, стало понятно, что для нас представляют интерес именно те значения α , когда наблюдается сопряженность. Из соотношений (2.24), (2.26) и из

формулы $v = -u^{-1}du/d\tau$, связывающей любые два решения уравнений (2.23) и (2.25), следует, что эти значения совпадают со спектром краевой задачи

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (\alpha - \tau^2)u = 0, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Последняя же, как известно [20], имеет собственные значения $\alpha_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$, которым отвечают собственные функции

$$u_n = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) H_n(\tau), \quad H_n(\tau) = (-1)^n \exp(\tau^2) \frac{d^n}{d\tau^n} (\exp(-\tau^2)). \quad (2.27)$$

Добавим еще, что $H_n(\tau)$ – это известные полиномы Чебышёва–Эрмита, имеющие на всей оси $\tau \in \mathbb{R}$ ровно n нулей $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$.

Возвращаясь к уравнению (2.22) и принимая во внимание изложенные выше соображения, в качестве его частного решения возьмем

$$v_0(\tau) = -\frac{1}{u_n(\tau)} \frac{d}{d\tau} u_n(\tau), \quad v_0(-\tau) = -v_0(\tau), \quad (2.28)$$

где u_n – функция из (2.27). Данное решение имеет ровно n полюсных особенностей в точках $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$. При $n = 2$ примерный вид функции (2.28) показан на рис. 8.

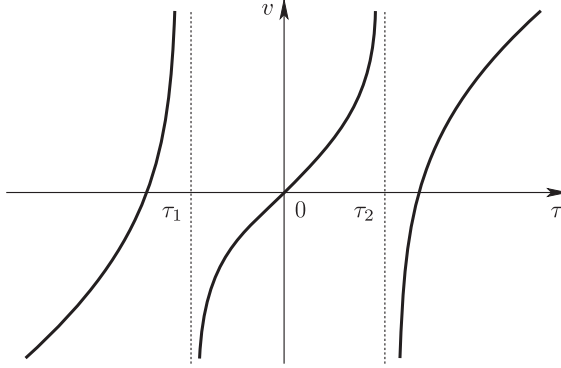


Рис. 8

Обозначим через $v_j = v_j(\tau, \varepsilon, \delta)$, $j = 1, 2$, решения уравнения (2.21) с начальными условиями

$$v_1|_{\tau=-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}} = \varepsilon^{-1/2} \mathcal{F}_1(-\varepsilon^{\lambda_1}, \varepsilon, \delta), \quad v_2|_{\tau=\varepsilon^{\lambda_1-1/2}} = \varepsilon^{-1/2} \mathcal{F}_2(\varepsilon^{\lambda_1}, \varepsilon, \delta), \quad (2.29)$$

заимствованными из предыдущего шага. Фиксируем, далее, произвольным образом значения $\tau_* \in (-\infty, \tau_1)$, $\tau_{**} \in (\tau_n, +\infty)$ и будем искать асимптотику решений $v_j(\tau, \varepsilon, \delta)$, $j = 1, 2$, на промежутках $-\varepsilon^{\lambda_1-1/2} \leq \tau \leq \tau_*$ и $\tau_{**} \leq \tau \leq \varepsilon^{\lambda_1-1/2}$ соответственно в виде

$$v_j = v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,j}(\tau, \delta) + \dots, \quad j = 1, 2. \quad (2.30)$$

Подставляя соотношения (2.30) в (2.21) и приравнявая коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$, для определения функций $v_{1,j}$ приходим к линейным неоднородным уравнениям

$$\frac{dv_{1,j}}{d\tau} = 2v_0(\tau)v_{1,j} + g(\tau), \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} g(\tau) = & (v_0^2(\tau) - \tau^2)(\tau\gamma'_\xi(0,0) + v_0(\tau)\gamma'_\eta(0,0)) + \tau\Delta'_\xi(0,0,0,0) \\ & + v_0(\tau)\Delta'_\eta(0,0,0,0) + \delta\Delta_1(0,0,0,0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

При $j = 1$ в качестве $v_{1,1}$ возьмем единственное ограниченное при $\tau \rightarrow -\infty$ решение соответствующего уравнения (2.31), определяемое равенством

$$v_{1,1}(\tau, \delta) = \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left[\int_{\sigma}^{\tau} 2v_0(\sigma') d\sigma'\right] g(\sigma) d\sigma. \quad (2.33)$$

Действительно, учитывая в (2.32), (2.33) асимптотическое представление для $v_0(\tau)$ (см. (2.24) при $\alpha = 2n + 1$), убеждаемся, что

$$v_{1,1}(\tau, \delta) = \varkappa_1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.34)$$

где $\varkappa_1$ – постоянная из (2.13). В случае $j = 2$, рассуждая аналогичным образом, имеем

$$\begin{aligned} v_{1,2}(\tau, \delta) = & - \int_{\tau}^{+\infty} \exp\left[\int_{\sigma}^{\tau} 2v_0(\sigma') d\sigma'\right] g(\sigma) d\sigma, \\ v_{1,2}(\tau, \delta) = & \varkappa_1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Строгий смысл изложенным построениям придает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. Пусть параметр λ_1 принадлежит интервалу $(1/3, 1/2)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ на отрезках $\tau \in [-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \tau_*]$ и $\tau \in [\tau_{**}, \varepsilon^{\lambda_1-1/2}]$ соответственно справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_j(\tau, \varepsilon, \delta) = & v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}v_{1,j}(\tau, \delta) + \varepsilon^{3/2-3\lambda_1}R_j(\tau, \varepsilon, \delta), \\ |R_j| + \left|\frac{\partial R_j}{\partial \delta}\right| \leq & M\left(\frac{u_n((-1)^j\varepsilon^{\lambda_1-1/2})}{u_n(\tau)}\right)^2 + \varepsilon^{3\lambda_1-1/2}M(|\tau| + 1), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при обосновании леммы 2.1, ограничимся рассмотрением лишь случая $j = 1$. Подставляя в уравнение (2.21) соотношение $v = v_0 + \sqrt{\varepsilon}v_{1,1} + z$, для z получим аналогичное (2.15) уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, \varepsilon, \delta)z + \Phi(z, \tau, \varepsilon, \delta) + \varepsilon\Psi(\tau, \varepsilon, \delta), \quad (2.37)$$

где функции h , Φ , Ψ таковы, что равномерно по $\tau \in [-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \tau_*]$, $\delta \in \Omega$

$$\begin{aligned} h(\tau, \varepsilon, \delta) = & 2v_0(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}(\tau^2 + 1)), \quad \Phi(0, \tau, \varepsilon, \delta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, \tau, \varepsilon, \delta) \equiv 0, \\ \left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, \tau, \varepsilon, \delta)\right| \leq & M|z| \quad \text{при} \quad |z| \leq 1, \quad |\Psi(\tau, \varepsilon, \delta)| \leq M(|\tau| + 1)^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Согласно (2.29) уравнение (2.37) следует дополнить начальным условием

$$z(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \varepsilon, \delta) = \varepsilon^{-1/2} [\mathcal{F}_1(-\varepsilon^{\lambda_1}, \varepsilon, \delta) - \sqrt{\varepsilon} v_0(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}) - \varepsilon v_{1,1}(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \delta)]. \quad (2.39)$$

Далее, учитывая в формуле (2.39) представления (2.12), (2.14), (2.24), (2.34) и требование $\lambda_1 \in (1/3, 1/2)$, убеждаемся, что

$$z(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \varepsilon, \delta) = O(\varepsilon^{3/2-3\lambda_1}), \quad \frac{\partial z}{\partial \delta}(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \varepsilon, \delta) = O(\varepsilon^{3/2-3\lambda_1}). \quad (2.40)$$

Последующий анализ связан с переходом от задачи Коши (2.37), (2.39) к соответствующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\tau, \varepsilon, \delta) = & z(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \varepsilon, \delta) \exp \left[\int_{-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}}^{\tau} h(\sigma, \varepsilon, \delta) d\sigma \right] \\ & + \int_{-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}}^{\tau} \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] [\Phi(z, \sigma, \varepsilon, \delta) + \varepsilon \Psi(\sigma, \varepsilon, \delta)] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Опираясь на соотношения (2.38), (2.40) и вытекающие из первого равенства (2.38) оценки

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}}^{\tau} \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] (|\sigma| + 1)^k d\sigma & \leq M(|\tau| + 1)^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \\ \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] & \leq M \left(\frac{u_n(\sigma)}{u_n(\tau)} \right)^2, \quad \sigma \leq \tau, \end{aligned}$$

убеждаемся, что оператор, порожденный правой частью уравнения (2.41), переводит некоторое множество $K \subset C([-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \tau_*])$ вида

$$K = \left\{ z(\tau) : |z(\tau)| \leq M \varepsilon^{3/2-3\lambda_1} \left(\frac{u_n(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2})}{u_n(\tau)} \right)^2 + \varepsilon M(|\tau| + 1) \right\}$$

в себя и является в нем сжимающим (с константой сжатия порядка $\varepsilon^{2-4\lambda_1}$). Тем самым, упомянутое уравнение имеет единственное решение $z(\tau, \varepsilon, \delta) \in K$. Нетрудно также показать, что и $\partial z / \partial \delta \in K$. Лемма 2.2 доказана.

Последующая программа действий такова. Берем решение $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ и в несколько этапов продолжаем его по τ за точку $\tau = \tau_n$. Точнее говоря, функция $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ будет определена лишь на отрезках вида

$$[\tau_*, \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}], \quad [\tau_k + \varepsilon^{\lambda_2}, \tau_{k+1} - \varepsilon^{\lambda_2}], \quad k = 1, \dots, n-1, \quad [\tau_n + \varepsilon^{\lambda_2}, \tau_{**}],$$

где, напомним, τ_k – нули полинома $H_n(\tau)$, а $\lambda_2 > 0$ – некоторая постоянная. Переход же от значения $\tau = \tau_k - \varepsilon^{\lambda_2}$ к $\tau = \tau_k + \varepsilon^{\lambda_2}$ сопровождается потерей локальности: фазовая точка $(x, \theta_1(x, \varepsilon, \mu))|_{\mu=\varepsilon\mu_n+\varepsilon^{3/2}\delta}$ покидает окрестность точки (x_0, θ_0) , совершает полный оборот вокруг оси цилиндра (1.8) (см. соответствующие пояснения в предыдущем параграфе) и после факторизации переменной θ по модулю T снова оказывается в окрестности особой точки (x_0, θ_0) , т. е. в области действия замены переменных (2.2).

На заключительном этапе, т.е. после продолжения функции $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ до значения $\tau = \tau_{**}$, имеющийся в запасе параметр δ однозначно определяется из уравнения

$$v_1(\tau_{**}, \varepsilon, \delta) = v_2(\tau_{**}, \varepsilon, \delta). \quad (2.42)$$

Упомянутое выше продолжение решения $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ начнем с рассмотрения отрезка $[\tau_*, \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}]$, где $\lambda_2 = \text{const} \in (0, 1/3)$. Подчеркнем, что на указанном отрезке остаток R_1 из (2.36) заведомо не сохраняет своих свойств, поскольку $v_0(\tau) \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow \tau_1 - 0$. Точнее говоря, из формул (2.27), (2.28) и равенств $u_n(\tau_1) = u_n''(\tau_1) = 0$ вытекает асимптотическое разложение вида

$$v_0(\tau) = \frac{1}{\tau_1 - \tau} + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(\tau_1 - \tau)^k, \quad \tau \rightarrow \tau_1 - 0. \quad (2.43)$$

Что же касается функции $v_{1,1}(\tau, \delta)$, то в силу (2.32), (2.33), (2.43) для нее имеем

$$v_{1,1}(\tau, \delta) = -\gamma_\eta'(0, 0) \frac{\ln(\tau_1 - \tau)}{(\tau_1 - \tau)^2} + \frac{\omega_0(\delta)}{(\tau_1 - \tau)^2} + O\left(\frac{1}{\tau_1 - \tau}\right), \quad \tau \rightarrow \tau_1 - 0, \quad (2.44)$$

где $\omega_0(\delta)$ – некоторая гладкая функция от δ , явный вид которой пока несущественен (ее зависимость от δ будет выяснена в дальнейшем).

Учитывая отмеченные обстоятельства, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2.3. *На отрезке $\tau_* \leq \tau \leq \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}$ справедливо асимптотическое представление*

$$v_1(\tau, \varepsilon, \delta) = v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,1}(\tau, \delta) + \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R_1(\tau, \varepsilon, \delta), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.45)$$

в котором

$$|R_1(\tau, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R_1}{\partial \delta}(\tau, \varepsilon, \delta) \right| \leq \frac{M}{(\tau_1 - \tau)^2}. \quad (2.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова обратимся к уравнению (2.37), в котором свойства функции Φ остаются прежними, а функции h , Ψ таковы, что равномерно по $\tau \in [\tau_*, \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}]$, $\delta \in \Omega$, справедливы соотношения

$$h(\tau, \varepsilon, \delta) = 2v_0(\tau) + O\left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\ln(\tau_1 - \tau)}{(\tau_1 - \tau)^2}\right), \quad |\Psi| \leq M \frac{\ln^2(\tau_1 - \tau)}{(\tau_1 - \tau)^4}. \quad (2.47)$$

Перейдем, далее, от уравнения (2.37) к аналогичному (2.41) интегральному уравнению, переписанному для начального момента $\tau = \tau_*$ с начальным условием

$$z(\tau_*, \varepsilon, \delta) = \varepsilon^{3/2-3\lambda_1} R_1(\tau_*, \varepsilon, \delta) = O(\varepsilon)$$

(см. (2.36)). Свойства (2.47) вместе с условием $\lambda_2 < 1/3$ и неравенством

$$\exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] \leq M \left(\frac{\tau_1 - \sigma}{\tau_1 - \tau} \right)^2, \quad \sigma \leq \tau,$$

вытекающим из асимптотической формулы для h (см. (2.47)), гарантируют применимость к этому интегральному уравнению на некотором множестве K из $C([\tau_*, \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}])$ вида

$$K = \left\{ z(\tau) : |z(\tau)| \leq M \frac{\varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2(1/\varepsilon)}{(\tau_1 - \tau)^2} \right\}$$

принципа сжимающих отображений. Лемма 2.3 доказана.

Следующий и самый нетривиальный этап – это переход от значения $\tau = \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}$ к значению $\tau = \tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}$. Как уже было сказано выше, он сопровождается потерей локальности. Суть этого явления в том, что фазовая точка $(x, \theta_1(x, \varepsilon, \mu))|_{\mu=\varepsilon\mu_n+\varepsilon^{3/2}\delta}$ сначала “отрывается” от особой точки (x_0, θ_0) на расстояние порядка единицы (строгий смысл этому будет придан в лемме 2.4). Затем следует участок быстрого движения этой точки, по прошествии которого она оказывается на близком (но имеющим порядок единицы) расстоянии от особой точки $(x_0, \theta_0 + T)$. И наконец, упомянутая фазовая точка попадает в асимптотически малую окрестность точки $(x_0, \theta_0 + T)$ (этот процесс описан в лемме 2.5).

Приступим к реализации изложенной программы действий. Продолжение функции $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ за точку $\tau = \tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}$ связано с заменой

$$\xi = \sqrt{\varepsilon} \tau_1 - \frac{1}{2} \gamma'_\eta(0, 0) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon s. \quad (2.48)$$

Выполняя ее в нормальной форме (2.6), приходим к уравнению

$$\frac{d\eta}{ds} = [\gamma(\xi, \eta)(\eta^2 - \xi^2) + \varepsilon \Delta(\xi, \eta, \varepsilon, \sqrt{\varepsilon} \delta)]|_{\xi=\sqrt{\varepsilon} \tau_1 - (1/2) \gamma'_\eta(0, 0) \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon s}, \quad (2.49)$$

которое согласно предыдущим построениям следует дополнить начальным условием

$$\eta|_{s=s_0(\varepsilon)} = \bar{\eta}(\varepsilon, \delta), \quad (2.50)$$

где

$$s_0(\varepsilon) = -\varepsilon^{\lambda_2-1/2} + \frac{1}{2} \gamma'_\eta(0, 0) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \bar{\eta}(\varepsilon, \delta) = \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau_1 - \varepsilon^{\lambda_2}, \varepsilon, \delta). \quad (2.51)$$

Асимптотическое исследование решения $\eta(s, \varepsilon, \delta)$ задачи Коши (2.49), (2.50) начнем с выявления асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ фигурирующего в (2.50) начального условия $\bar{\eta}(\varepsilon, \delta)$. В связи с этим всюду ниже будем считать, что параметр λ_2 удовлетворяет требованиям

$$\frac{1}{4} < \lambda_2 < \frac{1}{3}. \quad (2.52)$$

Принимая во внимание условия (2.52), подставим во второе равенство (2.51) соотношение (2.45) и учтем свойства (2.43), (2.44), (2.46). В результате после некоторых преобразований убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\delta \in \Omega$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\varepsilon, \delta) &= \varepsilon^{1/2-\lambda_2} + \left(\lambda_2 \gamma'_\eta(0, 0) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \omega_0(\delta) \right) \varepsilon^{1-2\lambda_2} + O\left(\varepsilon^{3/2-3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \right), \\ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) &= \omega'_0(\delta) \varepsilon^{1-2\lambda_2} + O\left(\varepsilon^{3/2-3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Обратимся сначала к уравнению

$$\frac{d\eta}{ds} = \gamma(0, \eta)\eta^2, \quad (2.54)$$

получающемуся из (2.49) при $\varepsilon = 0$. Далее, введем в рассмотрение специальное его решение $\eta_0(s) > 0$, определяющееся при всех достаточно больших по модулю отрицательных s из уравнения

$$Y(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\eta} - \gamma'_\eta(0, 0) \ln |\eta| + \int_0^\eta \left[\frac{1}{\gamma(0, \sigma)\sigma^2} - \frac{1 - \gamma'_\eta(0, 0)\sigma}{\sigma^2} \right] d\sigma = s \quad (2.55)$$

и допускающее асимптотику

$$\eta_0(s) = -\frac{1}{s} - \gamma'_\eta(0, 0) \frac{\ln(-s)}{s^2} + O\left(\frac{\ln^2(-s)}{s^3}\right), \quad s \rightarrow -\infty. \quad (2.56)$$

Что же касается решения задачи Коши (2.54), (2.50), то оно задается равенствами

$$\eta = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)), \quad \bar{s}(\varepsilon, \delta) = Y(\bar{\eta}(\varepsilon, \delta)) - s_0(\varepsilon). \quad (2.57)$$

Добавим еще, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функции $\bar{s}(\varepsilon, \delta)$ из формул (2.51), (2.53) и явного вида $Y(\eta)$ (см. (2.55)) вытекают равномерные по $\delta \in \Omega$ асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \bar{s}(\varepsilon, \delta) &= \omega_0(\delta) + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) &= \omega'_0(\delta) + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Прежде чем перейти к строгому результату об асимптотике решения $\eta(s, \varepsilon, \delta)$ задачи (2.49), (2.50), введем еще одно обозначение. Напомним, что функция $\gamma(0, \eta)$ определена лишь локально (на отрезке $|\eta| \leq r$) и $\gamma(0, \eta) > 0$ (так как $\gamma(0, 0) = 1$). Далее, фиксируем произвольно значение $r_* \in (0, r)$ и обозначаем через $s_*(\delta)$ корень уравнения $\eta_0(s + \omega_0(\delta)) = r_*$. В силу равенств (2.54), (2.56) и упомянутых свойств $\gamma(0, \eta)$ этот корень находится однозначно, а само решение $\eta_0(s + \omega_0(\delta))$ заведомо определено на полуоси $-\infty < s \leq s_*(\delta)$ и монотонно возрастает на ней от 0 до r_* .

ЛЕММА 2.4. Пусть параметр λ_2 удовлетворяет требованиям (2.52). Тогда на отрезке $s_0(\varepsilon) \leq s \leq s_*(\delta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое представление

$$\eta(s, \varepsilon, \delta) = \eta_0(s + \omega_0(\delta)) + \varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(s, \varepsilon, \delta), \quad (2.59)$$

где

$$|R(s, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R}{\partial \delta}(s, \varepsilon, \delta) \right| \leq \frac{M}{s^2 + 1}. \quad (2.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, полагая в (2.49) $\eta = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)) + z$, для переменной z приходим к уравнению вида

$$\frac{dz}{ds} = h(s, \varepsilon, \delta)z + \Phi(z, s, \varepsilon, \delta) + \sqrt{\varepsilon} \Psi(s, \varepsilon, \delta). \quad (2.61)$$

В данном случае в силу формул (2.56)–(2.58) фигурирующие в (2.61) функции h , Φ , Ψ обладают свойствами

$$\begin{aligned} h(s, \varepsilon, \delta) &= h_0(s, \delta) + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} (s^2 + 1)^{-1}\right), \\ \Phi(0, s, \varepsilon, \delta) &\equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, s, \varepsilon, \delta) \equiv 0, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, s, \varepsilon, \delta) \right| \leq M|z| \quad \text{при} \quad |z| \leq 1, \\ |\Psi(s, \varepsilon, \delta)| &\leq \frac{M}{s^2 + 1}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где

$$h_0(s, \delta) = \frac{d}{d\eta} (\gamma(0, \eta) \eta^2) \Big|_{\eta=\eta_0(s+\omega_0(\delta))} = \frac{d^2 \eta / ds^2}{d\eta / ds} \Big|_{\eta=\eta_0(s+\omega_0(\delta))}. \quad (2.63)$$

Дополним уравнение (2.61) начальным условием $z|_{s=s_0(\varepsilon)} = 0$ и перейдем от получившейся задачи Коши к интегральному уравнению

$$z(s, \varepsilon, \delta) = \int_{s_0(\varepsilon)}^s \exp \left[\int_{\sigma}^s h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] [\Phi(z, \sigma, \varepsilon, \delta) + \sqrt{\varepsilon} \Psi(\sigma, \varepsilon, \delta)] d\sigma. \quad (2.64)$$

Учтем, далее, в уравнении (2.64) соотношения (2.62), (2.63) и вытекающую из (2.63) оценку

$$\exp \left[\int_{\sigma}^s h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] \leq M \left(\frac{d\eta_0(s + \omega_0(\delta)) / ds}{d\eta_0(\sigma + \omega_0(\delta)) / d\sigma} \right).$$

В результате убеждаемся, что правая часть этого уравнения порождает оператор, переводящий в себя некоторое множество $K \subset C([s_0(\varepsilon), s_*(\delta)])$ вида

$$K = \left\{ z(s) : |z(s)| \leq \frac{M\varepsilon^{\lambda_2}}{s^2 + 1} \right\} \quad (2.65)$$

и являющийся в нем сжимающим (с константой сжатия порядка $\varepsilon^{2\lambda_2-1/2}$). Таким образом, для решения задачи Коши (2.49), (2.50) получаем представление

$$\eta(s, \varepsilon, \delta) = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)) + z(s, \varepsilon, \delta), \quad (2.66)$$

где $z(s, \varepsilon, \delta) \in K$ и $\partial z / \partial \delta \in K$. Что же касается соотношений (2.59), (2.60), то они получаются из (2.66) при переразложении первого слагаемого $\eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta))$ по ε . Лемма 2.4 доказана.

Следует отметить, что формулы (2.59), (2.60) справедливы и на более широком промежутке изменения s , а именно, при тех $s \geq s_0(\varepsilon)$, для которых выполняется априорное условие $|\eta(s, \varepsilon, \delta)| \leq r$. Учитывая это обстоятельство, рассмотрим уравнение

$$\eta(s, \varepsilon, \delta) = r_*. \quad (2.67)$$

Лемма 2.4 гарантирует существование у него единственного корня $s = s_*(\varepsilon, \delta)$ с равномерной по $\delta \in \Omega$ асимптотикой

$$\begin{aligned} s_*(\varepsilon, \delta) &= s_*(\delta) + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial s_*}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) &= s'_*(\delta) + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Рассмотрим, далее, точку $(\xi, \eta) = (\xi_*, r_*)$, где

$$\xi_*(\varepsilon, \delta) = \sqrt{\varepsilon} \tau_1 - \frac{1}{2} \gamma'_\eta(0, 0) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon s_*(\varepsilon, \delta), \quad (2.69)$$

и перейдем от нее к точке (x_*, θ_*) , обращая замену переменных (2.2). А именно, $x_*(\varepsilon, \delta)$ определяется как неявная функция из уравнения

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2\kappa \xi_*(\varepsilon, \delta). \quad (2.70)$$

Что же касается компоненты $\theta_*(\varepsilon, \delta)$, то после нахождения $x_*(\varepsilon, \delta)$ для нее получается равенство

$$\theta_*(\varepsilon, \delta) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2} \Big|_{x=x_*(\varepsilon, \delta)} + \kappa r_*. \quad (2.71)$$

Учитывая в (2.70), (2.71) разложения (2.68), (2.69) и проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равномерные по $\delta \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} x_*(\varepsilon, \delta) &= x_0 + x_{1,*} \sqrt{\varepsilon} + x_{2,*} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + x_{3,*}(\delta) \varepsilon + O\left(\varepsilon^{3/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial x_*}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) &= x'_{3,*}(\delta) \varepsilon + O\left(\varepsilon^{3/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right); \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\theta_*(\varepsilon, \delta) = \theta_0 + \kappa r_* + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \frac{\partial \theta_*}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) = O(\varepsilon), \quad (2.73)$$

где

$$\begin{aligned} x_{1,*} &= \frac{2\kappa \tau_1}{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}, & x_{2,*} &= -\frac{\kappa \gamma'_\eta(0, 0)}{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}, \\ x_{3,*} &= \frac{2\kappa s_*(\delta)}{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)} - \frac{2(\varphi''_1(x_0) - \varphi''_2(x_0))\kappa^2 \tau_1^2}{(\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0))^3}. \end{aligned}$$

Прделанные построения приводят к задаче Коши для уравнения (1.1), (2.5) с начальным условием $\theta|_{x=x_*} = \theta_*$. Однако по техническим причинам удобнее работать с эквивалентной задачей Коши

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\varepsilon}{f(x, \theta, \varepsilon, \varepsilon \mu_n + \varepsilon^{3/2} \delta)}, \quad x|_{\theta=\theta_*(\varepsilon, \delta)} = x_*(\varepsilon, \delta). \quad (2.74)$$

Получившуюся задачу будем рассматривать на отрезке $\theta_*(\varepsilon, \delta) \leq \theta \leq T$. В силу вытекающего из условий 1.2, 1.3 неравенства $f(x_0, \theta, 0, 0) > 0$ при $0 \leq \theta \leq T$,

$\theta \neq \theta_0$ и разложений (2.72), (2.73) она регулярно зависит от параметров ε и δ . Тем самым, для решения $x(\theta, \varepsilon, \delta)$ этой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы равномерные по $\delta \in \Omega$ и $\theta \in [\theta_*(\varepsilon, \delta), T]$ асимптотические равенства

$$\begin{aligned} x(\theta, \varepsilon, \delta) &= x_*(\varepsilon, \delta) + \varepsilon \int_{\theta_0 + \varkappa r_*}^{\theta} \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \frac{\partial x}{\partial \delta}(\theta, \varepsilon, \delta) &= \frac{\partial x_*}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

При $\theta > T$ сделаем в (2.74) замену $\theta - T \rightarrow \theta$ и воспользуемся свойством периодичности f по θ . В результате приходим к аналогичной задаче Коши

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\varepsilon}{f(x, \theta, \varepsilon, \varepsilon \mu_n + \varepsilon^{3/2} \delta)}, \quad x|_{\theta=0} = x(T, \varepsilon, \delta), \quad (2.76)$$

решение которой также обозначим через $x(\theta, \varepsilon, \delta)$. Учитывая уже известные разложения (2.75) и факт регулярности задачи (2.76), убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\delta \in \Omega$ и $\theta \in [0, \bar{\theta}]$, $\bar{\theta} = \text{const} \in (0, \theta_0)$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} x(\theta, \varepsilon, \delta) &= x_*(\varepsilon, \delta) + \varepsilon \int_{\theta_0 + \varkappa r_*}^T \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{\theta} \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \frac{\partial x}{\partial \delta}(\theta, \varepsilon, \delta) &= \frac{\partial x_*}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

На следующем этапе снова перейдем от переменных (x, θ) к (ξ, η) . В связи с этим, считая параметр $\bar{\theta}$ принадлежащим интервалу $(\theta_0 - \varkappa r_*, \theta_0)$, обратимся к уравнению

$$\theta = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2} \Big|_{x=x_*(\theta, \varepsilon, \delta)} - \varkappa r_* \quad (2.78)$$

и обозначим через $\theta = \theta_{**}(\varepsilon, \delta)$ его корень из промежутка $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$. Положим затем

$$x_{**}(\varepsilon, \delta) = x(\theta, \varepsilon, \delta) \Big|_{\theta=\theta_{**}(\varepsilon, \delta)}, \quad \xi_{**}(\varepsilon, \delta) = \frac{1}{2\varkappa}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \Big|_{x=x_{**}(\varepsilon, \delta)}. \quad (2.79)$$

В этом случае, как нетрудно увидеть, точке (x_{**}, θ_{**}) в переменных (ξ, η) будет соответствовать точка $(\xi_{**}, -r_*)$, асимптотически близкая к $(0, -r_*)$.

Отдельно остановимся на асимптотическом вычислении $\xi_{**}(\varepsilon, \delta)$. С этой целью сначала подставим в (2.78) разложения (2.77). В результате убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\delta \in \Omega$

$$\theta_{**}(\varepsilon, \delta) = \theta_0 - \varkappa r_* + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \frac{\partial \theta_{**}}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) = O(\varepsilon).$$

А отсюда и из (2.77), (2.79) получаем равномерные по $\delta \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned}\xi_{**}(\varepsilon, \delta) &= \sqrt{\varepsilon} \tau_1 - \frac{1}{2} \gamma'_\eta(0, 0) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon s_{**}(\varepsilon, \delta), \\ s_{**}(\varepsilon, \delta) &= s_*(\delta) + \frac{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}{2\kappa} \left(\int_{\theta_0 + \varkappa r_*}^T \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\theta_0 - \varkappa r_*} \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} \right) + O\left(\varepsilon^{1/2 - \lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial s_{**}}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) &= s'_*(\delta) + O\left(\varepsilon^{1/2 - \lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.\end{aligned}\tag{2.80}$$

При $\xi \geq \xi_{**}(\varepsilon, \delta)$ рассмотрению подлежит задача Коши для уравнения (2.6) с начальным условием $\eta|_{\xi=\xi_{**}} = -r_*$. Выполним в ней замену (2.48). В результате приходим к задаче Коши для уравнения (2.49) с начальным условием

$$\eta|_{s=s_{**}(\varepsilon, \delta)} = -r_*,\tag{2.81}$$

где $s_{**}(\varepsilon, \delta)$ – функция из (2.80).

При анализе задачи Коши (2.49), (2.81), как и выше, нам потребуется специальное решение $\eta = \eta_0(s)$ уравнения (2.54). В данном случае в качестве такового возьмем отрицательное его решение, определяющееся при всех достаточно больших $s > 0$ из уравнения (2.55) и допускающее аналогичную (2.56) асимптотику

$$\eta_0(s) = -\frac{1}{s} - \gamma'_\eta(0, 0) \frac{\ln s}{s^2} + O\left(\frac{\ln^2 s}{s^3}\right), \quad s \rightarrow +\infty.\tag{2.82}$$

С помощью функции (2.82), в свою очередь, выписывается решение задачи Коши (2.54), (2.81). А именно, для него справедливы аналогичные (2.57) равенства

$$\eta = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)), \quad \bar{s}(\varepsilon, \delta) = Y(-r_*) - s_{**}(\varepsilon, \delta).\tag{2.83}$$

Нетрудно увидеть, что решение (2.83) определено на полуоси $[s_{**}(\varepsilon, \delta), +\infty)$ и при увеличении s монотонно меняется от $-r_*$ до 0.

Перед формулировкой очередной леммы рассмотрим значение

$$s_1(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda_2 - 1/2} + \frac{1}{2} \gamma'_\eta(0, 0) \ln \frac{1}{\varepsilon}\tag{2.84}$$

переменной s , аналогичное значению $s = s_0(\varepsilon)$ из (2.51).

ЛЕММА 2.5. Пусть, как и ранее, параметр λ_2 удовлетворяет требованиям (2.52). Тогда для решения $\eta(s, \varepsilon, \delta)$ задачи Коши (2.49), (2.81) на отрезке $s_{**}(\varepsilon, \delta) \leq s \leq s_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое представление

$$\eta(s, \varepsilon, \delta) = \eta_0(s + \psi_0(\delta)) + \varepsilon^{1/2 - \lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(s, \varepsilon, \delta),\tag{2.85}$$

зде

$$\begin{aligned} \psi_0(\delta) = & Y(-r_*) - s_*(\delta) \\ & - \frac{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}{2\kappa} \left(\int_{\theta_0 + \kappa r_*}^T \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} + \int_0^{\theta_0 - \kappa r_*} \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} \right), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$|R(s, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R}{\partial \delta}(s, \varepsilon, \delta) \right| \leq \frac{M}{s^2 + 1}. \quad (2.87)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при обосновании леммы 2.4, подставим в (2.49) выражение $\eta = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)) + z$. В результате для z получим уравнение вида (2.61) с функциями h , Φ , Ψ , для которых сохраняются свойства (2.62), (2.63) (в (2.63) решение $\eta = \eta_0(s + \omega_0(\delta))$ следует заменить на $\eta = \eta_0(s + \psi_0(\delta))$, где $\eta_0(s)$, $\psi_0(\delta)$ определены равенствами (2.82), (2.86)). Далее, перейдем от (2.61) к аналогичному (2.64) интегральному уравнению, в котором начальный момент $s = s_0(\varepsilon)$ заменен на $s = s_{**}(\varepsilon, \delta)$.

Анализ получившегося уравнения практически дословно повторяет соответствующий фрагмент доказательства леммы 2.4. А именно, нетрудно убедиться, что правая часть этого уравнения порождает оператор, переводящий некоторое множество функций $K \subset C([s_{**}(\varepsilon, \delta), s_1(\varepsilon)])$ вида (2.65) в себя и являющийся в нем сжимающим. Тем самым, у данного оператора существует единственная неподвижная точка $z(s, \varepsilon, \delta)$ со свойствами

$$|z(s, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial z}{\partial \delta}(s, \varepsilon, \delta) \right| \leq \frac{M\varepsilon^{\lambda_2}}{s^2 + 1}, \quad s_{**}(\varepsilon, \delta) \leq s \leq s_1(\varepsilon). \quad (2.88)$$

Что же касается итоговой формулы (2.85) и оценки (2.87), то они получаются из равенства

$$\eta(s, \varepsilon, \delta) = \eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)) + z(s, \varepsilon, \delta)$$

с учетом оценок (2.88) и вытекающего из (2.80), (2.82), (2.83) представления

$$\eta_0(s + \bar{s}(\varepsilon, \delta)) = \eta_0(s + \psi_0(\delta)) + O\left(\varepsilon^{1/2 - \lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} (s^2 + 1)^{-1}\right).$$

Лемма 2.5 доказана.

На очередном этапе обратимся к уравнению (2.21), дополним его начальным условием (заимствованным из предыдущего шага)

$$v|_{\tau=\tau_1+\varepsilon^{\lambda_2}} = \bar{v}(\varepsilon, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1/2} \eta(s, \varepsilon, \delta)|_{s=s_1(\varepsilon)} \quad (2.89)$$

и, как и выше, обозначим через $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ решение получившейся задачи Коши.

Исследование этой задачи начнем с асимптотического анализа начального условия (2.89). Привлекая формулы (2.82), (2.84)–(2.87), убеждаемся в справедливости при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерных по $\delta \in \Omega$ асимптотических равенств

$$\begin{aligned} \bar{v}(\varepsilon, \delta) = & -\varepsilon^{-\lambda_2} + \left(\lambda_2 \gamma'_\eta(0, 0) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \psi_0(\delta) \right) \varepsilon^{1/2 - 2\lambda_2} + O\left(\varepsilon^{1 - 3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \delta}(\varepsilon, \delta) = & \psi'_0(\delta) \varepsilon^{1/2 - 2\lambda_2} + O\left(\varepsilon^{1 - 3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Что же касается самого решения $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$, то его асимптотику будем искать в аналогичном (2.30) виде

$$v_1 = v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,1}(\tau, \delta) + \dots, \quad (2.91)$$

где, как и ранее, $v_0(\tau)$ – функция (2.28), а $v_{1,1}$ – решение аналогичного (2.31) линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dv_{1,1}}{d\tau} = 2v_0(\tau)v_{1,1} + g(\tau) \quad (2.92)$$

с неоднородностью (2.32).

Отдельно остановимся на выборе частного решения уравнения (2.92). В связи с этим обратим внимание, что в силу (2.28) общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$v_{1,1} = \frac{c}{u_n^2(\tau)}, \quad c = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (2.93)$$

где u_n – функция из (2.27), и при $\tau \rightarrow \tau_1 + 0$ допускает асимптотику

$$v_{1,1} = \frac{c}{(u'_n(\tau_1))^2(\tau - \tau_1)^2} + O\left(\frac{1}{\tau - \tau_1}\right). \quad (2.94)$$

Что же касается уравнения (2.92), то для любого его решения $v_{1,1}(\tau)$ из формул (2.93), (2.94) и из явного вида (2.32) неоднородности $g(\tau)$ вытекает аналогичное (2.44) асимптотическое представление

$$v_{1,1} = -\gamma'_\eta(0, 0) \frac{\ln(\tau - \tau_1)}{(\tau - \tau_1)^2} + \frac{c}{(\tau - \tau_1)^2} + O\left(\frac{1}{\tau - \tau_1}\right), \quad \tau \rightarrow \tau_1 + 0, \quad (2.95)$$

где константа c может быть любой. Таким образом, выбор конкретного решения уравнения (2.92) полностью определяется заданием упомянутой константы.

В дальнейшем считаем, что постоянная c в (2.95) равна $\psi_0(\delta)$, а соответствующее решение уравнения (2.92) обозначим через $v_{1,1}(\tau, \delta)$. Опираясь на формулы (2.93), (2.94), (2.32), для него получаем равенство

$$\begin{aligned} v_{1,1}(\tau, \delta) = & \frac{1}{u_n^2(\tau)} \left\{ (H) \int_{\tau_1}^{\tau} u_n^2(\sigma) v_0^3(\sigma) d\sigma \cdot \gamma'_\eta(0, 0) \right. \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau} u_n^2(\sigma) \left[(v_0^2(\sigma) - \sigma^2) \sigma \gamma'_\xi(0, 0) - \sigma^2 v_0(\sigma) \gamma'_\eta(0, 0) + \sigma \Delta'_\xi(0, 0, 0, 0) \right. \\ & \left. \left. + v_0(\sigma) \Delta'_\eta(0, 0, 0, 0) + \delta \Delta_1(0, 0, 0, 0) \right] d\sigma \right\} + \frac{\psi_0(\delta)(u'_n(\tau_1))^2}{u_n^2(\tau)}, \quad (2.96) \end{aligned}$$

где $(H) \int_{\tau_1}^{\tau}$ – регуляризация по Адамару (см. [6]) в точке $\tau = \tau_1$.

Строгий смысл разложению (2.91) придает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.6. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ на отрезке $\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \bar{\tau}_1$, где $\bar{\tau}_1 = \text{const}$ из интервала (τ_1, τ_2) , имеет место асимптотическое представление вида (2.45) с остатком $R_1(\tau, \varepsilon, \delta)$, допускающим оценку (2.46).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в уравнении (2.21) $v = v_0 + \sqrt{\varepsilon} v_{1,1} + z$, где теперь $v_{1,1}$ задается формулой (2.96), получаем уравнение вида (2.37). Здесь функция Φ обладает теми же свойствами, что и в (2.38), а для h , Ψ справедливы соотношения (2.47), в которых $\tau_1 - \tau$ заменено на $\tau - \tau_1$. Далее, как обычно, перейдем от (2.37) к соответствующему интегральному уравнению, которое в данном случае имеет вид

$$z(\tau, \varepsilon, \delta) = z(\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}, \varepsilon, \delta) \exp \left\{ \int_{\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}}^{\tau} h(\sigma, \varepsilon, \delta) d\sigma \right\} + \int_{\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}}^{\tau} \exp \left\{ \int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right\} [\Phi(z, \sigma, \varepsilon, \delta) + \varepsilon \Psi(\sigma, \varepsilon, \delta)] d\sigma, \quad (2.97)$$

где в силу (2.43), (2.90), (2.95), (2.96) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\delta \in \Omega$

$$\begin{aligned} z(\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}, \varepsilon, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}(\varepsilon, \delta) - [v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,1}(\tau, \delta)]|_{\tau=\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}} \\ &= O\left(\varepsilon^{1-3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial \delta}(\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}, \varepsilon, \delta) &= O\left(\varepsilon^{1-3\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Анализ уравнения (2.97) базируется на оценках

$$\begin{aligned} \exp \left[\int_{\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2}}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] &\leq \frac{M \varepsilon^{2\lambda_2}}{(\tau - \tau_1)^2}, \\ \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] &\leq M \left(\frac{\sigma - \tau_1}{\tau - \tau_1} \right)^2, \quad \sigma \leq \tau, \end{aligned}$$

вытекающих из отмеченных выше свойств функции h , и на асимптотических представлениях (2.98). Объединяя перечисленные факты и опираясь, как обычно, на принцип сжимающих отображений, приходим к выводу о существовании у рассматриваемого уравнения единственного решения

$$z = z(\tau, \varepsilon, \delta): \quad |z(\tau, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial z}{\partial \delta}(\tau, \varepsilon, \delta) \right| \leq M \frac{\varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2(1/\varepsilon)}{(\tau - \tau_1)^2}.$$

Лемма 2.6 доказана.

2.3. Завершение обоснования теоремы 1.1. Итак, преодолена главная трудность, возникающая при доказательстве теоремы 1.1. А именно, решение $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ уравнения (2.21) продолжено за особую точку $\tau = \tau_1$, т. е. на отрезок $\tau_1 + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \bar{\tau}_1$. Попутно получена серия базовых лемм 2.1–2.6, позволяющих дальнейшее продолжение функции $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ осуществить с помощью метода математической индукции.

Действительно, предположим, что при некотором k , $1 \leq k \leq n-1$, решение $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ продолжено на отрезок $\tau_k + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \bar{\tau}_k$, $\bar{\tau}_k = \text{const} \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, и

допускает на нем представление вида (2.45), (2.46) с заменой τ_1 на τ_k и с функцией $v_{1,1}(\tau, \delta)$, задаваемой аналогичным (2.96) равенством

$$\begin{aligned} v_{1,1}(\tau, \delta) = & \frac{1}{u_n^2(\tau)} \left\{ (H) \int_{\tau_k}^{\tau} u_n^2(\sigma) v_0^3(\sigma) d\sigma \cdot \gamma'_\eta(0, 0) \right. \\ & + \int_{\tau_k}^{\tau} u_n^2(\sigma) [(v_0^2(\sigma) - \sigma^2) \sigma \gamma'_\xi(0, 0) - \sigma^2 v_0(\sigma) \gamma'_\eta(0, 0) + \sigma \Delta'_\xi(0, 0, 0, 0) \\ & \left. + v_0(\sigma) \Delta'_\eta(0, 0, 0, 0) + \delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)] d\sigma \right\} + \frac{\psi_{k-1}(\delta) (u'_n(\tau_k))^2}{u_n^2(\tau)}. \quad (2.99) \end{aligned}$$

Здесь $\psi_{k-1}(\delta)$ – некоторая гладкая функция от δ , известная из предыдущих построений. Подчеркнем, что при $k = 1$ все перечисленные факты уже установлены.

Для того чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим сначала значения τ из отрезка $\bar{\tau}_k \leq \tau \leq \tau_{k+1} - \varepsilon^{\lambda_2}$. Заметим далее, что при $\tau \rightarrow \tau_{k+1} - 0$ функция (2.99) допускает асимптотику вида

$$v_{1,1}(\tau, \delta) = -\gamma'_\eta(0, 0) \frac{\ln(\tau_{k+1} - \tau)}{(\tau_{k+1} - \tau)^2} + \frac{\omega_k(\delta)}{(\tau_{k+1} - \tau)^2} + O\left(\frac{1}{\tau_{k+1} - \tau}\right), \quad (2.100)$$

где величина $\omega_k(\delta)$ полностью определяется выбором (2.99) частного решения уравнения (2.92). Тем самым, здесь мы находимся в рамках применимости леммы 2.3. Единственное отличие состоит в том, что начальное условие для функции

$$z = v_1(\tau, \varepsilon, \delta) - v_0(\tau) - \sqrt{\varepsilon} v_{1,1}(\tau, \delta)$$

при $\tau = \bar{\tau}_k$ в данном случае является величиной порядка $\varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2(1/\varepsilon)$, а не ε , как при $\tau = \tau_*$. Но это отличие не влияет на обоснование аналога леммы 2.3, а значит, при $\bar{\tau}_k \leq \tau \leq \tau_{k+1} - \varepsilon^{\lambda_2}$ имеем

$$\begin{aligned} v_1(\tau, \varepsilon, \delta) = & v_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,1}(\tau, \delta) + \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R_1(\tau, \varepsilon, \delta), \\ |R_1(\tau, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R_1}{\partial \delta}(\tau, \varepsilon, \delta) \right| \leq & \frac{M}{(\tau_{k+1} - \tau)^2}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Последующее продолжение функции $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ связано с заменой (2.48). Выполняя ее в нормальной форме (2.6), приходим к задаче Коши (2.49), (2.50) с начальным условием $\bar{\eta}(\varepsilon, \delta) = \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau_{k+1} - \varepsilon^{\lambda_2}, \varepsilon, \delta)$, для которого в силу (2.100), (2.101) справедливы асимптотические представления вида (2.53) (с заменой функции $\omega_0(\delta)$ на $\omega_k(\delta)$). Далее, обозначим через $s_*(\delta)$ корень уравнения $\eta_0(s + \omega_k(\delta)) = r_*$, где $\eta_0(s)$ – функция (2.56). Заметим, что этот корень связан с $\omega_k(\delta)$ равенством

$$s_*(\delta) = \tilde{s} - \omega_k(\delta), \quad (2.102)$$

где $\tilde{s}$ – корень уравнения $\eta_0(s) = r_*$.

Перечисленные факты свидетельствуют о том, что мы находимся в рамках применения леммы 2.4. Тем самым, для решения $\eta(s, \varepsilon, \delta)$ задачи Коши (2.49),

(2.50) на отрезке $s_0(\varepsilon) \leq s \leq s_*(\delta)$, где $s_*(\delta)$ – функция (2.102), получается аналогичное (2.59), (2.60) асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \eta(s, \varepsilon, \delta) &= \eta_0(s + \omega_k(\delta)) + \varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(s, \varepsilon, \delta), \\ |R(s, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R}{\partial \delta}(s, \varepsilon, \delta) \right| &\leq \frac{M}{s^2 + 1}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Из формул (2.103) очевидным образом следует, что и в данном случае уравнение (2.67) допускает единственный корень $s = s_*(\varepsilon, \delta)$ с асимптотикой (2.68). Тем самым, все изложенные выше построения, начинающиеся от введения в рассмотрение точки (ξ_*, r_*) (см. (2.69)) до получения точки $(\xi_{**}, -r_*)$ (см. (2.80)), здесь сохраняются дословно. А это, в свою очередь, означает, что для задачи Коши (2.49), (2.81) остается в силе лемма 2.5. Из данной леммы для решения $\eta(s, \varepsilon, \delta)$ упомянутой задачи получаем аналогичное (2.85)–(2.87) асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \eta(s, \varepsilon, \delta) &= \eta_0(s + \psi_k(\delta)) + \varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(s, \varepsilon, \delta), \\ |R(s, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R}{\partial \delta}(s, \varepsilon, \delta) \right| &\leq \frac{M}{s^2 + 1}, \quad s_{**}(\varepsilon, \delta) \leq s \leq s_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.104)$$

где $\eta_0(s)$ – функция (2.82), а $\psi_k(\delta)$ в силу (2.86), (2.102) задается формулой

$$\begin{aligned} \psi_k(\delta) &= Y(-r_*) + \omega_k(\delta) - \tilde{s} \\ &\quad - \frac{\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)}{2\kappa} \left(\int_{\theta_0 + \kappa r_*}^T \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} + \int_0^{\theta_0 - \kappa r_*} \frac{d\sigma}{f(x_0, \sigma, 0, 0)} \right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Для завершения шага индукции обратимся к отрезку $\tau_{k+1} + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \bar{\tau}_{k+1}$, где $\bar{\tau}_{k+1} = \text{const} \in (\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$ (при $k = n - 1$ считаем $\bar{\tau}_n = \tau_{**}$, $\bar{\tau}_{n+1} = +\infty$), и заметим, что на нем рассмотрению подлежит задача Коши для уравнения (2.21) с аналогичным (2.89) начальным условием

$$v|_{\tau=\tau_{k+1}+\varepsilon^{\lambda_2}} = \bar{v}(\varepsilon, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1/2} \eta(s, \varepsilon, \delta)|_{s=s_1(\varepsilon)}. \quad (2.106)$$

Из предыдущих соотношений (2.104), (2.105) вытекает справедливость для функции $\bar{v}(\varepsilon, \delta)$ из (2.106) асимптотических формул (2.90) (с заменой $\psi_0(\delta)$ на $\psi_k(\delta)$). А это значит, что при анализе задачи (2.21), (2.106) мы можем воспользоваться леммой 2.6. Указанная лемма гарантирует выполнение на отрезке $\tau_{k+1} + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \bar{\tau}_{k+1}$ для решения $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ рассматриваемой задачи представления (2.45) с остатком (2.46) (в котором τ_1 заменено на τ_{k+1}) и функцией $v_{1,1}(\tau, \delta)$, задающейся аналогичным (2.99) равенством (где k заменено на $k+1$).

Описанный индуктивный процесс позволяет продолжить интересующее нас решение $v_1(\tau, \varepsilon, \delta)$ на отрезок $\tau_n + \varepsilon^{\lambda_2} \leq \tau \leq \tau_{**}$. Распорядимся теперь имеющимся в запасе параметром δ , а именно, определим его из уравнения (2.42). В связи с этим для удобства последующего анализа, опираясь на известные

асимптотические свойства функций $v_j(\tau, \varepsilon, \delta)$, $j = 1, 2$, вблизи значения $\tau = \tau_{**}$ (см. (2.36), (2.45), (2.46)), преобразуем данное уравнение к виду

$$v_{1,1}(\tau_{**}, \delta) - v_{1,2}(\tau_{**}, \delta) = \sqrt{\varepsilon} R_2(\tau_{**}, \varepsilon, \delta) - \varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R_1(\tau_{**}, \varepsilon, \delta), \quad (2.107)$$

где

$$|R_j(\tau_{**}, \varepsilon, \delta)| + \left| \frac{\partial R_j}{\partial \delta}(\tau_{**}, \varepsilon, \delta) \right| \leq M, \quad j = 1, 2. \quad (2.108)$$

Изучим сначала уравнение

$$v_{1,1}(\tau_{**}, \delta) - v_{1,2}(\tau_{**}, \delta) = 0, \quad (2.109)$$

получающееся из (2.107) при $\varepsilon = 0$. Точнее говоря, убедимся, что оно является линейным по δ . С этой целью, привлекая формулы (2.28), (2.35), (2.99) (при $k = n$), перепишем его в виде

$$\frac{\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)}{u_n^2(\tau_{**})} \int_{\tau_n}^{+\infty} u_n^2(\sigma) d\sigma + \frac{\psi_{n-1}(\delta)(u'_n(\tau_n))^2}{u_n^2(\tau_{**})} + \text{const} = 0, \quad (2.110)$$

где здесь и далее const – некоторые величины, не зависящие от δ .

Из (2.110) следует, что проблема сводится к изучению зависимости от δ функций $\psi_k(\delta)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. В связи с этим обратим внимание, что в силу линейности по параметру δ функции (2.32) таким же будет и фигурирующий в (2.44) коэффициент $\omega_0(\delta)$. Точнее говоря, из (2.27), (2.28), (2.32), (2.33) вытекает равенство

$$\omega_0(\delta) = \frac{\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)}{(u'_n(\tau_1))^2} \int_{-\infty}^{\tau_1} u_n^2(\sigma) d\sigma + \text{const}. \quad (2.111)$$

А отсюда и из (2.105) заключаем, что

$$\psi_0(\delta) = \frac{\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)}{(u'_n(\tau_1))^2} \int_{-\infty}^{\tau_1} u_n^2(\sigma) d\sigma + \text{const}. \quad (2.112)$$

Пусть теперь $k \geq 1$. В этом случае в силу (2.99), (2.105) коэффициент $\omega_k(\delta)$ разложения (2.100) имеет структуру

$$\omega_k(\delta) = \frac{\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)}{(u'_n(\tau_{k+1}))^2} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u_n^2(\sigma) d\sigma + \frac{(u'_n(\tau_k))^2}{(u'_n(\tau_{k+1}))^2} \omega_{k-1}(\delta) + \text{const}.$$

А отсюда и из (2.105), (2.111), (2.112) несложно вывести, что

$$\psi_{n-1}(\delta) = \frac{\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0)}{(u'_n(\tau_n))^2} \int_{-\infty}^{\tau_n} u_n^2(\sigma) d\sigma + \text{const}. \quad (2.113)$$

Подставляя соотношение (2.113) в (2.110), убеждаемся, что интересующее нас уравнение (2.109) преобразуется к виду

$$\delta \Delta_1(0, 0, 0, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} u_n^2(\sigma) d\sigma + \text{const} = 0. \quad (2.114)$$

Добавим еще, что в силу неравенства $\Delta_1(0, 0, 0, 0) \neq 0$ (см. (1.3), (2.4)) это уравнение имеет единственное решение $\delta = \delta_*$.

Для завершения обоснования теоремы 1.1 будем считать компакт Ω , в котором меняется δ , выбранным таким образом, что значение $\delta = \delta_*$ является его внутренней точкой. Тогда из (2.108) очевидным образом следует, что уравнение (2.107) имеет в Ω единственное решение

$$\delta = \delta_*(\varepsilon), \quad \delta_*(\varepsilon) = \delta_* + O\left(\varepsilon^{1/2-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Подставляя его в (2.5), получаем требуемое значение $\mu = \mu_n(\varepsilon)$, при котором разрешима краевая задача (1.1), (1.9). Теорема 1.1 доказана.

В заключение рассмотрим ситуацию, когда нарушается хотя бы одно из условий (1.10). В связи с этим отметим, что в силу T -периодичности уравнения (1.1) по θ без ограничения общности можно считать, что в краевых условиях (1.9) величины θ_1, θ_2 принадлежат промежуткам $0 \leq \theta < T$ и $0 < \theta \leq T$ соответственно. Далее, предположим, например, что

$$\varphi_2(a) < \theta_1 < T, \quad \varphi_2(b) < \theta_2 \leq T. \quad (2.115)$$

Тогда при $n = 0$ и при всех достаточно малых по модулю значениях μ краевая задача (1.1), (1.9) не имеет решений.

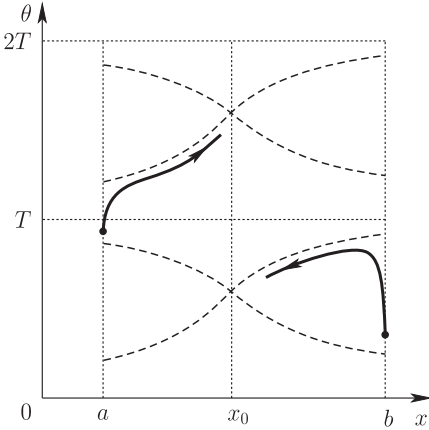


Рис. 9

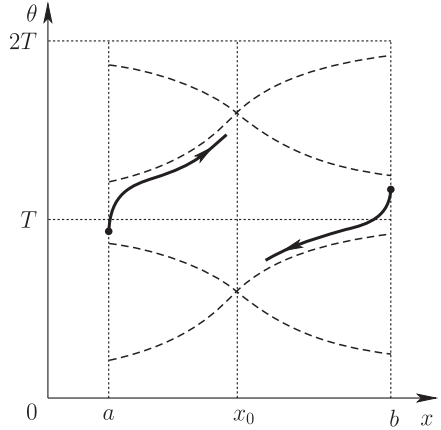


Рис. 10

Действительно, в этом случае поведение решений (2.1) уравнения (1.1) при увеличении и уменьшении x соответственно показано на рис. 9. Первое из них асимптотически быстро попадает в полуплоскость $\theta > T$ (происходит “падение” фазовой точки на соответствующую устойчивую кривую медленного движения) и остается там при последующем увеличении x . Второе же решение при всех x находится в полуплоскости $\theta < T$ (в силу условия 1.2 оно не может пересечь прямую $\theta = T$).

Из изложенного выше доказательства теоремы 1.1 следует, что при $n \geq 1$ и при условиях (2.115) ее аналог справедлив: существует единственное значение

$\mu = \mu_n(\varepsilon)$, $\mu_n(0) = 0$, при котором краевая задача (1.1), (1.9) разрешима, но теперь пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ отношения $\mu_n(\varepsilon)/\varepsilon$ является не μ_n , а μ_{n-1} . Меняется также и форма предельной кривой Γ_n (уменьшается на единицу ее обходность). Точнее говоря, в данном случае Γ_n состоит из $(n-1)$ -обходной траектории-утки

$$\{(x, \theta): a \leq x \leq x_0, \theta = \varphi_1(x) + T\} \cup \{(x, \theta): x = x_0, \theta_0 + T \leq \theta \leq \theta_0 + nT\} \\ \cup \{(x, \theta): x_0 \leq x \leq b, \theta = \varphi_1(x) + nT\},$$

вертикального отрезка $\{(x, \theta): x = a, \theta_1 \leq \theta \leq \varphi_1(a) + T\}$ и еще одного отрезка с концами в точках $(b, \theta_2 + nT)$, $(b, \varphi_1(b) + nT)$.

Вариант

$$0 \leq \theta_1 < \varphi_2(a), \quad 0 < \theta_2 < \varphi_2(b), \quad (2.116)$$

когда нарушается только второе условие из (1.10), идентичен разобранному выше. А именно, при $n = 0$ и при выполнении неравенств (2.116) краевая задача (1.1), (1.9) не имеет решений при всех достаточно малых по модулю значениях параметра μ . Если же $n \geq 1$, то аналог теоремы 1.1 остается в силе с соответствующими изменениями: в (1.13) предельное значение μ_n заменяется на μ_{n-1} и надлежащим образом модифицируется кривая Γ_n (как и выше, ее обходность уменьшается на единицу).

Предположим теперь, что

$$\varphi_2(a) < \theta_1 < T, \quad 0 < \theta_2 < \varphi_2(b). \quad (2.117)$$

Тогда не имеют решений при всех достаточно малых $|\mu|$ краевые задачи (1.1), (1.9) при $n = 0$ и $n = 1$. Случай $n = 0$ уже разбирался выше, а в случае $n = 1$ поведение решений (2.1) при увеличении и уменьшении x представлено на рис. 10. Первое из них асимптотически быстро оказывается в полуплоскости $\theta > T$ (происходит “падение” на ближайшую устойчивую кривую медленного движения) и уже не покидает ее. Второе же асимптотически быстро попадает в полуплоскость $\theta < T$ и остается в ней при дальнейшем уменьшении x .

Снова обращаясь к приведенному выше доказательству теоремы 1.1, заключаем, что при условиях (2.117) и при $n \geq 2$ ее аналог остается в силе. Но теперь в (1.13) предельное значение μ_n следует заменить на μ_{n-2} . Изменяется и форма кривой Γ_n . В данном случае она состоит из $(n-2)$ -обходной траектории-утки, соединяющей кривые медленного движения $\{(x, \theta): \theta = \varphi_1(x) + T, a \leq x \leq x_0\}$, $\{(x, \theta): \theta = \varphi_1(x) + (n-1)T, x_0 \leq x \leq b\}$, и двух вертикальных отрезков

$$\{(x, \theta): x = a, \theta_1 \leq \theta \leq \varphi_1(a) + T\}, \\ \{(x, \theta): x = b, \varphi_1(b) + (n-1)T \leq \theta \leq \theta_2 + nT\}.$$

§ 3. Другие типы решений

3.1. Описание результатов. В данном параграфе изучим поведение решений уравнения (1.1) при значениях параметра μ , имеющих порядок ε , но

отличных от $\mu_n(\varepsilon)$, $n \geq 0$. В связи с этим положим в (1.1)

$$\mu = \mu_*(\alpha),$$

$$\mu_*(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\varphi'_1(x_0) - \varphi'_2(x_0)) + \varphi'_1(x_0) + \varphi'_2(x_0) - 2f'_\varepsilon(x_0, \theta_0, 0, 0)}{2f'_\mu(x_0, \theta_0, 0, 0)}, \quad (3.1)$$

где $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$, и обозначим через $\theta(x, \varepsilon, \alpha)$ решение получившегося уравнения с начальным условием

$$\theta|_{x=a} = \theta_1, \quad 0 \leq \theta_1 < \varphi_2(a). \quad (3.2)$$

Пусть сначала $\alpha < 1$. Тогда, как показано в [14], кривая

$$\Gamma(\varepsilon, \alpha) = \{(x, \theta) : a \leq x \leq b, \theta = \theta(x, \varepsilon, \alpha)\} \quad (3.3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет своим пределом кривую

$$\Gamma = \{(x, \theta) : a \leq x \leq x_0, \theta = \varphi_1(x)\} \cup \{(x, \theta) : x_0 \leq x \leq b, \theta = \varphi_2(x)\} \cup \Sigma, \quad (3.4)$$

где Σ – вертикальный отрезок с концами в точках (a, θ_1) , $(a, \varphi_1(a))$. Подчеркнем, что эта кривая, вид которой показан на рис. 11, не является уткой, так как не содержит неустойчивых участков кривых медленного движения.

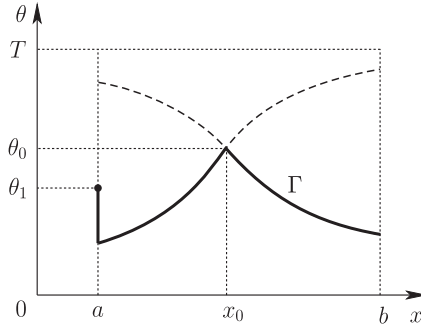


Рис. 11

Предположим теперь, что при некотором натуральном n выполняются неравенства

$$2n - 1 < \alpha < 2n + 1. \quad (3.5)$$

В этом случае справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *При условиях (3.5) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $\theta(x, \varepsilon, \alpha)$ задачи Коши (1.1), (3.1), (3.2) определено на отрезке $a \leq x \leq b$, а пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривой (3.3) служит кривая*

$$\Gamma = \{(x, \theta) : a \leq x \leq x_0, \theta = \varphi_1(x)\} \cup \{(x, \theta) : x = x_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + nT\} \cup \{(x, \theta) : x_0 \leq x \leq b, \theta = \varphi_2(x) + nT\} \cup \Sigma, \quad (3.6)$$

где Σ – тот же самый отрезок, что и в (3.4).

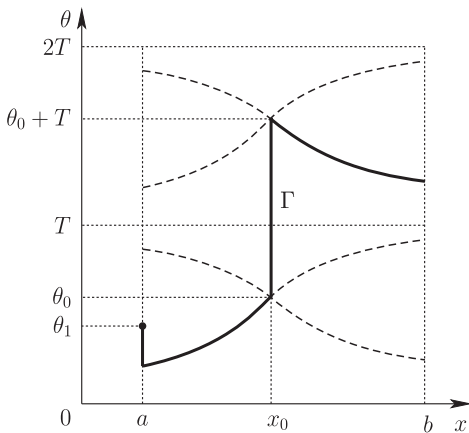


Рис. 12

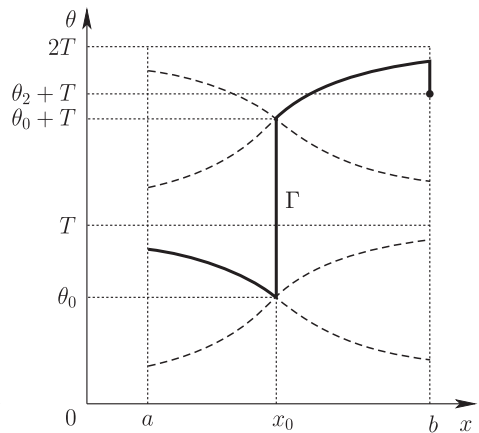


Рис. 13

Кривая (3.6) представляет собой n -обходный вариант кривой (3.4) и при $n = 1$ имеет вид, изображенный на рис. 12. Как и в случае $n = 0$, она не является траекторией-уткой.

В последующем нам понадобится аналог теоремы 3.1, касающийся задачи Коши для уравнения (1.1), (3.1) с начальным условием

$$\theta|_{x=b} = \theta_2 + nT, \quad \varphi_2(b) < \theta_2 \leq T. \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены неравенства (3.5). Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $\theta = \theta(x, \varepsilon, \alpha)$ задачи Коши (1.1), (3.1), (3.7) определено на отрезке $a \leq x \leq b$, а соответствующая ему кривая (3.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к кривой

$$\begin{aligned} \Gamma = & \{(x, \theta): x_0 \leq x \leq b, \theta = \varphi_1(x) + nT\} \\ & \cup \{(x, \theta): x = x_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + nT\} \\ & \cup \{(x, \theta): a \leq x \leq x_0, \theta = \varphi_2(x)\} \cup \Sigma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь Σ – отрезок, соединяющий точки $(b, \theta_2 + nT)$ и $(b, \varphi_1(b) + nT)$.

При $n = 1$ вид предельной кривой (3.8) представлен на рис. 13. В отличие от двух предыдущих случаев в ней отсутствуют устойчивые фрагменты кривых медленного движения. Тем самым, она также не является уткой.

3.2. Доказательства теорем 3.1 и 3.2. При обосновании теоремы 3.1 принципиальную роль играет выбор частного решения модельного уравнения (2.23). Как уже отмечалось выше, в статье [14] установлено существование у него при всех достаточно больших по модулю отрицательных τ единственного решения $v = v_-(\tau, \alpha)$ с асимптотикой (2.24). Именно это решение и будет интересовать нас в дальнейшем.

Как оказывается, функция $v_-(\tau, \alpha)$ может быть продолжена на всю числовую ось $\tau \in \mathbb{R}$ за исключением конечного числа особых точек полюсного типа.

Для того чтобы сделать это, фиксируем решение

$$u(\tau, \alpha) = |\tau|^{(\alpha-1)/2} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} - \int_{-\infty}^{\tau} \left[v_-(\sigma, \alpha) - \sigma + \frac{\alpha-1}{2\sigma} \right] d\sigma \right\} \quad (3.9)$$

линейного уравнения (2.25), определенное при всех достаточно больших по модулю отрицательных τ и обладающее в силу (2.24) свойством

$$u(\tau, \alpha) = |\tau|^{(\alpha-1)/2} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2} \right) \left[1 + O \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \right], \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (3.10)$$

Далее, продолжим решение (3.9) на всю ось $\tau \in \mathbb{R}$, сохранив за ним прежнее обозначение. Тогда и решение $v_-(\tau, \alpha)$ уравнения (2.23) продолжается на всю ось (за исключением нулей функции $u(\tau, \alpha)$) по закону

$$v_-(\tau, \alpha) = -\frac{1}{u(\tau, \alpha)} \frac{d}{d\tau} u(\tau, \alpha). \quad (3.11)$$

Для выявления дополнительных свойств функции (3.11) необходима некоторая информация о решении $u(\tau, \alpha)$. В связи с этим нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены неравенства (3.5). Тогда решение $u(\tau, \alpha)$ имеет на всей оси $\tau \in \mathbb{R}$ ровно n нулей $\tau_1(\alpha) < \tau_2(\alpha) < \dots < \tau_n(\alpha)$, а при $\tau \rightarrow +\infty$ допускает асимптотику (сохраняющуюся при дифференцировании по τ)

$$u(\tau, \alpha) = \frac{2^{-\alpha/2} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\alpha/2 + 1/2)} \tau^{-(\alpha+1)/2} \exp \left(\frac{\tau^2}{2} \right) \left[1 + O \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \right], \quad (3.12)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполняя в уравнении (2.25) замены

$$\tau = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \beta = -\frac{\alpha}{2}, \quad (3.13)$$

приведем его к каноническому виду

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \left(\beta + \frac{s^2}{4} \right) u = 0. \quad (3.14)$$

Ниже будут использоваться два специальных решения (см. [20]) $U(\beta, s)$ и $V(\beta, s)$ получившегося уравнения. Первое из них при $s \rightarrow +\infty$ допускает асимптотику

$$U(\beta, s) = s^{-\beta-1/2} \exp \left(-\frac{s^2}{4} \right) \left[1 - \frac{(\beta+1/2)(\beta+3/2)}{2s^2} + \frac{(\beta+1/2)(\beta+3/2)(\beta+5/2)(\beta+7/2)}{2 \cdot 4s^4} - \dots \right] \quad (3.15)$$

и этим требованием определяется однозначно. Второе же задается равенством

$$V(\beta, s) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) [U(\beta, s) \sin(\pi\beta) + U(\beta, -s)]. \quad (3.16)$$

При $s \rightarrow +\infty$ для него справедливо асимптотическое представление

$$V(\beta, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s^{\beta-1/2} \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + \frac{(\beta-1/2)(\beta-3/2)}{2s^2} + \frac{(\beta-1/2)(\beta-3/2)(\beta-5/2)(\beta-7/2)}{2 \cdot 4s^4} + \dots \right]. \quad (3.17)$$

Для выявления асимптотического поведения функции $U(\beta, s)$ при $s \rightarrow -\infty$ устремим s к $+\infty$ в равенстве (3.16) и воспользуемся соотношениями (3.15), (3.17). В результате убеждаемся, что

$$U(\beta, s) = -\sin(\pi\beta) |s|^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right] + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\beta+1/2)} |s|^{\beta-1/2} \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right], \quad s \rightarrow -\infty. \quad (3.18)$$

В случае $V(\beta, s)$ из равенства (см. [20])

$$V(\beta, -s) = V(\beta, s) \sin(\pi\beta) + \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cos^2(\pi\beta) U(\beta, s)$$

аналогичным образом выводим

$$V(\beta, s) = \sin(\pi\beta) \sqrt{\frac{2}{\pi}} |s|^{\beta-1/2} \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right] + \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cos^2(\pi\beta) |s|^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right], \quad s \rightarrow -\infty. \quad (3.19)$$

Напомним, что в силу (3.10), (3.13) нас интересует решение $u = u(\beta, s)$ уравнения (3.14) с заранее заданной асимптотикой

$$u(\beta, s) = 2^{\beta/2+1/4} |s|^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right], \quad s \rightarrow -\infty. \quad (3.20)$$

Привлекая формулы (3.18), (3.19), нетрудно увидеть, что оно выражается через $U(\beta, s)$, $V(\beta, s)$ посредством равенств

$$u(\beta, s) = 2^{\beta/2+1/4} \left[\frac{\pi}{\Gamma(\beta+1/2)} V(\beta, s) - U(\beta, s) \sin(\pi\beta) \right] = 2^{\beta/2+1/4} U(\beta, -s). \quad (3.21)$$

Согласно условиям (3.5) и заменам (3.13) параметр β меняется на интервале

$$-\frac{1}{2} - n < \beta < \frac{1}{2} - n. \quad (3.22)$$

Покажем, что при указанных β функция (3.21) имеет на всей оси $s \in \mathbb{R}$ ровно n нулей.

В первую очередь обратим внимание, что при изменении β новые нули у $u(\beta, s)$ могут появляться только из $+\infty$ (их бифуркация из $-\infty$ невозможна, так как в силу (3.20) при всех достаточно больших по модулю отрицательных s имеем $u(\beta, s) > 0$). Далее, опираясь на вытекающую из (3.21) формулу

$$u(\beta, s)|_{\beta=1/2-n} = 2^{-(n-1)}(-1)^{n-1} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) H_{n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.23)$$

убеждаемся, что при $\beta = 1/2 - n$ решение $u(\beta, s)$ допускает на всей оси ровно $n - 1$ нулей.

При

$$\beta = \frac{1}{2} - n - \nu, \quad 0 < \nu \ll 1, \quad (3.24)$$

происходит бифуркация очередного нуля функции $u(\beta, s)$ из $+\infty$. Действительно, из формул (3.15), (3.17), (3.21) следует, что

$$u(\beta, s) = 2^{\beta/2+1/4} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\beta+1/2)} s^{\beta-1/2} \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right] - \sin(\pi\beta) s^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right] \right\}, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (3.25)$$

Далее, подставим в (3.25) соотношение (3.24), учтем известное свойство

$$\Gamma(-(n-1)-\nu) \sim \frac{(-1)^n}{\nu(n-1)!}, \quad \nu \rightarrow 0,$$

и тот факт, что асимптотические представления (3.15), (3.17) допускают дифференцирование по s . В результате убеждаемся, что на полуоси $s \geq \bar{s}$, где $\bar{s} > 0$ – достаточно большая константа, уравнение $u(1/2 - n - \nu, s) = 0$ имеет при всех $0 < \nu \ll 1$ единственный корень $s = s_n(\nu)$: $s_n(\nu) \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +0$. В первом приближении этот корень совпадает со вторым положительным корнем уравнения $s^{2n-1} \exp(-s^2/2) = \sqrt{2\pi} \nu(n-1)!$.

Подведем итог. Из проделанного анализа следует, что в случае (3.24) общее количество нулей решения (3.21) равно n . Действительно, в силу (3.23) у него имеется $n - 1$ нулей, асимптотически близких к корням полинома $H_{n-1}(s/\sqrt{2})$, и еще один нуль, стремящийся к $+\infty$ при $\nu \rightarrow +0$.

При любом фиксированном значении параметра β из диапазона (3.22) новые нули у функции $u(\beta, s)$ не появляются и старые не исчезают. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к вытекающему из (3.25) асимптотическому представлению

$$u(\beta, s) = 2^{\beta/2+1/4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\beta+1/2)} s^{\beta-1/2} \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right], \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.26)$$

и учтем, что в нашем случае $1/\Gamma(\beta+1/2) \neq 0$. Поэтому при всех достаточно больших значениях s функция $u(\beta, s)$ знакопостоянна. А отсюда, в свою очередь, следует, что ни бифуркация рождения нулей из $+\infty$, ни их исчезновение в $+\infty$ при рассматриваемых значениях β невозможны.

Возвращаясь к исходному уравнению (3.25), заметим, что его решение $u(\tau, \alpha)$ задается равенством

$$u(\tau, \alpha) = u(\beta, s) \Big|_{\beta=-\alpha/2, s=\sqrt{2}\tau}. \quad (3.27)$$

Из проделанного выше анализа вытекает, что функция (3.27) имеет на всей оси $\tau \in \mathbb{R}$ ровно n нулей, а при $\tau \rightarrow +\infty$ в силу (3.13), (3.26) допускает требуемое асимптотическое представление (3.12). Лемма 3.1 доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 3.1. В связи с этим обратим внимание, что сначала решение $\theta(x, \varepsilon, \alpha)$ задачи (1.1), (3.1), (3.2) ведет себя так же, как и решение $\theta_1(x, \varepsilon, \mu)$ из (2.1). А именно, при увеличении x происходит асимптотически быстрое “падение” фазовой точки $(x, \theta(x, \varepsilon, \alpha))$ на устойчивую кривую медленного движения $\theta = \varphi_1(x)$ и последующее движение в ε -окрестности этой кривой вплоть до попадания в некоторую достаточно малую окрестность особой точки (x_0, θ_0) .

Вблизи точки (x_0, θ_0) , как и ранее, приведем уравнение (1.1) к нормальной форме (2.3) и учтем в ней равенство (3.1). В результате приходим к аналогичному (2.6) уравнению

$$\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma(\xi, \eta)(\eta^2 - \xi^2) + \varepsilon \Delta(\xi, \eta, \varepsilon, \alpha) \quad (3.28)$$

с остатком

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \eta, \varepsilon, \alpha) &= \frac{1}{\varepsilon} (\mu \Delta_1(\xi, \eta, \varepsilon, \mu) + \varepsilon \Delta_2(\xi, \eta, \varepsilon, \mu)) \Big|_{\mu=\mu_*(\alpha)\varepsilon}, \\ \Delta(0, 0, 0, \alpha) &\equiv \alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В уравнении (3.28) функции $\theta(x, \varepsilon, \alpha)$ отвечает аналогичное (2.9) решение

$$\eta = \mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \alpha), \quad (3.30)$$

определенное при $-q \leq \xi \leq -q_0$, где $q_0 > 0$ достаточно мало. Кроме того, согласно результатам из [19] равномерно по $\xi \in [-q, -q_0]$ и $\alpha \in [2n-1, 2n+1]$ имеем

$$\mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \alpha) = \xi + \varepsilon a_1(\xi, \alpha) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

где в силу (3.29)

$$\begin{aligned} a_1(\xi, \alpha) &= \frac{1 - \Delta(\xi, \xi, 0, \alpha)}{2\xi\gamma(\xi, \xi)}, \quad a_1(\xi, \alpha) = \frac{1 - \alpha}{2\xi} + \varkappa_0 + O(\xi), \quad \xi \rightarrow -0, \\ \varkappa_0 &= -\frac{1 - \alpha}{2} (\gamma'_\xi(0, 0) + \gamma'_\eta(0, 0)) - \frac{1}{2} (\Delta'_\xi(0, 0, 0, \alpha) + \Delta'_\eta(0, 0, 0, \alpha)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Соотношения (3.31), (3.32) свидетельствуют о том, что к решению (3.30) применим аналог леммы 2.1. В связи с этим фиксируем $\lambda_1 \in (1/3, 1/2)$. Из упомянутой леммы следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $-q \leq \xi \leq -\varepsilon^{\lambda_1}$, $2n-1 \leq \alpha \leq 2n+1$ справедливо аналогичное (2.14) асимптотическое равенство

$$\mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \alpha) = \xi + \varepsilon a_1(\xi, \alpha) + O(\varepsilon^{2-3\lambda_1}). \quad (3.33)$$

Последующий анализ связан с заменами $\eta = \sqrt{\varepsilon} v$, $\xi = \sqrt{\varepsilon} \tau$, приводящими уравнение (3.28) к аналогичному (2.21) виду

$$\frac{dv}{d\tau} = \gamma(\sqrt{\varepsilon} \tau, \sqrt{\varepsilon} v)(v^2 - \tau^2) + \Delta(\sqrt{\varepsilon} \tau, \sqrt{\varepsilon} v, \varepsilon, \alpha). \quad (3.34)$$

Обозначим через $v(\tau, \varepsilon, \alpha)$ решение этого уравнения с начальным условием

$$v|_{\tau=-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}} = \varepsilon^{-1/2} \mathcal{F}(-\varepsilon^{\lambda_1}, \varepsilon, \alpha) \quad (3.35)$$

и будем искать его асимптотику в аналогичном (2.30) виде

$$v = v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha) + \dots, \quad (3.36)$$

где, напомним, $v_-(\tau, \alpha)$ – выбранное выше решение уравнения (2.23). Что же касается функции $v_1(\tau, \alpha)$ из (3.36), то ее зададим аналогичным (2.33) равенством

$$v_1(\tau, \alpha) = \int_{-\infty}^{\tau} \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} 2v_-(\sigma', \alpha) d\sigma' \right] g(\sigma, \alpha) d\sigma, \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned} g(\tau, \alpha) = & (v_-^2(\tau, \alpha) - \tau^2)(\tau \gamma'_{\xi}(0, 0) + v_-(\tau, \alpha) \gamma'_{\eta}(0, 0)) + \tau \Delta'_{\xi}(0, 0, 0, \alpha) \\ & + v_-(\tau, \alpha) \Delta'_{\eta}(0, 0, 0, \alpha). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Опираясь на асимптотическое представление (2.24) и формулы (3.37), (3.38), нетрудно увидеть, что

$$v_1(\tau, \alpha) = \varkappa_0 + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

где $\varkappa_0$ – постоянная из (3.32). А отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\varepsilon^{-1/2} \mathcal{F}(-\varepsilon^{\lambda_1}, \varepsilon, \alpha) - (v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha))|_{\tau=-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}} = O(\varepsilon^{3/2-3\lambda_1}). \quad (3.39)$$

Получившееся равенство (3.39) гарантирует применимость к решению задачи Коши (3.34), (3.35) аналога леммы 2.2. Для того чтобы воспользоваться этой леммой, фиксируем произвольно значение $\tau_* \in (-\infty, \tau_1(\alpha))$, где, напомним, $\tau_1(\alpha)$ – первый нуль функции $u(\tau, \alpha)$. В результате убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\tau \in [-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \tau_*]$, $\alpha \in \Omega$, где $\Omega \subset (2n-1, 2n+1)$ – произвольный компакт, для решения $v = v(\tau, \varepsilon, \alpha)$ упомянутой задачи имеет место асимптотическое представление

$$\begin{aligned} v(\tau, \varepsilon, \alpha) = & v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha) + \varepsilon^{3/2-3\lambda_1} R(\tau, \varepsilon, \alpha), \\ |R| \leq & M \left(\frac{u(-\varepsilon^{\lambda_1-1/2}, \alpha)}{u(\tau, \alpha)} \right)^2 + \varepsilon^{3\lambda_1-1/2} M(|\tau| + 1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

(как и ранее, одной и той же буквой M будем обозначать различные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны).

Для дальнейшего анализа важен тот факт, что в силу леммы 3.1 и формулы (3.11) в точках $\tau_1(\alpha) < \tau_2(\alpha) < \dots < \tau_n(\alpha)$ функция $v_-(\tau, \alpha)$ удовлетворяет аналогичным (2.43) асимптотическим равенствам

$$v_-(\tau, \alpha) = \frac{1}{\tau_k(\alpha) - \tau} + O(\tau_k(\alpha) - \tau), \quad \tau \rightarrow \tau_k(\alpha), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.41)$$

Свойства (3.41) позволяют воспользоваться серией лемм 2.3–2.6 и продолжить функцию $v(\tau, \varepsilon, \alpha)$ за точку $\tau = \tau_n(\alpha)$. Как и при доказательстве теоремы 1.1, данная функция последовательно определяется на отрезках $[\tau_*, \tau_1(\alpha) - \varepsilon^{\lambda_2}]$, $[\tau_k(\alpha) + \varepsilon^{\lambda_2}, \tau_{k+1}(\alpha) - \varepsilon^{\lambda_2}]$, $k = 1, \dots, n-1$, $[\tau_n(\alpha) + \varepsilon^{\lambda_2}, \tau_{**}]$, где τ_{**} – константа из промежутка $(\tau_n(\alpha), +\infty)$, а постоянная λ_2 удовлетворяет требованиям (2.52). При этом переход от значения $\tau = \tau_k(\alpha) - \varepsilon^{\lambda_2}$ к $\tau = \tau_k(\alpha) + \varepsilon^{\lambda_2}$ сопровождается одним полным оборотом фазовой точки $(x, \theta(x, \varepsilon, \alpha))$ вокруг оси цилиндра (1.8).

Опуская подробный анализ, повторяющий практически дословно соответствующий фрагмент доказательства теоремы 1.1, приведем сразу итоговый результат. В данном случае при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\tau \in [\tau_n(\alpha) + \varepsilon^{\lambda_2}, \tau_{**}]$, $\alpha \in \Omega$, выполняется асимптотическое равенство

$$v(\tau, \varepsilon, \alpha) = v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha) + \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(\tau, \varepsilon, \alpha), \quad (3.42)$$

$$|R| \leq \frac{M}{(\tau - \tau_n(\alpha))^2}.$$

Здесь, как и в (3.40), $v_-(\tau, \alpha)$ – функция (3.11), а $v_1(\tau, \alpha)$ – некоторое частное решение уравнения

$$\frac{dv}{d\tau} = 2v_-(\tau, \alpha)v + g(\tau, \alpha), \quad (3.43)$$

где $g(\tau, \alpha)$ – функция (3.38). Это решение записывается в виде

$$v_1(\tau, \alpha) = \frac{1}{u^2(\tau, \alpha)} \int_{\tau_{**}}^{\tau} u^2(\sigma, \alpha) g(\sigma, \alpha) d\sigma + \frac{\tilde{v}(\alpha)}{u^2(\tau, \alpha)}, \quad (3.44)$$

где $\tilde{v}(\alpha)$ – некоторый известный из предыдущих построений коэффициент, явный вид которого несуществен (важно лишь, что он непрерывен по α).

При $\tau_{**} \leq \tau \leq \varepsilon^{\lambda_1-1/2}$, где, напомним, $\lambda_1 \in (1/3, 1/2)$, первый раз возникают новые моменты по сравнению с доказательством теоремы 1.1. В данном случае решения $v_{\pm}(\tau, \alpha)$ уравнения (2.23) не являются сопряженными. Поэтому для $v_-(\tau, \alpha)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ равенство вида (2.24) не выполняется. Вместо него в силу (3.11), (3.12) имеем

$$v_-(\tau, \alpha) = -\tau + \frac{\alpha + 1}{2\tau} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (3.45)$$

Далее, объединяя соотношения (3.12), (3.45) и учитывая их в формулах (3.38), (3.44), приходим к выводу, что для решения (3.44) уравнения (3.43) справедливо асимптотическое равенство

$$v_1(\tau, \alpha) = \varkappa_0 + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (3.46)$$

где

$$\varkappa_0 = -\frac{1+\alpha}{2}(\gamma'_\xi(0,0) - \gamma'_\eta(0,0)) + \frac{1}{2}(\Delta'_\xi(0,0,0,\alpha) - \Delta'_\eta(0,0,0,\alpha)). \quad (3.47)$$

Полученная информация (3.45)–(3.47) позволяет установить следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. *Для решения (3.42) на отрезке $\tau_{**} \leq \tau \leq \varepsilon^{\lambda_1-1/2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое представление*

$$v(\tau, \varepsilon, \alpha) = v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha) + \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(\tau, \varepsilon, \alpha), \quad (3.48)$$

где остаток R допускает оценку

$$|R(\tau, \varepsilon, \alpha)| \leq \frac{M}{u^2(\tau, \alpha)} + \frac{\varepsilon^{\lambda_2}}{\ln^2(1/\varepsilon)} M(|\tau| + 1). \quad (3.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (3.34) равенство

$$v = v_-(\tau, \alpha) + \sqrt{\varepsilon} v_1(\tau, \alpha) + z,$$

для отыскания z приходим к аналогичному (2.37) уравнению

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, \varepsilon, \alpha)z + \Phi(z, \tau, \varepsilon, \alpha) + \varepsilon\Psi(\tau, \varepsilon, \alpha), \quad (3.50)$$

где функции h , Φ , Ψ обладают аналогичными (2.38) свойствами

$$\begin{aligned} h(\tau, \varepsilon, \alpha) &= 2v_-(\tau, \alpha) + O(\sqrt{\varepsilon}(\tau^2 + 1)), \\ \Phi(0, \tau, \varepsilon, \alpha) &\equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, \tau, \varepsilon, \alpha) \equiv 0, \\ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, \tau, \varepsilon, \alpha) \right| &\leq M|z| \quad \text{при} \quad |z| \leq 1, \\ |\Psi(\tau, \varepsilon, \alpha)| &\leq M(|\tau| + 1)^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

равномерными по $\tau \in [\tau_{**}, \varepsilon^{\lambda_1-1/2}]$, $\alpha \in \Omega$. Далее, как обычно, дополним уравнение (3.50) начальным условием

$$z|_{\tau=\tau_{**}} = \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(\tau_{**}, \varepsilon, \alpha),$$

где R – функция из (3.42). В итоге приходим к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\tau, \varepsilon, \alpha) &= \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} R(\tau_{**}, \varepsilon, \alpha) \exp \left[\int_{\tau_{**}}^{\tau} h(\sigma, \varepsilon, \alpha) d\sigma \right] \\ &+ \int_{\tau_{**}}^{\tau} \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] [\Phi(z, \sigma, \varepsilon, \alpha) + \varepsilon\Psi(\sigma, \varepsilon, \alpha)] d\sigma. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Анализ уравнения (3.52) базируется на вытекающих из (3.42), (3.45)–(3.47), (3.51) оценках

$$\int_{\tau_{**}}^{\tau} \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] (|\sigma| + 1)^k d\sigma \leq M(|\tau| + 1)^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$|R(\tau_{**}, \varepsilon, \alpha)| \leq M, \quad \exp \left[\int_{\sigma}^{\tau} h(\sigma', \varepsilon, \delta) d\sigma' \right] \leq M \left(\frac{u(\sigma, \alpha)}{u(\tau, \alpha)} \right)^2, \quad \sigma \leq \tau.$$

Перечисленные факты приводят к выводу, что оператор, порожденный правой частью уравнения (3.52), переводит в себя некоторое множество K из пространства $C([\tau_{**}, \varepsilon^{\lambda_1 - 1/2}])$ вида

$$K = \left\{ z(\tau) : |z(\tau)| \leq \frac{M}{u^2(\tau, \alpha)} \varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon M(|\tau| + 1) \right\}$$

и является в нем сжимающим (с константой сжатия порядка $\varepsilon^{1-\lambda_2} \ln^2(1/\varepsilon)$). Тем самым, упомянутое уравнение имеет единственное решение $z(\tau, \varepsilon, \alpha) \in K$. Лемма 3.2 доказана.

Для последующего продолжения решения $\theta(x, \varepsilon, \alpha)$ по x обратимся к уравнению (3.28), дополним его начальным условием

$$\eta|_{\xi=\varepsilon^{\lambda_1}} = \sqrt{\varepsilon} v(\tau, \varepsilon, \alpha)|_{\tau=\varepsilon^{\lambda_1 - 1/2}} \quad (3.53)$$

и обозначим через $\eta = \mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \alpha)$ решение получившейся задачи Коши. Заметим далее, что, во-первых, функция $\eta = -\xi + \varepsilon a_1(\xi, \alpha)$, где

$$a_1(\xi, \alpha) = \frac{1 + \Delta(\xi, -\xi, 0, \alpha)}{2\xi\gamma(\xi, -\xi)}, \quad (3.54)$$

удовлетворяет уравнению (3.28) с точностью до $O(\varepsilon^2/\xi^2)$ по невязке; во-вторых, в силу (3.45)–(3.49), (3.54) имеем

$$\sqrt{\varepsilon} v(\tau, \varepsilon, \alpha)|_{\tau=\varepsilon^{\lambda_1 - 1/2}} - (-\xi + \varepsilon a_1(\xi, \alpha))|_{\xi=\varepsilon^{\lambda_1}} = O(\varepsilon^{2-3\lambda_1}).$$

А отсюда, рассуждая как и при доказательстве леммы 2.1, несложно вывести, что для решения задачи Коши (3.28), (3.53) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по (ξ, α) : $\varepsilon^{\lambda_1} \leq \xi \leq q$, $\alpha \in \Omega$, справедливо асимптотическое представление

$$\mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \alpha) = -\xi + \varepsilon a_1(\xi, \alpha) + O(\varepsilon^{2-3\lambda_1}). \quad (3.55)$$

Равенство (3.55) означает, что при $\xi = q$ мы попадаем в асимптотически малую окрестность устойчивой кривой медленного движения $\eta = -\xi$. После перехода от (ξ, η) к исходным координатам (x, θ) точка $(q, -q)$ перейдет в точку $(x_*, \varphi_2(x_*) + nT)$, где значение $x_* > x_0$ близко к x_0 , а кривая $\eta = -\xi$ – в кривую $\theta = \varphi_2(x) + nT$ (напомним, что при прохождении x через особую точку $x = x_0$ было совершено n полных оборотов вокруг оси цилиндра (1.8)). Дальнейшее же движение фазовой точки $(x, \theta(x, \varepsilon, \alpha))$ в соответствии с результатами из [19]

происходит в асимптотически малой окрестности устойчивой “медленной” кривой $\{(x, \theta) : x_* \leq x \leq b, \theta = \varphi_2(x) + nT\}$ вплоть до конечной точки $x = b$.

Суммируя проделанный асимптотический анализ, приходим к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривая (3.3) имеет своим пределом кривую (3.6). Теорема 3.1 доказана.

Следует отметить, что теорема 3.2 не нуждается в отдельном обосновании, так как сводится к теореме 3.1 после замен $x \rightarrow -x$, $\theta \rightarrow -\theta$. В этом случае все неустойчивые многообразия медленного движения становятся устойчивыми и наоборот. Что же касается функции (3.1), то она остается прежней. Связано это с тем, что величины $\varphi'_1(x_0)$, $\varphi'_2(x_0)$ являются корнями полинома из (1.5), который при указанных заменах не меняется.

В заключение добавим, что в случаях, когда в (3.2) и (3.7) выполняются соответственно неравенства $\varphi_2(a) < \theta_1 < T$ и $0 < \theta_2 < \varphi_2(b)$, аналогично теорем 3.1, 3.2 сохраняются. Но при этом уменьшается на единицу обходность соответствующих кривых (3.6), (3.8) и меняются входящие в них вертикальные отрезки Σ . В первом случае упомянутый отрезок заменяется на $\Sigma = \{(x, \theta) : x = a, \theta_1 \leq \theta \leq \varphi_1(a) + T\}$, а во втором – на отрезок $\Sigma = \{(x, \theta) : x = b, \varphi_1(b) + (n-1)T \leq \theta \leq \theta_2 + nT\}$.

§ 4. Сингулярно возмущенные спектральные задачи

4.1. Уравнение Шредингера. Как оказывается, установленные нами теоремы 1.1, 3.1, 3.2 могут быть применены при асимптотическом анализе спектра краевых задач типа Штурма–Лиувилля для сингулярно возмущенного линейного уравнения Шредингера. Соответствующий результат приводится ниже.

На конечном отрезке $a \leq x \leq b$ рассмотрим сингулярно возмущенную спектральную задачу

$$-\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x, \varepsilon)u = \mu u, \quad (4.1)$$

$$u|_{x=a} \cos \theta_1 - \varepsilon \frac{du}{dx} \Big|_{x=a} \sin \theta_1 = 0, \quad u|_{x=b} \cos \theta_2 - \varepsilon \frac{du}{dx} \Big|_{x=b} \sin \theta_2 = 0.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $q(x, \varepsilon) \in C^\infty([a, b] \times [0, \varepsilon_0])$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, μ – спектральный параметр, а величины θ_1, θ_2 удовлетворяют требованиям $0 \leq \theta_1 < \pi$, $0 < \theta_2 \leq \pi$.

Основное ограничение, при котором будет изучаться задача (4.1), связано с потенциалом $q_0(x) = q(x, 0)$.

УСЛОВИЕ 4.1. *Найдутся такие точки $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ из интервала (a, b) , что*

$$q_0(x_k) = q'_0(x_k) = 0, \quad q''_0(x_k) > 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad (4.2)$$

$$q_0(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Соотношения (4.2) означают, что потенциал $q(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет n нулевых потенциальных ям, а в остальных точках отрезка $a \leq x \leq b$ положителен.

Для формулировки очередного ограничения введем в рассмотрение числа

$$\mu_{k,i} = q_1(x_k) + (2i+1) \sqrt{\frac{1}{2} q_0''(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (4.3)$$

где $q_1(x) = \partial q(x, \varepsilon) / \partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$.

УСЛОВИЕ 4.2. Предполагаем, что все величины (4.3) попарно различны.

Как известно [21], собственные значения краевой задачи (4.1) образуют монотонно возрастающую последовательность

$$\mu_0(\varepsilon) < \mu_1(\varepsilon) < \dots < \mu_j(\varepsilon) < \dots, \quad (4.4)$$

стремящуюся к $+\infty$ при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, собственная функция $u_j(x, \varepsilon)$, отвечающая j -му собственному значению, имеет на интервале (a, b) ровно j нулей. Далее, обозначим через μ_j , $j \geq 0$, последовательность чисел (4.3), расположенных в порядке возрастания. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2, а постоянные θ_1 , θ_2 из (4.1) таковы, что

$$0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(a)}, \quad \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(b)} < \theta_2 \leq \pi. \quad (4.5)$$

Тогда при любом фиксированном $j \geq 0$ для j -го собственного значения (4.4) имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_j(\varepsilon)}{\varepsilon} = \mu_j. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем в уравнении из (4.1) к полярным координатам (ρ, θ) , т. е. выполним стандартную замену переменных (см. [21])

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = \rho \cos \theta, \quad u = \rho \sin \theta. \quad (4.7)$$

В результате уравнение для θ примет аналогичный (1.1) вид

$$\varepsilon \frac{d\theta}{dx} = \cos^2 \theta - q(x, \varepsilon) \sin^2 \theta + \mu \sin^2 \theta. \quad (4.8)$$

Остановимся на некоторых необходимых для дальнейшего свойствах уравнения (4.8), вытекающих из условия 4.1. Во-первых, при $\varepsilon = \mu = 0$ оно имеет в прямоугольнике $\Pi_0 = \{(x, \theta): a \leq x \leq b, 0 < \theta < \pi\}$ две кривые $\theta = f_k(x)$, $k = 1, 2$, медленного движения класса $C^\infty([a, b])$, задающиеся формулами

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} - (-1)^j \arctg \sqrt{q_0(x)}, \quad f_2(x) = \frac{\pi}{2} - (-1)^{j+1} \arctg \sqrt{q_0(x)} \quad (4.9)$$

при $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n$, где $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$.

При $n = 2$ взаимное расположение этих кривых показано на рис. 14 (сплошной линией изображены устойчивые участки, а штриховой – неустойчивые). Во-вторых, в точках $(x_k, \pi/2)$, $k = 1, \dots, n$, кривые (4.9) пересекаются общим образом, причем в окрестности каждой точки пересечения выполняются аналогии условий 1.1–1.3. В-третьих, введенные выше числа (4.3) совпадают с величинами (1.11), вычисленными при $n = i$ для каждой особой точки $x = x_k$.

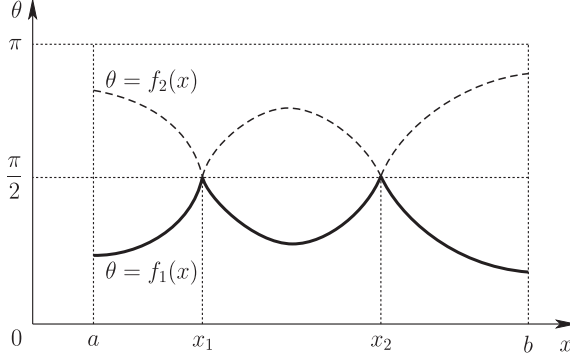


Рис. 14

Фиксируем произвольно целое $j \geq 0$ и рассмотрим j -е собственное значение (4.4). В силу результатов из [21] и равенств (4.7) при $\mu = \mu_j(\varepsilon)$ является разрешимой краевая задача для уравнения (4.8) с граничными условиями

$$\theta|_{x=a} = \theta_1, \quad \theta|_{x=b} = \theta_2 + \pi j, \quad (4.10)$$

где величины θ_1, θ_2 заимствованы из (4.1). Поэтому проблема обоснования предельного соотношения (4.6) сводится к асимптотическому анализу указанной краевой задачи.

Последующий план действий таков. Рассмотрим целые k_0, i_0 , при которых

$$\mu_j = \mu_{k_0, i_0} \quad (4.11)$$

(единственность такой пары номеров гарантирует условие 4.2). Затем положим в уравнении (4.8)

$$\mu = \varepsilon \mu_{k_0, i_0} + \varepsilon^{3/2} \delta, \quad (4.12)$$

где параметр δ пробегает произвольно фиксированный компакт Ω , и обозначим через $\theta = \theta_r(x, \varepsilon, \delta)$, $r = 1, 2$, решения получившегося уравнения с начальными условиями

$$\theta_1(x, \varepsilon, \delta)|_{x=a} = \theta_1, \quad \theta_2(x, \varepsilon, \delta)|_{x=b} = \theta_2 + \pi j.$$

Что же касается параметра δ из (4.12), то за счет его выбора будет произведено “сшивание” этих решений в окрестности точки $x = x_{k_0}$.

Обратимся сначала к решению $\theta_1(x, \varepsilon, \delta)$. Из первого условия (4.5) и характера расположения кривых медленного движения (4.9) (см. рис. 14) заключаем,

что при увеличении x происходит асимптотически быстрое “падение” фазовой точки $(x, \theta_1(x, \varepsilon, \delta))$ на устойчивую кривую медленного движения

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x)}, \quad a \leq x < x_1, \quad (4.13)$$

и последующее движение в ее окрестности вплоть до точки, асимптотически близкой к $(x_1, \pi/2)$.

При каждом k : $1 \leq k \leq n$, $k \neq k_0$, обозначим через j_k количество чисел (4.3), меньших (4.11). Тогда $\mu_{k,i} < \mu_{k_0,i_0}$ при $i = 0, 1, \dots, j_k - 1$ и $\mu_{k,j_k} > \mu_{k_0,i_0}$. В частности, при $k = 1$ имеем

$$\mu_{1,j_1-1} < \mu_{k_0,i_0} < \mu_{1,j_1}. \quad (4.14)$$

Заметим, далее, что неравенства (4.14) эквивалентны соотношениям вида (3.1), (3.5) (при замене x_0 на x_1 , n на j_1). Следовательно, при условии (4.12) в окрестности точки $(x_1, \pi/2)$ мы попадаем в область действия теоремы 3.1.

Из указанной теоремы вытекает, что вблизи $x = x_1$ происходит “срыв” решения $\theta_1(x, \varepsilon, \delta)$ с многообразия (4.13). Далее следуют асимптотически быстрое движение в асимптотически малой окрестности вертикального отрезка $\{(x, \theta): x = x_1, \pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 + \pi j_1\}$ и выход на очередную устойчивую кривую медленного движения

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi j_1, \quad x_1 < x < x_2.$$

Дальнейшие рассуждения базируются на методе математической индукции. Предположим, что при некотором k , $k \leq k_0 - 1$, двигаясь в асимптотически малой окрестности кривой

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi \sum_{s=1}^{k-1} j_s, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad (4.15)$$

фазовая точка $(x, \theta_1(x, \varepsilon, \delta))$ попадает в асимптотически малую окрестность очередной особой точки

$$\left(x_k, \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{s=1}^{k-1} j_s \right).$$

А так как в силу определения номера j_k выполняются аналогичные (4.14) неравенства

$$\mu_{k,j_k-1} < \mu_{k_0,i_0} < \mu_{k,j_k},$$

то и здесь работает теорема 3.1. Согласно этой теореме при $x = x_k$ происходит “срыв” с кривой (4.15), а затем следуют асимптотически быстрое движение вдоль отрезка

$$\left\{ (x, \theta): x = x_k, \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{s=1}^{k-1} j_s \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{s=1}^k j_s \right\}$$

и выход на устойчивую кривую медленного движения

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi \sum_{s=1}^k j_s, \quad x_k < x < x_{k+1}.$$

Из описанного индуктивного процесса следует, что кривая $(x, \theta_1(x, \varepsilon, \delta))$ может быть продолжена в любую сколь угодно малую фиксированную окрестность точки

$$\left(x_{k_0}, \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{s=1}^{k_0-1} j_s \right).$$

В случае решения $\theta_2(x, \varepsilon, \delta)$ ситуация симметричная, но вместо теоремы 3.1 работает теорема 3.2. Действительно, в силу второго условия из (4.5) при уменьшении x фазовая точка $(x, \theta_2(x, \varepsilon, \delta))$ “падает” на кривую

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi j, \quad x_n < x \leq b,$$

и, двигаясь в асимптотически малой ее окрестности, оказывается в окрестности особой точки $(x_n, \pi/2 + \pi j)$. Затем согласно теореме 3.2 идет участок быстрого движения вдоль отрезка

$$\left\{ (x, \theta) : x = x_n, \frac{\pi}{2} + \pi j - \pi j_n \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \pi j \right\},$$

а дальнейшее медленное движение продолжается уже в асимптотически малой окрестности кривой

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi j - \pi j_n, \quad x_{n-1} < x < x_n.$$

Как и в предыдущем случае, опираясь на метод математической индукции, нетрудно показать, что в итоге кривая $(x, \theta_2(x, \varepsilon, \delta))$ оказывается продолженной в любую фиксированную достаточно малую окрестность точки

$$\left(x_{k_0}, \frac{\pi}{2} + \pi j - \pi \sum_{s=0}^{n-k_0-1} j_{n-s} \right).$$

Из проделанных построений следует, что проблема разрешимости краевой задачи (4.8), (4.10) сводится к анализу краевой задачи для уравнения (4.8), (4.12) с краевыми условиями

$$\theta|_{x=x_{k_0}-\sigma_0} = \theta_1(x_{k_0} - \sigma_0, \varepsilon, \delta), \quad \theta|_{x=x_{k_0}+\sigma_0} = \theta_2(x_{k_0} + \sigma_0, \varepsilon, \delta). \quad (4.16)$$

Здесь постоянная $\sigma_0 > 0$ фиксирована и достаточно мала, а для функций $\theta_1(x_{k_0} - \sigma_0, \varepsilon, \delta)$ и $\theta_2(x_{k_0} + \sigma_0, \varepsilon, \delta)$ в силу проделанных построений и результатов из [19] при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы равномерные по $\delta \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \theta_1(x_{k_0} - \sigma_0, \varepsilon, \delta) &= \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x_{k_0} - \sigma_0)} + \pi \sum_{s=1}^{k_0-1} j_s + O(\varepsilon), \\ \theta_2(x_{k_0} + \sigma_0, \varepsilon, \delta) &= \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x_{k_0} + \sigma_0)} + \pi j - \pi \sum_{s=0}^{n-k_0-1} j_{n-s} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.17)$$

сохраняющиеся при дифференцировании по δ . Далее, учитывая π -периодичность уравнения (4.8) по θ и равенство

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k_0}}^n j_s = j - i_0,$$

проведем факторизацию краевых условий (4.16) по модулю π . В результате они запишутся в виде

$$\theta|_{x=x_{k_0}-\sigma_0} = \theta_1(\varepsilon, \delta), \quad \theta|_{x=x_{k_0}+\sigma_0} = \theta_2(\varepsilon, \delta) + \pi i_0, \quad (4.18)$$

где в силу (4.17) имеем

$$\begin{aligned} \theta_1(\varepsilon, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_1(x_{k_0} - \sigma_0, \varepsilon, \delta) - \pi \sum_{s=1}^{k_0-1} j_s \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x_{k_0} - \sigma_0)} + O(\varepsilon), \\ \theta_2(\varepsilon, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_2(x_{k_0} + \sigma_0, \varepsilon, \delta) - \pi j + \pi \sum_{s=0}^{n-k_0-1} j_{n-s} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x_{k_0} + \sigma_0)} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.19)$$

На заключительном этапе применим к краевой задаче (4.8), (4.12), (4.18) теорему 1.1. Подчеркнем, что все условия этой теоремы здесь выполняются и, в частности, в силу (4.19) справедливы аналоги неравенств (1.10). Таким образом, существует единственное значение $\delta = \delta(\varepsilon) \sim 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$, при котором упомянутая краевая задача разрешима. Теорема 4.1 доказана.

Обратим внимание на геометрический смысл проделанных построений. В связи с этим обозначим через $\theta_j(x, \varepsilon)$ решение краевой задачи (4.8), (4.10). Из приведенного выше обоснования теоремы 4.1 следует, что кривая $\{(x, \theta) : a \leq x \leq b, \theta = \theta_j(x, \varepsilon)\}$ содержит в качестве одного из своих фрагментов траекторию-утку. Точнее говоря, уткой является участок этой кривой, отвечающий значениям $x \in [x_{k_0} - \sigma_0, x_{k_0} + \sigma_0]$, где $\sigma_0 > 0$ достаточно мало. Указанная траектория-утка соединяет кривые медленного движения

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi \sum_{s=1}^{k_0-1} j_s, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x)} + \pi j - \pi \sum_{s=0}^{n-k_0-1} j_{n-s}$$

и имеет обходность i_0 , где, напомним, k_0, i_0 – номера из (4.11). Что же касается остальных особых точек $x = x_k$, $k = 1, \dots, n$, $k \neq k_0$, то в их окрестностях уток нет. Типовой график функции $\theta = \theta_j(x, \varepsilon)$ представлен на рис. 15. Точнее говоря, на нем изображен случай $j = 2$, $n = 3$, $k_0 = 3$, $i_0 = 1$, $\mu_{1,0} < \mu_{3,1} < \mu_{1,1}$, $\mu_{3,1} < \mu_{2,0}$.

Отдельно остановимся на вопросе о том, что происходит при нарушении хотя бы одного из условий (4.5). Предположим, например, что

$$\frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(a)} < \theta_1 < \pi, \quad \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(b)} < \theta_2 \leq \pi. \quad (4.20)$$

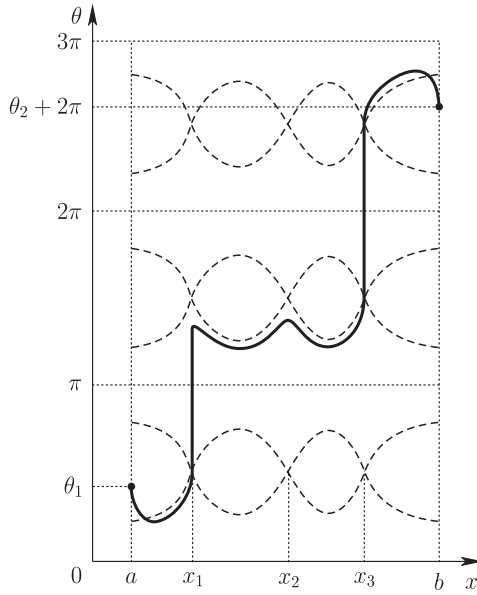


Рис. 15

Тогда мы находимся в рамках применимости аналогов теорем 1.1, 3.1, относящихся к варианту (2.115). Из упомянутых результатов и из построений, сделанных при доказательстве теоремы 4.1, вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *При выполнении условий 4.1, 4.2 и неравенств (4.20) справедливы аналогичные (4.6) предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_j(\varepsilon)}{\varepsilon} = \mu_{j-1}, \quad j \geq 1. \quad (4.21)$$

Вопрос об асимптотическом поведении собственного значения $\mu_0(\varepsilon)$ не охватывается равенствами (4.21) и представляет собой отдельную проблему, связанную с анализом краевой задачи (4.8), (4.10) при $j = 0$. Будем считать в ней параметр μ отрицательной величиной порядка единицы. В этом случае при $\varepsilon = 0$ уравнение (4.8) имеет неустойчивое многообразие медленного движения

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(x) - \mu}, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.22)$$

проходящее при

$$\mu = \bar{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} q_0(a) - \text{ctg}^2 \theta_1 < 0 \quad (4.23)$$

через точку $(x, \theta) = (a, \theta_1)$. Далее, решение $\theta = \theta(x, \varepsilon, \mu)$ уравнения (4.8) с начальным условием $\theta|_{x=b} = \theta_2$ в силу второго условия (4.20) при уменьшении x “падает” на кривую медленного движения (4.22) и остается асимптотически близким к ней при $a \leq x < b$ (см. рис. 16). Ясно также, что за счет надлежащего “шевеления” параметра μ в окрестности значения (4.23) можно добиться

выполнения равенства $\theta(a, \varepsilon, \mu) = \theta_1$. А это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0(\varepsilon) = \bar{\mu}. \quad (4.24)$$

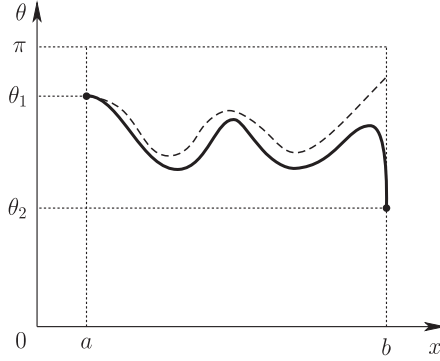


Рис. 16

Оставшиеся два случая

$$0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(a)}, \quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(b)} \quad (4.25)$$

и

$$\frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{q_0(a)} < \theta_1 < \pi, \quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{q_0(b)} \quad (4.26)$$

аналогичны разобранному выше. Поэтому приведем сразу итоговые результаты, состоящие в следующем. При условиях (4.25) соотношения (4.21) сохраняются, а вместо (4.24) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0(\varepsilon) = \bar{\bar{\mu}}, \quad \bar{\bar{\mu}} \stackrel{\text{def}}{=} q_0(b) - \text{ctg}^2 \theta_2 < 0. \quad (4.27)$$

В случае же (4.26) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_j(\varepsilon)}{\varepsilon} &= \mu_{j-2}, \quad j \geq 2; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0(\varepsilon) &= \min(\bar{\mu}, \bar{\bar{\mu}}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_1(\varepsilon) = \max(\bar{\mu}, \bar{\bar{\mu}}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $\bar{\mu}$, $\bar{\bar{\mu}}$ – константы из (4.23), (4.27).

4.2. Заключение. Интересно отметить, что полученные выше результаты, относящиеся к спектральной задаче (4.1), могут быть использованы и при анализе краевой задачи вида

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + (q(x) + \lambda)y &= 0, \\ \left(\cos \theta_1 - \frac{p(a)}{2} \sin \theta_1 \right) y|_{x=a} - \varepsilon \sin \theta_1 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} &= 0, \\ \left(\cos \theta_2 - \frac{p(b)}{2} \sin \theta_2 \right) y|_{x=b} - \varepsilon \sin \theta_2 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=b} &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, $0 < \theta_2 \leq \pi$, $p(x)$, $q(x) \in C^\infty([a, b])$ и, что самое главное, коэффициент $p(x)$ имеет на интервале (a, b) конечное число простых нулей $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ отличен от нуля. Упомянутые нули принято называть точками поворота.

Выполним в (4.29) замены

$$y = u \exp \left[-\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^x p(s) ds \right], \quad \mu = \varepsilon \lambda.$$

В результате получается спектральная задача (4.1) с потенциалом

$$q(x, \varepsilon) = \frac{p^2(x)}{4} - \varepsilon \left(q(x) - \frac{p'(x)}{2} \right), \quad (4.30)$$

удовлетворяющим условию 4.1. Заметим далее, что в случае (4.30) числа (4.3) имеют вид

$$\mu_{k,i} = i|p'(x_k)| + \frac{1}{2}(p'(x_k) + |p'(x_k)|) - q(x_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad i \geq 0. \quad (4.31)$$

Как и выше, будем считать, что все они попарно различны.

Обозначим через

$$\lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) < \dots < \lambda_j(\varepsilon) < \dots \quad (4.32)$$

собственные значения спектральной задачи (4.29), а через λ_j , $j \geq 0$, — занумерованные в порядке возрастания величины (4.31). Из установленной выше теоремы 4.1 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что постоянные θ_1, θ_2 из (4.29) удовлетворяют аналогичным (4.5) ограничениям*

$$0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{|p(a)|}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{|p(b)|}{2}\right) < \theta_2 \leq \pi. \quad (4.33)$$

Тогда при любом фиксированном $j \geq 0$ для j -го собственного значения (4.32) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j. \quad (4.34)$$

В случае нарушения хотя бы одного из условий (4.33) мы также можем воспользоваться соответствующими результатами из п. 4.1. Пусть, например, выполнены аналогичные (4.20) неравенства

$$\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{|p(a)|}{2}\right) < \theta_1 < \pi, \quad \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{|p(b)|}{2}\right) < \theta_2 \leq \pi.$$

Тогда из теоремы 4.2 и соотношений (4.23), (4.24) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_{j-1}, \quad j \geq 1; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0(\varepsilon) = -\infty. \quad (4.35)$$

Ясно также, что равенства (4.35) сохраняются и при аналогичных (4.25) условиях

$$0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{|p(a)|}{2}\right), \quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{|p(b)|}{2}\right).$$

Если же

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{|p(a)|}{2}\right) < \theta_1 < \pi, \quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{|p(b)|}{2}\right),$$

то в силу (4.28) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_{j-2}, \quad j \geq 2; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1(\varepsilon) = -\infty.$$

В заключение отметим, что в случае $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, т.е. для граничных условий $y|_{x=a} = y|_{x=b} = 0$, равенства (4.34) хорошо известны: при $j = 0$ соответствующий факт установлен в статье [22], а при произвольном $j \geq 0$ – в цикле публикаций [23]–[26]. В упомянутых работах эти равенства были получены на основе исследования осцилляционных свойств решений уравнения из (4.29). Прделанный выше анализ доставляет иной способ их доказательства и позволяет включить данный результат в контекст общей теории релаксационных колебаний.

Список литературы

1. Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, в ст. “Юбилейная научная сессия на механико-математическом факультете МГУ”, *УМН*, **10**:3(65) (1955), 193.
2. Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891.
3. Л. С. Понтрягин, “Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных”, *Труды 3-го Всесоюзного математического съезда*, т. 3, Изд-во АН СССР, М., 1958, 570–577.
4. Л. С. Понтрягин, “Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:5 (1957), 605–626; англ. пер.: L. S. Pontryagin, “Asymptotic behavior of the solutions of systems of differential equations with a small parameter in the higher derivatives”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **18**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961, 295–319.
5. Е. Ф. Мищенко, “Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:5 (1957), 627–654; англ. пер.: E. F. Mishchenko, “Asymptotic calculation of periodic solutions of systems of differential equations containing small parameters in the derivatives”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **18**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961, 199–230.
6. Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975, 247 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, *Math. Concepts Methods Sci. Engrg.*, **13**, Plenum Press, New York, 1980, x+228 pp.

7. Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995, 336 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994, xii+281 pp.
8. А. К. Звонкин, М. А. Шубин, “Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений”, *УМН*, **39**:2(236) (1984), 77–127; англ. пер.: A. K. Zvonkin, M. A. Shubin, “Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **39**:2 (1984), 69–131.
9. W. Eckhaus, “Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks”, *Asymptotic analysis II*, Lecture Notes in Math., **985**, Springer, Berlin, 1983, 449–494.
10. В. А. Соболев, Е. А. Щепакина, “Траектории-утки в одной задаче теории горения”, *Дифференц. уравнения*, **32**:9 (1996), 1175–1184; англ. пер.: V. A. Sobolev, E. A. Shchepakina, “Duck trajectories in a problem of combustion theory”, *Differ. Equ.*, **32**:9 (1996), 1177–1186.
11. В. А. Соболев, Е. А. Щепакина, “Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки”, *Изв. РАН. Сер. МММИУ*, **1**:3 (1997), 176–187.
12. M. Diener, “Nessie et les canards”, Publ. IRMA, **76**, IRMA, Strasbourg, 1979, 17 с.
13. M. Diener, *Etude générale des canard*, Thèse, IRMA, Strasbourg, 1981, 94 с.
14. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Решение сингулярно возмущенных краевых задач методом “охоты на уток””, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **224**, Наука, М., 1999, 187–207; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “Solution to singularly perturbed boundary value problems by the duck hunting method”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **224** (1999), 169–188.
15. V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider, “Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **121**:1 (2004), 1973–2079.
16. А. М. Красносел’skii, E. O’Grady, A. V. Pokrovskii, D. I. Rachinskii, “Periodic canard trajectories with multiple segments following the unstable part of critical manifold”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **18**:2 (2013), 467–482.
17. E. Shchepakina, V. Sobolev, M. P. Mortelli, *Singular perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications*, Lecture Notes in Math., **2114**, Springer, Cham, 2014, xiv+212 с.
18. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969, 527 с.; англ. пер.: M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of non-linear equations*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974, xxvi+485 pp.
19. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973, 272 с.
20. *Справочник по специальным функциям*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979, 831 с.; пер. с англ.: *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964, xiv+1046 pp.
21. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958, 474 с.; пер. с англ.: E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1955, xii+429 pp.
22. Ю. С. Колесов, В. Ф. Чаплыгин, “О неосцилляции решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **199**:6 (1970), 1240–1242; англ.

- пер.: Ju. S. Kolesov, V. F. Chaplygin, "The nonoscillation of the solutions of singularly perturbed equations of second order", *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1268–1271.
23. С. А. Кащенко, "Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", Вестн. Яросл. гос. ун-та, **10**, ЯрГУ, Ярославль, 1974, 3–39.
24. С. А. Кащенко, "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", Вестн. Яросл. гос. ун-та, **10**, ЯрГУ, Ярославль, 1974, 40–64.
25. С. А. Кащенко, *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Учебное пособие, ЯрГУ, Ярославль, 2005, 211 с.
26. С. А. Кащенко, "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Модел. и анализ информ. систем*, **22**:5 (2015), 682–710.

СЕРГЕЙ ДМИТРИЕВИЧ ГЛЫЗИН

(SERGEY D. GLYZIN)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ КОЛЕСОВ

(ANDREI YU. KOLESOV)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

НИКОЛАЙ ХРИСТОВИЧ РОЗОВ

(NIKOLAI KH. ROZOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Поступило в редакцию

10.03.2016