

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ С НЕВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

Ключевые слова: *квазилинейный закон сохранения, невыпуклая функция потока, численные методы, моделирование разрывных решений.*

Изучается задача Коши для квазилинейного закона сохранения. Выделен специальный класс кусочно линейных функций потока и кусочно постоянных начальных условий. Тогда обобщенные решения также являются кусочно постоянными с конечным набором сильных разрывов. Эволюцию таких решений можно представить, наблюдая за динамикой движения разрывов. Предложен конструктивный подход, реализующий данную идею. Подробно объяснены поправки, необходимые в случае невыпуклой функции потока. Рассмотрены примеры и приведены иллюстрации.

Во многих областях математической физики возникает квазилинейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют также *квазилинейным законом сохранения*, а выбранную нелинейную функцию $f(u)$ – *функцией потока*. Будем рассматривать задачу Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

При теоретическом исследовании задачи (1), (2) функция потока $f(u)$ часто предполагается выпуклой вверх или вниз (см. [1]–[4]). Сделаем сейчас акцент на общем случае без каких-либо дополнительных требований выпуклости (см. [5]).

Несмотря на внешнюю простоту, квазилинейное уравнение (1) весьма нетривиально, и корректное построение классических решений не всегда возможно. Поэтому приходится рассматривать *обобщенные решения* с сильными разрывами (*ударными волнами*), что существенно затрудняет моделирование решений задачи Коши (1), (2) и требует разработки специальных численных методов (см. [6]).

Ниже будет представлен алгоритм, решающий поставленную задачу Коши (1), (2) на основе оригинального *метода движения*

разрывов (см. [6], [7]). Предложенный подход прост в применении и использует лишь базовые аналитические принципы общей теории. Напомним необходимые факты.

Обобщенным решением уравнения (1) называют функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a, t)) - f(u(b, t)) \quad (3)$$

при почти всех $a, b \in \mathbf{R}$ и почти всех $t \geq 0$. Для любого классического решения $u(x, t)$ тождество (3) заведомо выполняется. Но, помимо классических, возможны обобщенные решения с сильными разрывами.

Допустим, что обобщенное решение имеет сильный разрыв $x = \xi(t)$ со значениями

$$u^+ = u^+(t) = u(\xi(t) + 0, t), \quad u^- = u^-(t) = u(\xi(t) - 0, t) \quad (4)$$

справа и слева от него. Тогда из интегрального тождества (3) выводится известное *условие Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (5)$$

характеризующее скорость движения разрыва, пока данный разрыв существует (см. [3]).

Само по себе условие Гюгонио еще не гарантирует единственность обобщенного решения поставленной задачи Коши (1), (2) (примеры неединственности см. в [1]–[4]). Поэтому вводят дополнительное *условие Олейник*, которое допускает лишь те решения, у которых все разрывы «правильные» (см. [5]). Разрыв $x = \xi(t)$ считается *правильным*, если для значений (4) выполняется неравенство Олейник

$$(f(u) - l(u))(u^+ - u^-) \geq 0 \quad (6)$$

при всех промежуточных значениях u между u^+ и u^- . Линейная функция

$$l(u) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} (u - u^-) + f(u^-), \quad (7)$$

определяет секущую, соединяющую точки $(u^+, f(u^+))$ и $(u^-, f(u^-))$ на графике функции потока $f(u)$.

Итак, требуется найти обобщенное решение задачи Коши (1), (2), для разрывов которого выполнены условия Гюгонио и Олейник. Выделим специальный класс функций потока $f(u)$ и специальный класс начальных условий $\varphi(x)$ так, чтобы нужное нам обобщенное решение удавалось построить конструктивно.

Основные предположения. Считаем, что функция потока $f(u)$ является кусочно линейной, заданной на промежутке $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$. Считаем также, что начальная функция $\varphi(x)$ является кусочно постоянной по $x \in \mathbf{R}$, принимающей значения из промежутка $[u_{\min}, u_{\max}]$. Тогда нужное нам обобщенное решение $u(x, t)$ также будет кусочно постоянным по $x \in \mathbf{R}$ при любом фиксированном $t \geq 0$ со значениями из промежутка $[u_{\min}, u_{\max}]$.

Приведем схему построения такого решения. Допустим, что в момент времени $t \geq 0$ решение $u(x, t)$ имеет конечный набор разрывов

$$x_1 = \xi_1(t), \quad x_2 = \xi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \xi_n(t).$$

Поскольку функция $u(x, t)$ предполагается кусочно постоянной, то значения u_i^+ и u_i^- справа и слева от каждого разрыва $x_i = \xi_i(t)$ являются константами до тех пор, пока такой разрыв существует.

Как и ранее, считаем разрыв $x = \xi(t)$ *правильным*, если всюду вдоль него выполняется неравенство Олейник (6). Эволюция правильных разрывов происходит простым образом. Каждый такой разрыв $x_i = \xi_i(t)$ движется согласно условию Гюгонио (5) со скоростью

$$\xi_i'(t) = \frac{f(u_i^+) - f(u_i^-)}{u_i^+ - u_i^-} \equiv \text{const}, \quad (8)$$

постоянной из-за постоянства значений u_i^+ и u_i^- .

При пересечении двух или более разрывов, они объединяются в один новый результирующий разрыв $x = \xi(t)$, так, что значение u^+ справа от разрыва $x = \xi(t)$ соответствует значению справа для самого правого из пересекающихся разрывов, а значение u^- слева от разрыва $x = \xi(t)$ соответствует значению слева для самого левого из пересекающихся разрывов. Если образовавшийся новый разрыв правильный, то он также начинает двигаться по условию Гюгонио.

Допустим, что в какой-то момент времени $t_0 \geq 0$ возник неправильный разрыв $x = \xi(t)$ со значениями u^+ и u^- , не удовлетворяющими неравенству Олейник (6). Тогда, используя кусочно линейную природу закона сохранения $f(u)$, можно заменить неправильный разрыв $x = \xi(t)$ новым набором правильных разрывов, выходящих из той же точки $(\xi(t_0), t_0)$ и образующих так называемый *веер разрывов* (см. рис. 1). В случае выпуклого закона сохранения $f(u)$ (неважно, выпуклого вверх или вниз) построение веера разрывов происходит сравнительно просто (подробнее см. [6]). Но если выпуклость закона сохранения не предполагается, то построение веера разрывов усложняется. Изложим необходимые поправки.

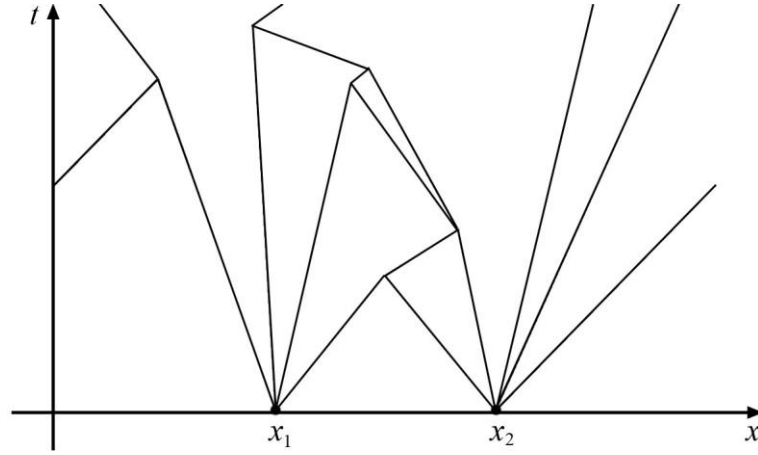


Рис. 1. Карта разрывов на плоскости (x, t) . На графике в момент времени $t_0 = 0$ в точках x_1 и x_2 образовались два веера разрывов. Зоны между разрывами отвечают постоянным значениям решения.

Рассмотрим некоторую фиксированную функцию потока $f(u)$ (см. рис. 2, рис. 3) и конкретную пару значений u^+ , u^- . В зависимости от соотношения между этими значениями u^+ и u^- для неправильного разрыва $x = \xi(t)$ имеем два случая.

Случай 1. Предположим, что $u^- < u^+$. Построим вспомогательную функцию $f_\alpha(u)$, определенную на отрезке $[u^-, u^+]$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $f_\alpha(u) \leq f(u)$ для любого $u \in [u^-, u^+]$;
- 2) $f_\alpha(u)$ выпуклая вниз на $[u^-, u^+]$;
- 3) $f_\alpha(u)$ является мажорантой среди таких функций.

Для краткости будем называть функцию $f_\alpha(u)$ *выпуклой вниз огибающей* для $f(u)$ на отрезке $[u^-, u^+]$ (см. рис. 2).

Как и $f(u)$, функция $f_\alpha(u)$ будет кусочно линейной. Множество точек излома $f_\alpha(u)$ является подмножеством множества точек излома самой $f(u)$. Пусть $N \geq 2$ – количество линейных кусков функции $f_\alpha(u)$ с границами

$$u^- \equiv \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N-1} < \alpha_N \equiv u^+. \quad (9)$$

Выпуклую вниз огибающую можно записать в виде

$$f_\alpha(u) = \frac{f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} (u - \alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1}) \quad (10)$$

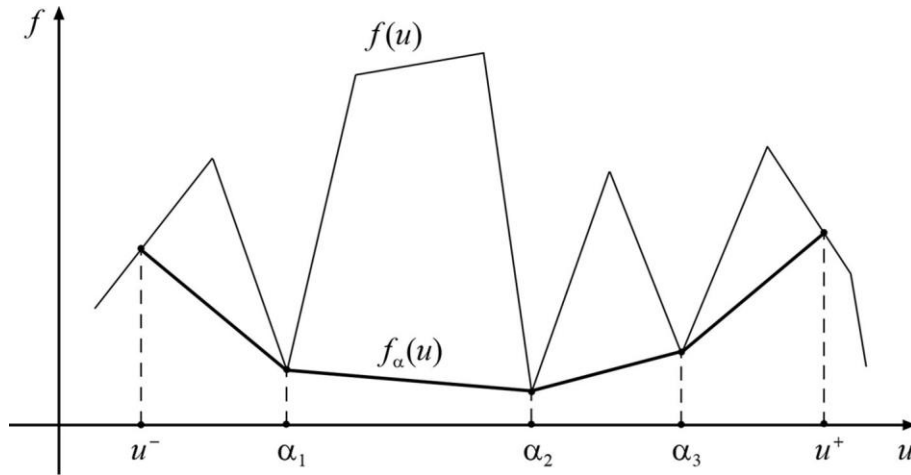


Рис. 2. Пример вспомогательной функции $f_\alpha(u)$ в случае $u^- < u^+$. Жирной ломаной обозначен график выпуклой вниз огибающей $f_\alpha(u)$ для кусочно линейной функции потока $f(u)$ при $u \in [u^-, u^+]$.

на каждом из участков $u \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ для $j=1, \dots, N$. Используя введенную функцию $f_\alpha(u)$, построим веер разрывов, исходящий из точки $(\xi(t_0), t_0)$. Разобьем неправильный разрыв $x = \xi(t)$ на N новых промежуточных разрывов $\xi_j(t)$, $j=1, \dots, N$, с последовательно возрастающими значениями (9) от u^- до u^+ . Для каждого такого нового разрыва $\xi_j(t)$ со значениями α_j справа и α_{j-1} слева условие Олейник уже выполняется. Действительно, подставив в формулу (7) значения $u^+ = \alpha_j$ и $u^- = \alpha_{j-1}$, получим $l(u) \equiv f_\alpha(u)$ на $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Отсюда, по свойству 1), имеем $l(u) \leq f(u)$ на $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Таким образом, для каждого разрыва $\xi_j(t)$ неравенство (6) выполняется. Свойство 2) выпуклости вниз функции $f_\alpha(u)$ гарантирует, что новые разрывы $\xi_j(t)$, $j=1, \dots, N$, эволюционируя по условию Гюгоню (8), образуют веер: их скорости совпадают с угловым наклоном соответствующего участка вспомогательной кусочно линейной функции $f_\alpha(u)$, а он в силу выпуклости вниз $f_\alpha(u)$ возрастает, начиная от значения α_0 слева от первого разрыва $x = \xi_1(t)$, и заканчивая значением α_N справа от последнего разрыва $x = \xi_N(t)$. Таким образом скорости разрывов возрастают:

$$\xi'_1(t) < \xi'_2(t) < \dots < \xi'_{N-1}(t) < \xi'_N(t).$$

На графике $u(x, t)$ веер разрывов образует «лестницу», ступеньки (т.е. разрывы) которой отдаляются друг от друга (см. на рис. 4 разрыв $\xi(t_0) = x_1$). Условие кусочно линейной структуры функции потока $f(u)$ дает кусочно линейный вид (10) выпуклой вниз огибающей $f_\alpha(u)$, который гарантирует конечное количество новых промежуточных

разрывов при построении «лестницы». Отсюда следует, что построенное решение $u(x, t)$ будет и дальше сохранять кусочно постоянную структуру.

Случай 2. Теперь пусть $u^+ < u^-$. В этом случае в качестве вспомогательной функции $f_\beta(u)$ берется *выпуклая вверх огибающая* функции $f(u)$ на отрезке $[u^+, u^-]$ (см. рис. 3). Эта функция обладает следующими свойствами:

- 1) $f_\beta(u) \geq f(u)$ для любого $u \in [u^+, u^-]$;
- 2) $f_\beta(u)$ выпуклая вверх на $[u^+, u^-]$;
- 3) $f_\beta(u)$ является минорантой для всех таких функций.

Границы (9) линейных кусков функции $f_\beta(u)$ начинаются от значения u^+ и заканчиваются значением u^- :

$$u^+ \equiv \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N-1} < \beta_N \equiv u^-.$$

На каждом отрезке $u \in [\beta_{j-1}, \beta_j]$ для $j = 1, \dots, N$ выпуклая вверх огибающая $f_\beta(u)$ имеет вид

$$f_\beta(u) = \frac{f(\beta_{j-1}) - f(\beta_j)}{\beta_{j-1} - \beta_j} (u - \beta_j) + f(\beta_j).$$

Например, на рис. 3 $N = 4$.

На плоскости (x, t) также образуется веер (см. рис. 1). Кусочно постоянные участки решения между разрывами веера образуют «лестницу наверх» (см. на рис. 4 разрыв $\xi(t_0) = x_2$).

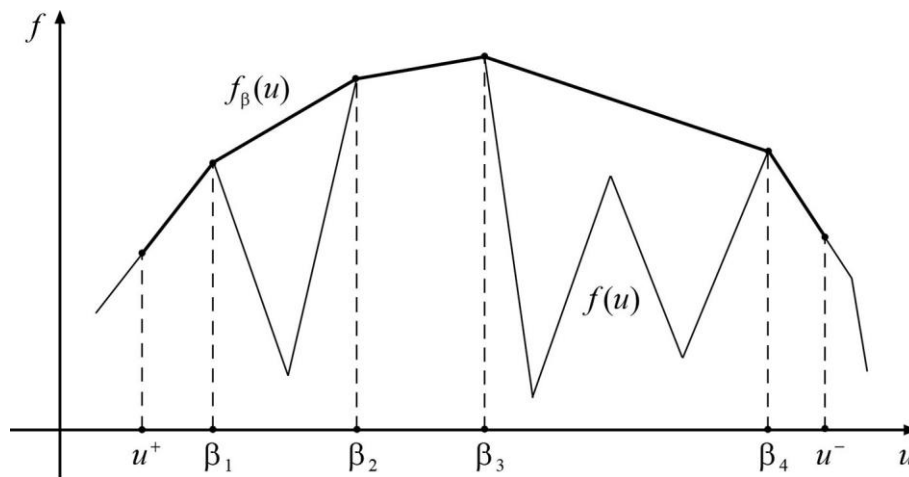


Рис. 3. Пример вспомогательной функции $f_\beta(u)$ в случае $u^+ < u^-$. Жирной ломаной обозначен график выпуклой вверх огибающей $f_\beta(u)$ для кусочно линейной функции потока $f(u)$ при $u \in [u^+, u^-]$.

Итак, в обоих случаях после замены в точке t_0 неправильного разрыва $x = \xi(t)$ на несколько правильных на фазовой плоскости (x, t) образуется веер разрывов, исходящих из точки $(\xi(t_0), t_0)$. Для новых

разрывов веера неравенство Олейник (6) выполнено. Если по ходу построения решения $u(x, t)$ снова возникает неправильный разрыв, его опять заменяют на конечное число правильных разрывов, каждый из которых начинает двигаться по условию Гюгонио (8).

Таким образом, алгоритм построения кусочно постоянного решения по начальной функции $\varphi(x)$ можно описать следующим образом.

Шаг 0. По начальному условию $\varphi(x)$ задается первичный набор разрывов.

Шаг 1. Для каждого из разрывов в наборе проверяется неравенство Олейник (6). Каждый неправильный разрыв заменяется на конечное количество правильных по описанным выше принципам.

Шаг 2. Разрывы сдвигаются со скоростями по условию Гюгонио (8) до тех пор, пока какие-нибудь два соседних разрыва (или больше двух) не пересекутся. При пересечении образуется новый набор разрывов. Переходим к шагу 1.

Визуализировать построенное кусочно постоянное решение $u(x, t)$ возможно в любой интересующий момент времени.

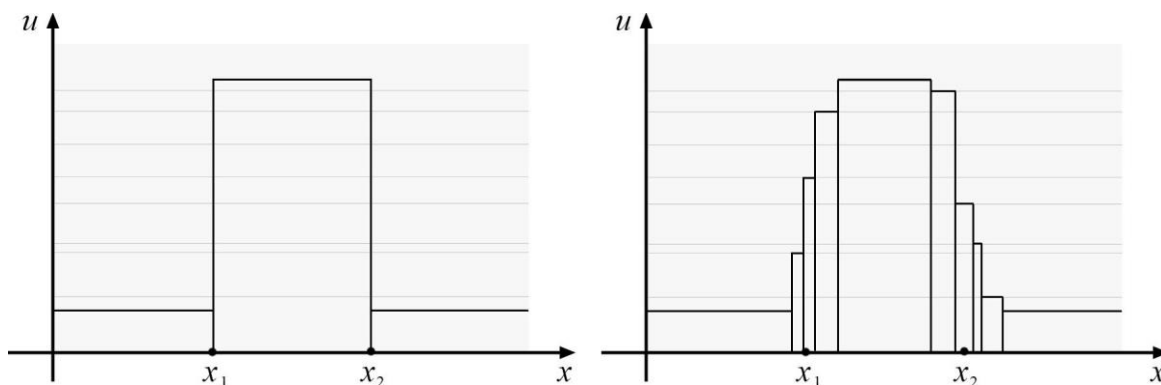


Рис 4. Эволюция решения $u(x, t)$ для функции потока $f(u)$, соответствующей рис. 2 и 3. Слева представлен график начальной функции $\varphi(x)$, справа – решение при некотором $t > 0$. Значения u^+ и u^- соответствуют построенным вспомогательным функциям. На рисунке справа видно образование новых разрывов, расходящихся «лестницей». Карта разрывов на плоскости (x, t) для этого решения представлена на рис. 1.

Если требуется найти решение задачи Коши (1), (2) для кусочно гладкой функции потока $f(u)$ и кусочно непрерывной начальной функции $\varphi(x)$, то можно использовать соображения аппроксимации: заменить кусочно гладкую функцию потока на кусочно линейную, а кусочно непрерывное начальное условие на кусочно постоянное. В докладе будут представлены результаты численного расчета решения описанным методом для различных функций потока $f(u)$ и начальных

условий $\varphi(x)$. Основное внимание будет уделяться невыпуклым функциям потока.

Литература

1. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие) – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
2. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с.
3. Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. – 296 с.
4. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.
5. Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.
6. Подорога А. В., Тихонов И. В. Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017. – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. С. 216–225.
7. Подорога А. В., Тихонов И. В. Метод движения разрывов для специальных квазилинейных уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2018. С. 242–245.

A. V. Podoroga

Lomonosov Moscow State University

PARTICULARITIES OF SOLUTION SIMULATION FOR QUASILINEAR CONSERVATION LAW WITH NON-CONVEX FLOW FUNCTION

Keywords: *quasilinear conservation law, non-convex flow function, numerical methods, simulation of discontinuous solutions.*

Abstract. *The Cauchy problem for the quasilinear conservation law is studied. We focus on a special class of piecewise linear flow functions and piecewise constant initial conditions. Then the generalized solution is also a piecewise constant function with a finite set of strong discontinuities. The evolution of such solutions can be traced by observing the motion dynamics of discontinuities. The proposed constructive algorithm implements this idea using the method of shocks movement. We consider special case of a non-convex flow function in detail. Some examples and illustrations are presented.*

Сведения об авторах:

Подорога Анастасия Владимировна – аспирант кафедры математической физики факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, anastasiapodoroga@gmail.com