(29)

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Р С Ф С Р

НОВОСИБИРСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

На правах рукописи

УДК 517.948, 536.424.1

ШЕМЕТОВ Николай Васильевич

УЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Este trabalho foi apresentado e aceite para a concessão do grau de doutor

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.М.Мейрманов

Ректор НГУ академик В.Н. Врагов

Новосибирск

1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ 3

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА I. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА В ДЕФОРМИРУЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ . . 13

§ I. Постановка вопроса построения модели 13

§ 2. Двухпараметрическая среда 15

§ 3. Трехпараметрическая среда 23

§ 4. Двухфазная среда, удовлетворяющая в обеих фазах закону Гука 27

ГЛАВА II. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ ОДНОМЕРНОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ СРЕДЫ 33

§ I. Постановка задач 33

§ 2. Разрешимость задачи Коши 39

§ 3. Разрешимость начально-краевой задачи 55

ГЛАВА III. РАВНОВЕСИЕ ДВУХФАЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ 65

§ I. Многомерный случай. Существование решения . . . 65

§ 2. Осесимметричный случай. Структура решения . . . 84

ИЛЛЮСТРАЦИИ 101

ЛИТЕРАТУРА 106

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

θ – температура

e – объем

p – напряжение среды

U – внутренняя энергия

F – свободная энергия

S – энтропия

Φ – потенциал Гиббса

P – тензор напряжений

$\mathcal{E}$ – тензор деформаций

$P:\mathcal{E}$ – свертка тензоров P и $\mathcal{E}$

$tr\,\mathcal{E}$ – след тензора $\mathcal{E}$

σ_1, σ_2 (ϵ_1, ϵ_2) – первый и второй инварианты тензора напряжений (деформаций)

Нумерация утверждений и формул в каждом параграфе своя. При ссылке на какое-либо утверждение или формулу, если не оговорено противное, подразумевается утверждение или формула того же параграфа.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое описание процессов плавления, кристаллизации, испарения веществ и допускающих сходную с ними формулировку строится на основе так называемой задачи Стефана и ее обобщений [16, 30].

Характерной особенностью этих процессов, приводящих к нелинейным математическим задачам, является наличие заранее не известных (так называемых свободных) границ или переходных областей, разделяющих различные фазы вещества. Классическая формулировка задачи Стефана основана на предложении о существовании границы между двумя фазами одного вещества. В основополагающей работе [60] была предложена первая модель замерзания льда. В ней предполагалось, что вода (жидкая фаза) полностью переходит в лед (твердая фаза) при постоянной температуре фазового перехода, равной 0 $^{\circ}C$. Передача в каждой фазе обусловлена теплопроводностью, граница раздела фаз представляет собой гиперповерхность, на которой выполняются условия непрерывности температуры и равенства ее температуре фазового перехода, а также условие баланса энергии (условие Стефана). В терминах термодинамических параметров состояния среды равенство температуры среды на границе фазового перехода фиксированной постоянной эквивалентно заданию внутренней энергии U как однозначной функции температуры, терпящей разрыв первого рода при температуре фазового перехода. В 1960 г. С.Л.Каменомостская [20] и О.А.Олейник [34] доказали существование обобщенного решения задачи Стефана, предложив неявно, что внутренняя энергия может принимать все промежуточные значения при температуре фазового перехода. Долгое время считалось, что ответ на вопрос, будет ли обобщенное решение классическим, даст исследование дифференциальных свойств границы фазового перехода, но в

1981 г. А.М.Мейрмановым [31] был построен пример, где вообще отсутствует граница фазового перехода, а есть целая область переходного состояния, т.е. оказалось, что обобщенное решение, по существу, шире классического решения задачи Стефана.

Дальнейшим шагом в развитии теории задачи Стефана стала попытка решения задачи с кристаллизации бинарного сплава в рамках классической фронтовой схемы, предпринятая Г.П.Ивановым [19], Н.А.Авдониным [1]. Авторы указанных работ обнаружили странные решения, в которых "за" и "перед" фронтом кристаллизации температура оказывается ниже локальной температуры затвердевания, восстановленной по известному из решения распределения примесного расплава. Они считали, что полученные решения описывают процесс переохлаждения, хотя очевидно, что эти решения не являются искомыми решениями, поскольку противоречат исходным постулатам модели. В дальнейшем Н.А.Буевич [8], Б.В.Мансуров, Н.Г.Фомина [28] показали неустойчивость фронта кристаллизации при возникновении так называемого "процесса переохлаждения". Потери устойчивости фронта кристаллизации приводит к образованию смеси твердой и жидкой фаз, что неоднократно наблюдалось в экспериментах [36,52]. Таким образом, не удается показать существование классического решения в целом по времени, а в некоторых случаях оно просто не существует (на наш взгляд, в этом и состоит результат [1, 8, 19, 28]). Поэтому для построения непротиворечивого описания процесса кристаллизации бинарного сплава потребовалось предположить, что кристаллизация описывается более широким классом обобщенных решений, содержащим в себе как подкласс классические решения, а именно возможность смеси твердой и жидкой фаз ("переходная фаза"). Такой подход впервые был реализован в работах В.Т.Борисова [5,6], и развит В.Т.Борисовым, В.В.Виноградовым, И.Л.Тяжельниковой [7], L.Rubinstein [59], V.Alexiadez, A.D.Solomon, D.G.Wilson [43], A.Bermudez , C.Saguez [45] и достаточно завершенный вид модели обобщенного движения приведен в работах S.Luchaus, A.Visintin [57], И.Г.Гетца, А.М.Мейрманова [12].

В реальных физических процессах динамика фазового перехода зависит, кроме температуры и концентрации примеси, от многих других термодинамических параметров. Для упругодеформируемых сред важную роль в этих процессах играет изменение напряженно-деформируемого состояния в среде. К настоящему времени появилась обширная литература по моделям фазовых переходов в упругодеформируемой среде, построенных в рамках классической фронтовой схемы [15, 39]. Но, как и в задачах Стефана, в задачах кристаллизации бинарного сплава следует ожидать, что фронтовая модель приведет к своему же внутреннему противоречию.

В первой главе настоящей диссертации предлагается аксиоматическое построение модели "обобщенного движения", описывающей фазовые переходы в деформируемой упругой среде. Основу модели составляет равновесная теория фазовых переходов, созданная Л.Д.Ландау [25]. Она базируется на следующем предположении: фазовый переход происходит при локальном термодинамическом равновесии фаз.

Первый параграф этой главы является вводным, в нем дается постановка вопроса построения модели.

В § 2 построение модели проводится для двухпараметрической среды. Предполагается, что тензор напряжений является шаровым, параметрами состояния среды можно выбрать пару, состоящую либо из температуры θ и напряжения p, либо из температуры θ и удельного объема e. Построение модели опирается на предположение о равновесности фазовых превращений. Такой подход приводит к тому, что фазовое пространство термодинамических параметров среды (θ, p) разбивается некоторой кривой γ на две области, значения параметров в одной из них соответствует I фазе, а в другой – II фазе. В соответствии с равновесной теорией фазовых переходов первого рода [25] такие параметры, как энтропия S , внутренняя энергия U , свободная энергия F , потенциал Гиббса Φ терпят скачок при переходе через Y . Из требования устойчивости равновесного состояния вещества (вогнутость потенциала Гиббса по переменной P) при переходе от термодинамических параметров (θ, P) к параметрам удельный объем e и температура θ следует, что в соответствующем фазовом пространстве переменных θ и e появляются "пустоты", то есть области, значения параметров в которых не соответствуют ни I фазе, ни II фазе. По аналогии с задачей Стефана и моделью кристаллизации бинарного сплава предлагается считать такие значения параметров θ и e допустимыми и соответствующими переходному состоянию вещества. Предположение о справедливости тождеств Гиббса и Гиббса-Дюгема в переходной фазе и вышеперечисленные положения позволяют окончательно определить P, U, F, S, Φ в переходной фазе как функции удельного объема и температуры.

В третьем параграфе рассматривается среда с нешаровым тензором напряжений. Для такой среды встает вопрос об определении параметров, определяющих фазовое состояние среды. В работе [10] для изотропной упругой среды в качестве таковых предложено считать инварианты тензора напряжений и температуру, либо инварианты тензора деформации и температуру. Принципы, положенные в основу модели фазовых переходов с двумя независимыми термодинамическими параметрами, переносятся на изотропную среду с большим числом независимых параметров. Поскольку число параметров в среде больше двух, то для замыкания модели необходимы дополнительные предположения. Постулат непрерывности инвариантов тензора напряжений, температуры и потенциала Гиббса в состоянии равновесия двухфазной среды, требование вогнутости потенциала Гиббса по инвариантам тензора напряжений позволяют корректно определить различные фазы и однозначно определить недостающие уравнения состояния в переходной фазе.

В § 4 на конкретном примере среды, удовлетворяющей закону Гука в каждой из фаз I и П строится замкнутая система определяющих уравнений состояния.

Первый параграф главы П носит предварительный характер. Рассматривается одномерное изотермическое движение невязкой сплошной среды в лагранжевых координатах. Система уравнений, описывающая это движение, состоит из двух квазилинейных уравнений (законы сохранения массы и импульса)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial (p(e))}{\partial x} = 0 \; , \; \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \; , \qquad (I)$$

где t - время, x - лагранжева координата, e - удельный объем, v - скорость, $p = p(e)$ - напряжение (уравнение состояния).

Для системы (I) доказывается существование обобщенных решений Коши и начально-краевой задач. Ранее аналогичные задачи рассматривались во многих работах. Обзор исследований по вопросам разрешимости приведен в монографии Б.Л.Рождественского, Н.Н.Яненко [37]. В 1965 г. J.Glimm [48] получил первую теорему существования обобщенного решения задачи Коши для более общей системы законов сохранения при весьма ограниченных требованиях на систему и начальные данные. Повторение и дальнейшее развитие этот результат нашел в работах R.J.Diperna [46], Liu Tai-Ping [56], Н.Н.Кузнецова, В.А.Тупчиева [23].

Более общие теоремы существования получены для частных систем уравнений, используя методику Глимма. T.Nishida [58], Н.С.Бахвалов [4] и др. показали, что для системы (I) с конкретными уравнениями состояния $p = p(e)$, используя их специфику, удается доказать разрешимость задачи Коши без предположения малости вариации начальных данных. Иной подход к проблеме разрешимости развит в работах Г.П.Лисми, В.А.Тупчиев [35], Zhang Tong, Guo Yo-Fa [61], J.L.Johnson [51], J.Greenberg [49]. Характерной особенностью этого подхода является возможность получения решения задачи Коши с "монотонными" начальными данными как предела точных решений, содержащих конечное число особенностей. В работах [35, 49] обобщенные решения с "монотонными" начальными данными построены при помощи схемы Глимма.

Все вышеуказанные работы можно объединить одним свойством – требованием гиперболичности (для системы (I) это эквивалентно строгой монотонности уравнения состояния). Однако интерес для теории и приложений представляет тот случай, когда эти требования не выполнены. Заметим, что в работе А.П.Аргиевыс [8] решение построено для системы (I) с произвольным уравнением состояния $p = p(e)$, но оно не удовлетворяет, по крайней мере, условию возрастания энтропии (см. [37]).

Предполагается, что среда может находиться в двух различных агрегатных состояниях, тогда в соответствии с феноменологической моделью уравнения состояния $p = p(e)$ является монотонно-возрастающей функцией с конечным участком постоянства. Участки строгой монотонности соответствуют двум различным "чистым" фазам, а участок постоянства – переходной. Будем считать, что функция $p = p(e)$ является кусочно непрерывно-дифференцируемой.

Во втором параграфе главы II рассматривается задача Коши для системы (I) с уравнением состояния с вышеуказанными свойствами и начальными данными, удовлетворяющими некоторым условиям монотонности.

Отметим, что в работе В.П.Маслова, П.П.Мосолова, М.М.Ашшиферовой [29] рассматривалась аналогичная задача, но с кусочно-линейным уравнением состояния $p = p(\varepsilon)$ и в ней доказана теорема существования и единственности обобщенного решения на малом интервале времени при произвольных кусочно-гладких начальных данных.

В диссертации, используя схему Глимма, удается показать существование обобщенного решения в целом по времени. Доказательство существования основано на получении априорных оценок, зависящих только от данных задачи. Основным моментом здесь является сохранение свойства "монотонности" при всех значениях времени t для приближенного решения в схеме Глимма.

В третьем параграфе главы II доказана теорема существования обобщенного решения начально-краевой задачи для системы (I) с функцией $p = p(\varepsilon)$, являющейся монотонно-возрастающей с конечным участком постоянства и с начальными и краевыми данными, удовлетворяющими условиям монотонности. Доказательство основано на модифицированной схеме Глимма [47] и получении необходимых априорных оценок для "приближенных" решений.

Хотелось бы отметить, что пока остается открытым вопрос единственности обобщенного решения как для задачи Коши, так и для начально-краевой задачи с произвольным уравнением состояния в классе слабых решений. Единственности обобщенных решений в классах с конечным числом особенностей типа "ударных волн" и "центрированных волн разряжения" посвящены работы [24, 36]. В классах измеримых функций теоремы единственности обобщенных решений доказаны в [27, 50, 55].

Третья глава посвящена рассмотрению задач, описывающих стационарное изотермическое движение изотропной упругой среды в условиях фазового перехода.

В § I главы III рассматривается задача о равновесии изотропного упругого тела при фазовом переходе в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей γ :

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div} P = f, \quad x \in \Omega \\
\varepsilon(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}^{*}\right)/2 \\
u/_{\gamma_1} = \varphi, \quad P_n/_{\gamma_2} = g, \quad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещений, n - вектор внешней нормали. Система (2) замыкается уравнением состояния $P = P(\varepsilon)$, связывающим функциональной зависимостью тензор напряжений P с тензором деформации ε. Ранее эта задача рассматривалась в ряде работ, см., например, [38, 44], но для однофазных упругих сред. Предполагается, что изотропная упругая среда может находиться в двух различных агрегатных состояниях, тогда в соответствии с феноменологической моделью фазовых переходов первого рода однозначно определяется функциональная зависимость $P = P(\varepsilon)$. Удается показать, что эта зависимость является монотонной. Тогда из теории монотонных операторов [9] следует существование обобщенного решения системы (2). При этом тензор напряжений определяется единственным образом, вектор перемещений может восстанавливаться неоднозначно.

Во втором параграфе главы III рассматривается задача о равновесии двухфазной среды в осесимметричном случае. Среда в каждой из фаз I и II удовлетворяет закону Гука (см. гл. I § 4). Для этой задачи полностью исследована структура решений при любых краевых данных. При этом при изучении структуры решения видно, что классическая фронтовая схема модели двухфазной среды является некорректной (неоднозначность решения). Заметим, что попытки изучения структуры решения задачи о равновесии двухфазной среды в осесимметричном случае делались в работах [3, 18], но в рамках классической фронтовой модели.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13], [14], [41], [42].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А.М.Мейрманову за постоянное внимание к работе и обсуждения результатов и всем сотрудникам Теоретического отдела Института гидродинамики СО АН СССР за полезные обсуждения.

Г Л А В А I

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА В ДЕФОРМИРУЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В данной главе предлагается модель, описывающая фазовые переходы первого рода в деформируемой упругой среде, которая может находиться в двух различных агрегатных состояниях (фазах). Базовыми уравнениями являются законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные в виде интегральных тождеств и допускающие разрывы первого рода основных характеристик среды. Центральный момент в модели – описание с помощью минимального числа аксиом равновесной термодинамики фазы, переходной между двумя наблюдаемыми, позволяющее замкнуть систему уравнений движения, не изменяя ее записи в виде законов сохранения.

§ I. Постановка вопроса построения модели

Предположим, что изучаемая сплошная среда может быть описана с помощью средних величин и для них справедливы законы сохранения массы, импульса и энергии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad ; \tag{I}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v - P) = \rho f \quad ; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(U + |v|^2/2\right)\right) + \operatorname{div}\left(\rho\left(U + |v|^2/2\right)v - æ\nabla\theta - P\langle v\rangle\right) = \rho f v + \rho g \tag{3}$$

Всюду в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, занятой средой при всех значениях времени t из интервала $(0, T)$, в каком бы состоянии не находилась сплошная среда. Здесь ρ – плотность; v – скорость; P – симметричный тензор напряжений; U – удельная внутренняя энергия; θ – температура; $æ$ – коэффициент теплопроводности; f –

плотность внешних массовых сил; g – плотность внутренних источников тепла. Уравнения (I) – (3) имеют форму абстрактного закона сохранения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A v - \varphi) = X$$

и для функций A, v, φ, терпящих разрывы первого рода, их надо понимать как интегральные тождества

$$\iiint_{\Gamma} \left(A(l+v) - \varphi \right) \nu \, d\Gamma = \iiiint_{G} X \, dG$$

справедливые для произвольного объема G четырехмерной области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ с гладкой границей Γ, с ортом внешней нормали ν (l – орт оси времени).

Легко видеть, что система (I) – (3) незамкнутая. Если бы среда находилась в каком-то одном состоянии, то она замыкалась бы уравнениями состояния и аксиомами термодинамики. Например, упругие деформируемые состояния сплошной среды полностью описываются тождеством Гиббса

$$\theta dS = dU - (1/\rho) P (I - 2E)^{-1} \cdot dE \qquad (4)$$

и уравнением состояния, определяющим свободную энергию $F = U - \theta S$ как известную изотропную функцию термодинамических параметров E и θ, где $E = (1/2)(I - T^{-1} T^{*-1})$ – эйлеров тензор деформаций, T – тензор дисторсии [33]. Применительно к системе (I) – (3) указанная конструкция определяет зависимости $P = P(E, \theta)$ (например, закон Дюамеля-Неймана) и $U = U(E, \theta)$.

Если мы предположили, что среда может быть описана с помощью средних величин, то возникает естественный вопрос: как корректно замкнуть систему (I) – (3), не изменяя ее записи в виде законов сохранения для среды, претерпевающей фазовые переходы?

§ 2. Двухпараметрическая среда

I. Рассматривается идеальная двухпараметрическая среда с шаровым тензором напряжений $P = pI$, I – единичная матрица. Термодинамическое состояние среды определяется семью параметрами (θ – температурой, e – удельным объемом ($e = 1/\rho$), U – внутренней энергией, S – энтропией, p – напряжением, F – свободной энергией ($F = U - \theta \cdot S$), Φ – термодинамическим потенциалом Гиббса ($\Phi = F - p \cdot e$), два из которых являются независимыми.

При этом тождество Гиббса записывается в виде

$$\theta dS = dU - pde \qquad \text{либо как}$$

$$d\Phi = -Sd\theta - edp \quad . \qquad (I)$$

Если Φ есть известная функция двух независимых параметров θ и p, то $S = -\partial\Phi/\partial\theta$, $e = -\partial\Phi/\partial p$, $U = \Phi(p,\theta) + \theta \cdot S(p,\theta) + p \cdot e(p,\theta)$, $F = \Phi(p,\theta) - p \cdot e(p,\theta)$.

Пусть среда может находиться в двух различных состояниях (фазах I и II), в каждой фазе известна зависимость потенциала от θ и p. Для двухпараметрических сред феноменологическое описание фазовых переходов первого рода достаточно подробно изложено в [25], следуя принятой там аксиоматике, система, состоящая из двух фаз, находится в состоянии равновесия, если, во-первых, равны температура и напряжение в обеих соприкасающихся фазах, и, во-вторых, равны термодинамические потенциалы Φ^{I} и Φ^{II} обеих фаз: $\Phi^{I}(\theta,p) = \Phi^{II}(\theta,p)$. Тем самым, первым постулатом фазовых переходов является то, что в области независимых термодинамических переменных θ и p, можно выделить области, соответствующие каждой фазе. Вторым постулатом является то, что в плоскости переменных θ и p области, отвечающие различным фазам, имеют общую границу, называемую линией фазового равновесия. Конкретный вид линии фазового равновесия определяется из условия непрерывности термодинамического потенциала Гиббса в точках фазового равновесия: $\Phi^{I}(\theta,p)=\Phi^{II}(\theta,p)$, что составляет содержание второго постулата. Примерный вид линии фазового равновесия приведен на рис. 1а. Если уравнение этой линии $\theta=\theta_{*}(p)$, то функцию $\theta_{*}(p)$ обычно называют температурой плавления. Термин "равновесная термодинамика" применительно к нашему случаю означает, что значениям параметров θ и p, лежащим выше линии фазового равновесия, всегда отвечает фаза II, а ниже фаза I. Зная в каждой фазе зависимости U и V от θ и p (возможно негладкие при переходе через линию фазового равновесия) можно формально замкнуть систему § 1 (1) – (3).

2. На самом деле предложенная конструкция не полностью замыкает систему § 1 (1) – (3). Этот факт поясним на простом примере однопараметрической среды, когда не учитывается ее движение. Модель, описывающая фазовые переходы в среде, где единственный термодинамический независимый параметр – температура, называется задачей Стефана. Как правило, она формулируется не как задача об определении решения интегрального тождества, соответствующего закону сохранения энергии, в котором скорость положена равной нулю, а плотность – известной постоянной $\rho=\rho_c$ (такое решение называется обобщенным), а как следствие этого тождества, когда заранее предполагается известной структура решения. А именно, считается, что решение обладает сильным разрывом, т.е. в области изменения физических переменных (x,t) существует достаточно гладкая поверхность $\Gamma(t)$ (граница фазового перехода, ее предстоит определить в процессе решения), разбивающая область Ω_T на две подобласти $\Omega^{+}(t)$, $\Omega^{-}(t)$, каждая из которых занята только одной фазой, жидкой и твердой соответственно. Если зависимость U от θ известна всюду вне точки плавления $\theta=\theta_{*}$, где функция U не

определена и терпит разрыв первого рода, то из интегрального тождества следует, что в каждой выделенной области $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ температура среды удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$a\,\partial\theta/\partial t = \mathrm{div}\,(\varkappa\nabla\theta) + \rho_0 g,$$

где $a = \rho_0 \tau'(\theta)$ и $\varkappa$ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно, которые обычно считаются постоянными. Эти постоянные, вообще говоря различные в каждой из областей $\Omega^+(t), \Omega^-(t)$. На искомой поверхности раздела фаз $\Gamma(t)$, помимо условия термодинамического равновесия фаз — непрерывности температуры среды и равенства ее температуре плавления $\theta = \theta_*$, из того же интегрального тождества вытекает так называемое условие Стефана [30]:

$$\rho_0 L D_n = -[\varkappa\,\partial\theta/\partial n]$$

где $L = [\tau(\theta)]$ — скрытая удельная теплота кристаллизации, D_n — скорость перемещения поверхности $\Gamma(t)$ в направлении нормали n к этой поверхности, а символом $[F]$ обозначен скачок функции F при переходе через поверхность $\Gamma(t)$.

Уравнения в каждой области $\Omega^+(t)$, $\Omega^-(t)$, условия Стефана, условия термодинамического равновесия на границе $\Gamma(t)$, краевые условия на границе области Ω_T (например, задается температура либо тепловой поток), начальные условия для температуры и положения свободной границы образуют классическую постановку задачи Стефана. При этом, особо не оговаривая, подразумевается, что в жидкой фазе температура среды не меньше, чем температура плавления, а в твердой — не больше. Соответствующее решение обычно называют классическим. Очевидно, что всякое классическое решение будет и обобщенным, но обратное, вообще говоря, неверно.

3. В качестве примера рассмотрим задачу об остывании бесконечного цилиндрического слитка с температурой плавления $\theta_* = 0$

который выдвигается с постоянной скоростью v_0 из муфеля печи, занимающего полупространство $x<0$ и имеющего постоянную температуру $\theta_1>0$, в охладитель, занимающий полупространство и имеющий температуру $\theta_2 = const < 0$ [30, с. 193]. В предположении, что на боковой поверхности слитка задано условие теплоотвода $\partial\theta/\partial n = \gamma(\varphi-\theta)$ ($\varphi = 0$ при $x<0$ и $\varphi=\theta_2$ при $x>0$), что температура слитка постоянна на сечениях, ортогональных оси слитка, и что в системе координат, связанной с неподвижным муфелем, процесс стационарный, классическая постановка задачи Стефана имеет вид (все встречающиеся постоянные для простоты изложения положим равными единице)

$$
\begin{gathered}
v_0\, d\theta/dx - d^2\theta/dx^2 + \theta = \varphi, \quad x \neq x_0 \\
d\theta/dx\,(x_0-0) - d\theta/dx\,(x_0+0) = v_0 \\
\theta(x_0) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |\theta-\varphi| = 0
\end{gathered}
\qquad (2)
$$

При $\theta_1+\theta_2>0$ решение $\theta(x)$ и x_0 сформулированной задачи выписывается явно и при $v_0 < v_* = |\theta_2|(1+|\theta_2|)^{-1/2}$ отвечает исходной гипотезе о структуре решения (рис. 2а):

$$\theta(x)>0, \quad x>x_0; \qquad \theta(x)<0, \quad x<x_0$$

Если же $v_0>v_*$, то у решения появляется особенность (рис. 2б): существует точка x_1 такая, что в интервале (x_1, x_0) функция θ строго отрицательная. Поскольку точка x_0 – граница раздела фаз и левее ее всегда расположена жидкая фаза, то на первый взгляд может показаться, что задача (2) описала такое сложное явление, как переохлаждение. Но математическая модель описывает только то, что заложено в нее физическими аксиомами. А задача Стефана формулируется исходя из аксиом равновесной термодинамики, в которой жидкой фазе всегда отвечают только точки сплошной среды с температурой, большей или равной температуре плавления. Где же тогда ошибка?. Ошибка была заложена в математической гипотезе о структуре решения при переходе от обобщенной постановки в виде интегрального тождества к классической в форме (2).

Прежде чем анализировать исходное интегральное тождество, необходимо корректно определить его решение. Для рассматриваемой задачи о слитке интегральное тождество имеет вид

$$(v_0 U - d\theta/dx)\Big|_a^b + \int_a^b (\theta - \varphi)\,dx = 0, \qquad (3)$$

где (a, b) – произвольный интервал $-\infty < a < b < \infty$. Тождество (3) содержит две искомые функции U и θ и замыкается уравнением состояния, в котором U – известная гладкая функция температуры θ, не определенная при $\theta = \theta_*$ и терпящая там разрыв первого рода. А как найти U, если область, занятая сплошной средой, имеет нулевую температуру? Ведь мы предположили, что любое состояние сплошной среды можно описать с помощью средних величин. Возможны два способа. Первый отражает чисто математический прием [34] : считается, что в этом состоянии энергия U может принимать любое значение из интервала $[U(\theta_* - 0), U(\theta_* + 0)]$ ($U(\theta_* \pm 0)$ – предельные значения внутренней энергии соответственно слева и справа от точки разрыва); второй – чисто физический [7] : считается, что в этом состоянии в каждой точке сплошной среды сосуществуют обе фазы и все термодинамические величины непрерывно зависят от нового параметра – доли жидкой фазы. Оказывается, в рамках равновесной термодинамики указанные способы эквивалентны и в их основе-самостоятельная физическая аксиома: существуют состояния сплошной среды, в которых θ тождественно равна θ_*, а U принимает все значения из интервала $[U(\theta_* - 0), U(\theta_* + 0)]$.

Естественно назвать такое состояние среды переходным, а фазу, отличную от жидкой и твердой – переходной. После принятых соглашений корректно находится обратная зависимость температуры от внутренней энергии: θ гладким образом зависит от U всюду вне интервала $[U(\theta_* - 0), U(\theta_* + 0)]$ (например, линейно) тождественно равна θ_* на этом интервале и непрерывна при всех значениях U. В терминах функции U легко различить фазы даже при $\theta = \theta_*$: жидкой фазе отвечают значения $U > U(\theta_* + 0)$, твердой – $U < U(\theta_* - 0)$, переходной – $U(\theta_* - 0) < U < U(\theta_* + 0)$. Если теперь под решением тождества (3) понимать U, то все величины, образующие тождество, определены корректно. Детальный анализ тождества (3) показывает, что при $U_0 > U_*$ его единственное решение описывает жидкую фазу при $x \le x_1$, твердую – при $x \ge x_2$, переходную – при $x_1 < x < x_2$ [30, с. 218].

Таким образом, для того чтобы корректно решить поставленную задачу, пришлось развернуть точку $\theta = \theta_*$ в пространстве независимой θ в целый отрезок переходного состояния, введя новую независимую термодинамическую переменную – удельную внутреннюю энергию U.

4. Возвращаясь к исходной системе уравнений движения идеальной двухпараметрической среды видим, что кривую фазового равновесия в плоскости термодинамических переменных θ и p можно рассматривать как складку, в которой спрятано переходное состояние. Эта складка разглаживается, если перейти к новым независимым переменным θ и e либо U и p. Предположим, что линию фазового равновесия (см. рис. Iа) можно задать в виде $p = p_*(\theta)$, тогда значения параметров p и θ таких, что $p \le p_*(\theta)$ определяют I фазу, а $p > p_*(\theta)$ – II фазу, и рассмотрим новые независимые переменные θ и e. В области изменения этих переменных фазе II соответствуют точки области $E^{II} = \{(\theta, e) / e \ge e_*^{II}(\theta)\}$, лежащие выше кривой $(e = e_*^{II}(\theta))$, фазе II – точки области $E^{I} = \{(\theta, e) / e \le e_*^{I}(\theta)\}$, лежащие ниже кривой $(e = e_*^{I}(\theta))$, а переходной фазе – точки из области $E_* = \{(\theta, e) / e_*^{I}(\theta) < e < e_*^{II}(\theta)\}$, лежащие между указанными кривыми (см. рис. Iб). Конкретный вид кривых $e_*^{I}(\theta)$ и $e_*^{II}(\theta)$ получится, если в уравнения состояния

$e = e^{I}(\rho,\theta)$ и $e = e^{II}(\rho,\theta)$ в каждой чистой фазе подставить значения $\rho = \rho_*(\theta)$. Заметим, что для всех значений выполнено неравенство $e_*^{I}(\theta) < e_*^{II}(\theta)$, непосредственно следующее из тождества (I) и условия термодинамической устойчивости – вогнутости потенциала Гиббса φ: $\partial^2\varphi/\partial\rho^2 < 0$ [25]. Тем самым корректно определены фаза I, фаза II и переходная фаза. На возможность такого описания переходного метастабильного состояния указывали авторы [25, с. 310], считая независимыми переменными e и θ. Конечно, в реальных ситуациях переходное состояние, если оно возникает, неустойчиво, но поскольку один из основных принципов феноменологической теории механики сплошной среды – предположение о возможности описания любого состояния сплошной среды с помощью средних величин, то необходимость замыкания рассматриваемой модели фазовых переходов диктует полное описание переходной фазы.

Напомним, что предположение о существовании переходной фазы, позволяющее развернуть складку, идущую вдоль линии фазового равновесия в плоскости переменных θ и ρ, первое из вновь вводимых постулатов модели. Второй постулат, не вызывающий возражений (поскольку он отражает закон сохранения энергии), предположение о справедливости тождества Гиббса (I) и в переходной фазе. Третий постулат предполагает непрерывность термодинамического потенциала φ всюду в области E изменения переменных θ и e.

Оказывается, второй и третий постулаты полностью определяют φ, U, S, ρ, F как функции независимых параметров θ и e всюду в области E_*. В самом деле, каждой точке M на линии фазового равновесия $\rho = \rho_*(\theta)$ соответствует отрезок $I(\theta) = \{(\theta, e) \in E_* \mid \theta = const\}$ в области E_* переменных θ и e, вдоль которого $\rho = \rho_*(\theta) = const$ и $\varphi = const$. Последнее следует из тождества Гиббса (I) в E_*. Условие непрерывности функции φ всюду в E единственным образом определяет ту постоянную, которой она равна на отрезках $I(\theta)$. Плотность свободной энергии $F=\varphi+\rho\cdot e$ непрерывна всюду в E как комбинация непрерывных функций. Если $F^{I}(e_*^{I}(\theta),\theta)$ и $F_*(e_*^{I}(\theta),\theta)$ есть предельные значения функции $F(e,\theta)$ на кривой $e=e_*^{I}(\theta)$ соответственно из области $\dot{E}^{I}$ и E_*, то дифференцируя равенство $F^{I}(e_*^{I}(\theta),\theta)=F_*(e_*^{I}(\theta),\theta)$ и используя соотношения $S=-\partial F/\partial\theta$, $\rho=\partial F/\partial e$, получим, что и энтропия S непрерывна при переходе через линию $e=e_*^{I}(\theta)$. Аналогично рассматривается линия $e=e_*^{II}(\theta)$. Непрерывность U всюду следует из представления $U=\varphi+\theta\cdot S+\rho\cdot e$.

Итак, если плотность свободной энергии F известна в областях E^{I} и E^{II}, то она известна всюду в области E и непрерывна там вместе со своими производными $\partial F/\partial\theta=-S$ и $\partial F/\partial e=\rho$.

В закон сохранения энергии § I (3) входит коэффициент теплопроводности $æ$, который можно найти в каждой фазе (I или II), т.е. считать заданной функцией переменных θ и ρ, возможно терпящей разрыв первого рода при переходе через линию фазового равновесия $\rho=\rho_*(\theta)$. Трудно привести какие-либо аргументы, позволяющие определить его в области E_* новых переменных θ и e, поэтому будем считать $æ$ непрерывной функцией параметров θ и e всюду в области E, линейно зависящей от e на отрезках $I(\theta)$ в E_*. Так, например, поступают авторы [7] при определении характеристик двухфазной зоны. В.Т.Борисова. Последнее предположение – четвертое из вновь вводимых постулатов и полностью замыкает модель фазовых переходов в деформируемой упругой среде в случае одной пространственной переменной. Исходные постулаты модели хорошо согласуются с экспериментальными данными о связи давления с деформацией во всем интервале изменения деформаций при фазовых переходах первого рода в металлах [17, с. 540].

§ 3. Трехпараметрическая среда

Принципы, заложенные в основу математической модели фазовых переходов первого рода в двухпараметрической среде, полностью переносятся на более общий случай. Правда, в общем случае число независимых термодинамических параметров деформируемой упругой среды больше двух, и для замыкания модели сверх уже введенных нужны дополнительные аксиомы. Всюду ниже ограничимся малыми деформациями среды, линейной зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций и линеаризованным вариантом тождества Гиббса

$$\theta dS = dU - P : dE \tag{1}$$

Тождество (1), записанное для плотности свободной энергии $F = U - \theta S$

$$dF = - S d\theta + P : dE \tag{2}$$

предположение об изотропной зависимости F от тензора деформации E и линейная связь между тензором напряжений и деформацией означают, что в каждой фазе уравнение состояния $F = F(\theta, e_1, e_2)$ $(e_1 = tr\, E\,, \quad e_2 = (E : E - e_1^2/3)^{1/2})$ и тождество (2) полностью определяют термодинамическое состояние среды как функцию трех независимых параметров: θ, e_1, e_2. Следовательно, каждая фаза – трехпараметрическая среда, и естественно фазу, переходную между двумя наблюдаемыми, считать также трехпараметрической средой.

Выберем в качестве независимых параметров термодинамического состояния среды температуру θ и инварианты $\sigma_1 = (1/3)\, tr\, P$, $\sigma_2 = (P : P - 3\sigma_1^2)^{1/2}$ тензора напряжений. Если предположить, что в точке сплошной среды, где соприкасаются различные фазы, непрерывны θ и σ_1 и σ_2, то в пространстве независимых термодинамических параметров $(\theta, \sigma_1, \sigma_2)$ равновесному состоянию отвечает поверхность фазового равновесия, разделяющая области, точки кото-

...рых определяют различные фазы. Конкретный вид поверхности фазового равновесия получается, если потребовать непрерывность $\Phi = U - \theta \cdot S - P : E$ в точках соприкосновения фаз:

$$\Phi^{I}(\theta, \sigma_1, \sigma_2) = \Phi^{II}(\theta, \sigma_1, \sigma_2) .$$

Предположим, что поверхность Γ фазового равновесия задается уравнением (рис. 3а)

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1, \theta) \tag{3}$$

Согласно ранее изложенным принципам, вводя новые независимые термодинамические переменные θ, e_1, e_2, развернем поверхность фазового равновесия Γ в область переходного состояния E_*, отделяющую области E^{I} и E^{II}, соответствующие фазам I и П (рис. 3б). Отделимость этих областей и, тем самым, корректность определения различных фаз гарантирована условием термодинамической устойчивости – вогнутостью потенциала Гиббса $\Phi = \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \theta)$ $(\theta = const)$ как функции двух переменных σ_1, σ_2 (доказательство этого факта приведено в главе Ш § I). Постулат о справедливости тождества Гиббса

$$d\Phi = -S\,d\theta - e_1\,d\sigma_1 - e_2\,d\sigma_2 \tag{4}$$

записанного для термодинамического потенциала Φ и инвариантов тензоров напряжений и деформаций, или того же тождества, но записанного для плотности свободной энергии

$$dF = -S\,d\theta + \sigma_1\,de_1 + \sigma_2\,de_2 \tag{5}$$

и постулаты о непрерывности потенциала Φ и инварианта σ_1 всюду в области E изменения термодинамических параметров θ, e_1 и e_2 полностью определяют зависимые термодинамические переменные Φ, F, U, S, σ_1, σ_2 в переходной фазе.

В самом деле, рассмотрим сечения множества E_* плоскостями $\{\theta = const\}$ в виде

$$Q_c = \{(e_1, e_2, \theta) \in E_* \mid \theta = const\}$$

Как известно [22], для почти всех значений a множества уровня $\{\varphi_*(e_1, e_2, \theta) = a\}$ представляют собой конечное число гладких спрямляемых кривых либо замкнутых, либо с концами, выходящими на границы множества I_θ, разделяющих множества $\{\varphi_*(e_1, e_2, \theta) > a\}$, $\{\varphi_*(e_1, e_2, \theta) < a\}$ и таких, что

$$(\partial\varphi_*/\partial e_1)^2 + (\partial\varphi_*/\partial e_2)^2 > 0$$

($\varphi_*(e_1,e_2,\theta)$ – значение φ в области E_* предполагается как минимум дважды непрерывно дифференцируемой функцией). Покажем, что все связные компоненты множества уровня на самом деле есть отрезки прямых, соединяющих различные берега сечения Q_θ.

Перечисленные свойства линий уровня позволяют ввести в малой окрестности каждой связной компоненты множества уровня криволинейные координаты (ξ, η), где $\xi = \varphi_*(e_1, e_2, \theta)$. Обращаясь к тождеству (4) и равенству (3), видим, что в каждой окрестности $\sigma_1 = \sigma_1(\xi)$. Из этих же соотношений вытекает равенство

$$1 = d\varphi_*/d\xi = -[e_1 + e_2\,\partial\varphi(\sigma_1(a), \theta)/\partial\sigma_1](d\sigma_1(a)/d\xi)$$

на линиях уровня $\{\varphi_* = a\}$. Таким образом, вдоль каждой связной компоненты линии уровня линейная комбинация независимых переменных e_1 и e_2 постоянна.

Если M – точка на поверхности фазового равновесия Γ в пространстве переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \theta)$, I_M – отрезок в E_*, соответствующий M при отображении $(\sigma_1, \sigma_2, \theta) \to (e_1, e_2, \theta)$, то $\varphi_*(e_1, e_2, \theta) = \varphi^{I}(M) = \varphi^{II}(M)$, $(e_1, e_2, \theta) \in I_M$. По потенциалу φ единственным образом восстанавливается плотность свободной энергии F, также являющаяся непрерывной функцией независимых термодинамических переменных (e_1, e_2, θ) всюду в области E. Кроме того, непрерывны в E и производные функции F по переменным e_1, e_2 и θ, поскольку производные $\partial F/\partial e_1 = \sigma_1$ и $\partial F/\partial e_2 = \sigma_2$ непрерывны по построению, а непрерывность производной $\partial F/\partial\theta = -S$ доказывается аналогично случаю двухпараметрической среды. Определив функциональную зависимость инвариантов (σ_1, σ_2) тензора напряжений P от инвариантов (e_1, e_2) тензора деформаций $\mathcal{E}$ и температуры θ ($\sigma_i = \sigma_i(e_1, e_2, \theta)$, $i=1,2$), из термодинамического тождества (2) следует, что функциональная зависимость P от $\mathcal{E}$, также определена и равна соответственно

$$P(\mathcal{E}, \theta) = \sigma_1(e_1, e_2, \theta)\cdot I + \frac{\sigma_2(e_1, e_2, \theta)}{e_2}\left(\mathcal{E} - \frac{1}{3} e_1 \cdot I\right)$$

Доказательство этого равенства приведено в лемме 5 главы III параграфа I. Замыкает построение модели постулат о непрерывности коэффициента теплопроводности $\varkappa$ всюду в области E и линейной зависимости $\varkappa$ в E, от переменной e_1 вдоль отрезков прямых, на которых $\Phi_x = const$.

Возвращаясь к модели в целом, заметим, что авторам не известны работы теоретического или экспериментального характера, где бы анализировались равновесные фазовые переходы в трехпараметрических деформируемых упругих средах, в частности строились бы поверхности фазового равновесия в пространстве независимых термодинамических переменных. Тем не менее предположение непрерывности θ, σ_1, σ_2 и Φ в точках соприкосновения фаз не вызывает возражений, поскольку исходя из структуры тождества Гиббса (4) и проводя аналогию с многокомпонентными средами [25], где под знаком дифференциала в тождестве Гиббса стоят химические потенциалы компонент смеси и температура, непрерывные при изменении агрегатного состояния среды, естественно требовать непрерывность в точках фазового равновесия всех термодинамических переменных, стоящих под знаком дифференциала в тождестве (4), т.е. θ, σ_1, σ_2 и Φ. Поскольку в переходной зоне на линиях уровня потенциала Φ изменение деформаций носит пластический характер, то косвенным подтверждением правильности модели является факт существования пластической зоны между двумя чистыми фазами при твердофазных превращениях [40].

§ 4. Двухфазная среда, удовлетворяющая в обеих фазах закону Гука

В этом параграфе на конкретном примере сплошной среды, удовлетворяющей в фазах I и II закону Гука построим замкнутую систему определяющих уравнений состояния при изотермическом процессе твердофазных превращений. Температуру $\theta = const$, не являющуюся здесь параметром, указывать не будем.

1. Рассмотрим сначала сплошную среду, которая может находиться только в одном агрегатном состоянии. Пусть для нее определена функциональная зависимость свободной энергии от первого и второго инвариантов тензора деформации, являющейся гладкой функцией (по крайней мере один раз непрерывно-дифференцируемой):

$$F = F(e_1, e_2) \tag{1}$$

В средах, удовлетворяющих закону Гука эта функциональная зависимость определена как квадратичная

$$F = F_0 + \alpha_1/2 \cdot e_1^2 + \alpha_2/2 \cdot e_2^2 \tag{2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ – постоянные, характеризующие упругие свойства среды.

Естественным предположением для однофазной среды является предположение термодинамической устойчивости ее – выпуклость функции F по обеим переменным e_1, e_2 [25]:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F(e_1^{(1)}, e_2^{(1)})}{\partial e_i} - \frac{\partial F(e_1^{(2)}, e_2^{(2)})}{\partial e_i} \right) \left(e_i^{(1)} - e_i^{(2)} \right) > 0 \tag{3}$$

при $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}) \in E = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, $i = 1,2$, $(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) \neq (e_1^{(2)}, e_2^{(2)})$

Очевидно, что свободная энергия вида (2) удовлетворяет условию выпуклости.

Введем новые переменные

$$\sigma_1 = \partial F/\partial e_1 \quad , \quad \sigma_2 = \partial F/\partial e_2 \tag{4}$$

которые, как видно из термодинамического тождества § 2 (I2), являются инвариантами тензора напряжений. Воспользовавшись выпуклостью свободной энергии из равенства (4) определим обратную зависимость:

$$e_1 = e_1(\sigma_1, \sigma_2), \quad e_2 = e_2(\sigma_1, \sigma_2) \tag{5}$$

и в плоскости изменения параметров (σ_1, σ_2) определим потенциал Гиббса:

$$\Phi = \Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \hat{F}(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{i=1}^{2} e_i(\sigma_1, \sigma_2)\cdot\sigma_i \tag{6}$$

где
$$\hat{F}(\sigma_1, \sigma_2) = F(e_1(\sigma_1, \sigma_2), e_2(\sigma_1, \sigma_2))$$

Очевидно, что выполнены равенства

$$e_i(\sigma_1, \sigma_2) = -\partial\Phi(\sigma_1, \sigma_2)/\partial\sigma_i \quad , \quad i = 1,2 \tag{7}$$

Поэтому, как видно из (3), (5), (7), справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\partial\Phi(\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)})/\partial\sigma_i - \partial\Phi(\sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)})/\partial\sigma_i\right)(\sigma_i^{(1)} - \sigma_i^{(2)}) < 0$$

при $(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}) \in \Pi = \mathbb{R}\times[0, +\infty)$ и $(\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}) \neq (\sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)})$, $i = 1,2$,

то есть потенциал Гиббса является вогнутой функцией переменных (σ_1, σ_2).

Потенциал Гиббса Φ, соответствующий свободной энергии вида (2), вогнутый и определен равенством:

$$\Phi = F_0 - \sigma_1^2/2\alpha_1 - \sigma_2^2/2\alpha_2$$

2. Пусть изучаемая сплошная среда может находиться в двух различных агрегатных состояниях (фазах I и II), для которых известна зависимость свободной энергии от инвариантов тензора деформаций в каждой фазе.

$$F^{I} = F^{I}(e_1, e_2) \quad , \quad F^{II} = F^{II}(e_1, e_2)$$

Следуя предложенной в § 3 схеме, построим зависимость свободной энергии F от инвариантов тензора деформаций, описывающую различные фазы рассматриваемой нами сплошной среды. Точнее, в области определения $E = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ переменных (e_1, e_2) выделим области E^{I} и E^{II}, в которых F совпадает соответственно с F^{I} и F^{II}, а в оставшейся части E_* свободная энергия F, совпадает с функцией F_*, построенной в соответствии с феноменологической моделью.

Предположим, что в фазах I и П свободная энергия F^{I} и F^{II} удовлетворяют условию (3), тогда в области $\Pi = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ изменения инвариантов тензора напряжений (σ_1, σ_2) для обеих фаз мы можем определить потенциал Гиббса

$$\varphi^{I} = \varphi^{I}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \hat{F}^{I}(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{i=1}^{2} e_i^{I}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_i$$

$$\varphi^{II} = \varphi^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \hat{F}^{II}(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{i=1}^{2} e_i^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_i$$

Очевидно, что функции φ^{I}, φ^{II} являются вогнутыми.

Пусть две кривые на рис. 4 изображают потенциалы Гиббса двух фаз как функции переменной σ_1 (при заданной переменной σ_2). Точка пересечения обеих кривых определяет значение σ_1°, при котором (при данном σ_2) обе фазы могут находиться в равновесии друг с другом. При всех остальных значениях переменной σ_1 может существовать либо одна, либо другая фаза. Легко видеть, что при σ_1 меньше σ_1° существует, т.е. является устойчивой первая фаза, а при σ_1 больше σ_1° – вторая. Это следует из того, что устойчиво то состояние, в котором φ меньше (так как потенциал Гиббса стремится при заданных σ_1 и σ_2 к минимуму (см. [25]). Следовательно функция

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Pi} \{ \varphi^{I}(\sigma_1, \sigma_2), \varphi^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \}$$

является потенциалом Гиббса двухфазной среды. Легко видеть, что она является непрерывной, вогнутой функцией, совпадающей с функциями φ^{I}, φ^{II} в соответствующих областях Π^{I}, Π^{II}.

Если в фазах I и П свободная энергия F^{I} и F^{II} вида (2), то потенциал Гиббса φ в области Q равен

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} F_0 - \sigma_1^2/2\alpha_1^{I} - \sigma_2^2/2\alpha_2^{I}, & (\sigma_1, \sigma_2) \in \Pi^{I}, \\ F_0 - \sigma_1^2/2\alpha_1^{II} - \sigma_2^2/2\alpha_2^{II}, & (\sigma_1, \sigma_2) \in \Pi^{II} \end{cases} \quad (8)$$

области Π^{I}, Π^{II} определены следующими неравенствами:

$$\Pi^{I} = \{ (\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_2 < \gamma |\sigma_1| \}$$

$$\Pi^{II} = \{ (\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_2 > \gamma |\sigma_1| \}$$

если только

$$\alpha_1^{I} < \alpha_1^{II}, \quad \alpha_2^{II} < \alpha_1^{I}, \quad F_0^{I} = F_0^{II} \quad (9)$$

постоянная γ определяется равенством

$$\gamma = ((1/\alpha_1^{I} - 1/\alpha_1^{II}) / (1/\alpha_2^{II} - 1/\alpha_2^{I}))^{1/2} \quad (10)$$

Заметим, что равенство $F_0^{I} = F_0^{II}$ мы предположили для упрощения записи математических формул, в принципе не уменьшая общности построения уравнений состояния двухфазной среды. Если $\alpha_1^{I} > \alpha_1^{II}$, $\alpha_2^{II} > \alpha_2^{I}$, то, переобозначив фазы I и П, мы придем к тем же неравенствам (9). Фазовый переход между двумя фазами, у которых постоянные α_1, α_2 не удовлетворяют (9), не может происходить в соответствии с феноменологической моделью, поскольку при любых (σ_1, σ_2) нет равенства потенциалов Гиббса этих фаз. Множество $\Gamma = \{ (\sigma_1, \sigma_2) / \sigma_2 = \gamma |\sigma_1| \}$ есть линия фазового равновесия, разделяющая множества Q^{I} и Q^{II}.

Исходя из построения феноменологической модели осуществим обратную замену переменных $(\sigma_1, \sigma_2) \to (e_1, e_2)$ с помощью потенциала Гиббса (8) по формулам (5), (7). Отображение (5), (7) II

переводит всю область Π переменных (σ_1, σ_2) в часть области E переменных (e_1, e_2). А именно область Π^{I} переводит в область $E^{I} = \{(e_1, e_2) \mid e_2 \leq \gamma^{I} |e_1|\}$, а область G^{II} – в $E^{II} = \{(e_1, e_2) \mid e_2 \geq \gamma^{II} |e_1|\}$, где

$$\gamma^{I} = (\alpha_1^{I} / \alpha_2^{I})\gamma < \gamma^{II} = (\alpha_1^{II} / \alpha_2^{II})\gamma \tag{II}$$

На множестве Γ отображение (5), (7) не определено, точнее, оно там многозначно и множеству Γ соответствует множество

$$E_* = \{(e_1, e_2) \mid \gamma^{I} |e_1| < e_2 < \gamma^{II} |e_2|\}$$

Всюду в E^{I} и E^{II} определена обратная к (5), (7) замена переменных:

$$\sigma_1 = \hat{\sigma}_1(e_1, e_2) \quad , \quad \sigma_2 = \hat{\sigma}_2(e_1, e_2)$$

и, тем самым, свободная энергия F двухфазной среды

$$F(e_1, e_2) = \varphi(\hat{\sigma}_1(e_1, e_2), \hat{\sigma}_2(e_1, e_2)) - \sum_{i=1}^{2} \hat{\sigma}_i(e_1, e_2) \cdot e_i$$

По построению функция F совпадает с F^{I}, F^{II} в области G^{I}, G^{II} соответственно. В соответствии с ранее предложенной конструкцией функция $\Phi(e_1, e_2) = \Phi(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$ и $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ единственным образом продолжаются в область E_* так, чтобы они были непрерывными при всех значениях (e_1, e_2) из E.

А именно, значения потенциала Гиббса φ в области E_* в пространстве переменных (σ_1, σ_2) совпадают со значениями потенциала (8) на границах Π^{I}, Π^{II}, т.е. на множестве Γ:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \psi(\sigma_1)) \equiv \equiv F_0 - \sigma_1^2 / 2(1/\alpha_1^{I} + \gamma^{-2}/\alpha_2^{I}) \tag{I2}$$

где $\sigma_2 = \psi(\sigma_1)$ – уравнение границы Γ, в нашем случае оно равно

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1) = \begin{cases} \gamma\sigma_1 & , \sigma_1 > 0 \\ -\gamma\sigma_1 & , \sigma_1 < 0 \end{cases}$$

Поскольку в E_* выполняется тождество § 3 (4), то в переходной фазе E_* выполнено равенство:

$$d\varphi(\sigma_1, \varphi(\sigma_1))/d\sigma_1 = -(e_1 + e_2\varphi'(\sigma_1)) \tag{I3}$$

которое определяет зависимость $\sigma_1 = \sigma_1(e_1, e_2)$ (при разрешении его относительно параметра σ_1), а также зависимость

$$\sigma_2 = \sigma_2(e_1, e_2) \equiv \varphi(\sigma_1(e_1, e_2)) \tag{I4}$$

Из (7), (8), (I2) – (I4) следует, что окончательные формулы уравнений состояния $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ определены и равны:

$$(\sigma_1(e_1,e_2), \sigma_2(e_1,e_2)) = \begin{cases} (\alpha_1^{I} e_1, \alpha_2^{I} e_2), & (e_1, e_2) \in E^{I} \\ (\beta(e_1 + \gamma e_2), \gamma\beta(e_1 + \gamma e_2)), & (e_1, e_2) \in E_*,\ e_1 > 0, \\ (\beta(e_1 - \gamma e_2), -\gamma\beta(e_1 - \gamma e_2)), & (e_1, e_2) \in E_*,\ e_1 < 0, \\ (\alpha_1^{II} e_1, \alpha_2^{II} e_2), & (e_1, e_2) \in E^{II} \end{cases} \tag{I5}$$

где $\beta = 1/(1/\alpha_1^{I} + \gamma^2/\alpha_2^{I})$.

Легко проверить, что функции $\sigma_i(e_1, e_2)$ непрерывны всюду в E.

Поскольку конкретный вид функций F и Φ во всей плоскости в дальнейшем нам не понадобится, то здесь его не будем приводить, только заметим, что они однозначно восстанавливаются исходя из формул (4), (I5).

ГЛАВА 2

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ ОДНОМЕРНОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ СРЕДЫ

Во второй главе изложены результаты, состоящие в доказательстве существования обобщенных решений задач, описывающих фазовый переход в упругой среде при одномерном изотермическом движении.

§ I. Постановка задач

I. Уравнения. В работе изучается одномерное изотермическое движение сплошной среды. Заметим, что изотермическая среда является предельным случаем теплопроводной среды, когда коэффициент теплопроводности стремится к бесконечности, а температура $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \equiv const$) в среде поддерживается за счет внешних источников тепла. Поэтому система законов сохранения гл. I § I (I) – (3) при $f=0$ и $g=0$, записанная в лагранжевых координатах, принимает вид [37]

$$\partial e/\partial t - \partial v/\partial x = 0 \tag{I}$$

$$\partial v/\partial t - \partial p/\partial x = 0 \tag{2}$$

где t – время, x – лагранжева координата, e – удельный объем, v – скорость частицы среды, p – напряжение среды. Система (I), (2) замыкается уравнением состояния $p = p(e, \theta_0)$, в дальнейшем эту зависимость будем обозначать

$$p = p(e) \tag{3}$$

Обратим внимание, что удельный объем $e = 1/\rho$ принимает только положительные значения, а напряжение p в газовой динамике с необходимостью – отрицательные значения, так как оно, взятое с обратным знаком, равно давлению среды.

К системе (I), (2) можно прийти из других аксиоматических предположений, обычно используемых в теории упругости, когда среда предполагается изотермической, а плотность среды постоянной, тогда система гл. I § I (I) – (3) сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \partial p(\partial u/\partial x)/\partial x = 0$$

(u – смещение среды), описывающему напряженно-деформированное состояние упругой среды. Замена переменных, определяемых формулами

$$\partial u/\partial t = v, \quad \partial u/\partial x = e$$

сводит это уравнение к системе (I), (2). Деформация среды $\partial u/\partial x = e$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, на значения функции $p = p(e)$ в теории упругости не накладывается никаких ограничений. Поэтому в дальнейшем, для рассмотрения наиболее общей ситуации, уравнение состояния (3) будем принимать как функцию, действующую из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Предположим, что среда может находиться в двух различных фазах, тогда, как легко видеть из построения феноменологической модели фазовых переходов для двухпараметрической среды (см. гл. I § 2), уравнение состояния (3) при изотермическом движении среды является монотонно-возрастающей функцией с конечным участком постоянства. Участки строгой монотонности p соответствуют двум различным "чистым" фазам, а постоянства – переходной.

В дальнейшем будем предполагать, что уравнение состояния $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

I) $p(e)$ – является непрерывной, имеющей кусочно-непрерывную производную и на любом конечном интервале производная имеет конечное число точек разрыва;

2) существует отрезок $I=[e_*, e^*]$ такой, что

$$\rho'(e)>0 \quad \text{для} \quad e\in \mathbb{R}-I$$

$$\rho'(e)\equiv 0 \quad \text{для} \quad e\in I .$$

Очевидно, что система (I), удовлетворяющая (I), (2) является нестрого гиперболической.

2. Постановка задачи Коши. Пусть движение среды происходит в полуплоскости $Q=\{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R},\ t\geq 0\}$. При $t=0$ зададим начальные условия. А именно, для системы (I) – (3) будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ заданы функции скорости

$$v(x,0)=v_0(x), \quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

и удельного объема (деформации)

$$e(x,0)=e_0(x), \quad x\in\mathbb{R} \tag{5}$$

Поскольку задача Коши, даже локально, может не иметь гладкого решения при любой гладкости начальных данных, то под решением задачи (I) – (5) будем понимать обобщенное решение, т.е. ограниченную, измеримую вектор-функцию $z(x,t)=(v(x,t),\ e(x,t))$, определенную на Q и удовлетворяющую равенствам:

$$\iint\limits_Q (vf_t-\rho(e)f_x)\,dx\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_0 f(x,0)\,dx=0, \tag{6}$$

$$\iint\limits_Q (eg_t-vg_x)\,dx\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e_0\, g(x,0)\,dx=0,$$

где $f,g\in C_0^1(Q)=\{\varphi(x,t)\in C^1(Q)$, носитель функции φ является компактом$\}$,

а также неравенству:

$$\iint\limits_Q \{(v^2/2+\int^e \rho(\xi)\,d\xi)f_t-\rho(e)vf_x\}\,dx\,dt\geq 0, \tag{7}$$

где $f(x,t)$ – произвольная неотрицательная функция из $C_0^1(Q)$ такая, что $f(x,0)\equiv 0$.

Неравенство (7) хорошо известно как условие возрастания энтропии полной системы в случае изотермического движения сплошной среды (см. [37]), оно служит правилом отбора "правильных" решений системы (I), (2). Обратим внимание, что решение задачи Коши будет построено как предел последовательности решений, удовлетворяющих условию устойчивости (определение этого условия сформулировано в § 2, физическое обоснование его дано в [37]), которое является более сильным, чем (7) и, по крайней мере, в классе кусочно-гладких решений, обеспечивающее единственность решения , но поскольку условие устойчивости для предельного решения в классе функций ограниченной вариации не удается сформулировать, то определение решения дано таким, как оно приведено выше.

Определим класс начальных данных, при которых покажем существование обобщенного решения. Функции $v_0(x)$, $e_0(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $v_0(x), e_0(x)$ – ограниченные функции;

б) $e_0(x)$ – монотонная функция и для любых $x_1 < x_2$, $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|v_2 - v_1| \le \left| \int_{e_1}^{e_2} (p'(y))^{1/2} dy \right|,$$

где $(v_i, e_i) = (v_0(x_i), e_0(x_i))$, $i = 1,2$

Во втором параграфе этой главы будет доказана следующая теорема.

<u>Теорема I</u>. Пусть уравнение состояния (3) обладает свойствами I), 2) и начальные данные (4), (5) удовлетворяют условиям а), б), тогда задача Коши (I) – (5) имеет обобщенное решение $z(x,t) = (v(x,t), e(x,t))$ и для него выполнены априорные оценки:

$$\operatorname*{Var}_{x \in \mathbb{R}} \{ z(\cdot, t) \} < C \quad \text{для любого} \quad t \ge 0;$$

$$\max_{(x,t) \in Q} \{ z(x,t) \} < C$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z(x,t_2) - z(x,t_1)|dx \le c|t_2 - t_1| \quad \text{для любых} \quad t_2, t_1 \ge 0$$

функции $e(x,t)$ – монотонная по x при фиксированном $t \geq 0$. Здесь $\operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}} g(\cdot,t)$ – вариация функции g по x на $\mathbb{R}$ при фиксированном t, константа C не зависит от t.

3. Постановка начально – краевой задачи. Движение среды происходит в полосе $Q_0 = \{(x,t) \mid x\in[0,1], t\geq 0\}$. При $x=0$, $x=1$ зададим краевые, а при $t=0$ начальные условия, для системы (1) – (3) будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ заданы функции скорости

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x\in[0,1] \tag{8}$$

и удельного объема (деформации)

$$e(x,0) = e_0(x); \quad x\in[0,1] \tag{9}$$

а на боковой границе полосы Q_0 задана функция удельного объема (деформации):

$$e(0,t) = e^0(t), \; e(1,t) = e^1(t), \quad t\geq 0 \tag{10}$$

<u>Под решением начально – краевой задачи (1) – (3), (8) – (10)</u> будем понимать обобщенное решение, т.е. ограниченную измеримую вектор-функцию $z(x,t) = (v(x,t), e(x,t))$, определенную на Q_0 и удовлетворяющую равенствам:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{Q_0} (v f_t - p(e) f_x)\,dx\,dt + \int\limits_0^1 v_0 f(x,0)\,dx + \int\limits_0^{+\infty}[p(e^1(t))f(1,t) - p(e^0(t))f(0,t)]\,dt \\ \iint\limits_{Q_0} (e g_t - v g_x)\,dx\,dt + \int\limits_0^1 e_0\, g(x,0)\,dx = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $f, g \in C_0^1(Q_0)$, при этом $g(0,t) = g(1,t) \equiv 0$,

а также неравенству

$$\iint_{Q_0} \{ (v^2/2 + \int^{e} p(y)dy) f_t - p(e)v \} dx\, dt \geq 0, \qquad (12)$$

где f — произвольная неотрицательная функция из $C_0^1(Q_0)$ такая, что

$$f(0,t) = f(1,t) = f(x,0) \equiv 0$$

Определим класс начальных и граничных данных, при которых докажем существование обобщенного решения. Функции $v_0(x), e_0(x)$, $e^0(t), e^1(t)$ удовлетворяют следующим условиям

в) $e^0(t), e^1(t)$ — ограниченные функции; $e_0(x)$ — монотонная, при этом I) если она монотонно-возрастающая функция, то $e^0(t)$ — монотонно-убывающая, а $e^1(t)$ — монотонно-возрастающая, 2) если она монотонно-убывающая, то $e^0(t)$ — монотонно-возрастающая, а $e^1(t)$ — монотонно-убывающая;

г) для любых $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ выполнено неравенство

$$|v_2 - v_1| \leq \left| \int_{e_1}^{e_2} (p'(y))^{1/2} dy \right|,$$

где $(v_i, e_i) = (v_0(x_i), e_0(x_i)), \quad i = 1,2$

д) выполнены условия согласования

$$e^0(0) = e_0(0), \quad e^1(0) = e_0(1)$$

В параграфе 2 этой главы будет доказана

<u>Теорема А.</u> Пусть $p = p(e)$ обладает свойствами I), 2), начальные и граничные данные (8) - (I0) удовлетворяют условиям в), г), д), тогда начально-краевая задача (I) - (3), (8) - (I0) имеет обобщенное решение $z(x,t)$ и для него выполнены оценки

$$\operatorname*{Var}_{x\in[0,1]} \{ z(\cdot,t) \} < C, \qquad \text{для любого } t \geq 0, \ \max_{(x,t)\in Q_0} \{z(x,t)\} < C$$

функция $e(x,t)$ — монотонна по x при фиксированном $t \geq 0$,

$$\int_0^1 |z(x,t_2) - z(x,t_1)| dx \leq C |t_2 - t_1| \qquad \text{для любых } t_1, t_2 \geq 0,$$

4. Схема доказательства существования обобщенных решений задач Коши и начально-краевой. Для обеих задач предварительно будет построена последовательность кусочно-линейных функций $p_h(e)$, сходящихся к $p(e)$ равномерно в $C(\mathbb{R})$, последовательность кусочно-постоянных функций $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, сходящихся почти всюду к $(v_0(x), e_0(x))$ на оси $\mathbb{R}$. Для системы (I), (2) с кусочно-линейной функцией $p_h(e)$ и кусочно-постоянными начальными данными (задача Римана) покажем существование устойчивого обобщенного решения. Затем, используя схему Глимма [43] и существование решения задачи Римана, строится семейство "приближенных" решений исходных задач. Априорные оценки "приближенных" решений исходных задач, не зависящие от параметра h, используя принцип компактности Хелли (см. [32]) и теорему Глимма о сходимости невязки "приближенных" решений (см. [47, 48]) позволяют доказать существование обобщенных решений исходных задач. Основным моментом во всем доказательстве является получение необходимых априорных оценок.

§ 2. Разрешимость задачи Коши

Рассматривается задача Коши для системы из двух уравнений

$$\partial e/\partial t - \partial v/\partial x = 0,$$
$$\partial v/\partial t - \partial p/\partial x = 0, \quad (x,t) \in Q \qquad \text{(I)}$$

с начальными данными

$$e(x,0) = e_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

удовлетворяющими условиям а), б) (см. § I). Система замыкается уравнением состояния

$$p = p(e) \qquad (3)$$

обладающим свойствами I), 2) (см. § I).

В дальнейшем будет рассмотрен случай, когда функция $e_0(x)$ монотонно-возрастающая. (случай, когда $e_0(x)$ – монотонно-убывающая, рассматривается аналогично).

I. Аппроксимация начальных данных уравнения состояния. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \leq x_2$ и $f = f(x)$ – некоторая функция, определенная на $\mathbb{R}$. Обозначим через $D_f(x_1, x_2)$ и $D_f^*(x_1, x_2)$ соответственно замкнутые выпуклые оболочки множеств $\{(x,y) \mid y \geq f(x), \ x_1 \leq x \leq x_2\}$ и $\{(x,y) \mid y \leq f(x), x_1 \leq x \leq x_2\}$. Для $x_1 \leq x \leq x_2$ определим функции

$$b(x, x_1, x_2, f) = \min\{y \mid (x,y) \in D_f(x_1, x_2)\},$$

$$b_*(x, x_1, x_2, f) = \max\{y \mid (x,y) \in D_f^*(x_1, x_2)\}$$

<u>Предложение I.</u> Существует последовательность кусочно-линейных функций p_h, удовлетворяющих условиям I), 2) и таких, что

$$|p_h(e) - p_h(e')| \leq C|e - e'|, \qquad (4)$$

$$|p(e) - p_h(e)| \leq Ch, \quad e, e' \in [e_0^-, e_0^+]$$

$$\int_{e_0^-}^{\pm\infty} (p_h'(y))^{1/2} dy = \pm\infty \qquad (5)$$

где $h = 2^{-N}$, $N = 1, 2, \ldots$, $e_0(\pm\infty) = e_0^{\pm}$. Здесь и далее C – константа, зависящая только от e_0^-, e_0^+, $\max\{p(e), p'(e) \mid e \in [e_0^-, e_0^+]\}$ и $\max\{v_0(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, причем не зависящая от h. Существует последовательность кусочно-постоянных функций $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, сходящихся почти всюду к $(v_0(x), e_0(x))$. Для каждого h функции $(v_0^h(x), e_0^h(x))$ и p_h удовлетворяют условиям:

А) $e_0^- \leq e_0^h(x) \leq e_0^+$, $\max\{v_0^h(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \leq C$

Б) если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 \leq x_2$, тогда

$$e_1 \le e_2 \quad ,$$

$$\int_{e_1} [b'(y, e_1, e_2, p_h)]^{1/2} dy \le v_2 - v_1 \le \int_{e_1}^{e_2} [b_+(y, e_1, e_2, p_h)]^{1/2} dy ,$$

$$(v_i, e_i) = (v_0^h(x_i), e_0^h(x_i)), \quad i = 1, 2 .$$

Для доказательства предложения нам понадобятся следующие леммы.

Лемма I. Пусть $f = f(y)$ монотонно-возрастающая функция, $y_1 \le \ldots \le y_i \le \ldots \le y_s$, тогда

$$\sum_{i=1}^{s-1} [(f(y_{i+1}) - f(y_i))(y_{i+1} - y_i)]^{1/2} \le [(f(y_s) - f(y_1))(y_s - y_1)]^{1/2}$$

Доказательство. Обозначим $\alpha_i = (y_{i+1} - y_i)^{1/2}$, $\beta_i = (f(y_{i+1}) - f(y_i))^{1/2}$, тогда

$$\sum_{i=1}^{s-1} [f(y_{i+1}) - f(y_i))(y_{i+1} - y_i)]^{1/2} = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i \beta_i \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i)^2 \sum_{i=1}^{s-1} (\beta_i)^2 \right)^{1/2} = [(f(y_s) - f(y_1))(y_s - y_1)]^{1/2}$$

□

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы I и $f \in C^1[y_1, y_s]$, тогда

$$\int_{y_1}^{y_s} (f'(y))^{1/2} dy \le \sum_{i=1}^{s-1} [(f(y_{i+1}) - f(y_i))(y_{i+1} - y_i)]^{1/2} .$$

Доказательство. Достаточно показать, что на интервале $[y_i, y_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$J_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} (f'(y))^{1/2} dy \le [(f(y_{i+1}) - f(y_i))(y_{i+1} - y_i)]^{1/2}$$

Разобьем интервал $[y_i, y_{i+1}]$ на L интервалов $y_i = b_1 < \ldots < b_j < \ldots < b_{L+1} = y_{i+1}$, $b_{j+1} - b_j = \Delta$, где $\Delta = (y_{i+1} - y_i)/L$, $L = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Обозначим

$S_L = \sum_{j=1}^{L} [(f(b_{j+1}) - f(b_j))(b_{j+1} - b_j)]^{1/2}$. Из леммы I видно, что S_L – монотонно-убывающая последовательность, стремящаяся к J_i при $L \to +\infty$. Поэтому $J_i \le S_1 = [(f(y_{i+1}) - f(y_i))(y_{i+1} - y_i)]^{1/2}$ □

Доказательство предложения I. Определим последовательность

$$(v_0^h(x), e_0^h(x)) = \begin{cases} (v_0(-\infty), e_0(-\infty)); & x \le -N \\ (v_0((m+1)h), e_0((m+1)h)), & mh < x \le (m+2)h \\ m - \text{четно}, & -M \le m \le M-2,\ M = h^{-1}N \\ (v_0(+\infty); e_0(+\infty)), & x > N \end{cases} \qquad (6)$$

Эта последовательность сходится почти всюду к $(v_0(x), e_0(x))$ при $h \to 0$. Обозначим значения функции $e_0^h(x)$ через $\{a_i \mid i = 1, \ldots, k,\ e_0^- = a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_k = e_0^+\}$. Каждый интервал $[a_i, a_{i+1}]$ разобьем на h^{-1} равных частей и к точкам этого разбиения отрезка $[e_0^-, e_0^+]$ добавим точки, в которых функция $p'(e)$ терпит разрыв. Совокупность всех этих точек конечна, обозначим их $\{b_j^i \mid j = 1, \ldots, k^{(i)},\ i = 1, \ldots, k-1 : a_i = b_1^i < b_2^i < \ldots < b_{k^{(i)}}^i = a_{i+1}\}$.

Определим последовательность $\{p_h(e)\}$ кусочно-линейных, монотонно-возрастающих функций с вершинами в точках $(b_j^i, p(b_j^i))$ таких, что $p_h(e)$ вне интервала $[e_0^-, e_0^+]$ отлична от постоянной.

Очевидно, что утверждения предложения непосредственно следуют из построения функций $p_h(e)$, $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, определения функций $b(y, e_1, e_2, p_h)$, $b_*(y, e_1, e_2, p_h)$ и леммы 2. □

Построение решения задачи Римана и семейства "приближенных" решений задачи (I) – (3) проведем для уравнения состояния p_h и начальных данных (v_0^h, e_0^h), построенных в этом пункте, поэтому для упрощения записи в пп. 2, 3, 4 параметр h будет опущен.

2. **Построение обобщенного решения задачи Римана.** Задачей Римана называется

задача Коши (I), (3) с начальными данными

$$(v_0(x), e_0(x)) = \begin{cases} (v_l, e_l), & x \le c \\ (v_r, e_r), & x > c \end{cases} \qquad (7)$$

где (v_r, e_r), (v_l, e_l) – некоторые постоянные.

В работах [II, 53] была показана разрешимость задачи Римана. В этом параграфе мы кратко опишем метод построения решения, предложенный в этих работах.

Хорошо известно, что если функция $z(x,t) = (v(x,t), e(x,t))$ удовлетворяет (I) во всех точках гладкости и имеет кусочно-гладкую линию разрывности в плоскости переменных (x,t), то она является обобщенным решением тогда и только тогда, когда удовлетворяет отношениям Гюгонио вдоль каждой линии разрывности $x = x(t)$:

$$x'[v] = -[p], \quad x'[e] = -[v]$$

где $[w] = w(x+0,t) - w(x-0,t)$.

Поскольку обобщенное решение задачи Римана не единственно (см. [37]), мы наложим на решение дополнительное условие, являющееся более сильным, чем условие возрастания энтропии (§ I (7)), и которое гарантирует единственность решения задачи (см. [54]).

<u>Определение</u>. Пусть $z(x \pm c, t) = z_\pm = (v_\pm, e_\pm)$. Обозначим $W(e) = (p(e_+) - p(e_-))(e - e_-)/(e_+ - e_-) + p(e_-)$.

Обобщенное решение $z(x,t)$ задачи (I), (3), (7) является устойчивым, если во всех точках разрывности выполняются следующие свойства:

I. Если $v_+ > v_-$, $W(e) \ge p(e)$ для всех точек e на интервале $[e_-, e_+]$, если $e_+ > e_-$; $[e_+, e_-]$, если $e_+ < e_-$.

2. Если $v_+ < v_-$, то $W(e) \le p(e)$ для всех точек e на интервале $[e_-, e_+]$, если $e_+ > e_-$; $[e_+, e_-]$, если $e_+ < e_-$.

Обозначим

$$q(e, e_1) = \begin{cases} \int_{e_1}^{e} [b'(y, e, e_1, p)]^{1/2} dy, & e < e_1 \\ \int_{e_1}^{e} [b_*'(y, e_1, e, p)]^{1/2} dy, & e \geq e_1 \end{cases}$$

и определим функции

$$F^{\pm}(e, e_1, v_1) = v_1 \pm q(e, e_1)$$

$F^+(e)$ убывает, $F^-(e)$ возрастает. В силу равенства (5) следует, что $q(e, e_1) \to \pm\infty$ при $e \to \pm\infty$, тогда для произвольных двух заданных точек (e_ℓ, v_ℓ), (e_2, v_2) кривые $F^+(e, e_2, v_2)$, $F^-(e, e_\ell, v_\ell)$ пересекаются. Заметим, что наличие области постоянства функции ρ приводит к тому, что пересечение может происходить по целому отрезку. Поэтому от кривых $F^{\pm}$, рассматриваемых на плоскости переменных (v, e) перейдем к кривым на (v, ρ) - плоскости следующим образом. Положим

$$G^{\pm}(\rho, e_1, v_1) = F^{\pm}(O_1(\rho), e_1, v_1),$$

$$O_1(\rho) = \begin{cases} \min\{e \mid e \geq e_1, \rho(e) = \rho\} & \text{при } \rho \geq \rho(e_1), \\ \max\{e \mid e \leq e_1, \rho(e) = \rho\} & \text{при } \rho \leq \rho(e_1) \end{cases} \tag{8}$$

$$g(\rho, e_1) = q(O_1(\rho), e_1)$$

<u>Предложение 2</u>. Для любых двух заданных точек (e_ℓ, v_ℓ), (e_2, v_2) существует единственная точка $(\bar{v}, \bar{\rho})$ такая, что

$$\bar{v} = G^+(\bar{\rho}, e_2, v_2) = G^-(\bar{\rho}, e_\ell, v_\ell)$$

<u>Предложение 3</u>. Если $v_\ell = F^+(e_\ell, e_2, v_2)$, то задача Римана (I), (3), (7) имеет обобщенное устойчивое решение вида $(v, e)(x, t) = (v, e)(x/t)$ и такое, что $(v, e)(x/t) = (v_\ell, e_\ell)$ при $x/t < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \geq 0$. Более того, если $x_1 < x_2$, $x_i \in \mathbb{R}$, тогда для каждого $t \geq 0$:

$$(e(x_2, t) - e(x_1, t))(e_2 - e_\ell) \geq 0,$$

если $0 \le t_1 < t_2$, тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$(v(x,t_2) - v(x,t_1))(v_r - v_l) \le 0$$

Доказательство. Рассмотрим случай $e_l < e_r$. Доказательство, когда $e_r \le e_l$ аналогично. Для упрощения записи введем обозначение $b(e) = b(e, e_l, e_r, \rho)$. Поскольку $b'(e)$ существует везде за исключением, быть может, конечного числа точек, то доопределим ее в этих точках так, чтобы она была непрерывна слева в этих точках. График функции $y = b(e)$ на интервале (e_l, e_r) терпит перегибы в конечной последовательности точек $e_l = e_1 < \ldots < e_i < e_{i+1} < \ldots < e_k = e_r$ и определим решение следующим образом:

$$(v,e)(x,t) = \begin{cases} (v_l, e_l), & [b'(e_l+0)]^{1/2} \ge x/t \\ (v_i, e_i), & [b'(e_i-0)]^{1/2} < x/t \le [b'(e_i+0)]^{1/2} \\ (v_r, e_r), & [b'(e_r-0)]^{1/2} < x/t \end{cases} \qquad (9)$$

где $\quad v_i = v_r - \int_{e_r}^{e_i} [b'(y)]^{1/2} dy$

Из геометрических соображений очевидно, что $b'(e_l+0) = b'(e_l-0) < \ldots < b'(e_i+0) = b'(e_{i+1}-0) < \ldots < b'(e_k+0) = b'(e_r-0)$, т.е. решение в областях $\{(x,t) \mid [b'(e_l+0)]^{1/2} \ge x/t\}$, $\{(x,t) \mid [b'(e_r-0)]^{1/2} < x/t\}$, $\{(x,t) \mid [b'(e_i-0)]^{1/2} < x/t \le [b'(e_i+0)]^{1/2}\}$ однозначно определено. Очевидно, что $(v,e)(x,t)$ является обобщенным устойчивым решением. □

Предложение 4. Если $v_r = F^-(e_r, e_l, v_l)$, то задача Римана (I), (3), (7) имеет обобщенное устойчивое решение вида $(v,e)(x,t) = (v,e)(x/t)$ и такое, что $(v,e)(x,t) = (v_r, e_r)$ при $x/t \ge \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \le 0$. Более того, если $x_1 < x_2$, тогда для каждого $t \ge 0$ $\quad (e(x_2,t) - e(x_1,t))(e_r - e_l) \ge 0$ и если $0 \le t_1 < t_2$, тогда для каждого x

$$(v(x,t_2) - v(x,t_1))(v_r - v_l) \ge 0$$

<u>Предложение 5.</u> Для любых данных точек $(v_l, e_l), (v_r, e_r)$ задача Римана имеет решение вида $z(x,t) = (v(x,t), e(x,t)) = (v,e)(x/t) = Z(x/t; z_l, z_r)$, удовлетворяющее условию устойчивости.

<u>Доказательство.</u> Из предложения 2 следует, что существует $(\bar{p}, \bar{v})$ такая, что $\bar{v} = G^+(\bar{p}, e_r, v_r) = G^-(\bar{p}, e_l, v_l)$, но поскольку $G^+(\bar{p}, e_r, v_r) = F^+(O_r(\bar{p}), e_r, v_r)$, то по предложению 3 существует решение $(\tilde{V}, \tilde{E})(x/t)$ задачи (I), (3), (7) с данными:

$$(v_0(x), e_0(x)) = \begin{cases} (\bar{v}, O_r(\bar{p})), & x \le 0 \\ (v_r, e_r), & x > 0 \end{cases}$$

такое, что $(\tilde{V}, \tilde{E})(x/t) = (\bar{v}, O_r(\bar{p}))$, $x/t \le \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \ge 0$.

По предложению 4 существует решение $(\bar{V}, \bar{E})(x/t)$ задачи (I), (3), (7) с данными:

$$(v_0(x), e_0(x)) = \begin{cases} (\bar{v}, O_l(\bar{p})), & x > 0 \\ (v_l, e_l), & x \le 0 \end{cases}$$

такое, что $(\bar{V}, \bar{E})(x/t) = (\bar{v}, O_l(\bar{p}))$, $x/t > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \le 0$

Функция

$$(V, E)(x,t) = \begin{cases} (\tilde{V}, \tilde{E})(x,t), & x \le 0 \\ (\bar{V}, \bar{E})(x,t), & x > 0 \end{cases}$$

является искомым решением. Заметим, что если $O_r(\bar{p}) \ne O_l(\bar{p})$, то ось $x = 0$ является контактным разрывом. В случае монотонного уравнения состояния его не возникает. □

3. Р а з н о с т н а я с х е м а Г л и м м а . При доказательстве существования решения задачи (I) – (3) используем схему Глимма [48]. Сначала строится семейство "приближенных" решений. Выберем шаг сетки по оси x, равный h, по оси

t – равный S, удовлетворяющие условию

$$h/S \geqslant \max\{(p'(e))^{1/2} \mid e \in [e_0^-, e_0^+]\} \qquad \text{(IO)}$$

Отношение h/S держим фиксированным, т.е. S являются функцией от h. На полуплоскости Q введем расширяющуюся "шахматную" сетку точек (mh, nS), $(m,n) \in Y = \{n = 0, 1, \dots$, а m при каждом n пробегает множество целых чисел таких, что $m+n$ четно и $-(M+n) \leq m \leq (M+n)$, $M = h^{-1}N\}$. Пусть функция $Z(x,t) = (v(x,t), e(x,t))$ кусочно-постоянна на слое $t = nS$, где она имеет постоянные значения $Z_{n,m} = Z(mh-0, nS) = (v_{n,m}, e_{n,m})$, при этом для $x \leq -(M+n)h$, $Z(x,nS) = (v_0(-\infty), e_0(-\infty))$; для $x > (M+n)h$, $Z(x,nS) = (v_0(+\infty), e_0(+\infty))$. Опишем процедуру построения по известным $Z_{n,m}$ "приближенного" решения $Z(x,t)$ в полосе $nS \leq t < (n+1)S$ и последующем выборе постоянных значений $Z_{n+1,m}$. Согласно предложению 5 существует решение

$$Z(x,t) = Z((x-mh)/(t-nS);\, Z_{n,m}, Z_{n,m+2}),\ t \geq nS$$

задачи Римана для системы (I) с начальными данными

$$Z(x,t) = \begin{cases} Z_{n,m}, & x \leq mh \\ Z_{n,m+2}, & x > mh \end{cases}$$

Как мы покажем далее, если начальные данные в момент времени $t = nS$ удовлетворяют условию $e_0^- \leq e(x,nS) \leq e_0^+$, то и для всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [nS, (n+1)S]$ выполняется это неравенство. Поэтому (IO), как видно из доказательств предложений 3, 4, обеспечивает, что разрывы, возникшие в результате распада разрыва в точках (mh, nS) не успевают вступить друг с другом во взаимодействие. Таким образом, в полосе $(x,t) \in \mathbb{R} \times [nS, (n+1)S)$

$$Z(x,t) = Z((x-mh)/(t-nS);\, Z_{n,m}, Z_{n,m+2}),\ (m,n) \in Y \qquad \text{(II)}$$

является точным обобщенным устойчивым решение системы (I) с кусочно-постоянными начальными данными, кусочно-линейной функцией $p(e)$. Пусть на каждом сеточном интервале $t=(n+1)s$, $(m-2)h < x \le mh$, $(m, n+1) \in Y \setminus \{(-(M+n+1), n+1)\}$ выбрана произвольная точка $x_{n+1,m}$, тогда полагаем

$$z_{n+1,m} = Z((x_{n+1,m} - mh)/s;\ z_{n,m-1},\ z_{n,m+1}) \quad \text{(I2)}$$

а также

$$z(x,(n+1)s) = \begin{cases} (v_0(-\infty),\ e_0(-\infty)), & x \le -(M+n+1)h \\ (v_0(+\infty),\ e_0(+\infty)), & x > (M+n+1)h. \end{cases} \quad \text{(I3)}$$

Формула (I2) позволяет рекуррентно определять $\{z_{n,m}\}$ при $n=1,2,\dots$ (при $n=0$ выбор начальных условий определен равенствами (6)), если заданы последовательности $x_{n,m}$. Заметим, что заданию совокупности точек на полуплоскости Q эквивалентно заданию совокупности точек $a_{n,m}=(x_{n,m}-(m-2)h)/2h$ фиксированного отрезка $[0,1]$. Эту совокупность будем обозначать буквой a. Ее можно считать точкой бесконечномерного пространства $A=\prod_{(m,n)\in Y}[0,1]$. В качестве приближенного решения задачи (I) - (3) принимаем функцию $z=z(x,t,h,a)$, определенную отношениями (II), (I2), (I3), она зависит от параметров h и $a=\{a_{n,m}\}$.

4. Получение априорных оценок.

Предложение 6. Пусть $z(x,t,h,a)=(v(x,t,h,a)$, $e(x,t,h,a)$ "приближенное" решение задачи (I) - (3), построенное по схеме Глимма, тогда $e(x,t,h,a)$ - монотонно-возрастающая функция по x и

$$e_0^- \le e(x,t,h,a) \le e_0^+, \quad (x,t)\in Q; \quad \operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}}\{v(\cdot,t,h,a)\} < c \quad \text{(I4)}$$

$$\max\{v(x,t,a;h) \mid x\in\mathbb{R}\} < c \qquad \text{для любого } t \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |z(x,t_2,h,a) - z(x,t_1,h,a)|\,dx \le c\,|t_2-t_1| \quad \text{(I5)}$$

для $t_1, t_2 \ge 0$

где $\operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}}\{g(\cdot,t)\}$ - вариация функции g по x на $\mathbb{R}$

при фиксированном t, C не зависит от t, h и a.

Предложение 7. Пусть $z(x,t,h,a)$ – "приближенное" решение задачи (I) – (8) с начальными данными, удовлетворяющими условиям А), Б). тогда

А 1) $e_0^- \le e(x,t,h,a) \le e_0^+$.

Б 1) для любых $x_1 \le x_2$ и любого выбора точки $a \in A$:

$$e_1 \le e_2$$

$$-\int_{e_1}^{e_2} [b'(y,e_1,e_2,p)]^{1/2} dy \le v_2 - v_1 \le \qquad (16)$$

$$\le \int_{e_1}^{e_2} [b'_*(y,e_1,e_2,p)]^{1/2} dy .$$

где $(v_i, e_i) = (v(x_i,t,h,a), e(x_i,t,h,a))$.

Доказательство предложения 6. Пусть выполнены утверждения предложения 7.

I. Заметим, что неравенства

$$\int_{e_1}^{e_2} [b'(y,e_1,e_2,p)]^{1/2} dy \le [(p(e_2)-p(e_1))(e_2-e_1)]^{1/2}$$

$$\int_{e_1}^{e_2} [b'_*(y,e_1,e_2,p)]^{1/2} dy \le [(p(e_2)-p(e_1))(e_2-e_1)]^{1/2}$$

для $e_1 \le e_2$ являются следствием леммы I. Вспомним определение вариации функции $g = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть выбрана произвольная конечная последовательность точек оси x:

$$-\infty < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n < +\infty$$

тогда

$$\operatorname*{Var}_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| ;$$

где $\sup$ берется по всем возможным последовательностям $\{x_i\}$

Следовательно используя определение вариации функции и ...шить же лемму I, получаем, что

$$\operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}} \{v(\cdot,t,h,a)\} \le \left[(p(e_0^+)-p(e_0^-))(e_0^+-e_0^-)\right]^{1/2}.$$

Ограниченность v следует из очевидного неравенства

$$|v(x,t,h,a)| \le |v_0(-\infty)| + \operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}}\{v(\cdot,t,h,a)\}$$

для любого $x\in\mathbb{R}$.

2. Поскольку

$$\min_{e\in[e_0^-,e_0^+]} \sqrt{p'(e)} < \sqrt{\frac{p(e)-p(e_0)}{e-e_0}} < \max_{e\in[e_0^-,e_0^+]} \sqrt{p'(e)}, \quad e,e_0\in[e_0^-,e_0^+],$$

то ввиду выполнения свойства А1) предложения 7, построения "приближенного" решения $z=z(x,t,h,a)$, как суперпозиции решений задач Римана (см. п. 2, 3 этого параграфа), получаем, что "приближенное" решение имеет ограниченную скорость распространения разрывов в интервалах времени $t\in[hs,(h+1)s]$.

Поэтому расписывая интегралы в (I5), получаем необходимые оценки (I5), поскольку $z=z(x,t,h,a)$ является кусочно-постоянной функцией ограниченной вариации. □

Прежде, чем показать выполнение предложения 7, докажем следующие леммы.

Лемма 3. Если в плоскости переменных (v,e) между парами (e_1,v_1), (e_2,v_2) и (e_2,v_2), (e_3,v_3) выполняются неравенства (I6), тогда эти же неравенства выполнены между парами (e_1,v_1), (e_3,v_3).

Доказательство. Очевидно, что $e_1\le e_2\le e_3$. Пусть $v_1\ge v_3$, тогда необходимо показать выполнение неравенства:

$$v_1-v_3 \le \int_{e_1}^{e_3} \left[b'(y,e_1,e_3,p)\right]^{1/2} dy$$

(случай $v_1\le v_3$ рассматривается аналогично).

I. Пусть $v_3 \le v_2 \le v_1$, т.е.

$$v_1 - v_2 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 \le \int_{e_1}^{e_2} [b'(y, e_1, e_2, p)]^{1/2} dy +$$

$$+ \int_{e_2}^{e_3} [b'(y, e_2, e_3, p)]^{1/2} dy \le \int_{e_1}^{e_3} [b'(y, e_1, e_3, p)]^{1/2} dy.$$

Последнее неравенство является следствием леммы I, поскольку из геометрических соображений видно, что множество вершин графиков функций $z = b(x, e_1, e_2, p)$, $z = b(x, e_2, e_3, p)$ содержит множество вершин графика $z = b(x, e_1, e_3; p)$, лежащих по переменной x в интервале $[e_1, e_3]$.

2. Пусть $v_2 \le v_3 \le v_1$. (Случай $v_1 \le v_3 \le v_2$ рассматривается аналогично).

$$v_1 - v_3 \le v_1 - v_2 \le \int_{e_1}^{e_2} [b(y, e_1, e_2, p)]^{1/2} dy \le$$

$$\le \int_{e_1}^{e_3} [b'(y, e_1, e_3, p)]^{1/2} dy \qquad \square$$

<u>Следствие</u>. Пусть e_1, e_2 принадлежат участку постоянства функции p и между парами $(e_1, v_1), (e_2, v_2)$ и (e_2, v_2), (e_3, v_3) выполняются неравенства (I6), тогда эти же неравенства выполнены между парами (e_1, v_1), (e_3, v_3).

<u>Лемма 4</u>. Решение задачи Римана (I), (3), (7) с начальными данными, удовлетворяющими условиям А1), Б1), удовлетворяет условиям А1), Б1).

<u>Доказательство</u>. Обозначим $g(p) = g(p, e_e) + g(p, e_2)$ (см. (8)). Согласно предложению 2 существует точка $(\bar v, \bar p)$ такая, что $\bar v = G^+(\bar p, e_2, v_2) = G^-(\bar p, e_e, v_e)$, поэтому $v_2 - v_e = g(\bar p)$. Покажем, что $p_e \le \bar p \le p_2$,

$(p_2 = p(e_2) \geq p_\ell = p(e_\ell))$ т.к. $e_\ell \leq e_2$. Пусть $v_\ell \leq v_2$ (случай $v_\ell \geq v_2$ разбирается аналогично), тогда

$$v_2 - v_\ell \leq \int_{e_\ell}^{e_2} [\, b_*'(y, e_\ell, e_2, p)]^{1/2} dy \, .$$

I. Предположим, что $\bar{p} < p_\ell \leq p_2$, т.е. $\bar{e} = O_\ell(\bar{p}) = O_2(\bar{p}) < e_\ell \leq e_2$, поэтому

$$0 \leq v_2 - v_\ell = g(\bar{p}) = \int_{e_\ell}^{\bar{e}} [\, b'(y, \bar{e}, e_\ell, p)]^{1/2} dy +$$

$$+ \int_{e_2}^{\bar{e}} [\, b'(y, \bar{e}, e_2, p)]^{1/2} dy < 0 \, .$$

Получено противоречие.

2. Предположим, что $p_\ell < p_2 \leq \bar{p}$, т.е. $e_\ell \leq e_2 < \bar{e} = O_\ell(\bar{p}) = O_2(\bar{p})$, поэтому

$$v_2 - v_\ell = g(\bar{p}) = \int_{e_\ell}^{\bar{e}} [\, b_*'(y, e_\ell, \bar{e}, p)]^{1/2} dy +$$

$$+ \int_{e_2}^{\bar{e}} [\, b_*'(y, \bar{e}, e_2, p)]^{1/2} dy > \int_{e_\ell}^{\bar{e}} [\, b_*'(y, e_\ell, \bar{e}, \bar{p})]^{1/2} dy >$$

$$> \int_{e_\ell}^{e_2} [\, b_*(y, e_\ell, e_2, p)]^{1/2} dy$$

Получено противоречие.

Из предложений 3, 4 и построения решения задачи Римана $(v(x,t), e(x,t))$ следует монотонность функции $e(x,t)$ по x, т.к. $e_\ell \leq O_\ell(\bar{p}) \leq O_2(\bar{p}) \leq e_2$. Пусть в точках (x_1, t), (x_2, t), $0 < x_1 \leq x_2$ решение принимает значения

$(v_k, e_k) = (v(x_1, t), e(x_1, t))$,

$(v_j, e_j) = (v(x_2, t), e(x_2, t))$

которые связаны следующим равенством (см. (9)):

$$v_k - v_j = \int_{e_k}^{e_j} [b'(y, O_2(\bar{p}), e_r, p)]^{1/2} dy =$$

$$= \int_{e_k}^{e_j} [b'(y, e_k, e_j, p)]^{1/2} dy.$$

Последнее равенство следует из геометрических соображений и того, что e_k, e_j являются вершинами графика функции $b(y, O_2(\bar{p}), e_r, p)$. Из этих равенств следует выполнение неравенств (I6) при $x>0$ (при $x \le 0$ аналогично). Если $O_e(\bar{p}) = O_2(\bar{p})$ то утверждение леммы следует из леммы 3, а когда $O_e(\bar{p}) \ne O_2(\bar{p})$ то из следствия леммы 3. □

<u>Доказательство предложения 7.</u> Достаточно показать, что если при $t = ns$ свойства А1), Б1) выполнены, то и при $ns \le t \le (n+1)s$ выполнены. В интервале времени $(ns, (n+1)s)$ "приближенное" решение представляет собой суперпозицию решений задачи Римана, поэтому ввиду лемм 3, 4 свойства А1), Б1), также выполнены в интервале $ns < t < (n+1)s$. При $t = (n+1)s$ выполнение этих свойств следует из леммы 3, поскольку постановка новых начальных данных по схеме Глимма при $t = (n+1)s$ эквивалентна "выбрасыванию" некоторых промежуточных значений, которые присутствовали в "приближенном" решении при $t \in (ns, (n+1)s)$ □

5. Существование обобщенного решения задачи Коши. Для любых фиксированных $t \ge 0$ и $a \in A$ из неравенств (I4) следует, что семейство функций $\{z(\cdot, t, h, a)\}$ равномерно ограничено и имеет равномерно ограниченную вариацию на интервале $(-\infty, +\infty)$. Поэтому, по теореме Хейли [32], используя диагональный процесс Кантора, существует подпоследовательность $\{z(x, t, h_i, a)\}$, $(h_i \to 0)$ (Далее, где это необходимо, будем выбирать подпоследовательности

...ее и обозначать тем же индексом для упрощения записи) такая, что для любого рационального $t' \geq 0$ последовательность $\{z(\cdot, t', h_i, a)\}$ сходится как почти всюду, так и в $L^1_{loc}((-\infty, +\infty))$. Для любого $t \geq 0$, любого рационального $t' \geq 0$ и любых $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} |z(x,t,h_k,a) - z(x,t,h_\ell,a)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} |z(x,t,h_k,a) - z(x,t',h_k,a)|\,dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} |z(x,t',h_k,a) - z(x,t',h_\ell,a)|\,dx + \tag{I7}$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} |z(x,t',h_\ell,a) - z(x,t,h_\ell,a)|\,dx$$

Из (I5), (I7) заключаем, что $\{z(\cdot, t, h_i, a)\}$ сходится в $L_{loc}((-\infty,+\infty))$ равномерно по t на любом компактном множестве для t. В частности, $\{z(\cdot, t, h_i, a)\}$ сходится в $L^1_{loc}((-\infty,+\infty) \times [0,+\infty))$ и пусть

$$z(x,t,h_i,a) \to z(x,t,a) \quad \text{в } L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,+\infty)) \tag{I8}$$

$$z(x,t,h_i,a) \to z(x,t,a) \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Для любого фиксированного $t \geq 0$ и согласно теореме Хейли [32] функция $z(x,t,a)$ является ограниченной и имеет равномерно ограниченную вариацию по x на $\mathbb{R}$.

$$\operatorname*{Var}_{x\in\mathbb{R}} z(\cdot,t,a) < C \quad \text{для любого } t \geq 0 \tag{I9}$$

По построению "приближенного" решения $z(x,t,h,a)$ удовлетворяет:

$$\iint_Q (v f_t - p(v) f_x)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 f(x,0)\,dx = \delta(v,f,h,a)$$

$$\iint\limits_{Q}(e g_t - v g_x)\,dx\,dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e_0\, g(x,0)\,dx = \delta(e, g, h, a), \tag{20}$$

где $f(x,t)$, $g(x,t)$ – произвольные функции из $C_0^1(Q)$.

$$\iint\limits_{Q^1}\Big(\big(v^2/2 + \int\limits^{e}\rho(\xi)\,d\xi\big) f_t - p(e)\, v f_x\Big)\,dx\,dt \geq \delta\big(v^2/2 + \int\limits^{e}\rho(\xi)\,d\xi, f, h, a\big), \tag{21}$$

где $f(x,t)$ – произвольная неотрицательная функция из $C_0^1(Q^1)$

$Q^1 = \mathbb{R}\times(0,+\infty)$, где $\delta(w, f, h, a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\delta^n(w, f, h, a)$,

$$\delta^n(w, f, h, a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big(w(x, ns-0, h, a) - w(x, ns+0, h, a)\big) f(x, 0)\,dx$$

Будем рассматривать δ как функцию переменных $a = \{a_{n,m}\}$ в бесконечномерном пространстве $\mathcal{A}$, по теореме Колмогорова о согласованных распределениях, можно ввести счетно-аддитивную меру, определенную на $\mathcal{A}$ [21], тогда в метрике $L_2(\mathcal{A})$ по теореме Гливенко [47, 48] существует последовательность $h_i \to 0$ такая, что $\delta(h_i, a) \to 0$ почти всюду в $\mathcal{A}$. Совершая предельный переход в (20), (21) и (4), (20) и стремления невязки δ к нулю для почти всех $a \in \mathcal{A}$ получаем выполнение теоремы I.

§ 3. Разрешимость начально-краевой задачи

Рассматривается система трех уравнений

$$\begin{aligned} &\partial e/\partial t - \partial v/\partial x = 0\\ &\partial v/\partial t - \partial p/\partial x = 0,\\ &x \in Q_0 = [0,1]\times[0,+\infty) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными

$$v(x,0) = v_0(x),\ e(x,0) = e_0(x) \tag{2}$$

и граничными данными

$$e(0,t) = e^0(t),\ e(1,t) = e^1(t) \tag{3}$$

Система (I) – (3) замыкается уравнением состояния

$$p = p(e) \tag{4}$$

Предполагается, что начальные и граничные данные (2), (3) удовлетворяют условиям в), г), д), уравнение состояния обладает свойствами I), 2) (см. § I этой главы). В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда функция $e_0(x)$ – монотонно возрастающая, противоположный случай рассматривается аналогично.

I. Аппроксимация начальных, граничных данных и уравнения состояния.

Предложение I. Существует последовательность кусочно-линейных функций p_h, удовлетворяющих условиям I), 2), таких, что

$$|p_h(e)-p_h(e')| \le C|e-e'|, \quad |p(e)-p_h(e)| \le Ch, \qquad (5)$$
$$e, e' \in [e^0, e^1]$$

$$\int_{e^0}^{\pm\infty} (p_h'(y))^{1/2}\,dy = \pm\infty \qquad (6)$$

где $h = 2^{-N}$, $N = 1, 2, \ldots, e^0(+\infty) = e^0$, $e^1(+\infty) = e^1$. Здесь и далее C – константа, зависящая только от e^0, e^1, $\max\{p(e), p'(e) \mid e \in [e^0, e^1]\}$ и $\max\{v_0(x) \mid x \in [0,1]\}$, причем не зависящая от h. Существует последовательность кусочно-постоянных функций $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, $(e_h^0(t), e_h^1(t))$, сходящихся почти всюду к $(v_0(x), e_0(x))$ и к $(e^0(t), e^1(t))$ соответственно. Для каждого h функции $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, $e_h^0(t)$, $e_h^1(t)$ и p_h удовлетворяют условиям:

В) $e^0 \le e_h^0(t)$, $e_h^1(t) \le e^1$, $\max\{v_0^h(x) \mid x \in [0,1]\} < C$

e_h^1 – монотонно-возрастающая, e_h^0 – монотонно-убывающая функции по t, $t \in [0, +\infty)$

Г) Если $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$, тогда
$$e_1 \le e_2$$

$$\int_{e_1}^{e_2}[b'(y, e_1, e_2, p_h)]^{1/2}dy \le v_2 - v_1 \le \int_{e_1}^{e_2}[b_*'(y, e_1, e_2, p_h)]^{1/2}dy, \qquad (7)$$

где $(v_i, e_i) = (v_0^h(x_i), e_0^h(x_i))$

Д) выполнены условия согласования:

$$e_0^h(0) = e_h^0(0), \quad e_0^h(1) = e_h^1(0)$$

<u>Доказательство</u>. Определим последовательности

$$(v_0^h(x), e_0^h(x)) = \begin{cases} (v_0(mh), e_0(mh)), & x \in [mh, (m+2)h), \\ & m = 0, 2, 4, \ldots, M-4; \quad M = h^{-1} \\ (v_0(1), e_0(1)), & x \in [1-2h, 1] \end{cases} \tag{8}$$

$$(e_h^0(t), e_h^1(t)) = \begin{cases} (e^0(ns), e^1(ns)), & t \in [ns, (n+1)s) \\ & n = 0, 1, \ldots, (N-1) \cdot s^{-1} \\ (e^0(+\infty), e^1(+\infty)), & t > N \end{cases} \tag{9}$$

Здесь и далее шаг s будем считать функцией от h, выбор этой функциональной зависимости определим ниже, при этом s^{-1}, как и h^{-1}, выбирается целочисленным. Обозначим множество значений функций $e_h^0(t)$, $e_0^h(x)$, $e_h^1(t)$ через a_i, они образуют конечную монотонно-возрастающую последовательность, каждый интервал $[a_i, a_{i+1}]$ разобьем на h^{-1} равных частей и к точкам этого разбиения добавим точки, в которых функция терпит разрыв на интервале $[e^0, e^1]$. Совокупность всех этих точек конечна, обозначим их $\{b_j^i \mid j = 1, \ldots, K^{(i)}, i = 1, \ldots, K;$ $a_i = b_1^i < \ldots < b_j^i < \ldots < b_{K^{(i)}}^i = a_{i+1}\}$. Определим последовательность $\{p_h(e)\}$ кусочно-линейных монотонно-возрастающих функций с вершинами в точках $(b_j^i, p(b_j^i))$ таких, что $p_h(e)$ вне интервала $[e^0, e^1]$ отлична от постоянной. Утверждения предложения непосредственно следуют из построения функций $p_h(e)$, $(v_0^h(x), e_0^h(x))$, $e_h^0(x)$, $e_h^1(x)$, определения функций $b(y, e_1, e_2, p_h)$, $b_*(y, e_1, e_2, p_h)$ и леммы 2 параграфа 2. □

Построение "приближенных" решений начально-краевой задачи проведем для равнения состояния p_h и данных $(e_0^h(x)$,

$h(x))$, $e_h^c(t)$, $e_h^1(t)$, построенных в этом пункте, поэтому для упрощения записи в пп. 2, 3, 4 параметр h будет опущен.

2. Построение обобщенного решения смешанной задачи Римана. При построении "приближенных" решений начально-краевой задачи возникает необходимость решать две следующие смешанные задачи Римана:

Задача 3). Найти решение системы (I), (4) в области $\{(x,t)\mid x\geq 0,\ t\geq 0\}$ с начальными

$$v(x,0) = v_2,\ e(x,0) = e_2 \qquad \text{при } x>0$$

и граничными данными

$$e(0,t) = e_c \qquad \text{при } t>0$$

где v_2, e_2, e_c – некоторые постоянные.

Задача 32). Найти решение системы (I), (4) в области $\{(x,t)\mid x\leq 0,\ t\geq 0\}$ с начальными

$$v(x,0) = v_\ell,\ e(x,0) = e_\ell \qquad \text{при } x<0$$

и граничными данными

$$e(0,t) = e_2 \qquad \text{при } t>0$$

Оказывается, эти две задачи сводятся к задаче Римана (см. § 2 п. 2). Обозначим $v_\ell = F^+(e_\ell, e_2, v_2)$ и рассмотрим задачу Римана для системы (I), (4) с начальными данными:

$$(v(x,0), e(x,0)) = \begin{cases} (v_\ell, e_\ell), & x\leq 0 \\ (v_2, e_2), & x>0 \end{cases} \tag{10}$$

Из предложения 3 параграфа 2 видно, что эта задача разрешима и при $t=0$ для $x>0$ решение ее $(v,e)(x,t)$ принимает значения (v_ℓ, e_ℓ), а при $x=0$ для $t>0$ значения (v_l, e_l). Поэтому это решение является одновременно решением смешанной задачи 3 . в области $\{(x,t) \mid x \geq 0, t \geq 0\}$. Обратим внимание, что обобщенное решение задачи 3 определено формулой (I2) § 2, если между постоянными e_0, e_2 выполнено неравенство: $e_0 \leq e_2$. Обозначим $v_2 = F(e_2, e_0, v_0)$, тогда, как видно из предложения 4 § 2, решение задачи Римана (I), (4), (I0) с такими постоянными является одновременно и решением задачи 32 в области $\{(x,t) \mid x \leq 0, t \geq 0\}$

3. Разностная схема Глимма для начально-краевой задачи. Выберем шаг сетки по оси x, равный h, по оси t – равный s, удовлетворяющие условию

$$h/s \geq \max\{(p'(e))^{1/2} \mid e \in [e^0, e^1]\} \tag{II}$$

Отношение h/s фиксированно, т.е. s является функцией от h, где s^{-1} принимает целые значения, очевидно, что выбор такого s осуществим. В полосе $Q_0 = \{(x,t) \mid x \in [0,1], t \geq 0\}$ введем сетку точек (mh, ns), где $(m,n) \in Y = \{n = 0, 1, 2, \ldots$, а m при каждом n пробегает множество целых, четных чисел от 0 до M, где $M = h^{-1}\}$.

Пусть функция $z(x,t) = (v,e)(x,t)$ кусочно-постоянна на слое $t = ns$, где она принимает постоянные значения $z_{n,m} = z(mh, ns) = (v_{n,m}, e_{n,m})$ в интервале $x \in [mh, (m+2)h)$, $m = 0, 2, \ldots M-2$ а также в интервале времени $ns \leq t < (n+1)s$ при $x = 0$ и $x = 1$ для функции $e(x,t)$ определены значения равные $e^0(ns)$ и $e^1(ns)$ соответственно (см. формулу (9)). Обозначим

$$\begin{gathered} e_{n,-2} = e^0(ns), \quad v_{n,-2} = F^+(e_{n,-2}, e_{n,0}, v_{n,0}) \\ e_{n,M} = e^1(ns), \quad v_{n,M} = F^-(e_{n,M}, e_{n,M-2}, v_{n,M-2}) \\ z_{n,-2} = (v_{n,-2}, e_{n,-2}), \quad z_{n,M} = (v_{n,M}, e_{n,M}) \end{gathered} \tag{I2}$$

Опишем процедуру построения по известным $z_{n,m}$ "приближенного" решения $z(x,t)$ в прямоугольнике $(x,t) \in [0,1] \times [nS, (n+1)S)$ и последующем выборе постоянных значений $z_{n+1,m}$.

Согласно предложению 2.5 существует решение

$$z(x,t) = Z((x-mh)/(t-nS);\ z_{n,m}, z_{n,m+2}) \qquad (13)$$

для $t \geq nS$

задачи Римана для системы (I) - (3) с начальными данными

$$z(x,t) = \begin{cases} z_{n,m-2}, & x \leq mh \\ z_{n,m}, & x > mh \end{cases} \qquad (14)$$

где $m = 0, 2, 4, \ldots, M;\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Как мы покажем далее, если начальные данные в момент времени $t = nS$ удовлетворяют условию $\epsilon^0 \leq \epsilon(x, nS) \leq \epsilon^1$ то и для всех $(x,t) \in [0,1] \times [nS, (n+1)S]$ решение (13) удовлетворяет этому условию. Поэтому (II), как видно из доказательств предложений 3 и 4 параграфа 2, обеспечивает, что разрывы, возникшие в результате распада разрыва в точках (mh, nS) не успевают вступить друг с другом во взаимодействие, при этом решение (13), ввиду построения решений смешанных задач Римана 3I и 32 (см. п.2 этого параграфа), принимает краевые условия (3) вида (9), т.е. кусочно-постоянные значения, равные $\epsilon^0(nS), \epsilon^1(nS)$ при $x = 0$, $x = 1$ соответственно. Таким образом, в прямоугольнике $(x,t) \in [0,1] \times [nS, (n+1)S)$ функция $z(x,t)$, определенная формулой (13), является точным обобщенным устойчивым решением системы (I) - (4) с кусочно-постоянными начальными и граничными данными. Пусть на каждом сеточном интервале $t = (n+1)S$, $mh \leq x < (m+2)h$, $m = 0, 2, 4, \ldots, M-2$ выбрана произвольная точка $x_{n+1,m}$, тогда полагаем

$$z_{n+1,m} = Z((x_{n+1,m} - mh)/S;\ z_{n,m}, z_{n,m+2}) \qquad (15)$$

Формулы (I2), (I5) позволяют рекуррентно определить $\{x_{n,m}\}$ при $h=1,2,\ldots$ (при $n=0$ выбор начальных данных определен равенствами (8), а краевых данных – равенствами (9)). Задание $\{x_{n,m}\}$ эквивалентно заданию совокупности точек $a_{n,m}=(x_{n,m}-mh/2h$ фиксированного отрезка $[0,I]$. Эту совокупность обозначим буквой a, ее можно считать точкой бесконечномерного пространства $A=\prod_{(m,n)\in N}[0,1]$

В качестве "приближенного" решения начально-краевой задачи (I) – (4) принимаем функцию $z=z(x,t,h,a)$, определенную отношениями (I3), (I5), (I2).

4. Получение априорных оценок.

<u>Лемма I</u>. Если начальные и граничные данные смешанных задач Римана 3 и 32 связаны неравенством $e_1\le e_2$. Пусть $(v(x,t),e(x,t))$ – решение этих задач, то для любых $x_1\le x_2$, $t\ge 0$ выполнены неравенства:

$$e_1\le e_1\le e_2\le e_2$$

$$-\int_{e_1}^{e_2}[\ell'(y,e_1,e_2,\rho)]^{1/2}dy\le v_2-v_1\le\int_{e_1}^{e_2}[\ell_x'(y,e_1,e_2,\rho)]^{1/2}dy, \quad (I6)$$

$$(e_i,v_i)=(e(x_i,t),\ v(x_i,t))$$

Заметим, что если рассматривается задача 3, то $x_i\ge 0$, если задача 32, то $x_i\le 0$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим решение задачи 3. Как мы видели в п. 2, задача 3 сводится к задаче Римана с начальными данными (I0), при этом если $e_1\le e_2$, то решение смешанной задачи 3, как и решение задачи Римана определено формулой (9) параграфа 2, где функция $e(x,t)$ при каждом фиксированном $t\ge 0$ – монотонно-возрастающая по x, для функции $v(x,t)$ второе из неравенств (I6) выполнено автоматически ввиду ее определения (см. (9) § 2). Рассмотрение задачи 32 проводится ана-

логично. □

<u>Предложение 2</u>. Пусть $z(x,t,h,a)$ – "приближенное" решение задачи (I) – (4) с начальными и граничными данными, удовлетворяющими условиям В), Г), Д), тогда выполнены неравенства:

$$e^{c} \le e(x,t,h,a) \le e^{d}, \quad x \in [0,1],\ t \ge 0 \tag{I7}$$

$$e(0,t+0,h,a) \le e(0+0,t,h,a)$$

$$e(1-0,t,h,a) \le e(1,t+0,h,a)$$

для всех $t \ge 0$ (I8)

для любых $0 \le x_1 \le x_2 \le 1,\ t \ge 0$

$$e_1 \le e_2$$

$$-\int_{e_1}^{e_2} [b'(y,e_1,e_2,p)]^{1/2}\,dy \le v_2 - v_1 \le \int_{e_1}^{e_2} [b'_y(y,e_1,e_2,p)]^{1/2}\,dy \tag{I9}$$

где $(v_i, e_i) = (v(x_i,t,h,a), e(x_i,t,h,a)),\ t \ge 0,\ a \in A$.

<u>Доказательство</u>. По построению "приближенного" решения достаточно показать, что если при $t = nS$ выполнены неравенства (I7) – (I9), то и при $nS < t < (n+1)S$ они выполнены. В интервале времени $(nS, (n+1)S)$ "приближенное" решение представляет собой суперпозицию решений задачи Римана и смешанных задач 3, 3I, поэтому выполнение неравенств (I9) будет гарантировано леммами 3, 4 параграфа 2 и леммой I этого параграфа. При $t = (n+1)S$ выполнение этих свойств следует из леммы 3 § 2, поскольку для начально-краевой задачи постановка новых начальных данных по схеме Глимма при $t = (n+1)S$ эквивалентна "выбрасыванию" некоторых промежуточных значений, которые присутствовали в решении при $t \in (nS, (n+1)S)$. Выполнение неравенств (I8) при $t = (n+1)S$ следует из леммы I и первого неравенства (I9). Неравенство (I7) выполнено, поскольку при $t \to +\infty$ начальные данные для функции $e(x,t)$ ограничены и выполнены неравенства (I8), (I9). □

Следовательно, воспользовавшись леммами I, 2 параграфа 2 и предложением 2 этого параграфа, приходим к выполнению следующего предложения.

Предложение 3. Пусть $z(x,t,h,a) = (v(x,t,h,a), e(x,t,h,a))$ "приближенное" решение задачи (I) – (3), (8) – (I0), построенное по модифицированной схеме Глимма, тогда $e(x,t,h,a)$ – монотонно-возрастающая функция по x и

$$e^0 \le e(x,t,h,a) \le e^1, \qquad (x,t) \in Q_0$$

$$\operatorname*{Var}_{x\in[0,1]} \{ z(\cdot,t,h,a)\} < C \tag{20}$$

$$\max\{v(x,t,h,a)\} < C \quad \text{для любого } t \ge 0$$

$$\int_0^1 |z(x,t_2,h,a) - z(x,t_1,h,a)|\,dx \le C|t_2-t_1| \quad \text{для } t_1,t_2 \ge 0$$

где $\operatorname*{Var}_{x\in[0,1]}\{g(\cdot,t)\}$ – вариация функции g по x на отрезке $[0,I]$ при фиксированном t, C не зависит от t, h и a.

Доказательство этого предложения мы не приводим, поскольку оно проводится аналогично доказательству предложения 6 параграфа 2.

5. Существование обобщенного решения начально-краевой задачи. Из предложения 3 следует, что при каждом фиксированном t и $a \in A$ семейство функций $z(x,t,h,a)$ содержит последовательность $z(x,t,h_i,a)$, сходящуюся почти всюду в области $Q_0 = \{(x,t) \mid x \in [0,1],\ t \ge 0\}$, а также в любой ограниченной подобласти этой области. $z(x,t,h_i,a) \to z(x,t,a)$ для почти всех $(x,t) \in Q_0$

$$\int_0^T\int_0^1 |z(x,t,h_i,a) - z(x,t,a)|\,dx\,dt \to 0 \quad \text{для любого } T < +\infty$$

Доказательство существования обобщенного решения завершается рассмотрением невязки "приближенного" решения $z(x,t,h,a)$

– ошибки в выполнении формул (II), (I2) первого параграфа (сравните с (20) § 2, (2I) § 2), но, как легко видеть, априорные оценки (20) гарантируют сходимость невязки для почти всех $u \in A$. Следовательно, совершая предельный переход, получаем справедливость теоремы 2.

Г Л А В А 3

РАВНОВЕСИЕ ДВУХФАЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В этой главе рассмотрена задача о равновесии изотропной упругой среды, которая может находиться в двух различных фазах. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения этой задачи в многомерном случае, при доказательстве этой теоремы будет одновременно показана корректность построенной феноменологической модели фазовых переходов. Исследована структура решений задачи в осесимметричном случае.

§ I. Многомерный случай. Существование решения

I. Постановка задачи и формулировка результатов. Рассматривается изотермическое движение двухфазной среды в предположении малой скорости движения в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей γ. Система законов сохранения гл. I, § I, (I) - (3) сводится к системе уравнений равновесия:

$$\operatorname{div} P = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \tag{I}$$

$$\varepsilon(\vec{u}) = (\partial \vec{u}/\partial \vec{x} + \partial \vec{u}/\partial \vec{x}^{*})/2$$

где $\vec{f}$ - заданный в области Ω вектор объемных сил, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещений, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{u})$ - линеаризованный тензор малых деформаций. Система (I) замыкается заданием краевых условий:

I) на границе $\gamma_1 \subset \gamma$ задается распределение вектора перемещений

$$\vec{u} = \vec{\varphi}(\vec{s}), \quad \vec{s} \in \gamma_1 \tag{2}$$

2) на границе $\gamma_2 \subset \gamma$ $(\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma)$ задается распределение поверхностных сил

$$P_{\vec{n}} = \vec{g}(\vec{s}), \quad \vec{s} \in \gamma_2 \tag{3}$$

где $\vec{n}(\vec{s}) = (n_1, n_2, n_3)(\vec{s})$ — вектор внешной нормали к γ, а также система (I) замыкается заданием функциональной зависимости тензора напряжений P от тензора деформации $\mathcal{E}$ (уравнение состояния)

$$P = P(\mathcal{E}) \tag{4}$$

Замечание. Для двухфазной среды построение этого уравнения состояния проведено в гл. I, § 3; в п. 3 этого параграфа мы покажем корректность построенной феноменологической модели для упругой двухфазной среды (гл. I, § 3), т.е. корректное определение различных фаз и, тем самым, корректное определение уравнения состояния (4) двухфазной среды, а также покажем монотонность и непрерывность уравнения состояния. Эти факты позволят установить существование и единственность решения задачи (I) – (4).

Под решением задачи равновесия двухфазной среды (I) – (4) мы будем понимать обобщенное решение. Относительно функции $\vec{\varphi}$ (см. (2)) потребуем, чтобы поле $\vec{\varphi}(\vec{s})$ $(\vec{s} \in \gamma_1)$ допускало продолжение в область Ω в виде вектор-функции $\vec{b}(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (I) – (4) назовем векторную функцию $\vec{u}(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_\Omega P(\mathcal{E}(\vec{u})) : \mathcal{E}(\vec{h})\, d\vec{x} = \int_\Omega \vec{f}\,\vec{h}\, d\vec{x} + \int_{\gamma_2} \vec{g}\,\vec{h}\, d\vec{s} \tag{5}$$

для любой вектор-функции $\vec{h} \in H_1$ и такую, что $\vec{u} - \vec{b} \in H_1$

Здесь H_1 замыкание множества

$$Q = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \,\middle|\, \vec{u} \in C^\infty(\Omega),\ \vec{u}\big|_{\gamma_1} = 0 \right\}$$

по норме пространства $W_2^1(\Omega)$

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\vec{u}|^2 + \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} d\vec{x} \tag{6}$$

Пусть изучаемая среда, может находиться в двух различных фазах I и II, для которых известна функциональная зависимость свободной энергии от инвариантов (e_1, e_2) тензора деформации в каждой фазе

$$F^{I} = F^{I}(e_1, e_2), \quad F^{II} = F^{II}(e_1, e_2)$$

Предположим, что свободная энергия в каждой фазе

А) является непрерывно-дифференцируемой, выпуклой функцией по обеим переменным e_1, e_2:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F^j}{\partial e_i}(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) - \frac{\partial F^j}{\partial e_i}(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}) \right) \left(e_i^{(1)} - e_i^{(2)} \right) > 0, \; j = I, II$$

для любых $(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) \in E$, $(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) \neq (e_1^{(2)}, e_2^{(2)})$; $E = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

Б) удовлетворяет следующим неравенствам

$$a_1 e_1 - a \le \frac{\partial F^j}{\partial e_1}(e_1, e_2) \le A_1 e_1 + a$$
$$a_2 e_2 \le \frac{\partial F^j}{\partial e_2}(e_1, e_2) \le A_2 e_2, \tag{7}$$

где $(e_1, e_2) \in E$, $j = I, II$, a, a_i, A_i – положительные постоянные.

В дальнейшем, используя теорию монотонных операторов [9] мы покажем выполнение следующей теоремы.

<u>Теорема</u>. Пусть поле $\vec{\varphi}$ допускает продолжение в Ω в виде вектор-функции $\vec{b}(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega)$, функции $f \in L_2(\Omega)$, $\vec{g} \in L_2(\gamma_2)$ и в каждой фазе I и II функциональная зависимость свободной энергии от инвариантов тензора деформаций удовлетворяет выше указанным свойствам А), Б), тогда существует обобщенное решение $\vec{u}$ задачи о равновесии двухфазной среды (I) – (4), которое имеет вид $\vec{u} = \vec{v} + \vec{b}$, где $\vec{v} \in H_1$. При этом тензор на-

пряжений $P = P(\mathcal{E}(\vec{u}))$ определяется единственным образом.

2. Поскольку в фазах I и II свободная энергия F^{I} и F^{II} удовлетворяет условию А), то в области $\Pi = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ изменения инвариантов σ_1, σ_2 тензора напряжений $\hat{P}$, как было показано в § 4 главы I, для обеих фаз мы можем определить потенциалы Гиббса

$$\varphi^{I} = \varphi^{I}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \grave{F}^{I}(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{i=1}^{2} e_i^{I}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_i$$

$$\varphi^{II} = \varphi^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \grave{F}^{II}(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{i=1}^{2} e_i^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_i$$

являющиеся непрерывно-дифференцируемыми функциями, удовлетворяющие условию вогнутости по обеим переменным (σ_1, σ_2) (функции $e_i = e_i(\sigma_1, \sigma_2)$, $\grave{F} = \grave{F}(\sigma_1, \sigma_2)$) для каждой из фаз I и II определены формулами (4) – (6), данными в гл. I § 4). При этом в этом же параграфе показано, что функция

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Pi} \left\{ \varphi^{I}(\sigma_1, \sigma_2), \ \varphi^{II}(\sigma_1, \sigma_2) \right\}$$

является термодинамическим потенциалом Гиббса двухфазной среды. Очевидно, что она является непрерывной вогнутой функцией, т.е.

$$\varphi(\lambda \vec{\sigma}^{I} + (1-\lambda)\vec{\sigma}^{II}) > \lambda \varphi(\vec{\sigma}^{I}) + (1-\lambda)\varphi(\vec{\sigma}^{II}) \qquad (8)$$

для любых $\vec{\sigma}^{I}, \vec{\sigma}^{II} \in \Pi$ и каждого $\lambda \in (0, 1)$

При этом φ совпадает с функциями φ^{I}, φ^{II} в соответствующих непересекающихся областях Π^{I}, Π^{II}. Каждая из областей соответствует своей фазе, граница γ областей Π^{I}, Π^{II} является линией термодинамического фазового равновесия, которая задается уравнением $\psi(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, где $\psi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi^{I}(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi^{II}(\sigma_1, \sigma_2)$. В дальнейшем будем предполагать, что $|\nabla\psi| = ((\psi_{\sigma_1})^2 + (\psi_{\sigma_2})^2)^{1/2} \neq 0$ (т.е. кривую γ можно записать в виде либо $\sigma_1 = \psi_*(\sigma_2)$, либо $\sigma_2 = \psi_*(\sigma_1)$) и для любых $\vec{\sigma}^{I}$, $\vec{\sigma}^{II} \in \Pi$ отрезок, соединяющий эти две точки, пересекает кривую γ в конечном числе точек.

Ввиду непрерывной дифференцируемости функции φ в каждой из фаз и термодинамического тождества гл. I § 3 (4) определена функция

$$\vec{e} = \vec{e}(\vec{\sigma}) \equiv (\partial\varphi/\partial\sigma_1, \partial\varphi/\partial\sigma_2)(\sigma_1, \sigma_2) \tag{9}$$

являющаяся непрерывной в каждой из фаз и терпящая скачок при переходе через линию термодинамического фазового равновесия. Доопределим функцию $\vec{e} = \vec{e}(\vec{\sigma})$ на линии γ как многозначную функцию. Пусть $\vec{\sigma}_0$ произвольная точка, принадлежащая линии γ. Поскольку в каждой из областей Π^{I} и Π^{II} вектор-функция $\vec{e} = \vec{e}(\vec{\sigma})$ является непрерывной, то в точке $\vec{\sigma}_0$ определены однозначно предельные значения функции $\vec{e}(\vec{\sigma})$

$$\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0) = \lim_{\substack{\vec{\sigma}\to\vec{\sigma}_0 \\ \vec{\sigma}\in\Pi^{I}}} \vec{e}(\vec{\sigma}), \quad \vec{e}(\vec{\sigma}_0-0) = \lim_{\substack{\vec{\sigma}\to\vec{\sigma}_0 \\ \vec{\sigma}\in\Pi^{II}}} \vec{e}(\vec{\sigma}) \tag{10}$$

Определим значение функции $\vec{e}(\vec{\sigma})$ в точке $\vec{\sigma}_0$, принадлежащее линии γ, как следующее

$$\vec{e}(\vec{\sigma}_0) = \left\{ \vec{z} \mid \vec{z} = \alpha\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0) + (1-\alpha)\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0),\ \alpha\in[0,1] \right\} \tag{11}$$

3. Вспомогательные утверждения.

<u>Лемма I</u>. Пусть $w \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция, за исключением конечного числа точек. Определим значение производной функции w в точках разрыва. Пусть t_0 – некоторая точка разрыва производной, обозначим $w_+ = w'(t_0+0)$, $w_- = w'(t_0-0)$ и определим

$$w'(t_0) = \{ z / z = \alpha w_- + (1-\alpha) w_+,\ \alpha\in[0,1] \},$$

тогда следующие утверждения эквивалентны:

I) $w(t)$ – строго вогнутая функция, т.е. для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 \neq t_2)$ и $\lambda\in(0,1)$ выполнено неравенство

$$w(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)>\lambda w(t_1)+(1-\lambda)w(t_2)$$

2) для любых $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, $(t_1\neq t_2)$ выполнено неравенство

$$(w'(t_1)-w'(t_2))(t_1-t_2)<0,$$

т.е. для $z_1\in w'(t_1)$, $z_2\in w'(t_2)$

$$(z_1-z_2)(t_1-t_2)<0$$

Доказательство. I) $\Rightarrow$ 2) Из определения строго вогнутой функции следует: для любых $t_1,t_2\,(t_1\neq t_2)$ и $\lambda\in(0,1)$ выполнено неравенство

$$\left[\frac{w(t_1+\lambda(t_2-t_1))-w(t_1)}{\lambda(t_2-t_1)}\right](t_2-t_1)>w(t_2)-w(t_1)$$

Если в точке t_1 функция w дифференцируема, то из этого неравенства при $\lambda\to 0$ следует неравенство

$$w'(t_1)(t_2-t_1)>w(t_2)-w(t_1) \qquad (I2)$$

Если t_1 точка разрыва производной функции w, то при достаточно малом $\varepsilon>0$ в точках $t_1\pm\varepsilon$ функция w дифференцируема (ввиду конечности точек разрыва) и выполнено

$$w'(t_1\pm\varepsilon)(t_2-(t_1\pm\varepsilon))>w(t_2)-w(t_1\pm\varepsilon),$$

тем самым $w'(t_1\pm 0)(t_2-t_1)>w(t_2)-w(t_1)$

Из этого следует, что любого $\alpha\in(0,1)$

$$(\alpha w'(t_1-0)+(1-\alpha)w'(t_1+0))(t_2-t_1)>w(t_2)-w(t_1)$$

что эквивалентно неравенству (II) для многозначной функции.

Поскольку t_1 и t_2 произвольны, то также выполнено нера̀венство

$$w'(t_2)(t_1-t_2)>w(t_1)-w(t_2) \qquad (I3)$$

Суммируя (I2) и (I3), приходим к выполнению свойства 2).

2) $\Rightarrow$ I) Пусть $t_1<t_2\,(t_1\neq t_2)$, поэтому для любого $\xi\in(t_1,t_2)$ выполнено неравенство

$$w'(t_1) > w'(\xi) > w'(t_2)$$

тогда из равенства

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} w'(\xi)\,d\xi$$

(где под знаком интеграла стоит производная, понимаемая в обычном смысле) следует выполнение неравенств

$$w'(t_2)(t_2 - t_1) < w(t_2) - w(t_1) < w'(t_1)(t_2 - t_1)$$

Следовательно, для любого $\alpha \in (0,1)$ выполнены неравенства

$$w(t_2) - w(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) < w'(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)(t_2 - (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2))$$

$$w(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) - w(t_1) < w'(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)((\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 - t_1)$$

Суммируя эти неравенства, получаем, что

$$w(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) - (\alpha w(t_1) + (1-\alpha)w(t_2)) < 0 \qquad \square$$

Лемма 2. Пусть $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывно-дифференцируемая функция, за исключением некоторой линии q в плоскости переменной $x \in \mathbb{R}^2$ (на линии q рвутся первые производные функции S) и для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ отрезок, соединяющий эти две точки, пересекает кривую q в конечном числе точек, тогда следующие утверждения эквивалентны:

I) $S(x)$ – строго вогнутая функция, т.е.

$$S(\lambda x + (1+\lambda)y) > \lambda S(x) + (1-\lambda)S(y); \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

2) для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ $(x \neq y)$

$$(S'(x) - S'(y))(x - y) < 0$$

3) для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ $(x \neq y)$

$$S(x) - S(y) > S'(y)(x - y)$$

Замечание. В лемме 2, как и в лемме I, под производной функции S в точке разрыва x_0, принадлежащей линии q, понимается множество всех линейных комбинаций предельных значений производной функции S от линии q в точке x_0 "справа" и "слева", т.е.

$$s'(x_0)(y-x_0)=\left\{z \mid z=\alpha s'(x_0+0)(y-x_0)+(1-\alpha)s'(x_0-0)(y-x_0),\ \alpha\in[0,1]\right\},$$

где $s'(x_0\pm 0)(y-x_0)$ – предельные значения функции "слева" и "справа" от линии q при $x\to x_0$.

Доказательство. Пусть $x, y\in\mathbb{R}^2$ и определим функцию $u(t)=s(x+t(y-x))$, являющуюся непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[0,1]$, за исключением конечного числа точек, поскольку отрезок $l=\{z \mid z=x+t(y-x),\ t\in[0,1]\}$ пересекает кривую q в конечном числе точек. Поэтому функция u удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, для нее верны утверждения леммы 1, но поскольку $u'(0)=s'(x)(y-x)$, $u'(1)=s'(y)(y-x)$, то и утверждения леммы 2 эквивалентны.

4. а) поскольку на линии j функция $\vec{e}=\vec{e}(\vec{\sigma})$ является многозначной, то при отображении $\vec{e}=\vec{e}(\vec{\sigma})$ кривая j переходит в целую область E^*. Пусть E^{I} и E^{II} – множества значений функции $\vec{e}=\vec{e}(\vec{\sigma})$, соответствующие областям Π^{I} и Π^{II}. По построению феноменологической модели (гл. I, § 3) множества E^{I} и E^{II} отвечают I и II фазам соответственно, а множество E^* – переходной фазе.

Поскольку функция $\Phi=\Phi(\vec{\sigma})$ является строго вогнутой и для нее выполнены условия леммы 2, то, в силу утверждения 2) этой леммы и неравенства (8), множества E^{I}, E^{II} и E^* являются непересекающимися и множество E^* "лежит" между областями E^{I} и E^{II}. Непересечение этих областей показывает корректность построенной феноменологической модели (гл. I, § 3).

б) из теоремы об обратной функции, неравенства (8), леммы 2 следует, что для многозначной функции $\vec{e}=\vec{e}(\vec{\sigma})$ определена обратная к ней однозначная непрерывная функция $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$, т.е.

$$\vec{\sigma}\equiv\vec{\sigma}(\vec{e}(\vec{\sigma}))\qquad \text{для всех } \vec{\sigma}\in\Pi$$

$$\vec{e} \equiv \vec{e}(\vec{\sigma}(\vec{e})) \qquad \text{для всех} \quad \vec{e} \in E$$

В I и II фазах функция $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ является искомым уравнением состояния, задающим зависимость инвариантов $\vec{\sigma}$ тензора напряжений от инвариантов $\vec{e}$ тензора деформации. В переходной фазе функциональная зависимость $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ является также искомой, поскольку по построению феноменологической модели фазовых переходов $\vec{\sigma}$ как функция значений инвариантов $\vec{e}$ должна быть постоянной вдоль прямой (см. гл. I, § 3, (6))

$$\frac{d}{d\sigma_1}\varphi(\sigma_1, \psi_*(\sigma_1)) = e_1 + e_2 \cdot \psi'(\sigma_1) \tag{I4}$$

Если кривую γ можно представить в виде задания функциональной зависимости $\sigma_2 = \psi_*(\sigma_1)$, либо вдоль прямой

$$\frac{d}{d\sigma_2}\varphi(\psi_*(\sigma_2), \sigma_2) = \psi'(\sigma_2) \cdot e_1 + e_2 \tag{I5}$$

если кривая γ представляется в виде $\sigma_1 = \psi_*(\sigma_2)$

Замечание. Постоянство $\vec{\sigma}$ вдоль прямой (I4) либо (I5) можно представить и другим способом. Пусть $\vec{\sigma}_0$ - некоторая точка на линии термодинамического фазового равновесия γ, и обозначим $\vec{e}(\vec{\sigma}_0 \pm 0)$ - предельные значения $\vec{e}(\vec{\sigma})$ с разных сторон линии γ (со стороны I и II фазы соответственно (см. (I0)). Тогда $\vec{\sigma}$ как функция инвариантов $\vec{e}$ в переходной фазе E^*, в силу (I4), (I5), принимает постоянное значение $\vec{\sigma}_0$ вдоль отрезка, соединяющего точки $\vec{e}(\vec{\sigma}_0 - 0)$ и $\vec{e}(\vec{\sigma}_0 + 0)$ (см. (II)). Заметим, что утверждение 2) леммы 2 одновременно показывает, что этот отрезок полностью находится в переходной фазе.

Следовательно, мы определим для всех значений $\vec{e}$ функцию $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$

<u>Лемма 3</u>. Функция $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ является монотонной непрерыв-

ной, т.е.

$$(\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,I})-\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,II}))(\vec{e}^{\,I}-\vec{e}^{\,II})=\sum_{i=1}^{2}(\sigma_i(\vec{e}^{\,I})-\sigma_i(\vec{e}^{\,II}))(e_i^{I}-e_i^{II})\geq 0 \qquad (I6)$$

для любых $\vec{e}^{\,I}, \vec{e}^{\,II} \in E$, при этом если

$$(\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,I})-\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,II}))(\vec{e}^{\,I}-\vec{e}^{\,II})=0,$$

то $\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,I})=\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,II})$

<u>Доказательство</u>. а) если $\vec{e}^{\,I}=\vec{e}^{\,II}$ или $\vec{\sigma}^{\,I}=\vec{\sigma}^{\,II}$ (Здесь $\vec{\sigma}^{\,I}=\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,I})$, $\vec{\sigma}^{\,II}=\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,II})$) или обе точки $\vec{e}^{\,I}$ и $\vec{e}^{\,II}$ не принадлежат переходной фазе, то неравенство очевидно.

б) пусть $\vec{e}^{\,I}\neq\vec{e}^{\,II}$, $\vec{\sigma}^{\,I}\neq\vec{\sigma}^{\,II}$ и либо $\vec{e}^{\,I}$, либо $\vec{e}^{\,II}$ принадлежат переходной фазе. Предположим, что $\vec{e}^{\,I}$ принадлежит переходной фазе, тогда $\vec{\sigma}^{\,I}$ принадлежит линии термодинамического фазового равновесия, но по определению многозначного отображения $\varphi'(\vec{\sigma}^{\,I})$ значение $\vec{e}^{\,I}(\vec{\sigma}^{\,I}-\vec{\sigma}^{\,II})\in\varphi'(\vec{\sigma}^{\,I})(\vec{\sigma}^{\,I}-\vec{\sigma}^{\,II})$, аналогично если $\vec{e}^{\,II}$ принадлежит переходной фазе, то

$$\vec{e}^{\,II}(\vec{\sigma}^{\,I}-\vec{\sigma}^{\,II})\in\varphi'(\vec{\sigma}^{\,I})(\vec{\sigma}^{\,I}-\vec{\sigma}^{\,II})$$

поэтому ввиду выпуклости функции $\varphi=\varphi(\vec{\sigma})$ и леммы 2 выполнено неравенство (I6).

Второе утверждение этой леммы следует непосредственно из определения функции $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ $\square$

<u>Лемма 4</u>. Предположим, что в I и П фазах свободная энергия F^{I} и F^{II} удовлетворяет условию Б), тогда построенное уравнение состояния двухфазной среды $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} a_1 e_1 - a &\leq \sigma_1(\vec{e}) \leq A_1 e_1 + a \\ a_2 e_2 &\leq \sigma_2(\vec{e}) \leq A_2 e_2, \\ &\vec{e}\in E \end{aligned} \qquad (I7)$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку по построению потенциала Гиббса φ двухфазной среды выполнены равенства $\varphi=\varphi^{I}$ и $\varphi=\varphi^{II}$ в I и П фазах соответственно, то ввиду (9) неравенства (I7) в этих фазах выполнены автоматически.

Пусть $\vec{e}_0$ – некоторая точка, лежащая в области E^*, тогда по построению функции $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ точка $\vec{\sigma}_0$, равная $\vec{\sigma}(\vec{e}_0)$ принадлежит линии термодинамического фазового равновесия γ в плоскости переменных $\vec{\sigma}$. Тогда в области E^* $\vec{\sigma}$ как функция инвариантов $\vec{e}$ принимает постоянное значение $\vec{\sigma}_0$ вдоль отрезка, соединяющего точки $\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0)$, $\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0)$ (см. (I0), (II)), при этом весь этот отрезок лежит в области E^* и точка $\vec{e}_0$ принадлежит этому отрезку.

Пусть точки $\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0)$, $\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0)$ удовлетворяют неравенствам:

$$e_i(\vec{\sigma}_0-0)\le e_i(\vec{\sigma}_0+0),\quad i=1,2 \tag{I8}$$

Но поскольку $\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0)$, $\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0)$ лежат в первой и во второй фазах, то выполнены неравенства:

$$a_1e_1^0-a\le a_1e_1(\vec{\sigma}_0+0)-a\le\sigma_1(\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0))\equiv\sigma_1(\vec{e}(\vec{\sigma}_0))=$$
$$=\sigma_1^c=\sigma_1(\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0))\le A_1e_1(\vec{\sigma}_0-0)+a\le A_1e_1^0+a,$$

а также

$$a_2e_2^0\le a_2e_2(\vec{\sigma}_0+0)=\sigma_2(\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0))=\sigma_2^c=$$
$$=\sigma_2(\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0))\le A_2e_2(\vec{\sigma}_0-0)\le A_2e_2^c$$

Следовательно, в случае, когда точки $\vec{e}(\vec{\sigma}_0-0)$, $\vec{e}(\vec{\sigma}_0+0)$ удовлетворяют неравенствам (I8), выполнены неравенства (I7).

Проверка неравенства (I7) для других случаев проводится аналогично.

<u>Лемма 5</u>. Определение зависимости $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ влечет за собой определение функциональной зависимости $P=P(\mathcal{E})$, при этом

$$P=P(\mathcal{E})\equiv\sigma_1(\vec{e})\cdot I+\frac{\sigma_2(\vec{e})}{e_2}\left(\mathcal{E}-\frac{1}{3}e_1\cdot I\right)$$
$$P(\mathcal{E}):\mathcal{E}=\sigma_1\cdot e_1+\sigma_2e_2 \tag{I9}$$

здесь I – единичная матрица.

Доказательство. Введем в рассмотрение свободную энергию

$$F = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i e_i - \Phi \tag{20}$$

тогда для нее термодинамическое тождество гл. I § 3 (2) запишется следующим образом:

$$dF = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \equiv \sigma_1 de_1 + \sigma_2 de_2 \tag{21}$$

Поэтому

$$P_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial e_1}\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial e_2}\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_1(\vec{e})\delta_{ij} +$$

$$+ \frac{\sigma_2(\vec{e})}{e_2}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e_1 \delta_{ij}\right)$$

т.к. $\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{e_2}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e_1 \delta_{ij}\right)$ и следовательно

$$P(\varepsilon) : \varepsilon = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\varepsilon_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\sigma_1 \cdot \delta_{ij} + \frac{\sigma_2(\vec{e})}{e_2}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e_1 \delta_{ij}\right)\right)\varepsilon_{ij} =$$

$$= \sigma_1 e_1 + \frac{\sigma_2}{e_2}\left(\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2 - \frac{1}{3} e_1^2\right) \equiv \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 \quad \square$$

Замечание. Очевидно, что из первого соотношения (I9) и выполнения неравенств (I7) по непрерывности $P = P(\varepsilon)$ можно доопределить значение тензора напряжений P в нуле, положив

$$P(0) = \sigma_1(0,0) \cdot I \tag{22}$$

Лемма 6. Предположим, что для функции $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ выполнены неравенства (I7), тогда тензор напряжений P как функция тензора деформации ε является непрерывной монотонной:

$$\left(P(\varepsilon^{I}) - P(\varepsilon^{II})\right) \cdot \left(\varepsilon^{I} - \varepsilon^{II}\right) \geq 0 \quad \text{для любых } \varepsilon^{I}, \varepsilon^{II} \tag{23}$$

При этом, если

$$\left(P(\varepsilon^{I}) - P(\varepsilon^{II})\right)\left(\varepsilon^{I} - \varepsilon^{II}\right) = 0 \tag{24}$$

то $P(\varepsilon^{I}) = P(\varepsilon^{II})$.

<u>Доказательство</u>. Из (I7), (I9), (22) и леммы 3 следует непрерывность функции $P = P(\mathcal{E})$. Рассмотрим три случая:

а) когда $\mathcal{E}^{I} \neq 0$, $\mathcal{E}^{II} \neq 0$, тогда из представления (I9) имеем, что

$$P(\mathcal{E}^{I}) : (\mathcal{E}^{I} - \mathcal{E}^{II}) = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sigma_1^{I} \cdot \delta_{ij} + \frac{\sigma_2^{I}}{e_2^{I}} \cdot \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{II}\right) = \sigma_1^{I} \left\{\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{II}\right)\right\} + \frac{\sigma_2^{I}}{e_2^{I}} \times$$

$$\times \left\{\sum_{i,j=1}^{3} \left(\varepsilon_{ij}^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \delta_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{II}\right)\right\} = \sigma_1^{I}\left(e_1^{I} - e_1^{II}\right) +$$

$$+ \frac{\sigma_2^{I}}{e_2^{I}} \left\{\sum_{i,j=1}^{3} \left(\varepsilon_{ij}^{I}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_1^{I}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{3}\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \delta_{ij}\right)\varepsilon_{ij}^{II}\right\} = \qquad (25)$$

$$= \sigma_1^{I}\left(e_1^{I} - e_1^{II}\right) + \frac{\sigma_2^{I}}{e_2^{I}} \left\{\left(e_2^{I}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{3}\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \delta_{ij}\right)\varepsilon_{ij}^{II}\right\} =$$

$$= \sigma_1^{I}\left(e_1^{I} - e_1^{II}\right) + \frac{\sigma_2^{I}}{e_2^{I}} \left\{\left(e_2^{I}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{3}\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \delta_{ij}\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\varepsilon_{ij}^{II} - \frac{1}{3} e_1^{II} \delta_{ij}\right)\right\}$$

Последнее равенство в формуле (25) следует из того, что

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \cdot \delta_{ij}\right) \cdot \delta_{ij} = 0$$

Поэтому

$$\left(P(\mathcal{E}^{I}) - P(\mathcal{E}^{II})\right) : \left(\mathcal{E}^{I} - \mathcal{E}^{II}\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sigma_i(e^{+I}) - \sigma_i(e^{+II})\right) \cdot$$

$$\cdot \left(e_i^{I} - e_i^{II}\right) + \left(\frac{\sigma_2(e^{+I})}{e_2^{I}} + \frac{\sigma_2(e^{+II})}{e_2^{II}}\right) \cdot \qquad (26)$$

$$\cdot \left(e_2^{I} \cdot e_2^{II} - \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}^{I} \cdot e_{ij}^{II}\right)$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e_1 \cdot \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронеккера).

Из неравенства Коши $\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N} y_k^2}$

следует неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}^{I} \cdot e_{ij}^{II} \le e_2^{I} \cdot e_2^{II},$$

так как $\left(\sum\limits_{i,j=1}^{3} e_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2 - \frac{1}{3} e_1^2} = e_2$

Но поскольку функция $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ является монотонной (см. лемму 3), а из леммы 4 следует, что

$$0 < c_1 \le \left\{ \frac{\sigma_2(\vec{e}^{\,I})}{e_2^{I}} + \frac{\sigma_2(\vec{e}^{\,II})}{e_2^{II}} \right\} < c_2 \tag{27}$$

где c_i – константы, то, следовательно, выполнено неравенство (23).

б) пусть $\varepsilon^{II} = 0$ и $\varepsilon^{I} \ne 0$, тогда из (21) и представления (19) следует, что

$$\left(P(\varepsilon^{I}) - P(\varepsilon^{II}) \right) : \left(\varepsilon^{I} - \varepsilon^{II} \right) = \left(\sigma_1(\vec{e}^{\,I}) - \sigma_1(0,0) \right) \cdot e_1^{I} +$$
$$+ \frac{\sigma_2(\vec{e}^{\,I})}{e_2^{I}} \cdot \left\{ \left(\varepsilon^{I} - \frac{1}{3} e_1^{I} \cdot I \right) : \varepsilon^{I} \right\} =$$
$$= \left(\sigma_1(\vec{e}^{\,I}) - \sigma_1(0,0) \right) \cdot e_1^{I} + \sigma_2(\vec{e}^{\,I}) \cdot e_2^{I} = \tag{28}$$
$$= \left\{ \left(\sigma_1(\vec{e}^{\,I}) - \sigma_1(0,0) \right) \cdot e_1^{I} + \left(\sigma_2(\vec{e}^{\,I}) - \sigma_2(0,0) \right) e_2^{I} \right\} +$$
$$+ \sigma_2(0,0) \cdot e_2^{I}$$

Последнее слагаемое положительно по определению вторых инвариантов, а слагаемое в фигурных скобках ввиду (16).

в) пусть $\varepsilon^{I} = 0$, $\varepsilon^{II} = 0$, тогда выполнение (23) очевидно.

Пусть выполнено равенство (23) и рассмотрим случай:

а) когда $\varepsilon^{I} = 0$ и $\varepsilon^{II} = 0$. Тогда из (26), (27) следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sigma_i(\vec{e}^{\,I})-\sigma_i(\vec{e}^{\,II})\right)(e_i^{I}-e_i^{II})=0 \tag{29}$$

$$e_2^{I}\cdot e_2^{II}=\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}^{I}\cdot e_{ij}^{II} \tag{30}$$

Введем обозначение $S=\mathcal{E}/e_2$, $(S_{ij}=\mathcal{E}_{ij}/e_2)$, где e_2 – второй инвариант матрицы $\mathcal{E}$. Тогда из (30) следует, что

$$\sum_{i,j=1}^{3}(S_{ij}^{I})^2=1 \ , \ \sum_{i,j=1}^{3}(S_{ij}^{II})^2=1 \ , \ \sum_{i,j=1}^{3} S_{ij}^{I}\cdot S_{ij}^{II}=1$$

и поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{3}(S_{ij}^{I}-S_{ij}^{II})^2=0,$$

то есть $S^{I}=S^{II}$ $(S_{ij}^{I}=S_{ij}^{II},\ i,j=1,2,3)$.

Но, ввиду леммы 3, из равенства (29) следует, что

$$\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,I})=\vec{\sigma}(\vec{e}^{\,II})$$

Поэтому $P(\mathcal{E}^{I})=P(\mathcal{E}^{II})$, т.к. $P(\mathcal{E})=\sigma_1(\vec{e})\cdot I+\sigma_2(\vec{e})\cdot S$

б) пусть $\mathcal{E}^{II}=0$ и докажем, что тензор напряжений пропорционален единичной матрице и равен $\sigma_1(0,0)\cdot I\equiv P(0)$

Из равенств (28), (24) следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sigma_i(\vec{e}^{\,I})-\sigma_i(0,0)\right)e_i^{I}=0, \tag{31}$$
$$\sigma_2(0,0)\cdot e_2^{I}=0$$

Из леммы 3 и первого равенства (31) следует, что

$$\sigma_1(\vec{e}^{\,I})=\sigma_1(0,0) \ , \ \sigma_2(\vec{e}^{\,II})=\sigma_2(0,0)$$

а из второго (31) – либо $\sigma_2(0,0)=0$, но тогда как $P(0)=0$, так и $P(\mathcal{E}^{II})=0$ (поскольку равенство нулю второго инварианта влечет равенство нулю тензора P); либо e_2^{I} и тем самым $\mathcal{E}^{I}$ тоже равно 0. □

6. Доказательство теоремы. Определим оператор $q: H_1 \to H_1^*$ равенством

$$\langle q(\vec{v}), \vec{h} \rangle = \int_\Omega P(\varepsilon(\vec{v}+\vec{b})) : \varepsilon(\vec{h})\, d\vec{x} - \int_\Omega \vec{f}\vec{h}\, dx - \int_{\gamma_2} \vec{g}\vec{h}\, d\vec{s} \quad (32)$$

для $\vec{v}, \vec{h} \in H_1$, а также рассмотрим функционал Z, определенный на рефлексивном банаховом пространстве

$$Z(\vec{v}) = \int_\Omega F(\varepsilon(\vec{v}+\vec{b}))\, d\vec{x} - \int_\Omega \vec{f}\vec{v}\, d\vec{x} - \int_{\gamma_2} \vec{g}\vec{v}\, d\vec{S}$$

где $\vec{v} \in H_1$, F – свободная энергия двухфазной среды, определенная формулой (20).

Покажем, что функционал q и оператор Z удовлетворяют условиям следующей теоремы.

Теорема. (М.М.Вайнберг [9]). Пусть вещественный функционал $q(x)$ заданный в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E, дифференцируем по Гато, и $\operatorname{grad} q(x) = Z(x)$ удовлетворяет условиям:

I) функция $\langle Z(tx), x \rangle$ непрерывна по t на $[0, I]$ при любом $x \in E$

2) $\langle Z(x+h) - Z(x), h \rangle \geq 0$ для всех $x, h \in E$

3) $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\langle Z(x), x \rangle}{R} = +\infty$, $R = \|x\|$

тогда существует точка минимума x функционала $q(x)$ и $\operatorname{grad} q(x_0)$.

При доказательстве выполнения условия I) нам потребуется следующая

Теорема. (М.А.Красносельский [62]). Пусть функция $Z(x, u_1, \ldots, u_k)$ – непрерывна по $u_1, \ldots, u_k$ почти при всех x и измерима по x при всех $u_1, \ldots, u_k$ в области

$(x, u_1, \ldots, u_k) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ и пусть

$$|Z(x, u_1, \ldots, u_k)| \le C \sum_{i=1}^{k} |u_i|^{p_i/p} + q(x)$$

$p_i, p \ge 1$, $q \in L_p(\Omega)$, тогда оператор Z, определяемый равенством $Z(u_1(x), \ldots, u_k(x)) = Z(x, u_1(x), \ldots, u_k(x))$ ограничен и действует непрерывным образом из $\prod_{i=1}^{k} L_{p_i}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

В силу непрерывной дифференцируемости свободной энергии и выполнения термодинамического тождества (2I) выполнено равенство $\operatorname{grad} q(\vec{v}) = Z(\vec{v})$, при этом

I) покажем, что функция $\langle Z(t\vec{v}), \vec{v} \rangle$ непрерывна по t на $[0, I]$ при любом $\vec{v} \in H_1$

а) в силу леммы 5 тензор напряжений P как функция тензора деформации $\mathcal{E}$ является непрерывной.

б) из (I7), (I9) следует выполнение неравенств

$$|P_{ij}(\mathcal{E})| \le C_1 \left\{ \left\{ |\mathcal{E}_{11}| + |\mathcal{E}_{22}| + |\mathcal{E}_{33}| \right\} + |\mathcal{E}_{ij}| \right\} + C_2,$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные.

в) оператор $\mathcal{E} : H_1 \to (L_2(\Omega))^9$, определенный формулой

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{E}_{ij}(\vec{v}) = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)/2$$

действует непрерывным образом из H_1 в $(L_2(\Omega))^9$

Следовательно, в силу теоремы (Красносельский) оператор $R(\vec{v}) = P(\mathcal{E}(\vec{v}))$ действует непрерывным образом из H_1 в $(L_2(\Omega))^9$ и тем более

$$\|R(t\vec{v}) - R(t'\vec{v})\|_{(L_2(\Omega))^9} \to 0 \quad \text{при } t \to t', \ (t, t' \in [0, 1])$$

и любом $\vec{v} \in H_1$, но поскольку из сильной сходимости в $(L_2(\Omega))^9$

следует слабая сходимость, то и функция $\langle Z(t\vec{v}), \vec{v} \rangle$ является непрерывной.

2) оператор $Z: H_1 \to H_1^*$ является монотонным в силу леммы 6 и равенства (32).

3) В силу теоремы (С.Л.Соболев [63]) следующие две нормы эквивалентны в пространстве H_1 ($mer\,\gamma_1 \neq 0$ в норме $L_2(\gamma)$)

$$\|\vec{v}\|_* = \int_\Omega (e_1^2 + e_2^2) d\vec{x},$$

$$\|\vec{v}\|_{H_1} = \int_\Omega \left(|\vec{v}|^2 + \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} dx$$

где e_1, e_2 - первый и второй инвариант тензора $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\vec{v})$

Замечание. Если $mer\,\gamma_1 = 0$, то в этом случае решение $\vec{u}$ определяется с точностью до вектора жесткого смещения, тем самым решение $\vec{u}$ достаточно искать в подпространстве H_1 пространства $W_2^1(\Omega)$ таком, что $\int_\Omega \vec{u}\, dx = 0$, $\int_\Omega rot\,\vec{u}\, dx = 0$, поэтому нормы $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_{H_1}$ в пространстве H_1 опять эквивалентны.

Следовательно из (17), (19), (32) и выполнения неравенств

$$\left| \int_\Omega \vec{f}\vec{v}\, d\vec{x} \right| \le \|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\vec{v}\|_{H_1},$$

$$\left| \int_{\gamma_2} \vec{g}\vec{v}\, d\vec{s} \right| \le \|g\|_{L_2(\gamma_2)} \cdot \|\vec{v}\|_{L_2(\gamma_2)} \le C\|\vec{g}\|_{L_2(\gamma_2)} \cdot \|\vec{v}\|_{H_1}$$

следует выполнения неравенств $\langle Z(\vec{v}), \vec{v} \rangle \ge C_3 \|\vec{v}\|_{H_1}^2 - C_4 \|v\|_{H_1}$

поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\langle Z(\vec{v}), \vec{v} \rangle}{R} = +\infty, \quad R = \|v\|_{H_1}$$

Поэтому существует точка минимума $\vec{v}_0 \in H_1$ функционала q такая, что

$$0 = \langle Z(\vec{v}_0), \vec{h} \rangle = \int_{\Omega} P(\varepsilon(\vec{v}_0 + \vec{b})) : \varepsilon(\vec{h})\,dx - \int_{\Omega} \vec{f}\,\vec{h}\,dx - \int_{\gamma_2} \vec{g}\,\vec{h}\,ds$$

для всех $\vec{h} \in H_1$

Единственность тензора напряжений следует из определения обобщенного решения и леммы 5.

§ 2. Осесимметричный случай. Структура решения

I. Постановка задачи и формулировка результатов. Рассматривается задача о равновесии полого цилиндра $\Omega = \{ (x, z) \mid x \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}, r_0 \le r(x) \le r_1 \}$ при равномерном внутреннем и внешнем давлении (см. рис. 5), когда отсутствуют массовые силы, тогда в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{d}{dr}(r p_{rr}) + p_{\varphi\varphi} = 0, \quad r \in [r_0, r_1]$$

$$p_{rr} = p_0, \quad r = r_0; \quad p_{rr} = p_1, \quad r = r_1$$

ненулевые компоненты $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ тензора деформаций ε удовлетворяют условию совместности

$$\frac{d}{dr}(r \varepsilon_{\varphi\varphi}) = \varepsilon_{rr}, \quad r \in [r_0, r_1]$$

Заметим, что в области гладкости ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ связаны с перемещением $u = u(r)$ формулами $\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$. В дальнейшем для упрощения записи математических формул будем рассматривать цилиндр с $r_0 = 1$, $r_1 = \lambda > 1$. Обозначим

$$\sigma_1' = \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{2}, \quad \sigma_2' = \frac{p_{rr} + p_{\varphi\varphi}}{2}, \quad e_1' = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{2}, \quad e_2' = \frac{e_{rr} + e_{\varphi\varphi}}{2}$$

тогда функциональная связь между σ_i', e_i' для среды, удовлетворяющей закону Гука, имеет вид: $\sigma_i' = \alpha_i' \cdot e_i'$, $i = 1, 2$, где $\alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\alpha_2' = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ – постоянные (см. формулы (2), (4) главы I § 4), а термодинамическое тождество гл. I § 3 (2) запишется в виде

$$dF = P : d\varepsilon = p_{rr}\, d\varepsilon_{rr} + p_{\varphi\varphi}\, d\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_1' de_1' + \sigma_2' de_2'$$

Поэтому в осесимметричном случае для среды, которая может находиться в двух различных фазах, удовлетворяющая в этих фазах закону Гука система определяющих соотношений между σ_i', e_i' остается

...й же, как и для инвариантов σ_i и e_i тензоров напряжений и деформации $\mathcal{E}$ (см. гл. I § 4, (20)), но с постоянными α_i. ...льнейшем для упрощения записи "штрих" опустим. Таким образом, ...чу о равновесии двухфазной среды в осесимметричном случае можно сформулировать следующим образом.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние ...фазной среды $\vec{\sigma}(z), \vec{e}(z)$ в области Ω, где $\vec{\sigma}$ и $\vec{e}$ ...ционально связаны равенствами

$$
(\sigma_1(e_1,e_2), \sigma_2(e_1,e_2)) = \begin{cases} (\alpha_1^{I} e_1, \alpha_2^{I} e_2), & (e_1,e_2) \in E^{I} = \{(e_1,e_2)\in \mathbb{R}^2 \mid |e_2| \le \gamma^{I}|e_1|\} \\ (\beta(e_1+\gamma e_2), \gamma\beta(e_1+\gamma e_2)), & (e_1,e_2) \in E_x^{+} = \{(e_1,e_2)\in E^{*}, e_1\cdot e_2 > 0\} \\ (\beta(e_1-\gamma e_2), -\gamma\beta(e_1-\gamma e_2)), & (e_1,e_2) \in E_x^{-} = \{(e_1,e_2)\in E^{*}, e_1\cdot e_2 < 0\} \\ (\alpha_1^{II} e_1, \alpha_2^{II} e_2), & (e_1,e_2) \in E^{II} = \{(e_1,e_2)\in \mathbb{R}^2 \mid |e_2| \ge \gamma^{II}|e_1|\} \end{cases} \tag{I}
$$

...де $E_x = \{(e_1,e_2)\in \mathbb{R}^2 \mid \gamma^{I}|e_1| < |e_2| < \gamma^{II}|e_2|\}$, $\gamma^{i} = \gamma\alpha_1^{i}/\alpha_2^{i}, \; i=1,2$

$$\gamma = [1/\alpha_1^{I} - 1/\alpha_1^{II}]/[1/\alpha_2^{I} - 1/\alpha_2^{II}], \quad \beta = 1/[1/\alpha_1^{I} + \gamma^2/\alpha_2^{I}]$$

$\vec{\sigma}(z), \vec{e}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$
\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(z(\sigma_1+\sigma_2)\right) = \sigma_1 - \sigma_2 \\ &\frac{d}{dz}\left(z(e_1-e_2)\right) = e_1 + e_2, \quad z\in[1,\lambda] \end{aligned} \tag{2}
$$

...краевыми данными

$$\sigma_1+\sigma_2 = p_0 \quad \text{при} \quad z=1, \quad \sigma_1+\sigma_2 = p_1 \quad \text{при} \quad z=\lambda \tag{3}$$

При этом уравнения (2) понимаем в обобщенном смысле, т.е. в ...бласти гладкости $\vec{\sigma}(z), \vec{e}(z)$ удовлетворяют уравнениям (2), а в ...очке разрыва $z = z_*$ выполнены условия сильного разрыва:

$$[\sigma_1+\sigma_2]|_{z=z_*} = 0, \quad [e_1-e_2]|_{z=z_*} = 0, \tag{4}$$

...де $[\varphi]|_{z=z_*} = \varphi(z_*+0) - \varphi(z_*-0)$

<u>Теорема</u>. Плоскость переменных $(p_0, p_1)\in\mathbb{R}^2$ разбивается на различные области, соответствующие различным структурам решения задачи (I) – (4):

I) область Ω полностью занята I фазой при

$$\lambda^2\,|p_1/p_0-1|\le\gamma\,|\lambda^2 p_1/p_0-1|$$

2) область Ω полностью занята II фазой при

$$|p_1/p_0-1|\ge\gamma\,|\lambda^2 p_1/p_0-1|$$

3) в области Ω существует поверхность $|\vec{x}|=r_*\ (1<r_*<\lambda)$ разделяющая фазу I и переходную фазу, соответствующую области E_*^+ (области E_*^-) при $S_1^+(M)<p_1/p_0<S_1^+(1)$ (при $S_1^-(1)<p_1/p_0<S_1^-(M)$),

где $S_1^\pm(r)=r^{\left(\mp\frac{2}{1\pm\gamma}\right)}\left(1\pm\gamma(r/\lambda)^2\right)/(1\pm\gamma)$, $M=\min\{\lambda,L\}$

4) в области Ω существует поверхность $|\vec{x}|=r_*$, разделяющая фазу II и переходную фазу, соответствующую области E_*^+ (области E_*^-) при $S_2^+(\lambda)<p_1/p_0<S_2^+(\lambda/M)$ (при $S_2^-(\lambda/M)<p_1/p_0<S_2^-(\lambda)$),

где $S_2^\pm(r)=(\lambda/r)^{(\mp 2/(1\pm\gamma))}(1\pm\gamma)/(1\pm\gamma r^2)$

5) a) если $M=\lambda$, то при $p_1/p_0=\lambda^{-2/(1+\gamma)}$ $\left(p_1/p_0=\lambda^{2/(1-\gamma)}\right)$ область Ω полностью занята переходной фазой E_*^+ (E_*^-);

б) если $M=L$, то при $S_3^+(L)<p_1/p_0<S_3^+(\lambda)$ (при $S_3^-(\lambda)<p_1/p_0<S_3^-(L)$) в области Ω существует две поверхности $1<|\vec{x}|=r_1<|\vec{x}|=r_2<\lambda$, разделяющие I, переходную E_*^+ (E_*^-) и II фазы, где $S_3^\pm(r)=L^{\mp 2/(1\pm\gamma)}\left(1\pm\gamma(r/\lambda)^2/1\pm\gamma(\frac{r}{L})^2\right)$ при $\gamma\ne 1$

6) при $\gamma=1$ и при $p_1/p_0<0$ в области Ω существует поверхность $|\vec{x}|=\lambda$, разделяющая I и II фазы.

Заметим, что при $\gamma=1$ область Ω не может содержать переходную фазу, соответствующую E_*.

$$L=\begin{cases}\mathbb{R}^{(1\pm\gamma)/2(1\mp\gamma)}, & \gamma\ne 1\quad \left(\mathbb{R}=(\gamma+\gamma^{\mathrm{II}})(1+\gamma\gamma^{\mathrm{I}})/((\gamma+\gamma^{\mathrm{I}})(1+\gamma\gamma^{\mathrm{II}}))\right)\\ e^{\mathbb{R}_1}, & \gamma=1,\quad \left(\mathbb{R}_1=2[\gamma^{\mathrm{II}}/(1+\gamma^{\mathrm{II}})-\gamma^{\mathrm{I}}/(1+\gamma^{\mathrm{I}})]\right)\end{cases}$$

Замечание. На рис. 6 а) – в) эта теорема показана графически, т.е. при каких значениях (ρ_0 , ρ_1) среда находится либо в однофазном, либо в двухфазном, либо в двухфазном с переходной фазой состояниях.

Доказательство теоремы.

2. Общие свойства решений при различных ρ_0, ρ_1 . Как видно из (2) и определения (I) функциональной зависимости $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e})$ в первой и второй фазах, соответствующих областям E^{I} и E^{II} в плоскости переменных $\vec{e} = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$. решение $\vec{\sigma}(r)$, $\vec{e}(r)$ имеет вид:

$$e_1(r) = A/\alpha_1^i, \qquad e_2(r) = B/(r^2 \cdot \alpha_2^i), \tag{5}$$

$$\sigma_1(r) = A, \qquad \sigma_2(r) = B/r^2;$$

где $i = I, II$; A, B – постоянные;

в переходной фазе, соответствующей области E_x^+ при $\gamma \neq 1$

$$e_1(r) = Cr^q + D\gamma r^{q_1}, \quad e_2(r) = -\gamma C r^q - D r^{q_1} \tag{6}$$

$$\sigma_1(r) = c\beta(1-\gamma^2)r^q, \quad \sigma_2(r) = c\beta(1-\gamma^2)\gamma r^q$$

где C, D – постоянные, $q = -2\gamma/(1+\gamma)$, $q_1 = -2/(1+\gamma)$;

в переходной фазе, соответствующей области E_x^- при $\gamma \neq 1$

$$e_1(r) = Cr^p - D\gamma r^{p_1}, \quad e_2(r) = \gamma C r^p - D r^{p_1} \tag{7}$$

$$\sigma_1(r) = C\beta(1-\gamma^2)r^p; \quad \sigma_2(r) = -\gamma C\beta(1-\gamma^2)r^p,$$

где $p = 2\gamma/(1-\gamma)$, $p_1 = -2/(1-\gamma)$,

в переходной фазе, соответствующей области E_x^+ при $\gamma = 1$ решение имеет вид

$$e_1(r) = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\ln r\right) - \frac{D}{r}, \quad e_2(r) = -\frac{c}{2r}\ln r + \frac{D}{r}, \tag{8}$$

$$\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = \frac{\beta c}{r},$$

а для переходной фазы E_x^- при $\gamma = 1$ решение не существует.

Из непрерывности функции $\vec{e}(r)$, $\vec{\sigma}(r)$ в области гладкости и (4) следует, что линейные комбинации $\xi(r)=\sigma_1(r)+\sigma_2(r)$, $\eta(r)=e_1(r)-e_2(r)$ являются непрерывными функциями при всех $r\in[1,\lambda)$.

Рассмотрим отображение $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ по правилу $Q(e_1,e_2)=(\sigma_1(e_1,e_2)+\sigma_2(e_1,e_2),\ e_1-e_2)$. Используя определение функции $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ в каждой из областей E^{I}, E^{II}, E_*^{+} и E_*^{-}, видим, что отображение $Q=Q(\vec{e})$ является невырожденным, за исключением случая $\gamma=1$ в области E_*^{-}. Следовательно, оно будет взаимно-однозначным отображением плоскости переменных $(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2$ на плоскость $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$, если при этом отображении соответствующие границы образов E^{I}, E^{II}, E_*^{+} и E_*^{-} будут совпадать. Рассмотрим общую границу $e_2=\gamma^{I}e_1$ областей E^{I} и E_*^{+}, в области E^{I} при отображении Q эта граница переходит в прямую

$$\eta=(1-\gamma^{I})e_1=\frac{1-\gamma^{I}}{(1+\gamma^{I})\alpha_1^{I}}\xi,\quad \xi=\alpha_1^{I}e_1+\alpha_2^{I}e_2=(1+\gamma^{I})\alpha_1^{I}e_1,$$

с другой стороны в области E_*^{+} граница переходит в прямую

$$\eta=(1-\gamma^{I})e_1=\frac{1-\gamma^{I}}{(1+\gamma^{I})\alpha_1^{I}}\xi,\ \text{т.к.}\ \xi=(1+\gamma^{I})\sigma_1(\vec{e})=(1+\gamma^{I})\alpha_1^{I}e_1$$

т.е. границы образов совпадают. Аналогично проверяется совпадение и других границ при отображении Q. Следовательно, непрерывная кривая в плоскости (e_1,e_2) переходит в непрерывную кривую в плоскости (ξ,η) и обратно, поэтому решение $\vec{e}(r)$ задачи (I) – (4) изображается на плоскости (e_1,e_2) непрерывной кривой всюду при $\gamma\neq 1$, а при $\gamma=1$ решение $\vec{\sigma}(r)=\vec{\sigma}(\vec{e}(r))$ изображается на плоскости (σ_1,σ_2) непрерывной кривой (поскольку функция $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}(\vec{e})$ является непрерывной (см. (I)) в области E_*: $\sigma_1=\beta(e_1-e_2)$, $\sigma_2=-\sigma_1$ и в точке разрыва выполнено (4). Из геометрических рассмотрений решения $\vec{e}(r)$ в плоскости $\vec{e}$, непрерывности $\vec{e}(r)$ (или $\vec{\sigma}(r)$) и формул (5) - (8) следует, что решение задачи (I) - (4) можно представить кривой, которая описывает, что

либо А) среда находится полностью в одной из фаз (либо первой, либо второй, либо переходной),

либо Б) среда находится в первой и переходной, либо во второй и переходной фазах,

либо В) среда находится в первой, переходной, второй фазах,

либо Г) среда находится в первой и второй фазах.

Заметим, что вариант Г) может реализовываться, когда $\gamma = 1$ и траектория решения $\vec{e}(r)$ выходит за границу области E_*.

Далее изучим, при каких значениях p_0, p_1 реализуется каждый из возможных вариантов А), Б), В), Г).

В а р и а н т А).

Пусть область Ω полностью занята первой (второй) фазой, тогда из условия, что решение $\vec{\sigma}(r)$, $\vec{e}(r)$ является непрерывной функцией, следует, что функции $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(r)$, $\vec{e} = \vec{e}(r)$ определяются формулами (5) для всех $r \in [1, \lambda]$ при $i = I$ $(i = II)$, где постоянные А, В определяются из краевых условий (3), поэтому

$$p_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=1} = A + B,$$

$$p_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=\lambda} = A + B/\lambda^2$$

т.е.
$$A = \frac{p_1 \lambda^2 - p_0}{\lambda^2 - 1}, \quad B = \frac{\lambda^2 (p_0 - p_1)}{\lambda^2 - 1}.$$

Пусть среда находится в первой фазе E^I, тогда для функции $\vec{e} = \vec{e}(r)$ при всех $r \in [1, \lambda]$ должно быть выполнено неравенство $|e_2(r)| \le \gamma^I |e_1(r)|$, тем самым

$$\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 |p_0 - p_1| \le \gamma |\lambda^2 p_1 - p_0|, \quad r \in [1, \lambda]$$

Если это неравенство выполняется при $r = 1$, то оно выполняется при $r \in (1,\lambda]$, поэтому делаем вывод, что утверждение I) теоремы выполнено.

Если среда находится во второй фазе Π^{II}, тогда функция $\vec{e}(r)$ при всех $r \in [1,\lambda]$ должна удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 |p_0 - p_1| \geq \gamma\, |\lambda^2 p_1 - p_0|,$$

т.е. выполнено утверждение 2) теоремы.

Пусть в области Ω находится только переходная фаза, соответствующая области E_*^+, тогда возможны два случая:

а) пусть $\gamma \neq 1$, тогда решение $\vec{\sigma}(r), \vec{e}(r)$ задачи (I) – (4) определяется формулами (6), где постоянная C удовлетворяет краевым условиям (3)

$$p_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=1} = c\beta(1-\gamma^2)(1+\gamma)$$
$$p_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=\lambda} = c\beta(1-\gamma^2)(1+\gamma)\lambda^{q} \tag{9}$$

поэтому, если среда находится в переходной фазе E_*^+, то заданные p_0, p_1 должны удовлетворять равенству

$$\frac{p_1}{p_0} = \lambda^{q} \tag{I0}$$

а также функция $\vec{e}(r)$ при всех $r \in [1,\lambda]$ должна удовлетворять неравенствам

$$\gamma^{I} |e_1(r)| < |e_2(r)| < \gamma^{II} |e_1(r)|, \quad e_1(r) \cdot e_2(r) > 0 \tag{II}$$

Рассмотрим случай $e_1(r) > 0$, $e_2(r) > 0$ (случай $e_1 < 0$, $e_2 < 0$ рассматривается аналогично). Из формул (6) для выполнения неравенств (I) необходимо, чтобы постоянные C, D удовлетворяли неравенствам

$$c\, r^{q} + D\gamma r^{q_1} > 0\ ; \quad -\gamma C r^{q} - D r^{q_1} > 0$$

$$C(\gamma + \gamma^{I}) r^{q} + D(1+\gamma\gamma^{I}) r^{q_1} < 0; \quad C(\gamma + \gamma^{II}) r^{q} + D(1+\gamma\gamma^{II}) r^{q_1} > 0$$

для всех $r \in [1,\lambda]$. Заметим, что из первых двух неравенств следует выполнение неравенств

$$C(1-\gamma^2) > 0, \quad D(\gamma^2 - 1) > 0 \tag{I2}$$

111

Поэтому для всех $r \in [1, \lambda]$ при $\gamma > 1$ постоянные C, D должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{1}{\gamma} r^{q-q_1} < -\frac{D}{C} < \gamma r^{q-q_1}; \quad \frac{(\gamma+\gamma^{II})}{(1+\gamma\gamma^{II})} r^{q-q_1} < -\frac{D}{C} < \frac{(\gamma+\gamma^{I})}{(1+\gamma\gamma^{I})} r^{q-q_1} \tag{13}$$

а при $\gamma < 1$

$$\frac{1}{\gamma} r^{q-q_1} > -\frac{D}{c} > \gamma r^{q-q_1}; \quad \frac{(\gamma+\gamma^{II})}{(1+\gamma\gamma^{II})} r^{q-q_1} > -\frac{D}{c} > \frac{(\gamma+\gamma^{I})}{(1+\gamma\gamma^{I})} r^{q-q_1} \tag{14}$$

Поэтому при известной постоянной C, удовлетворяющей (9), постоянная D существует, если для всех $r \in [1, \lambda]$ непротиворечивы неравенства (13) при $\gamma > 1$ или неравенства (14) при $\gamma < 1$, а для этого, как видно из этих неравенств, необходимо, чтобы

$$\lambda < \mathbb{R}^{1/(q-q_1)}, \quad \lambda < (\gamma^{-2})^{1/(q-q_1)},$$

где $\mathbb{R} = \dfrac{(\gamma+\gamma^{II})}{(1+\gamma\gamma^{II})}\dfrac{(1+\gamma\gamma^{I})}{(\gamma+\gamma^{I})}$. Но поскольку $\gamma^{I} < \gamma^{II}$, то при $\gamma < 1$ выполняется неравенство $\mathbb{R} < \gamma^{-2}$, а при $\gamma > 1$ – $\mathbb{R} > \gamma^{-2}$. Следовательно, неравенство $\lambda < \mathbb{R}^{1/(q-q_1)}$ являются более ограничительным. Тем самым утверждение 5 а) теоремы для $\gamma \neq 1$ и для переходной фазы Π_*^+. Аналогично проверяется справедливость 5 а) и для переходной фазы Π_*^- при $\gamma \neq 1$.

Как видно из равенств (6), постоянная D не участвует в определении напряжений, которые восстанавливаются единственным образом. Если выполнено неравенство $\lambda < \mathbb{R}^{1/(q-q_1)}$, то существует целый интервал значений D (при фиксированных p_0, p_1, $p_1 = p_0 \lambda^{q}$), определяющий однопараметрическое семейство деформаций $e_i = e_i(r, D)$, $i = 1, 2$.

б) пусть $\gamma = 1$, тогда решение $\vec{e}(r), \vec{\sigma}(r)$ определяется формулами (8), где постоянная C удовлетворяет краевым данным (3)

$$p_1 = (\sigma_1+\sigma_2)/_{r=\lambda} = 2c\beta\lambda^{-1}; \quad p_0 = (\sigma_1+\sigma_2)/_{r=1} = 2C\beta,$$

поэтому p_0, p_1 должны удовлетворять равенству $p_1/p_0 = \lambda^{-1}$, а функция $\vec{e}(r)$ при всех $r \in [1,\lambda]$ должна удовлетворять неравенствам (II). В области $\{(e_1,e_2) \mid e_1 > 0, e_2 > 0\}$ (I2) и $e_1(r) > 0$, $e_2(r) > 0$ эквивалентны выполнению неравенств

$$\frac{1}{2}\ln r + \frac{\gamma^{I}}{1+\gamma^{I}} < \frac{D}{c} < \frac{1}{2}\ln r + \frac{\gamma^{II}}{1+\gamma^{II}}, \quad \frac{1}{2}\ln r < \frac{D}{c} < \frac{1}{2}\ln r + 1$$

при всех $r \in [1,\lambda]$. Поэтому при известной постоянной C постоянная D существует, если выполнены вышеуказанные неравенства при всех $r \in [1,\lambda]$, а для этого необходимо, чтобы

$$\ln r < R_1, \quad \ln \lambda < 2$$

где $R_1 = 2[\gamma^{II}/(1+\gamma^{II}) - \gamma^{I}/(1+\gamma^{I})]$, но очевидно, что первое неравенство более ограничительное. Следовательно, утверждение 5 а) теоремы выполнено при $\gamma = 1$ для переходной фазы Π^{-}_{*}.

В а р и а н т Б).

Пусть среда находится в первой и переходной фазах, тогда из непрерывности траектории решения $\vec{e}(r)$, $r \in [1,\lambda]$ в плоскости переменных (e_1, e_2), постоянства функции $e_1(r)$ и монотонности $e_2(r)$ в первой фазе E^{I} (см. (4)), формул 6), (7), (8) следует, что существует точка $r_* \in [1,\lambda]$ такая, что для всех значений $r \in [1, r_*]$ сплошная среда находится в переходной фазе, а для $r \in [r_*, \lambda]$ в первой фазе.

Дальнейшее рассмотрение разбивается на различные случаи.

а) среда находится в первой и переходной фазах, соответствующих областям E^{I} и E^{+}_{*} при $\gamma \neq 1$, тогда искомое решение $\vec{e}(r), \vec{\sigma}(r)$ при $r \in [1, r_*]$ определяется формулами (6), а при $r \in [r_*, \lambda]$ формулами (5). Неизвестные постоянные A, B, C, D и свободная граница $r = r_*$ определяются из краевых условий (3):

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sigma_1+\sigma_2)/_{r=\lambda} = A + B/\lambda^2 \\ p_0 &= (\sigma_1+\sigma_2)/_{r=1} = c\beta(1-\gamma^2)(1+\gamma) \end{aligned} \qquad (I5)$$

и условий на свободной границе $r = r_*$ – непрерывному переходу траектории $\vec{e}(r)$ из области E_*^- в область E^I:

$$\vec{e}(r_*-0) = \vec{e}(r_*+0), \quad e_2(r_*) = \gamma^I e_1(r_*) \tag{16}$$

Из (5), (6), (I6) получаем, что неизвестные связаны равенствами:

$$A/\alpha_1^I = C r_*^q + D\gamma r_*^{q_1}, \quad B/(r_*^2 \alpha_2^I) = -\gamma C r_*^q - D r_*^{q_1},$$
$$C(\gamma+\gamma^I) r_*^q = -D(1+\gamma\gamma^I) r_*^{q_1} \tag{17}$$

Из (I5), (I7) следует, что

$$\frac{p_1}{p_0} = r_*^q \left(1+\gamma\left(\frac{r_*}{\lambda}\right)^2\right)/(1+\lambda) \tag{18}$$

Функция $S_1^+(r) = r^q\left(1+\gamma\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\right)/(1+\gamma)$ на интервале $[1,\lambda]$ является строго монотонно-убывающей и поэтому для того, чтобы точка $r = r_*$ являлась решением уравнения (I8) в интервале $[1,\lambda]$, необходимо, чтобы p_0, p_1 удовлетворяли неравенству:

$$S_1^+(\lambda) < \frac{p_1}{p_0} < S_1^+(1)$$

Кроме этого точка $r = r_*$ должна быть такой, чтобы для всех $r \in [r_*,\lambda]$ значения функции $\vec{e}(r)$ удовлетворяли неравенству $|e_2(r)| \le \gamma^I |e_1(r)|$ (среда находится в первой фазе), но это неравенство выполнено ввиду (5) и (I7), а также для всех $r \in [1, r_*]$ значения функции $\vec{e}(r)$ должны принадлежать области E_*^+:

$$e_1(r)\cdot e_2(r) > 0 \tag{19}$$

$$\gamma^I|e_1(r)| < |e_2(r)| < \gamma^{II}|e_1(r)| \tag{20}$$

Определим, при каких условиях на данные задачи (I) – (4) выполнены эти неравенства. Из равенств (I6) следует, что функции $e_1(r)$, $e_2(r)$ в точке $r = r_*$ имеют один и тот же знак. Далее рассмотрим случай $e_1(r_*)>0$, $e_2(r_*)>0$ (случай $e_1(r_*)<0, e_2(r_*)<0$) рассматривается аналогично), тогда для постоянных C, D из (6) следует выполнение неравенств (I2), поэтому из (6) видно, что на отрезке $[1, r_*]$ функции $e_i(r)$, $i = 1,2$, являются монотонно-убывающими как для $\gamma>1$, так и для $\gamma<1$, следовательно, неравенство (I9) выполнено автоматически. Проверим выполнение левого неравенства в (20), определим функцию $\psi(r) = -e_2(r) + \gamma^{I} e_1(r)$. В силу (6), (I7) видно, что

$$\psi(r) = C_1\left[\left(\frac{r}{r_*}\right)^{q} - \left(\frac{r}{r_*}\right)^{q_1}\right], \quad \psi(r_*) = 0,$$

где $C_1 = c(\gamma + \gamma^{I}) r_*^{q}$, поэтому из (I2) получаем, что функция на интервале является монотонно-убывающей, т.е.

$-e_2(r) + \gamma^{I} e_1(r) + \psi(r) > \psi(r_*) = 0$ при $r \in [1, r_*]$, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы было выполнено правое неравенство в (20), необходимо, чтобы функция $\psi(r) = -e_2(r) + \gamma^{II} e_1(r)$ была положительна при всех $r \in [1, r_*]$. Из (6), (I7) видно, что

$$\psi(r) = C_1 \frac{(1+\gamma\gamma^{II})}{(1+\gamma\gamma^{I})}\left(\frac{r}{r_*}\right)^{q}\left[R - \left(\frac{r_*}{r}\right)^{q-q_1}\right]$$

Из этой формулы и (I2) следует, что для положительности $\psi(r)$ на отрезке $[1, r_*]$ необходимо, чтобы

$$r_* < R^{1/(q-q_1)} \tag{2I}$$

Следовательно, для того, чтобы были выполнены неравенства (I9), (20), необходимо, чтобы точка $r = r_*$, являющаяся решением уравнения (I8) в интервале $(1, \lambda)$, удовлетворяла неравенству (2I). Отсюда следует, что утверждение 3) теоремы справедливо для $\gamma \neq 1$ и переходной фазы Π_*^{+}. Аналогично проверяется справедливость 3) и для случая, когда Ω занята I и переходной Π_*^{-} фазами при $\gamma \neq 1$.

б) пусть среда находится в первой и переходной фазах, соответствующих областям E^{I} и E_*^{+} при $\gamma = 1$, тогда решение $\vec{e}(r), \vec{\sigma}(r)$ при $r \in [1, r_*]$ определяется формулами (8), а при $r \in [r_*, \lambda]$ формулами (5). Неизвестные постоянные A, B, C, D и граница $r = r_*$ определяются из краевых данных (3)

$$p_1 = (\sigma_1+\sigma_2)|_{r=\lambda} = A + B/\lambda^2$$

$$p_c = (\sigma_1+\sigma_2)|_{r=1} = 2\beta C \qquad (22)$$

и условия (I6) на свободной границе $r = r_*$, поэтому из (5), (8) получаем, что неизвестные связаны равенствами

$$A/\alpha_1^{I} = \frac{c}{r_*}\left(1+\frac{1}{2}\ln r_*\right) - \frac{D}{r_*}; \quad B/(r_*^2\alpha_2^{I}) = -\frac{c}{2r_*}\ln r_* + \frac{D}{r_*},$$

$$C\left(\gamma^{I} + (\gamma^{I}+1)\frac{\ln r_*}{2}\right) = D(\gamma^{I}+1) \qquad (23)$$

Следовательно, из (22), (23) получаем, что

$$p_1/p_c = \frac{\lambda^2 + r_*^2}{2\lambda^2 r_*} \qquad (24)$$

функция $S_1^{+}(r) = \frac{1+(r/\lambda)^2}{2r}$ на интервале $[1,\lambda]$ является строго монотонно-убывающей и поэтому точка $r = r_*$ является решением уравнения (24) в интервале $[1,\lambda]$, если p_1, p_c удовлетворяют неравенству

$$S_1^{*}(\lambda) < \frac{p_1}{p_c} < S_1^{*}(1)$$

Кроме этого точка r_* должна быть такой, что для всех $r \in [1, r_*]$ значения функции $\vec{e}(r)$ должны принадлежать области E_*^{+}, т.е. для всех $r \in [1, r_*]$ должны быть выполнены неравенства (I9), (20). Заметим, что неравенство (I9) и левое неравенство в (20) выполняются для любых $r_* \in [1,\lambda]$ и проверка выполнения этих неравенств показывается так же, как и в случае а), остановимся только на правом неравенстве в (20). Предположим, что $e_1(r) > 0, e_2(r) > 0$ для всех $r \in [1, r_*]$, тогда для выполнения правого неравенства в (20) необходимо, чтобы функция $\psi(r) = -e_2(r) + \gamma^{II} e_1(r)$ была положительна при всех $r \in [1, r_*]$. Из (8), (23) следует, что

$$\psi(r) = \frac{c}{2}\left[\ln r - \ln r_* + R_1\right]$$

Из этой формулы видно, что для положительности функции $\psi(r)$

на отрезке $[1, r_*]$ необходимо, чтобы

$$\ln r_* < \mathbb{R}_1 \tag{25}$$

Следовательно, неравенства (19), (20) выполнены, если точка $r = r_*$, являющаяся решением уравнения (24) в интервале $[1, \lambda]$ удовлетворяет неравенству (25). Отсюда следует, что утверждение 3) теоремы для $\gamma = 1$ и переходной фазы Π_*^+.

Пусть среда находится во второй и переходной фазах, тогда из непрерывности траектории решения $\vec{e}(r)$, $r \in [1, \lambda]$ в плоскости переменных (e_1, e_2), постоянства функции $e_1(r)$ и монотонности $e_2(r)$ во второй фазе E^{II} (см. (5)), формул (6), (7), (8) следует, что существует точка $r_* \in (1, \lambda)$ такая, что для всех значений $r \in [1, r_*]$ среда находится во второй фазе, а при $r \in [r_*, \lambda]$ в переходной фазе. Дальнейшее рассмотрение разбивается на различные случаи.

Пусть среда находится в переходной E_*^+ и второй E^{II} фазах при $\gamma \neq 1$, тогда решение $\vec{e}(r), \vec{\sigma}(r)$ при $r \in [1, r_*]$ определяется формулами (5), а при $r \in [r_*, \lambda]$ формулами (6). Постоянные A, B, C, D и свободная граница $r = r_*$ находятся из краевых условий (3)

$$p_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=\lambda} = C\beta(1-\gamma^2)(1+\gamma)\lambda^q$$
$$p_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)|_{r=1} = A + B \tag{26}$$

и условий на свободной границе $r = r_*$ – непрерывный переход траектории функции $\vec{e}(r)$ из области E^{II} в область E_*^+, т.е.

$$\vec{e}(r_* - 0) = \vec{e}(r_* + 0); \quad e_2(r_*) = \gamma^{II} e_1(r_*) \tag{27}$$

Из (6), (27) получаем, что

$$A/\alpha_1^{II} = C r_*^q + D\gamma r_*^{q_1}; \quad B/(r_*^2 \alpha_2^{II}) = -\gamma C r_*^q - D r_*^{q_1}, \tag{28}$$

$$C(\gamma + \gamma^{II}) r_*^q = -D(1 + \gamma\gamma^{II}) r_*^{q_1}.$$

Из (26), (28) следует, что

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda^q (1+\delta)}{z_*^q (1+\delta z_*^2)} \tag{29}$$

Функция $S_2^+(z) = \left(\frac{\lambda}{z}\right)^q \frac{(1+\delta)}{(1+\delta z^2)}$ в интервале $[1, \lambda]$ является строго монотонно-убывающей и поэтому точка $z = z_*$ является решением уравнения (29) в интервале $[1, \lambda]$, если p_0, p_1 удовлетворяют неравенствам

$$S_2^+(\lambda) < \frac{p_1}{p_0} < S_2^+(1)$$

кроме этого точка $z = z_*$ должна быть такой, что при $z \in [1, z_*]$ значения функции $\vec{e}(z)$ удовлетворяют неравенству $|e_2| \geq \gamma^{\mathrm{II}} |e_1|$, но это неравенство выполнено ввиду (5), (28), а также для всех $z \in [z_*, \lambda]$ значения функции $\vec{e}(z)$ должны принадлежать E_*^+ (см. неравенства (19), (20)). Аналогичным образом, как и в случае, показывается, что эти неравенства выполняются на всем отрезке $[1, z_*]$, если точка z_*, являющаяся решением уравнения (29) на отрезке $[1, \lambda]$, удовлетворяет неравенству (21).

В а р и а н т В.

Рассмотрим случай, когда среда находится в первой, второй и переходной фазах. Определим, при каких значениях p_0, p_1 среда находится в этих фазах. Ввиду непрерывности траектории решения $\vec{e}(z)$ в плоскости переменных (e_1, e_2), постоянства функции $e_1(z)$, монотонности функции $e_2(z)$ в первой и второй фазах и определения этих фаз (см. (I)), следует, что существуют две точки $z_0, z_1 \in [1, \lambda]$ такие, что для всех $z \in [1, z_0]$ среда находится во второй фазе E^{II}; для $z \in [z_0, z_1]$ – в переходной фазе, соответствующей области E_*^+, либо области E_*^-; для $z \in [z_1, \lambda]$ – в первой фазе E^{I}.

Рассмотрим случай, когда среда находится в первой фазе E^{I} второй E^{II} и переходной, соответствующей области E_*^+ при $\gamma \neq 1$, тогда искомое решение $\vec{e}(z), \vec{\sigma}(z)$ определяется следующими формулами:

$$\sigma_1(r) = a, \quad \sigma_2(r) = b/r^2,$$
$$e_1(r) = a/\alpha_1^{\text{II}}, \quad e_2(r) = b/(r^2\alpha_2^{\text{II}}) \tag{30}$$

при $r \in [1, r_0]$.

$$\sigma_1(r) = C\beta(1-\gamma^2)r^q, \quad \sigma_2(r) = \gamma\sigma_1(r),$$
$$e_1(r) = Cr^q + D\gamma r^{q_1}, \quad e_2(r) = -\gamma C r^q - D r^{q_1} \tag{31}$$

при $r \in [r_0, r_1]$

$$\sigma_1(r) = A, \quad \sigma_2(r) = B/r^2$$
$$e_1(r) = A/\alpha_1^{\text{I}}, \quad e_2(r) = B/(r^2\alpha_2^{\text{I}}) \tag{32}$$

при $r \in [r_1, \lambda]$.

где постоянные a, A, b, B, C, D и свободные границы $r = r_0$ и $r = r_1$ определяются из краевых данных (3):

$$p_1 = (\sigma_1+\sigma_2)|_{r=\lambda} = A + B/\lambda^2; \quad p_0 = (\sigma_1+\sigma_2)|_{r=1} = a+b \tag{33}$$

а также из условий на свободных границах – непрерывности траектории решения $\vec{e}(r)$ при переходе общих границ областей E^{I}, E_*^{+} и E^{II}, E_*^{+}:

$$\vec{e}(r_0-0) = \vec{e}(r_0+0), \quad \vec{e}(r_1-0) = \vec{e}(r_1+0)$$
$$e_2(r_0) = \gamma^{\text{II}} e_1(r_0), \quad e_2(r_1) = \gamma^{\text{I}} e_1(r_1) \tag{34}$$

или

$$a/\alpha_1^{\text{II}} = Cr_0^q + D\gamma r_0^{q_1}, \quad b/(r_0^2\alpha_2^{\text{II}}) = -\gamma C r_0^q - D r_0^{q_1}$$
$$C(\gamma+\gamma^{\text{II}})r_0^q = -D(1+\gamma\gamma^{\text{II}})r_0^{q_1} \tag{35}$$

$$A/\alpha_1^{\text{I}} = Cr_1^q + D\gamma r_1^{q_1}, \quad B/(r_1^2\alpha_2^{\text{I}}) = -\gamma C r_1^q - D r_1^{q_1}$$
$$C(\gamma+\gamma^{\text{I}})r_1^q = -D(1+\gamma\gamma^{\text{I}})r_1^{q_1} \tag{36}$$

Из последних соотношений (35), (36) следует, что точки r_0, r_1 связаны следующим равенством:

$$r_0 = r_1/R^{1/(q-q_1)} \tag{37}$$

Заметим, что поскольку точки r_0, r_1 удовлетворяют неравенству $1 < r_0 < r_1 < \lambda$, то из (37) следует, что точка r_1 должна удовлетворять неравенству

$$\mathbb{R}^{1/(q-q_1)} < r_1 < \lambda \quad ,(38)$$

Из (38) в частности следует, что данные задачи (I) – (4) в случае, когда среда находится в первой, второй и переходной фазах, должны удовлетворять неравенству:

$$\mathbb{R}^{1/(q-q_1)} < \lambda \quad (40)$$

а из (33), (37) и первых двух соотношений в (35), (36) получаем, что при заданных p_0, p_1 точка r_1 является решением следующего уравнения

$$\frac{p_1}{p_0} = L^q \frac{\left(1+\gamma\left(\frac{r_1}{\lambda}\right)\right)^2}{\left(1+\gamma\left(\frac{r_1}{L}\right)^2\right)}\ , \quad L = \mathbb{R}^{1/(q-q_1)} \quad (4I)$$

Функция $S_*^+(r) = L^q\left(1+\gamma(r/\lambda)\right)^2 / \left(1+\gamma(r/L)\right)^2$ в интервале $[\mathbb{R}^{1/(q-q_1)}, \lambda]$ является монотонно-убывающей.

Пусть точка r_1 является решением уравнения (4I) и $r_1 \in [\mathbb{R}^{1/(q-q_1)}, \lambda]$, тогда аналогично ранее рассмотренным случаям показывается, что траектория функции $\overset{+}{\varepsilon}(r)$ в интервалах $[1, r_0]$, $[r_0, r_1]$ и $[r_1, \lambda]$ принадлежит областям E^{II}, E_*^+ и Π^{I} соответственно. Следовательно утверждение 5) теоремы выполнено для $\gamma \neq 1$ и переходной фазы Π_*^+. Аналогично проверяется справедливость 5) и в остальных случаях.

В А Р И А Н Т Г).

Пусть в области находится первая и вторая фаза при $\gamma = 1$, тогда существует точка $r_* \in (1, \lambda)$ такая, что при $1 < r < r_*$ находится вторая фаза, а при $r_* < r < \lambda$ находится первая фаза, т.е.

$$\sigma_1(r) = a\ , \quad \sigma_2(r) = b/r^2$$

$$e_1(r) = a/\alpha_1^{\mathrm{II}}\ , \quad e_2(r) = b/(\alpha_2^{\mathrm{II}} r^2) \text{ при } r \in [1, r_*]$$

$$\sigma_1(r) = A\,,\quad \sigma_2(r) = B/r^2,$$
$$e_1(r) = A/\alpha_1^{I},\ e_2(r) = B/(\alpha_2^{I}, r^2) \qquad (64)$$

при $r \in [r_*, \lambda]$

Постоянные a, A, b, B определяются из краевых условий (2)

$$p_1 = (\sigma_1+\sigma_2)/2_{r=\lambda} = A + B/\lambda^2$$
$$p_0 = (\sigma_1+\sigma_2)/2_{r=1} = a + b$$

и условий на свободной границе $r = r^*$: $\vec{\sigma}(r_*-0) = \vec{\sigma}(r_*+0)$

$\sigma_2(r_*) = -\sigma_1(r_*)$. Поэтому из (64) следует, что $a = A$, $b = B$, $-A = B/r_*^2$, тем самым $p_1 = A\left(1-\left(\frac{r_*}{\lambda}\right)^2\right)$, $p_0 = A(1-r_*^2)$

Из этих равенств легко определяются A и r_*. При этом, если постоянная $A>0$, то для выполнения неравенства $1<r_*<\lambda$ необходимо, чтобы $p_1>0$, $p_0<0$; если же $A<0$, то $p_1<0$, $p_0>0$.

Следовательно, среда находится в первой E^{I} и второй E^{II} фазах при $\gamma=1$, если краевые данные p_0, p_1 удовлетворяют неравенству $p_1/p_0<0$, т.е. выполнено утверждение 6) теоремы.

ИЛЛЮСТРАЦИИ.

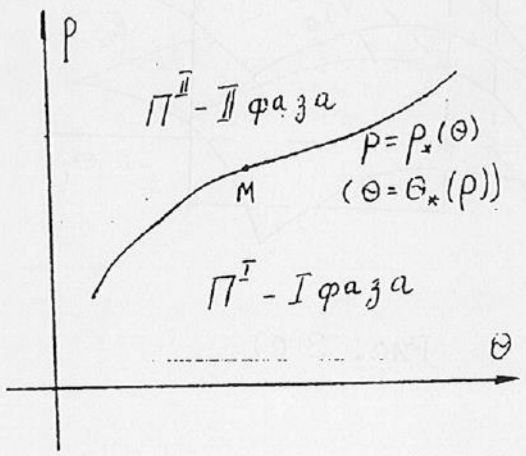

Рис. I а)

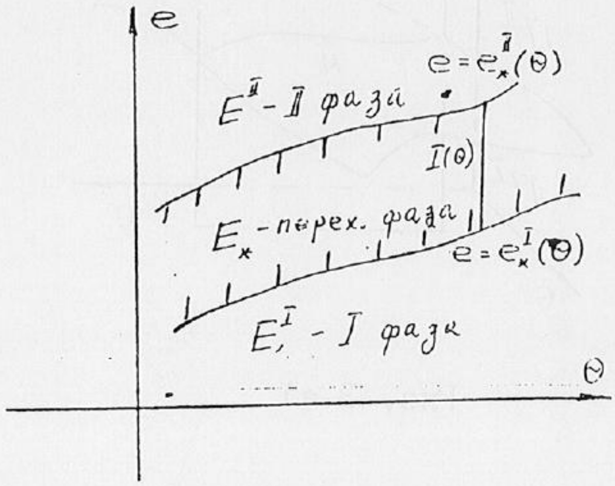

Рис. I б)

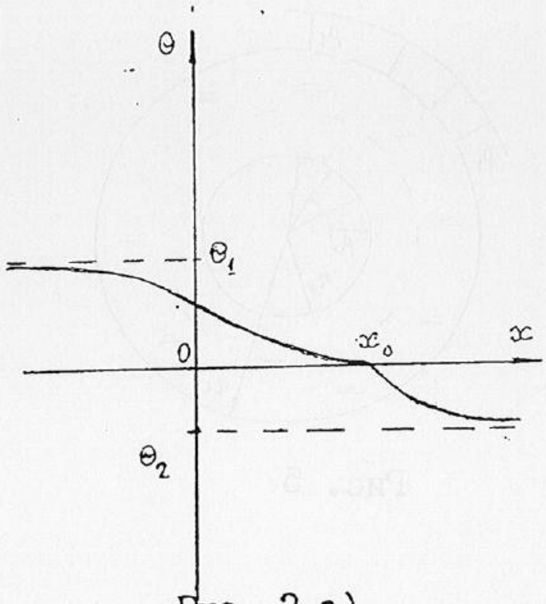

Рис. 2 а)

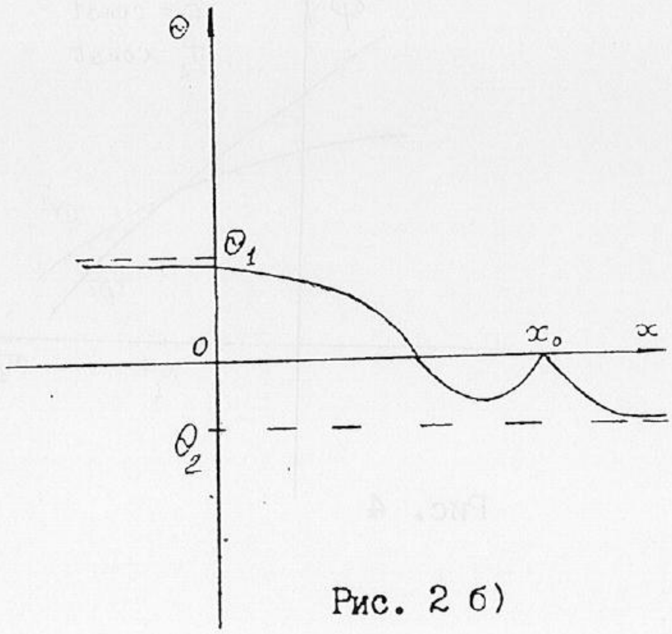

Рис. 2 б)

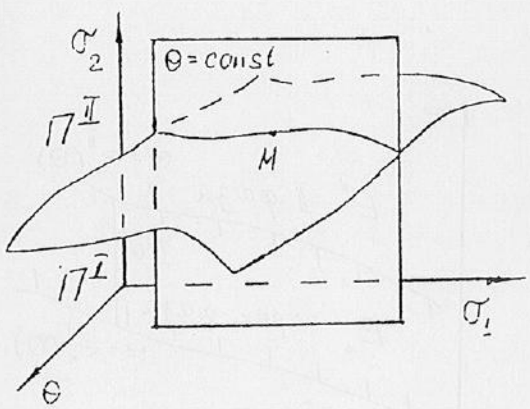

Рис. 3 а)

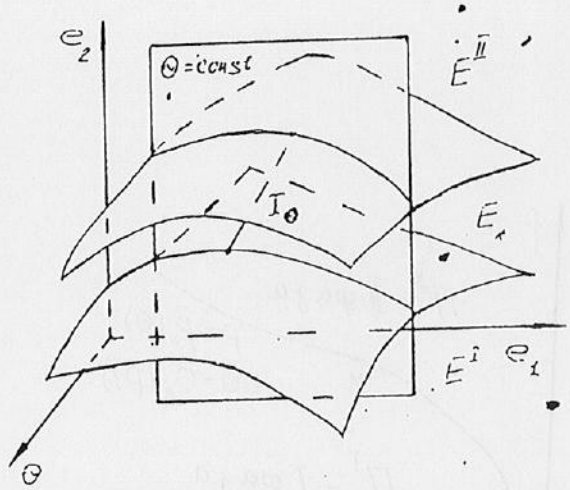

Рис. 3 б)

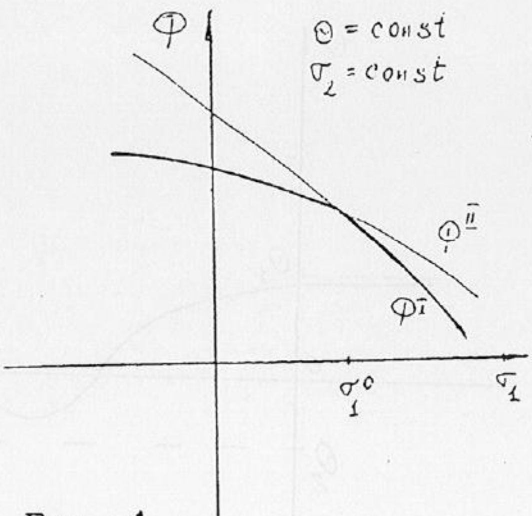

Рис. 4

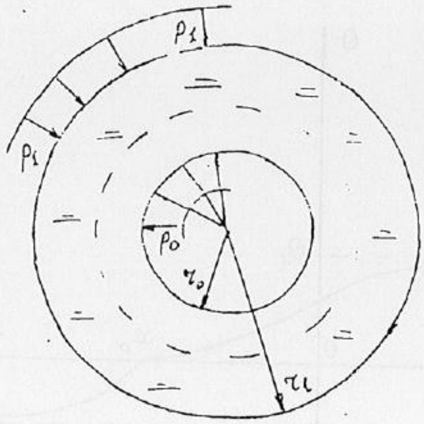

Рис. 5

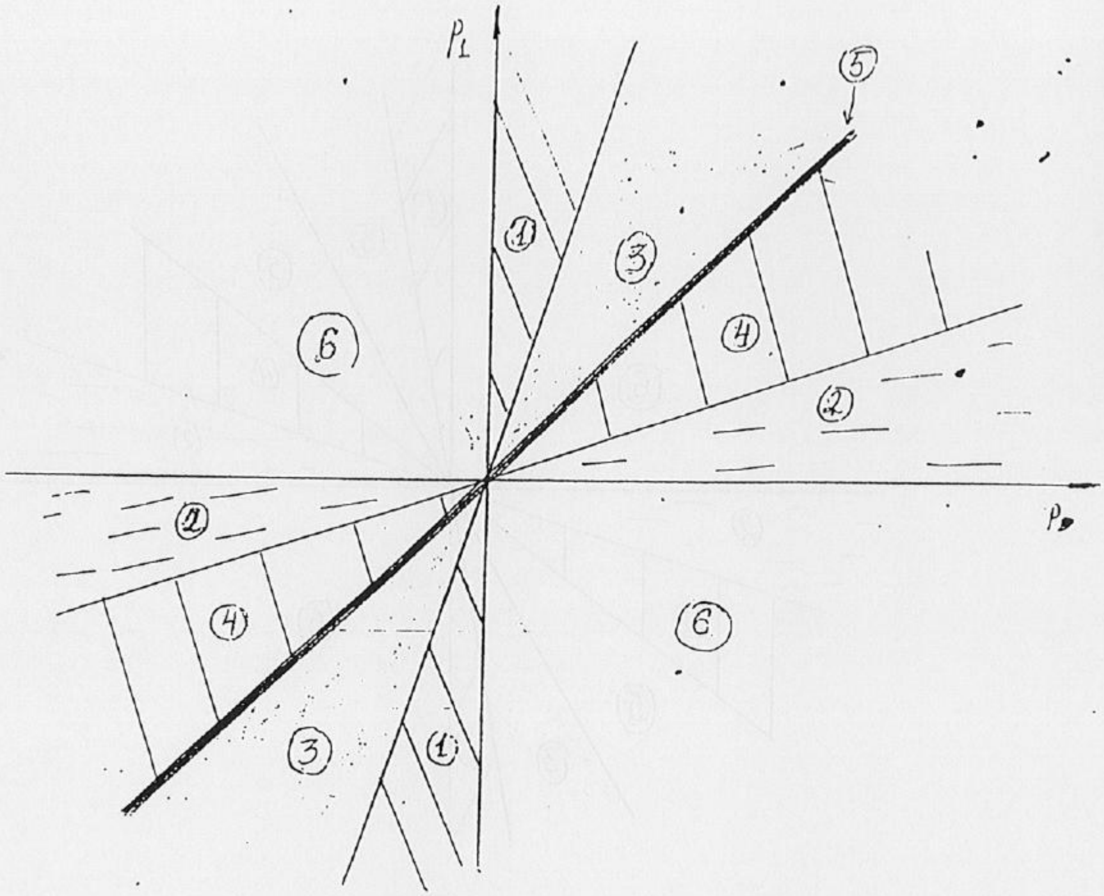

Рис. 6 а)

Пусть $\zeta = 1$ и $\lambda \le L$, тогда при ρ_0, ρ_1 лежащих в области

1) $(1+\lambda^2)/2\lambda^2 \le \rho_1/\rho_0 \le +\infty$ область занята I фазой

2) $0 \le \rho_1/\rho_0 < 2/(1+\lambda^2)$ – II фазой

3) $1/\lambda < \rho_1/\rho_0 < (1+\lambda^2)/2\lambda^2$ – I и переходной фазами

4) $2/(1+\lambda^2) < \rho_1/\rho_0 < 1/\lambda$ – II и переходной фазами

5) $\rho_1/\rho_0 = 1/\lambda$ – переходной фазой

6) $\rho_1/\rho_0 < 0$ – I и II фазами

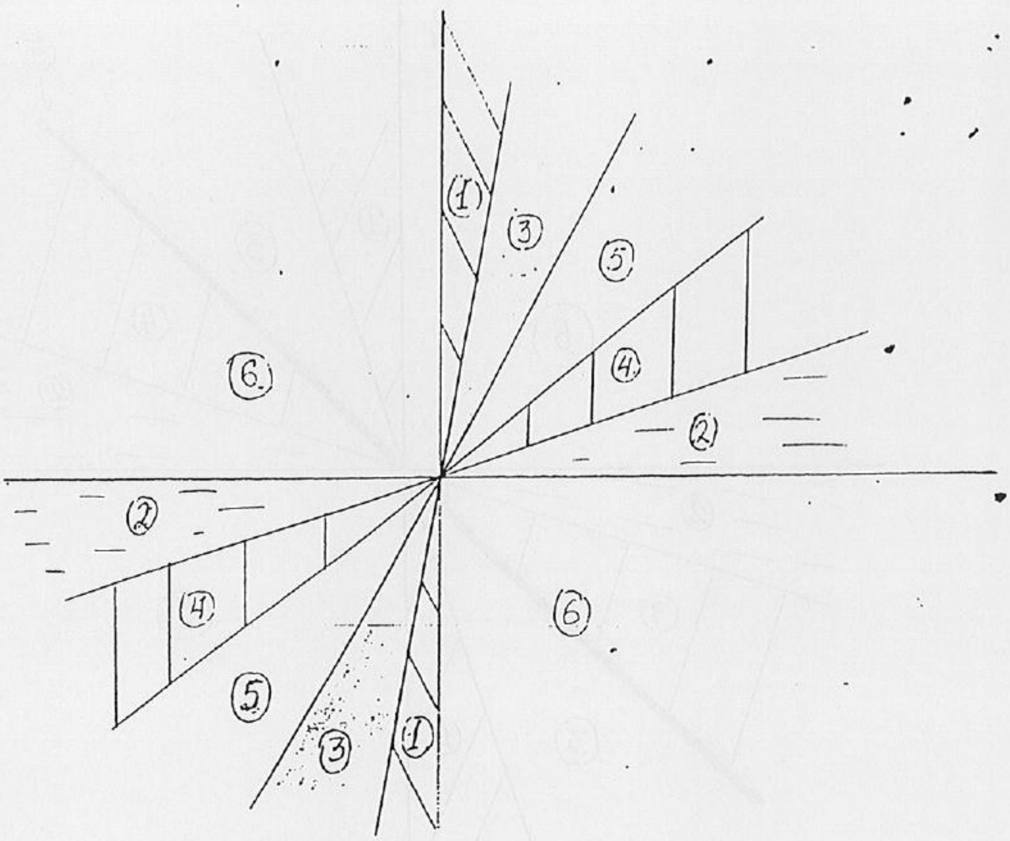

Рис. 6 б)

Пусть $\gamma = 1$ и $L < \lambda$, тогда при ρ_0, ρ_1 лежащих в области

I) $(\lambda^2+1)/2\lambda^2 \le \rho_1/\rho_0 \le +\infty$ область Ω занята I фазой

2) $0 \le \rho_1/\rho_0 \le 2/(1+\lambda^2)$ - II фазой

3) $(1+(L/\lambda)^2)/2L < \rho_1/\rho_0 < (1+\lambda^2)/2\lambda^2$ - I и переходной фазами

4) $2/(1+\lambda^2) < \rho_1/\rho_0 < 2/(1+(\lambda/L)^2)L$ - II и переходной фазами

5) $2/(1+(\lambda/L)^2)L \le \rho_1/\rho_0 \le (1+(L/\lambda)^2)/2L$ - I, II и переходной фазами

6) $\rho_1/\rho_0 < 0$ - I и П фазами

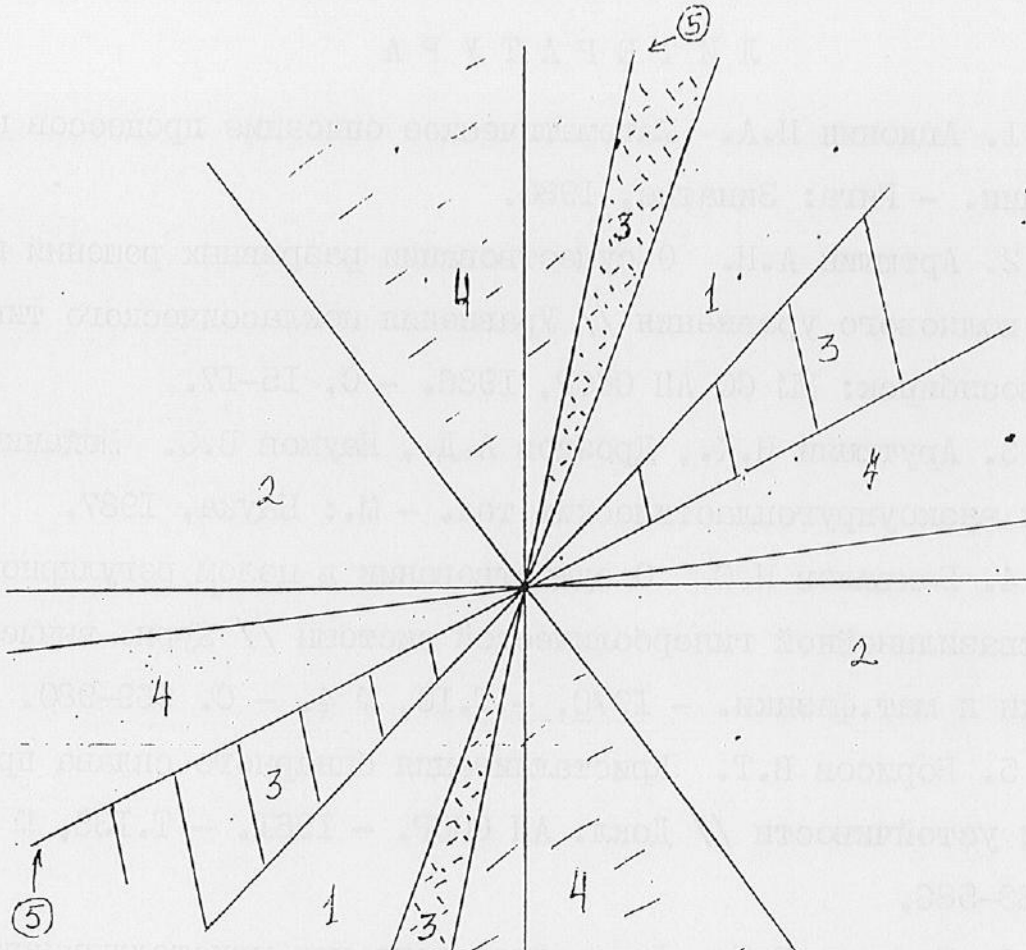

Рис. 6 в)

Пусть $\gamma \neq 1$ и $\lambda \le R^{-2/(1+\gamma)}$, $\lambda \le R^{2/(1-\gamma)}$, $(\gamma < 1,\ 1 < \gamma\lambda^2)$

тогда при ρ_0, ρ_1 лежащих в области

I) $(1-\gamma\lambda^2)/(1-\gamma) \le \rho_1/\rho_0 \le (1+\gamma\lambda^2)/(1+\gamma)$ область Ω занята I фазой

2) $(1-\gamma)/(1-\gamma\lambda^2) \le \rho_1/\rho_0 \le (1+\gamma)/(1+\gamma\lambda^2)$ – II фазой

3) $\lambda^{2/(1-\gamma)} \le \rho_1/\rho_0 < (1-\gamma\lambda^2)/(1-\gamma)$

$(1+\gamma\lambda^2)/(1+\gamma) < \rho_1/\rho_0 < \lambda^{-2/(1+\gamma)}$ – I и переходной фазами

4) $(1+\gamma)/(1+\gamma\lambda^2) < \rho_1/\rho_0 < \lambda^{-2/(1+\gamma)}$

$\lambda^{2/(1-\gamma)} < \rho_1/\rho_0 < (1-\gamma)/(1-\gamma\lambda^2)$ – II и переходной фазами

5) $\rho_1/\rho_0 = \lambda^{2/(1-\gamma)}$, $\rho_1/\rho_0 = \lambda^{-2/(1+\gamma)}$ – переходной фазами

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. – Рига: Зинатне, 1980.

2. Артюшин А.Н. О существовании разрывных решений нелинейного волнового уравнения // Уравнения неклассического типа. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. – С. 15-17.

3. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. – М.: Наука, 1987.

4. Бахвалов Н.С. О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы // Журн. вычисл. математики и мат.физики. – 1970. – Т.10, № 4. – С. 969-980.

5. Борисов В.Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости // Докл. АН СССР. – 1961. – Т.136, № 3. – С. 583-586.

6. Борисов В.Т. Двухфазная зона при кристаллизации сплава в нестационарном режиме // Докл. АН СССР. – 1962. – Т.142. № 3. – С. 581-583.

7. Борисов В.Т., Виноградов В.В., Тяжельникова И.А. Квазиравновесная теория двухфазной зоны и ее применение к затвердению сплавов // Изв. ВУЗов. Черн. металлургия. – 1977. – № 5. – С.127-134.

8. Буевич Ю.А. Неустойчивость автомодельного фронта фазового перехода // Инж.- физ. журн. – 1981. – Т.40, № 5. – С.818-821.

9. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972.

10. Ворович И.И. О некоторых задачах термовязкоупругости одно- и двухфазных сред // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев: Наукова думка. – 1976. – Вып. 16. – С. 3-6.

11. Гаврилюк С.Л. Задача о распаде произвольного разрыва в

средах с немонотонным уравнением состояния. - Новосибирск, 1984. - 11 с. - (Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние. ИМ; 70).

12. Гетц И.Г., Мейрманов А.М. Моделирование процессов кристаллизации с непостоянной температурой плавления// Задача Стефана. - Новосибирск, 1986. - С. 224-229.

13. Гетц И.Г., Мейрманов А.М., Шеметов Н.В. Математическое моделирование фазовых переходов первого рода в многопараметрических средах. - Пермь, 1986. - 2-е. - (Тезисы докладов/ Всесоюзная школа-семинар. "Математическое моделирование в науке и технике").

14. Гетц И.Г., Мейрманов А.М., Шеметов Н.В. Феноменологическая модель фазовых переходов первого рода в деформируемой упругой среде // Прикл. мех. и техн. физика. - 1987. - № 6. - С. 43-50.

15. Гринфельд М.А. К теории фазовых переходов первого рода в изотропных упругих материалах// Докл. АН СССР. - 1983. - Т.272, № 2. - С. 571-575.

16. Данилюк И.И. О задаче Стефана// Усп. мат. наук. - 1985. - Т. 245, вып. 5. - С. 132-182.

17. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: Физматгиз, 1963.

18. Иванов М.В. Осесимметричная задача термоупругости одно-, двух-, трехфазных сред// Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра. Сер. естеств. наук. - 1982. - № 3. - С. 48-51.

19. Иванцов Г.П. "Диффузионные" переохлаждения при кристаллизации бинарного сплава// Докл. АН СССР. - 1951. - Т. 81, № 2. - С. 179-181.

20. Каменомостская С.Л. О задаче Стефана// Мат. сб. - 1961. - Т. 53, № 4. - С. 489-514.

21. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятности. - М.: Наука, 1974.

22. Кронрод А.С. О функциях двух переменных// Усп. мат. наук. - 1950. - Т. 5, вып. I. - С. 24-134.

23. Кузнецов Н.Н., Тупчиев В.А. Об одном обобщении теоремы Глимма// Докл. АН СССР. - 1975. - Т. 221, - 2. - С. 287-290.

24. Кузнецов Н.Н., Ци Чкун-тао. Об единственности обобщенной задачи Коши для гиперболической системы двух квазилинейных уравнений// Вест. МГУ. Сер. I. - 1964. - № 4. - С. 3-6.

25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. - М.: Наука, 1964.

26. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. - М.: Наука, 1975.

27. Ляпидевский В.Ю. О корректности задачи Коши в целом для нелинейных гиперболических систем// Динамика сплошной среды. - Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. - 1974. - Вып. 18. - С. 66-73.

28. Мансуров В.В., Фомина Н.Г. Неустойчивость автомодельного фронта кристаллизации однокомпонентного расплава// Инж. - физ. журн. - 1983. - Т. 45, № 4. - С. 636-639.

29. Маслов В.П., Мосолов П.П., Анциферова М.М. О модельном уравнении динамики фазового перехода// Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения. - Воронеж, 1986. - С. 71-87.

30. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск: Наука, 1986.

31. Мейрманов А.М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана// Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 258, № 3. - С. 547-549.

32. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.

33. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред// Учебное пособие для студентов НГУ. - Новосибирск: НГУ, 1977. - Ч. I, II.

34. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана// Докл. АН СССР. - 1960. - Т. 135, № 5. - С. 1054-1057.

35. Пазин Г.Н., Тупчиев В.А. О существовании обобщенного решения задачи Коши для системы из двух квазилинейных уравнений без условий выпуклости// Докл. АН СССР. - 1983. - Т. 270, № 5. - С. 1058-1061.

36. Рождественский Б.Л. Построение разрывных решений систем квазилинейных уравнений// Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1962. - № 6. - С. 1019-1047 (Ч. I); 1963. - № I. - С. 79-98 (Ч. II).

37. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М.: Наука, 1978.

38. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнений высшего порядка. - Киев: Наукова думка, 1973.

39. Трускиновский Л.М. Равновесные межфазные границы// Докл. АН СССР. - 1982. - Т. 265, № 2. - С. 180-183.

40. Чупахин А.П., Сидельников А.А., Болдырев В.В. Влияние возникающих при твердофазных превращениях механических напряжений на их кинематику// Изв. АН СССР. Сер. хим. наук. - 1985. - Вып. 6, - С. 75-81.

41. Шеметов Н.В. Математическое моделирование фазовых переходов первого рода в деформируемой упругой среде. - Новосибирск: НГУ, 1988. - С. 188-191. - (Тез. докл./ II конференция молодых ученых Сибири и Дальнего Востока).

42. Шеметов Н.В. О существовании обобщенного решения нестрогого гиперболической системы// Динамика сплошной среды. - Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. - 1988. - Вып. 86. - С. 149-171.

43. Alexiades V., Solomon A.D., Wilson D.G. A numerical simulation of a binary alloy solidification process// SIAM J.Sci. Stat. Comput. - 1985. - V.6, N 4. - P.911-922.

44. Ball J.M. Convexity conditions and existense theorems in nonlinear elasticity// Arch. Rational Mech. Anal. - 1977.- V.63, N 4. - P.337-403.

45. Bermudez A., Saquez C. Mathematical formulation and numerical solution of an alloy solidification problem// Free Boundary Problems: theory and applications. Research notes in mathematics. - 1983. - V.78. - P.237-247.

46. Diperna R.J. Existence in the larg for quasilinear hyperbolic conservation laws// Arch. Rat. Mech. Anal. - 1973. - V.52, N 3. - P.244-256.

47. Doctor A. Global solutions of mixed problem for a certain system of nonlinear conservation laws// Czechoslovak Math.J. - 1977. - V.27(102). - P.115-137.

48. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations// Comm. Pure Appl. Math. - 1965. - V.18. - P.697-715.

49. Greenberg J. On the interactions of shocs and simple waves of the same family// Arch. Rat. Mech. Anal. - 1970.- V.37, N 2. - P.136-160.

50. Hurd A.E. A uniqueness theorem foe weak solutions of symmetric quasilinear hyperbolic systems// Pacif. J. Math. - 1969. - V.28, N 3. - P.555-559.

51. Johnson J.L. Global solutions for a extended class of hyperbolic systems of quasilinear equations// Arch. Rat. Mech. Anal. - 1969. - V.32, N 2. - P.169-182.

52. Laxmanan V. Some fundamental considerations during rapid solidification processing// Kear and Giessen (eds), Rapidly solidified metastable materials. Materials Research, Society Symp. Proc. - 1984. - V.28, - P.21-27.

53. Leibovich L. Solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of quasilinear equations without convexity conditions// J. Math. Anal. Appl. - 1974. - V.45, N 1. - P.232-257.

54. Liu Tai-Ping. Existence and uniqueness theorems for Riemans problems// Trans. Amer. Math. Soc. - 1975. - V.212. - P.345-365.

55. Liu Tai-Ping. Uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem for general 2x2 conservation laws// J. Differential eq. - 1976. - V.20. - P.369-390.

56. Liu Tai-Ping. Initial-boundary value problems for gas dynamics// Arch. Rat. Mech. Anal. - 1977. - V.64. - P.157-169.

57. Luchaus S., Visintil A. Phase transition in Multicomponent Systems// Manuscripta Math. - 1983. - V.43. - P.261-288.

58. Nishida T. Global solations for an initial value problem// Proc. Japan Acad. - 1968. - V.44. - P.114-128.

59. Rubinstein L. On mathematical models for solid-liquid zones in a two-phase monocomponent system and in a binary alloys// Free boundary problems: theory and applications. Research notes in mathematics. - 1983. - V.78. - P.275-282.

60. Stefan J. Uber einige Probleme der Theorie der Warmeleitung// Sitz. Ber. Wien. Akad. Mat. Naturw. - 1889. - Bd.98, 11a. - P.473-484.

61. Zhang Tong, Guo Yo-Fa. A class of initial value problem for systems of aerodynamic equations// Acta mathematica sinica. - 1965. - V.15, N 3. - P.386-395.

62. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1956.

63. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - Л.: Изд. ЛГУ, 1950.