А.А.Быков

Лекции по математическому анализу

2017-2018

Содержание

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

|II

Функции нескольких переменных

II-1. Точки и множества в пространстве

1.1. Расстояние в пространстве R^m

1.1.1. Понятие расстояния

Точки: $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $M = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$.

$\mathbb{D}$**.1.1–1.** *Расстояние между точками* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *и* $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$
называется число $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_m - y_m)^2}$.

$\mathbb{D}$**.1.1–2.** *Длиной вектора* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *называется число* $\rho(x, 0) = \sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_m)^2}$.

1.1.2. Неравенство Коши

$\mathbb{T}$**.1.1–1 (Неравенство Коши).** $\forall x, y$ *верно неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

$\square$ Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ и

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Тогда

$$\forall t \text{ верно } (x - ty, x - ty) \geq 0,$$

$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0$, $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$, $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$, $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$. $\blacksquare$

1.1.3. Свойства расстояния

(1) Всегда $\rho(x,y) \geqslant 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (положительная определенность),

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность),

(3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

1.2. Множества точек

1.2.1. Окрестности

$\mathbb{D}$**.1.2–1.** *Множество точек* $\bar{K}(M_0, r) = \{M : \rho(M, M_0) \leq r\}$, $r > 0$, *называется* ***замкнутым шаром*** *радиуса* r *с центром* M_0.

$\mathbb{D}$**.1.2–2.** *Множество точек* $K(M_0, r) = \{M : \rho(M, M_0) < r\}$ *называется открытым шаром радиуса* $r > 0$ *с центром* M_0.

$\mathbb{D}$**.1.2–3.** *Открытый шар радиуса* $\varepsilon > 0$ *с центром в точке* M_0 *будем называть шаровой* ε*–****окрестностью*** *точки* M_0, $\Omega_\varepsilon(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) < \varepsilon\}$.

$\mathbb{D}$**.1.2–4.** *Множество точек* $\{M : \rho(M, M_0) = r\}$ *называется* ***сферой*** *радиуса* $r > 0$ *с центром* M_0.

Пусть точка M_0 имеет координаты $(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$, и $d_k > 0$, $k = 1, 2, ..., m$.

$\mathbb{D}$**.1.2–5.** *Множество точек* $\left\{M : \left|x_k - x_k^{(0)}\right| < d_k,\ 1 \leq k \leq m\right\}$ *называется* ***открытым параллелепипедом*** *с центром* M_0.

1.2.2. Внутренние и граничные точки

$\mathbb{D}$**.1.2–6.** *Точка* M *называется* ***внутренней*** *точкой множества* G, *если* $\exists \Omega_\varepsilon(M) \subset G$, $\varepsilon > 0$.

$\mathbb{D}$**.1.2–7.** *Точка* M *называется* ***граничной*** *точкой множества* G, *если в любой* ε*–окрестности точки* M *содержатся точки как при-*

надлежащие G, так и не принадлежащие G, то есть $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists M_1 \in \Omega_\varepsilon(M) : M_1 \in G, \exists M_2 \in \Omega_\varepsilon(M) : M_2 \notin G.$$

★ Внутренняя точка множества всегда принадлежит этому множеству. Граничная точка множества может принадлежать, а может не принадлежать множеству.

1.2.3. Открытые и замкнутые множества

$\mathbb{D}$**.1.2–8.** *Множество G называется* ***открытым****, если все его точки – внутренние.*

$\mathbb{D}$**.1.2–9.** *Множество G называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои граничные точки.*

$\mathbb{D}$**.1.2–10.** *Множество всех граничных точек множества G называется* ***границей*** *множества G.*

$\mathbb{D}$**.1.2–11.** *Множество всех внутренних точек множества G называется* ***внутренностью*** *множества G.*

$\mathbb{S}$**.1.2–1.** сфера $S_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) = r\}$ в R^3 является границей замкнутого шара $\bar{K}_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) \le r\}$.

$\mathbb{S}$**.1.2–2.** та же сфера $S_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) = r\}$ в R^3 является границей открытого шара $\Omega_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) < r\}$.

$\mathbb{S}$**.1.2–3.** сфера $S_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) = r\}$ в R^3 является границей самой себя.

$\mathbb{S}$**.1.2–4.** сфера $S_r(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) = r\}$ в R^3 есть замкнутое множество.

$\mathbb{S}$**.1.2–5.** Шар $\bar{K}(M_0, r) = \{M : \rho(M, M_0) \le r\}$ в R^3 есть замкнутое множество.

$\mathbb{S}$**.1.2–6.** Шар $K(M_0, r) = \{M : \rho(M, M_0) < r\}$ в R^3 есть открытое множество.

$\mathbb{D}$**.1.2–12 (изолированная точка).** *Точка M называется изолированной точкой множества G, если $M \in G$ и одновременно $\exists \Omega_\varepsilon(M)$, в которой нет других точек множества G, кроме самой точки M.* Точка M не является изолированной точкой множества G, если и только если $M \notin G$ или $M \in G$, но $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in G : 0 < \rho(N, M) < \varepsilon$. В обоих случаях в любой окрестности точки M найдется по крайней мере одна точка множества G, отличная от точки M.

1.2.4. Предельные точки

$\mathbb{D}$**.1.2–13 (предельная точка).** *Точка M называется* ***предельной точкой*** *множества G, если в любой ϵ – окрестности точки M содержится по крайней мере одна точка множества G, отличная от точки M.*

$\mathbb{T}$**.1.2–1 (о предельной точке и последовательности).** *Точка M является* ***предельной точкой*** *множества G, если и только если $\exists M_k \to M,\ M_k \in G,\ M_k \neq M$.*

★ Любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.

★ Граничная точка может быть или предельной точкой множества, или изолированной.

★ Изолированная точка множества не может быть предельной точкой этого множества.

★ Изолированная точка множества не может быть внутренней точкой этого множества.

1.2.5. Ограниченные множества

$\mathbb{D}$**.1.2–14 (ограниченное множество).** *Множество G называется ограниченным, если все его точки содержатся в некотором шаре.*

$\mathbb{T}$**.1.2–2 (ограниченное множество и центральный шар).** *Множество G является ограниченным, если $\exists R > 0 : \forall M \in G$ верно $\rho(M, O) < R$.*

$\mathbb{D}$**.1.2–15 (неограниченное множество).** *Множество G называется неограниченным, если $\forall R > 0\ \exists M \in G : \rho(M, O) \geq R$.*

1. Непрерывная кривая

$\mathbb{D}$**.1.2–16 (непрерывная кривая).** *Множество $L = \{M(x_1, ..., x_1)\}$: $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_m = \phi_m(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем функции $\phi_1(t), ..., \phi_m(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, называется непрерывной кривой $\vec{R}(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_m(t))$.*

Точки $A = \vec{R}(\alpha) = (\phi_1(\alpha), ..., \phi_m(\alpha))$ и $B = \vec{R}(\beta) = (\phi_1(\beta), ..., \phi_m(\beta))$, если они не совпадают, называют концами кривой. Говорят, что кривая L соединяет точки A и B.

2) Если точки $A(\varphi 1(\alpha), \ldots, \varphi m(\alpha))$ и $B(\varphi 1(\beta), \ldots, \varphi m(\beta))$ совпадают, то кривая называется замкнутой.

$\mathbb{D}$**.1.2–17 (прямая).** *Множество $l = \{M(x_1, ..., x_m)$: $x_1 = x_1^{(0)} + \lambda_1 t, \ldots, x_m = x_m^{(0)} + \lambda_m t$, $t \in (-\infty, +\infty)\}$, причем не все коэффициенты λ_k равны нулю, называется* ***прямой****.*

Говорят, что эта прямая проходит через точку $M_0(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$. Вектор $\vec{l} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ называется направляющим вектором.

2. Связные множества

$\mathbb{D}$**.1.2–18 (связное множество).** *Множество G называется* ***связным****, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.*

3. Окрестности

$\mathbb{D}$**.1.2–19 (окрестность).** *Любое открытое связное множество, содержащее точку M, будем называть* ***окрестностью*** *этой точки.*

$\mathbb{T}$**.1.2–3 (окрестность и шаровая окрестность).** *В любой окрестности точки M содержится некоторая ее ϵ – шаровая окрестность.*

4. Выпуклые множества

$\mathbb{D}$**.1.2–20 (выпуклое множество).** *Множество X называется выпуклым: если $\forall M, N \in X, \forall t \in [0; 1]$ верно*

$$K(t) = M(1-t) + Nt \in X,$$

где M, N, K векторы.

На плоскости $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x, y)$, $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$.

$\mathbb{T}$**.1.2–4 (о пересечении двух выпуклых множеств).** *Пересечение двух выпуклых множеств есть выпуклое множество.* Самостоятельно.

$\mathbb{T}$**.1.2–5 (о пересечении множества выпуклых множеств).** *Пересечение любого набора выпуклых множеств есть выпуклое множество.* Самостоятельно.

$\mathbb{D}$**.1.2–21 (выпуклая оболочка).** *Выпуклой оболочкой множества X называется пересечение всех выпуклых множеств $Y : X \subset Y$.*

$\mathbb{T}$**.1.2–6 (о выпуклой оболочке).** *Выпуклой оболочкой множества X является множество Y, состоящее из всех точек K таких, что $\exists M \in X$, $\exists N \in X$, $\exists t \in [0; 1]$: $K(t) = M(1-t) + Nt \in X$.*

На плоскости $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x, y)$, $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$.

1.3. Последовательность точек в пространстве

1.3.1. Понятие последовательности

$\mathbb{D}$**.1.3–1 (последовательность точек).** *Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие точка $M_n \in R^m$, то говорят, что в пространстве задана* ***последовательность точек*** *$\{M_n\} = M_1, M_2, ...$*

★ Последовательность точек $\{M_n\} = M_1, M_2, ...$ есть векторная m–мерная функция, заданная на множестве натуральных чисел.

★ Последовательность можно обозначать также M_n, предполагая, что n есть множество всех натуральных чисел.

1.3.2. Предел последовательности

$\mathbb{D}$**.1.3–2 (Предел последовательности точек).** *Точка N называется* ***пределом*** *последовательности M_n при $n \to +\infty$, если* $\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, N) = 0$.

Можно записать $N = \lim_{n\to\infty} M_n$ или $M_n \to N$ при $n \to +\infty$.

$\mathbb{T}$**.1.3–1 (сходимость и покоординатная сходимость).** *Если $M_n \to N$ при $n \to +\infty$, $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$, $N = (y^{(1)}, ..., y^{(m)})$,* *то для всех $k \in \{1, ..., m\}$ верно $x_n^{(k)} \to y^{(k)}$ при $n \to +\infty$.*

Пусть $R_n = \max\limits_{k \in \{1;2;...;m\}} \left| x_n^{(k)} - y^{(k)} \right|$. Тогда

1) $\rho(M_n, N) \leq \sqrt{m} R_n$, 2) $R_n \leq \rho(M_n, N)$.

$\mathbb{T}$**.1.3–2 (покоординатная сходимость и сходимость).** *Если для всех $k \in \{1, ..., m\}$ верно $x_n^{(k)} \to y^{(k)}$ при $n \to +\infty$, то последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ сходится, $M_n \to N$ при $n \to +\infty$, к точке $N = (y^{(1)}, ..., y^{(m)})$,*

Пусть $R_n = \max\limits_{k \in \{1;2;...;m\}} \left| x_n^{(k)} - y^{(k)} \right|$. Тогда

1) $\rho(M_n, N) \leq \sqrt{m} R_n$, 2) $R_n \leq \rho(M_n, N)$.

1.3.3. Фундаментальные последовательности

$\mathbb{D}$**.1.3–3 (фундаментальная последовательность).** *Последовательность точек M_n называется* ***фундаментальной****, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N, \forall k > n$ верно $\rho(M_n, M_k) < \varepsilon$.*

Иногда пишут равносильную формулу,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N, \forall p \geq 1 \rho(M_n, M_{n+p}) < \varepsilon.$$

$\mathbb{T}$**.1.3–3 (фундаментальная последовательность точек и последовательность координат).** *Если последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ фундаментальная, то $\forall k \in \{1, ..., m\}$ числовая последовательность $x_n^{(k)}$ также фундаментальная.*

$\mathbb{T}$**.1.3–4 (фундаментальная последовательность координат и последовательность точек).** *Если $\forall k \in \{1, ..., m\}$ числовая последовательность $x_n^{(k)}$ фундаментальная, то последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ фундаментальная.*

1.3.4. Критерий Коши для последовательности

$\mathbb{T}$.1.3–5 (критерий Коши сходимости последовательности). *Для того, чтобы последовательность точек $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

1. ***Достаточность.*** Пусть последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ – фундаментальная. Тогда $\forall k \in \{1, ..., m\}$ последовательности $x_n^{(k)}$ также фундаментальные. Отсюда в силу критерия Коши для числовых последовательностей следует, что эти последовательности сходятся. Поэтому последовательность точек $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ сходится.

2. ***Необходимость.*** Пусть последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ сходится. Тогда $\forall k \in \{1, ..., m\}$ последовательности $x_n^{(k)}$ также сходятся. Поэтому последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ сходится.

1.4. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

definmограниченная последовательность точек Последовательность $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ называется ограниченной, если все ее члены содержатся в некотором шаре.

Отметим, что M_n ограничена, если и только если $\exists R : \forall n$ верно $\rho(M_n, O) \le R$.

$\mathbb{T}$.1.4–1 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности M_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

□ Пусть $M_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)})$ ограничена. Тогда $\exists R : \forall n$ верно $\rho(M_n, O) = \sqrt{(x_n^{(1)})^2 + ... + (x_n^{(m)})^2} \le R$.

Отсюда следует, что $\left|x_n^{(1)}\right| \le R, \ldots, \left|x_n^{(m)}\right| \le R$,
то есть числовые последовательности $x_n^{(1)}, \ldots x_n^{(m)}$ ограничены. По теореме Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей, из последовательности $x_n^{(1)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_1}^{(1)} \to a_1$.

Выделим из $x_{n_1}^{(1)}$ сходящуюся подпоследовательность $x_{n_2}^{(2)} \to a_2$. Отметим, что при этом $x_{n_2}^{(1)} \to a_1$, так как n_2 есть под последовательность n_1.

Продолжая этот процесс, получим подпоследовательности $x_{n_k}^{(k)} \to a_k$. Поэтому последовательность точек $\{M_{n_m}\} \to A(a1, \ldots, am)$. ■

II-2. Функции нескольких переменных

2.1. Предел функции нескольких переменных

2.1.1. Понятие функции нескольких переменных

Пусть X непустое множество точек $M(x_1, ..., x_m)$ в m–мерном евклидовом пространстве R^m.

$\mathbb{D}$**.2.1–1 (функция нескольких переменных).** *Если каждой точке $M \in X$ поставлено в соответствие некоторое число f, то говорят, что на множестве X определена функция m переменных $f(M)$, или $f(x_1, ..., x_m)$.*

Множество X называется областью определения функции.

Функцию двух переменных обозначим $z = f(x, y)$.

$\mathbb{D}$**.2.1–2 (график функции).** *Графиком функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in$*

X, *называется множество точек* $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$, *в трехмерном пространстве* (x, y, z).

Функцию трех переменных обозначаем $u = f(x, y, z)$.

$\mathbb{D}$**.2.1–3 (график функции трех переменных).** *Графиком функции* $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, *называется множество точек* $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, *в четырехмерном пространстве* (x, y, z, u).

2.2. Понятие предела функции по Коши и по Гейне

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве X, и M_0 – предельная точка X.

$\mathbb{D}$**.2.2–1 (предел по Коши).** *Число* b *называется пределом функции* $f(M)$ *в точке* M_0 *(при* $M \to M_0$*), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall M \in X :$ $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ *верно* $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$\mathbb{D}$**.2.2–2 (предел по Гейне).** *Число* b *называется пределом функции* $f(M)$ *в точке* M_0 *(при* $M \to M_0$*), если* $\forall M_n \to M_0 : M_n \in X$, $M_n \neq M_0$, *соответствующая последовательность значений функции* $f(M_n) \to b$.

Обозначение: $\lim_{M \to M_0} f(M) = b$.

$\mathbb{T}$**.2.2–1 (теорема эквивалентности).** *Определения предела по Коши и по Гейне и эквивалентны*

Доказательство абсолютно аналогично доказательству соответствующей теоремы для функции одной переменной.

$\mathbb{S}$**.2.2–1.** Пусть
$u(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ при $x \neq 0 \bigcap y \neq 0$,
$u(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 0$.
Докажем, что $\lim_{(x,y) \to (0;0)} u(x, y) = 0$.

1) Так как

(1) $x = o(1)$ при $(x, y) \to (0; 0)$,

(2) $y = o(1)$ при $(x, y) \to (0; 0)$,

(3) $\sin \frac{1}{x} = O(1)$ в $\hat{\Omega}(0; 0)$,

(4) $\sin \frac{1}{y} = O(1)$ в $\hat{\Omega}(0; 0)$,

$$O(1) \cdot O(1) = O(1), \tag{1}$$

$$o(1) \cdot O(1) = o(1), \tag{2}$$

то $u(x, y) = o(1)$ при $(x, y) \to (0; 0)$.

2) Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $\rho(M(x,y), O(0,0)) < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $|u(x, y) - 0| \le |x| + |y| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Это и означает, что $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = 0$.

2.3. Предел по гладкой кривой

$\mathbb{D}$**.2.3–1.** *Пусть* $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $x_0 = \phi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $\phi(t) \in C_1$, $\psi(t) \in C_1$, *и* $\lim_{t\to t_0} u(x(t), y(t)) = b$. *Тогда говорят, что в точке* $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$ *функция* $u(x, y)$ *имеет предел вдоль гладкой кривой* $C = \{x = \phi(t), y = \psi(t)\}$.

$\mathbb{T}$**.2.3–1.** *Если* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = b$, *то* $\forall C$ *(гладкой кривой) верно* $\lim_{t\to t_0} u(x(t), y(t)) = b$.

★ Можно привести пример

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y)$, но $\forall k$ верно $\lim_{x\to 0} u(x, kx) = b$.

$\mathbb{S}$**.2.3–1.** Пусть $u(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$, $u(0, 0) = 0$. Рассмотрим прямую $y = kx$ (проходящую через начало координат). Пусть $M(x, y) \to O(0; 0)$ вдоль этой прямой. Тогда

$$\lim_{\substack{y=kx,\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким образом, по разным прямым, проходящим через начало координат, получим различные предельные значения функции. Отсюда следует, что предел функции в точке $O(0,0)$ не существует.

$\mathbb{S}$**.2.3–2.** Пусть $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, $x^2+y^2>0$, $f(0,0)=0$. Рассмотрим произвольную параболу $y=kx^2$ проходящую через координат). Пусть $M(x,y)\to O(0;0)$ вдоль этой параболы. Тогда

$$\lim_{\substack{y=kx^2\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким образом, по разным линиям, проходящим через начало координат, получим различные пределы функции. Отсюда следует, что предел функции в точке $O(0;0)$ не существует.

$\mathbb{S}$**.2.3–3.** Пусть $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, $x^2+y^2>0$, $f(0,0)=0$. Если $y=kx$, то

$$\lim_{\substack{y=kx\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Из этого не следует существование предела в точке $(0,0)$.

2.4. Бесконечно малые функции

$\mathbb{D}$**.2.4–1 (бесконечно малая функция в точке).** *Если* $\lim_{M\to M_0} f(M) = 0$, *то* $f(M)$ *называется бесконечно малой в точке* M_0.

$\mathbb{D}$**.2.4–2 (относительно ограниченная функция).** *Пусть* $\alpha(M)$ *и* $\beta(M)$ *– бесконечно малые в точке* M_0. *Если*

$\exists C > 0, \exists\hat{\Omega}(M_0) : |\alpha(M)| \leqslant C|\beta(M)|$ *в* $\hat{\Omega}(M_0)$, *то* α *называется ограниченной относительно* β. *Пишут* $\alpha = O(\beta)$ *в* $\hat{\Omega}(M_0)$.

$\mathbb{D}$**.2.4–3 (бесконечно малые одного порядка).** *Пусть* $\alpha(M)$ *и* $\beta(M)$ *– бесконечно малые в точке* M_0. *Если* $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = C \neq 0$, *то* α *и* β *называются бесконечно малыми одного порядка в точке* M_0.

$\mathbb{D}$**.2.4–4.** *эквивалентные бесконечно малые функции*Если $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 1$, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми при $M \to M_0$, $\alpha \sim \beta$.

$\mathbb{D}$**.2.4–5 (бесконечно малая более высокого порядка).** *Если* $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0$, *то* α *называется бесконечно малой более высокого порядка, чем* β, *при* $M \to M_0$. *В этом случае пишут* $\alpha(M) = o(\beta(M))$.

$\mathbb{T}$**.2.4–1 (арифметические операции с бесконечно малыми).** *Если функции* $f(M)$ *и* $g(M)$ *определены на множестве* X, *для которого точка* M_0 *является предельной точкой,* $\lim_{M\to M_0} f(M) = b$, $\lim_{M\to M_0} g(M) = c$, *то*

1) $\lim_{M\to M_0}(f(M) \pm g(M)) = b \pm c$,

2) $\lim_{M\to M_0}(f(M) \cdot g(M)) = bc$,

3) если $\neq 0$, *то* $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{b}{c}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы для одной переменной.

$\mathbb{D}$**.2.4–6 (предел в бесконечно удаленной точке по Коши).** *Число* b *называется пределом функции при* $M \to \infty$ *по Коши,* $\lim_{M\to\infty} f(M) = b$, *если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists R : \forall M : \rho(M, O) > R$ *верно* $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$\mathbb{D}$**.2.4–7 (предел в бесконечно удаленной точке по Гейне).** *Число b называется пределом функции при $M \to \infty$ по Гейне, $\lim_{M\to\infty} f(M) = b$, если $\forall M_n : |M_n| \to +\infty$, $M_n \in X$, верно $f(M_n) \to b$.*

$\mathbb{S}$**.2.4–1.** $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$

$\mathbb{S}$**.2.4–2.** $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$
не существует.

2.5. Повторные пределы

2.5.1. Понятие повторного предела

Пусть функция $f(x,y)$ определена в $\hat{\Omega}(M_0)$, $M_0(x_0,y_0)$, существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ y=y_1}} f(x,y) = \varphi(y_1)$ при всех $y_1 \in \hat{\Omega}(y_0)$,
и существует $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$. В таком случае говорят, что существует повторный предел функции $f(x,y)$ (сначала по x, затем по y) в точке (x_0,y_0),

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = b_1.$$

Аналогично определяется другой повторный предел,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = b_2.$$

Если размерность пространства больше двух, количество вариантов будет больше, например,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z).$$

♠ Задание: Сколько разных вариантов записи повторного предела существует для функции $f(M)$, $M \in D$, $D \subset \mathbb{R}^m$?

$\mathbb{S}$**.2.5–1.** Пусть $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2 \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{\substack{y\to 0,\\ x=\text{const.}\\ x\neq 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{\substack{x\to 0\\ y=\text{const.}\\ y\neq 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Таким образом, в данном случае повторные пределы существуют и равны друг другу. Однако, не существует $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\mathbb{S}$.2.5–2. Пусть $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2\neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{\substack{y\to 0,\\ x=\text{const.}\\ x\neq 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{\substack{x\to 0\\ y=\text{const.}\\ y\neq 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Таким образом, в данном случае повторные пределы существуют и не равны друг другу. Докажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} u(x,y)$.

Пусть $y = kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y=kx}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Подходя по разным прямым $y = kx$ к началу координат, получаем разные значения предела, следовательно, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ не существует.

$\mathbb{S}$.2.5–3. Пусть $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ при $xy\neq 0$. Тогда
(1) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$,

так как $f(x,y) = o(1)\cdot O(1)$ при $(x,y)\to(0,0)$.

(2) $\exists \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ при $\frac{1}{y}\neq \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$,

не существует $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{y}\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $y\neq 0$,

поэтому не существует $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$.

2.6. Предел в бесконечно удаленной точке

Пусть $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2>0$. Тогда

$$\lim_{\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ r\to+\infty\end{cases}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to+\infty}\frac{\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\rho^2} = \cos 2\varphi,$$

пределы получаются разные при стремлении к $(x,y)\to\infty$ по разным лучам, поэтому $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует.

$\mathbb{S}$.2.6–1. (предел в бесконечно удаленной точке). Пусть $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ при $x^2+y^2>0$. Найдем $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

А) $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$,

$x^2y^2 = (xy)^2 = (\sqrt{x^2y^2})^2 \le (\frac{1}{2}(x^2+y^2))^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$,

$x^4+y^4 \ge (x^2+y^2)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$,

$x^4+y^4 \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$,

Б) $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$,

$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

$|x+y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$,

$\left|x^3+y^3\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)$,

$\left|x^3+y^3\right| \le 3(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$,

$$|u(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\right| \le \frac{3(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2} \le 6\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0.$$

II-3. Непрерывные функции нескольких переменных

3.1. Понятие непрерывной функции нескольких переменных

$\mathbb{D}$.3.1–1 (непрерывная функция в точке). (1) *Пусть функция $f(M)$ определена на множестве X, и пусть $M \in X$ – предельная точка X. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M \in X$, если $\lim_{N\to M} f(N) = f(M)$.*

$\mathbb{D}$.3.1–2 (непрерывная функция на множестве). *Функция $f(M)$ называется* ***непрерывной*** *на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

$\mathbb{D}$.3.1–3 (точки разрыва). *Предельные точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются* ***точками разрыва*** *функции.*

★ Точка непрерывности M обязательно принадлежит X, $M \in X$.

★ В определении ***точки разрыва*** нет требования $M \in X$.

♠ Задание: Сформулируйте самостоятельно определение точки устранимого разрыва функции нескольких переменных.

$\mathbb{D}$.3.1–4 (приращение функции). *Приращением (точнее, полным приращением) функции $u = f(M)$ в точке $M_0 \in X$ называется функция $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, определенная на X.*

Условие непрерывности функции в точке M_0 можно записать в виде

$$\lim_{M\to M_0} \Delta u = \lim_{M\to M_0} (u(M) - u(M_0)) = 0.$$

Пусть точка M имеет координаты $(x_1, ..., x_m)$, а точка M_0 – координаты $(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$.

Введем обозначения

$x_1 - x_1^{(0)} = \Delta x_1, \ldots, x_m - x_m^{(0)} = \Delta x_m$.

Тогда

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}),$$

условие непрерывности равносильно $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f = 0.$

3.1.1. Непрерывность по отдельным переменным

$\mathbb{D}$**.3.1–5.** *Если* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ *то функция* $f(x, y)$ *называется непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по переменной* x.

Аналогично, если $\lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$, то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной y.

Введем обозначение $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)$.

Величина $\Delta_x u$ называется частным приращением функции в точке $M0$, соответствующим приращению Δx аргумента x.

Если $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x.

$\mathbb{T}$**.3.1–1.** *Пусть функция* $f(x_1, ..., x_m)$ *определена в некоторой окрестности точки* M_0 *и непрерывна в точке* $M_0(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$. *Тогда* $f(x_1, ..., x_m)$ *непрерывна в этой точке по каждой из переменных.*

□ Самостоятельно. ■

★ Обратное утверждение неверно.

$\mathbb{S}$**.3.1–1.** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

Тогда $f(x,0) = 0$. Поэтому $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной x. Точно так же, $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной y. Вместе с тем, функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$, поскольку $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ не существует.

★ Пусть $f(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$ вдоль любой прямой, проходящей через эту точку. Следует ли из этого непрерывность в точке $M_0(x_0,y_0)$ по совокупности переменных?

Ответ отрицательный.

$\mathbb{S}$**.3.1–2.** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 \neq 0. \end{cases}$.

$\mathbb{S}$**.3.1–3.** $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, то функция $u(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$.

3.1.2. Основные теоремы о непрерывных функциях

$\mathbb{T}$**.3.1–2 (арифметические операции над непрерывными функциями).** *Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывны в точке M_0. Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ (последнее при условии $g(M_0) \neq 0$) непрерывны в точке M_0.*

★ Достаточно потребовать, чтобы пересечение областей определения имело предельную точку $M_0 \in X$

$\mathbb{T}$**.3.1–3 (о непрерывности сложной функции).** *Пусть функции* $\phi_1(t_1,...,t_k)$,...,$\phi_m(t_1,...,t_k)$ *определены в некоторой окрестности точки* $P_0(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)})$ *и непрерывны в точке* P_0,
$\phi_1(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}) = x_1^{(0)}$,...,$\phi_m(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}) = x_m^{(0)}$.
Пусть $f(x_1,...,x_m)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)})$ *и непрерывна в точке* M_0. *Тогда сложная функция* $f(\phi_1(t_1,...,t_k),...,\phi_m(t_1,...,t_k))$ *непрерывна в точке* $P_0(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)})$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для функции одной переменной. Самостоятельно.

$\mathbb{T}$**.3.1–4 (об устойчивости знака непрерывной функции).** *Пусть* $f(M)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)})$, *непрерывна в точке* M_0 *и* $f(M_0) > 0$. *Тогда существует окрестность точки* M_0, *в которой* $f(M) > 0$.

$\mathbb{T}$**.3.1–5 (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение).** *Пусть функция* $f(M)$ *непрерывна на связном множестве* X, *и пусть* M_1 *и* M_2 *– любые две точки из этого множества, причем* $f(M_1) = u_1$ *и* $f(M_2) = u_2$. *Пусть* $v \in [u_1, u_2]$. *Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки* M_1 *и* M_2 *и целиком принадлежащей* X, $\exists N$: $f(N) = v$.

Пусть $L = M(x_1, \dots, x_m) : x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ – непрерывная кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащая X. В частности,
$M_1 = M_1(\varphi_1(\alpha), \dots \varphi_m(\alpha))$, $M_2 = M_2(\varphi_1(\beta), \dots \varphi_m(\beta))$.

На кривой L имеем $u = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \equiv F(t)$.

Сложная функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$,

$F(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \dots \varphi_m(\alpha)) = f(M_1) = u_1,$

$F(\beta) = f(\varphi_1(\beta), \dots \varphi_m(\beta)) = f(M_2) = u2.$

По соответствующей теореме для функции одной переменной,

$\forall v \in [u_1, u_2] \, \exists \gamma \in [\alpha, \beta] : F(\gamma) = v.$

Но $F(\gamma) = f(\varphi_1(\gamma), \dots \varphi_n(\gamma)) = f(N)$, где $N = N(\varphi_1(\gamma), \dots \varphi_n(\gamma)) \in L$.

Итак, $\forall v \in [u_1, u_2] \, \exists N \in L : f(N) = v.$

3.1.3. Теоремы Вейерштрасса

1. Первая теорема Вейерштрасса

$\mathbb{T}$.3.1–6 (о пределе последовательности точек замкнутого множества). *Предел сходящейся последовательности точек, каждая из которых принадлежит замкнутому множеству X, также принадлежит этому множеству X.*

Пусть $M_n \to A$. Тогда в любой ϵ–окрестности точки A содержится бесконечно много членов этой последовательности и, следовательно, содержатся бесконечно много точек из X. Отсюда следует, что либо точка A - внутренняя точка X, и тогда она принадлежит этому множеству, как любая внутренняя точка. Либо A–граничная точка X, и тогда она принадлежит этому множеству, поскольку множество X замкнутое. В любом случае, $A \in X$, что и требовалось доказать.

$\mathbb{T}$.3.1–7 (Вейерштрасса первая). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве.*

Пусть $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X. Предположим, что $f(M)$ не ограничена на X. Тогда

$$\forall n \; \exists M_n \in X : |f(M_n)| > n.$$

Последовательность $f(M_n)$ бесконечно большая, любая ее под–последовательность также бесконечно большая. Последовательность M_n ограничена, так как все ее члены принадлежат ограниченному множеству X. Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся под–последовательность $M_{k_n} \to M_0$, причем $M_0 \in X$, следовательно, $f(M)$ непрерывна в точке M_0. Поэтому $f(M_{k_n}) \to f(M_0)$. С другой стороны, $f(M_{k_n})$ бесконечно большая. Противоречие доказывает, что $f(M)$ ограничена на X.

$\mathbb{S}$.3.1–4. . Функция $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ на $X\{$0<x<1, 0<y<1$\}$ непрерывна в любой точке X, но не ограничена на X.

2. Точные грани функции

Пусть функция $f(M)$ ограничена сверху на X, то есть $\exists A : \forall M \in X$ верно $f(M) \leq A$. Любое такое число A называется верхней гранью функции $f(M)$ на X.

$\mathbb{D}$.3.1–6. *Наименьшая из всех верхних граней ограниченной сверху на множестве X функции $f(M)$ называется точной верхней гранью $f(M)$ на этом множестве и обозначается $\sup_X f(M)$.*

$\mathbb{T}$.3.1–8 (необходимое и достаточное условие точной грани). *Число F является точной верхней гранью функции $f(M)$ на X, если и только если*

1) $\forall M \in X$ верно $f(M) \leqslant F$,

2) $\forall G < F \exists N \in X : f(N) > G$.

Аналогично определяется точная нижняя грань функции.

$\mathbb{T}$.3.1–9 (достаточное условие существования точной верхней грани). *Ограниченная сверху функция, определенная на непустом* *множестве, имеет точную верхнюю грань.*

Самостоятельно, используйте свойства множества значений функции $f(M)$ на X.

3. Вторая теорема Вейерштрасса

$\mathbb{T}$.3.1–10 (вторая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных граней, верхней и нижней.*

Пусть $f(M)$ непрерывна на замкнутом множестве ограниченном множестве X.

Проведем доказательство для точной верхней грани. Пусть $U = \sup\limits_X f(M)$. Предположим, что $f(M)$ не равна U ни в одной точке множества X. Тогда $\forall M \in X$ верно $f(M) < U$. Пусть

$$F(M) = \frac{1}{U - f(M)}.$$

Тогда $F(M) > 0$и непрерывна на X.

По 1-й теорема Вейерштрасса, $F(M)$ ограничена на X, то есть $\exists V, \exists W : V \leq \frac{1}{U - f(M)} \leq W$, причем $V \geq 0$, так что $\frac{1}{W} \leq U - f(M)$, $f(M) \leq U - \frac{1}{W}$. Итак, $\forall M \in X$ верно $F(M) < U_1 = U - \frac{1}{W} < U$. Это противоречит тому, что число U – наименьшая из верхних граней функции $F(M)$ на X.

$$\mathbb{S}\textbf{.3.1–5.}\quad f(x,y) = xy(3-x-y),\ X = \left\{ (x,y) : \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq 3. \end{array} \right. \right\}$$

$\forall (x,y) \in X$ верно $f(x,y) \geq 0$, $U = \sup\limits_X f(M) > 0$, это единственная в области X точка локального экстремума, максимум.

3.2. Равномерно непрерывные функции

$\mathbb{D}$.3.2–1 (равномерно непрерывная функция). *Функция $F(M)$ называется равномерно непрерывной на X, если*
$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \forall M_1 \in X, \forall M_2 \in X : \rho(M_1, M_2) < \delta$ *верно* $|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon$.

$\mathbb{D}$.3.2–2 (равномерно непрерывная функция, отрицание). *Функция $F(M)$ не является равномерно непрерывной на X, если*

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0 \exists M_1 \in X, \exists M_2 \in X : \rho(M_1, M_2) < \delta \bigcap |f(M_2) - f(M_1)| \geq$$

$\mathbb{T}$.3.2–1 (Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.*

★ Если множество не является ограниченным или не является замкнутым, то непрерывная на таком множестве функция может не достигать своих точных граней и не быть равномерно непрерывной на этом множестве.

$\mathbb{S}$.3.2–1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ на множестве $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

$\mathbb{S}$.3.2–2. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ на множестве $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

II-4. Дифференцируемые функции

4.1. Определение дифференцируемой функции

4.1.1. Первый дифференциал

$\mathbb{D}$.4.1–1 (дифференцируемая функция двух переменных). *Функция $f(x, y)$, определенная в некоторой $\Omega(M_0)$, $M_0(x_0, y_0)$, называет-*

ся дифференцируемой в точке M_0, *если найдутся такие числа* A, B, *что полное приращение функции*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \tag{1}$$

при $\rho \to 0$, *где* $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

★ Так как $\rho \cdot o(1) = o(\rho)$, то можно сформулировать равносильное (4.1-1) условие:

$$\exists A, B : \Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \rho \cdot \alpha(x, y), \tag{2}$$

$\mathbb{D}$**.4.1–2 (дифференцируемая функция нескольких переменных).** *Функция* $f(M)$, $M = (x_1, ..., x_m)$, *называется дифференцируемой в точке* $M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$, *если* $\exists A_1, ..., A_m$*:*

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m + o(\rho),$$

где

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}).$$

$\alpha(x, y) = o(1)$ при $\rho \to 0$.

4.1.2. Понятие частной производной

$\mathbb{D}$**.4.1–3 (частная производная).** *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена на множестве* $D = \{x \in \Omega(x_0), y = y_0\}$. *Частной производной функции* $f(x, y)$ *по переменной* x *в точке* M_0 *называется число*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

★ Частная производная обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

★ Частную производную можно также записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

★ Достаточно потребовать, чтобы $f(x, y)$ была определена на множестве $D = \{x \in X, y = y_0\}$, причем $x_0 \in X$ и x_0 есть предельная точка X.

★ Аналогично определяется $f_y(x, y)$.

★ Можно также усилить требования на $f(x, y)$. В дальнейшем мы всегда требуем, чтобы $f(x, y)$ была определена на множестве $D = \Omega(M_0)$.

$\mathbb{S}$**.4.1–1.** Если $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, то $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$, $df = \big(3x^2 - 3y\big)dx + \big(3y^2 - 3x\big)dy$.

$\mathbb{S}$**.4.1–2.** Если $f(x, y) = x^y$, $x > 0$, то

(1) $f_x = y \cdot x^{y-1}$, как производная степенной функции,

(2) $f_y = x^y \ln x$, как производная показательной функции.

4.1.3. Необходимое условие дифференцируемости

$\mathbb{T}$**.4.1–1 (связь дифференцируемости и существования частной производной).** *Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $\exists f_x(M_0)$, $\exists f_y(M_0)$, $A = f_x(M_0)$, $B = f_y(M_0)$.*

□ Самостоятельно. ■

Контрольный вопрос. Является ли существование $f_x(M_0)$ и $f_y(M_0)$ необходимым условием дифференцируемости или достаточным условием дифференцируемости в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$, определенной в $\Omega(M_0)$?

4.1.4. Дифференциал функции двух переменных

$\mathbb{D}$**.4.1–4 (первый дифференциал).** *Первым дифференциалом дифференцируемой функции $f(x,y)$ называется линейная часть полного приращения функции,*

$$df = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y.$$

Учитывая, что для независимых переменных $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$,

$$df = f_x(M_0)dx + f_y(M_0)dy.$$

★ Для функции, не являющейся дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, величина $f_x(M_0)dx + f_y(M_0)dy$ не называется дифференциалом (также и в том случае, когда существуют $f_x(M_0)$ и $f_y(M_0)$).

★ Дифференциал есть функция удвоенного числа переменных,

$$df(dx, dy|x, y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

4.1.5. Необходимое и достаточное условие дифференцируемой функции

$\mathbb{T}$**.4.1–2 (о необходимом и достаточном условии дифференцируемой функции).** *Функция $f(M)$ является дифференцируемой в точке M_0, если и только если $\exists A_1, ..., A_m$:*

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_m\Delta x_m,$$

причем $\alpha_1 \to 0, ..., \alpha_m \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$.

□ **1.** Пусть

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m + R_2,$$

где $R_2 = \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_m\Delta x_m$, причем $\alpha_1 \to 0, ..., \alpha_m \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$.

Обозначим $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}$. Тогда
$$R_2 = \rho \cdot \left[\alpha_1 \cdot (\frac{\Delta x_1}{\rho}) + ... + \alpha_m \cdot (\frac{\Delta x_m}{\rho})\right].$$
Заметим, что $\dfrac{\Delta x_i}{\rho} = \dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}}$, поэтому $\left|\frac{\Delta x_1}{\rho}\right| \leq 1$.

Поэтому

$R_2 = \rho \cdot [\alpha_1 \cdot O(1) + ... + \alpha_m \cdot O(1)] =$

$= \rho \cdot [o(1) \cdot O(1) + ... + o(1) \cdot O(1)] =$

$= \rho \cdot [o(1) + ... + o(1)] = \rho \cdot o(1) = o(\rho)$.

Поэтому
$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + \rho \cdot o(1).$$

■

□ **2.** Пусть

$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + \rho \cdot o(1)$.

Тогда

$R_2 = \rho \cdot o(1) = \dfrac{\rho^2}{\rho} \cdot o(1) = \dfrac{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}} \cdot o(1)$

$= \Delta x_1 \cdot \dfrac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}} \cdot o(1) + ... = \Delta x_1 \cdot O(1) \cdot o(1) + ... = \Delta x_1 \cdot o(1) + ... = \alpha_1(M) \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_m(M) \cdot \Delta x_m$,

где $\alpha_1 \to 0, ..., \alpha_m \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$.

Поэтому
$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_m \Delta x_m$$

■

$\mathbb{S}$.4.1–3. Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна, но не является дифференцируемой в точке $(0; 0)$.

1. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ax + By + \rho o(1)$,

$\sqrt{x^2} = Ax + |x|\,o(1)$, $|x| = Ax + |x|\,o(1)$, $\frac{|x|}{|x|} = A\frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{|x|}o(1)$, $1 = A\frac{x}{|x|} + o(1)$, $\begin{cases} 1 = A + o(1), \\ 1 = -A + o(1), \end{cases}$ противоречие.

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ не имеет частных производных в точке $(0;0)$, так как $f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$, $f(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|$.

$\mathbb{S}$**.4.1–4.** Функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой в точке $M_0(0;0)$.

★ При $x + y \neq 0$ имеем $u_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\nexists \lim\limits_{\begin{cases} x \to x_0, \\ y \to y_0 \end{cases}} u_x$,

$\nexists \lim\limits_{\begin{cases} x \to x_0, \\ y \to y_0 \end{cases}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$.

a) $u_x(0;0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(0+\Delta x,0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3+0^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Аналогично $u_y(0;0) = 1$,

b) Проверим справедливость равенства

$f(M) = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$,

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2+y^2}) = x + y + \sqrt{x^2+y^2}\,o(1),$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = o(1),$$
$$y = kx,$$
$$\frac{\sqrt[3]{x^3+k^3x^3} - x - kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} = o(1),$$
$$\frac{\sqrt[3]{1+k^3} - 1 - k}{\sqrt{1+k^2}} \neq o(1).$$

c) $\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = o(1)$, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$,

$\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^3\phi+\rho^3\sin^3\phi}-\rho\cos\phi-\rho\sin\phi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi}} = o(1),$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos^3\phi+\sin^3\phi}-\cos\phi-\sin\phi}{\sqrt{\cos^2\phi+\sin^2\phi}} \neq o(1).$$

$\mathbb{S}$**.4.1–5.** Функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой в точке $M_0(0;0)$.
В самом деле, при $xy \neq 0$ имеем $u_x = \frac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^2y)^2}}$,
$\nexists \lim_{\begin{cases} x \to x_0, \\ y \to y_0 \end{cases}} u_x$, $\nexists \lim_{\begin{cases} x \to x_0, \\ y \to y_0 \end{cases}} \frac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^2y)^2}}$.

$\mathbb{S}$**.4.1–6.** Найдите дифференциал функции $u(x,y) = x^3+y^3-3xy$. Функция дифференцируема как композиция дифференцируемых функций, $du = u_x dx + u_y dy$, $u_x = 3x^2 - 3y$, $u_y = 3y^2 - 3x$, $du = (3x^2-3y)dx + (3y^2-3x)dy$.

$\mathbb{S}$**.4.1–7.** Найдите дифференциал функции $u(x,y) = x^3+y^3-3xy$ в точке $M_0 = (2;3)$.

$$du = (3x^2-3y)dx + (3y^2-3x)dy,$$

$$du = (3\cdot 2^2 - 3\cdot 3)dx + (3\cdot 3^2 - 3\cdot 2)dy,$$

$$du = 3dx + 21dy.$$

$\mathbb{S}$**.4.1–8.** Найдите дифференциал функции $u(x,y) = x^3+y^3-3xy$ в точке $M_0 = (1;1)$.

$$du = (3x^2-3y)dx + (3y^2-3x)dy,$$

$$du = 0dx + 0dy = 0.$$

$\mathbb{S}$.4.1–9. Найдите дифференциал функции $u(x,y,z) = x^{y^2 z}$.
$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz, u_x = y^2 z x^{y^2 z - 1}$, $u_y = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz$, $u_z = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2$, $du = y^2 z x^{y^2 z-1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$.

$\mathbb{S}$.4.1–10. Найдите дифференциал функции $f(x,y) = \frac{y}{x^2 - y^2}$. Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2-y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$,
$df = -\frac{2xy}{(x^2-y^2)} dx + \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2} dy$ при $x^2 - y^2 \neq 0$.

4.1.6. Непрерывность дифференцируемой функции

$\mathbb{T}$.4.1–3 (о непрерывности дифференцируемой функции). *Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то $f(x,y)$ непрерывна в $M_0(x_0,y_0)$.*

Достаточно доказать, что полное приращение $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Имеем $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \rho o(1) \to 0$, поскольку A и B – числа, $\rho \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

4.1.7. Достаточное условие дифференцируемости

$\mathbb{T}$.4.1–4 (достаточное условие дифференцируемости). *Если f_x и f_y определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, f_x и f_y непрерывны в M_0, то $f(x,y)$ дифференцируема в M_0.*

$\square$ $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Используем формулу конечных приращений,

$$\Delta f = f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \lambda \Delta y) \cdot \Delta y,$$

$0 < \theta < 1$, $0 < \lambda < 1$.

Используем непрерывность f_x и f_y в M_0,

$$\Delta f = (f_x(x_0,y_0) + o(1)) \cdot \Delta x + (f_y(x_0,y_0) + o(1)) \cdot \Delta y$$

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \alpha(x, y) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \beta(x, y) \cdot \Delta y.$$

■

𝕊.4.1–11. (существование частных производных в точке не влечет дифференцируемость функции в этой точке).

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$ и точку $M_0(0, 0)$. Заметим, что частные приращения $\triangle_x f$, $\triangle_y f$ равны нулю в точке $M_0(0, 0)$, например,

$$\triangle_x f = \frac{(x + \Delta x)y}{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \Bigg|_{x = y = 0} = 0 \, .$$

Поэтому $f_x = 0$, $f_y = 0$ в точке $M(0, 0)$.

Покажем теперь, что данная функция разрывна в точке $M(0, 0)$. Считая $x = y \neq 0$, получим $f(x, x) = \frac{1}{2}$ и при $\lim_{(x,y)\to(0;0)} f(x, x) = \frac{1}{2}$ а если бы функция была непрерывна, to$\lim_{(x,y)\to(0;0)} f(x, x) = f(0, 0) = 0$.

4.2. Правила дифференцирования

4.2.1. Арифметические операции

𝕋.4.2–1 (дифференциал суммы, разности, произведения, частного). *Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены в $\Omega(M_0)$ и дифференцируемы в точке M_0. Тогда*

1. $d(cf) = c\,df$, *если* $c = const$,
2. $d(f \pm g) = df \pm dg$,
3. $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$,

4. $d\dfrac{f}{g} = \dfrac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ *при* $g \neq 0$.

4.2.2. Дифференциал сложной функции

1. Понятие сложной функции

$\mathbb{D}$**.4.2–1 (сложная функция).** *Пусть функция* $u = f(x_1, \dots x_m)$ *определена в* $\Omega(M_0)$, $M_0(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$, *функции*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, ..., t_k),\ \dots,\ x_m = \varphi_m(t_1, ..., t_k)$$

определены в $\Omega(P_0)$, $P_0(t_1^{(0)}, ..., t_k^{(0)})$, *и* $x_j^{(0)} = \varphi_j(t_1^{(0)}, ..., t_k^0)$ *для всех* $j \in \{1, 2, ..., k\}$. *Тогда в окрестности точки* $P_0(t_1^{(0)}, ..., t_k^{(0)})$ *определена сложная функция*

$$F(t_1, ..., t_k) = f\big(\varphi_1(t_1, ..., t_k), \dots, \varphi_m(t_1, ..., t_k)\big).$$

★ Требования можно ослабить.

$\mathbb{S}$**.4.2–1.** Пусть $u(r, \phi) = r\cos\phi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x > 0$, $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$f(x, y) = u(r(x, y), \phi(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}).$$

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}} = \sqrt{x^2 + y^2}\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}} = x,$$

Тогда $f_x = 1$, $f_y = 0$.

$\mathbb{S}$**.4.2–2.** Пусть $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$x(t) = tV_0\cos\phi,\ \ y(t) = tV_0\sin\phi - g\frac{t^2}{2},$$

$$R(t) = u(x(t), y(t)),$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R}(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}),$$

$$B = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = tV_0\cos\phi\cdot V_0\cos\phi + (tV_0\sin\phi - g\frac{t^2}{2})(V_0\sin\phi - gt)$$
$$= tV_0^2\cos^2\phi + tV_0^2\sin^2\phi - t^2gV_0\sin\phi - g\frac{t^2}{2}V_0\sin\phi + g^2\frac{t^3}{2}$$
$$= tV_0^2 - \frac{3}{2}t^2gV_0\sin\phi + g^2\frac{t^3}{2} = \frac{t}{2}(2V_0^2 - 3tgV_0\sin\phi + g^2t^2), \quad (4)$$
$$D = (3gV_0\sin\phi)^2 - 8V_0^2g^2 = g^2V_0^2(9\sin^2\phi - 8),$$

Точка экстремума имеется при условии $\sin\phi > \sqrt{\frac{8}{9}}$.

2. Функции малой размерности

$\mathbb{T}$.4.2–2 (о дифференцировании сложной функции типа $1\to 2\to 1$). *Пусть $f(x,y)$ определена в $\Omega(M_0)$ и дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ определены в $\Omega(t_0)$ и дифференцируемы в точке t_0, причем $M_0\big(x_0,y_0\big) = \big(x(t_0),y(t_0)\big)$. Тогда сложная функция $U(t) = f(x(t),y(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем*

$$U_t = f_x x_t + f_y y_t,\ \ dU = (f_x x_t + f_y y_t)dt.$$

★ Условие «$f(x,y)$ определена в $\Omega(M_0)$» можно снять, так как оно заложено в определении дифференцируемой функции. В дальнейшем всегда считаем это условие выполненным для каждой дифференцируемой функции.

$\mathbb{T}$.4.2–3 (о дифференцировании сложной функции типа $2\to 2\to 1$). *Пусть $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, x и y являются дифференцируемыми функциями переменных t и s в точке $T_0(t_0,s_0)$, $M_0(x_0,y_0) = (x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))$. Тогда сложная функция*

$U(t,s) = f(x(t,s), y(t,s))$ *дифференцируема в точке* $T_0(t_0, s_0)$, *причем*

$$U_t = f_x x_t + f_y y_t, \;\; U_s = f_x x_s + f_y y_s,$$

или

$$dU = (f_x x_t + f_y y_t)dt + (f_x x_s + f_y y_s)ds.$$

3. Главная теорема о сложной функции

Пусть $U(t_1, ..., t_k) = f(x_1, \ldots, x_m)$,

где

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k) \;,...,\; x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k).$$

$\mathbb{T}$.4.2–4 (о дифференцировании сложной функции общего вида). *Пусть*

(1) *функция* $u = f(x_1, \ldots x_m)$ *дифференцируема в* $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$,

(2) *функции*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, ..., t_k), \; ..., x_m = \varphi_m(t_1, ..., t_k)$$

дифференцируемы в точке $P_0(t_1^0, \ldots, t_k^0)$,

(3) *причем*

$$x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, \ldots t_k^0), \; \ldots, \; x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, \ldots t_k^0).$$

Тогда функция

$$U(t_1, ..., t_k) = f(x_1, ..., x_m)$$

дифференцируема в точке $P_0(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, *и*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial t_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{cases}$$

□ Так как $f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M_0, то

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m}\Delta x_m + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \cdot \Delta x_m,$$

причем $\alpha_1(M), \ldots, \alpha_m(M) \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$.
Так как $x_j = \varphi_j(t_1^0, \ldots t_k^0)$ дифференцируемы в точке P_0, то

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \cdots + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_1(N), \\ \cdots \\ \Delta x_m = \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1 + \cdots + \dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_m(N), \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \ldots + \Delta t_k^2}$ и $\beta_j(N) \to 0$ при $\rho \to 0$.
Подставим выражения (4.2-5) для $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$, получим

$$\Delta U = A_1\Delta t_1 + \cdots + A_k\Delta t_k + \rho \cdot \gamma(N), \tag{6}$$

где

$$A_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$
$$\ldots,$$
$$A_k = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}, \tag{7}$$

$$\gamma(N) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot (\rho \cdot \beta_1(N)) +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\alpha_1(M) \cdot (\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_1(N)) + \dots$$
$$+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \big(\rho \cdot \beta_m(N)\big) +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\alpha_m(M) \cdot \Big(\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_m(N)\Big), \quad (8)$$

Поэтому $\gamma(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, $U(t_1, \dots, t_k)$ дифференцируема в точке P_0 и $A_i = \dfrac{\partial U}{\partial t_i}$, $i = \overline{1, k}$ ■

4.3. Приложения дифференцируемых функций

4.3.1. Производная по направлению, градиент.

1. Производная по направлению на плоскости

Пусть $\vec{l} = (l_x, l_y)$ – единичный вектор, $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 1$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

$\mathbb{D}$**.4.3–1 (производная по направлению).** *Производной функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$ называется число*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0},$$

где

$$g(t) = f(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y).$$

★ Производная функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$ равна

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

★ Требования на $f(x, y)$ можно ослабить.

$\mathbb{T}$**.4.3–1 (о производной по направлению).** *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x(M_0) \cdot l_x + f_y(M_0) \cdot l_y,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\triangledown f, \vec{l}\right)\Big|_{M_0},$$

где $\triangledown f = (f_x, f_y)$, $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)^T$.

2. Градиент

$\mathbb{D}$**.4.3–2 (градиент).** *Градиентом дифференцируемой функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор* $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y)^T$.

★ Если $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой, то понятие градиента в данной точке не применяется.

3. Производная по направлению и градиент

$\mathbb{T}$**.4.3–2 (производная по направлению и градиент). (1)** *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (\operatorname{grad} f(M_0),\ \vec{l}),$$

где в правой части находится скалярное произведение соответствующих векторов, причем вектор направления – единичный.

(2) *Производная по направлению достигает своего наибольшего значения, равного* $||\operatorname{grad} f|| = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}$*, при условии что* $\vec{l} \parallel \operatorname{grad} f$ *(и векторы сонаправлены).*

(3) *Производная по направлению достигает своего наименьшего значения, равного* $-||\operatorname{grad} f|| = -\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}$*, при условии что* $\vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} f$ *(и векторы противонаправлены).*

(4) *Производная по направлению равна нулю при условии* $\vec{l} \perp \operatorname{grad} f$.

□ Теорема вытекает из теоремы 2а,

$$g(t) = f(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y),$$

$$g_t = f_x(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y)(x_0 + t \cdot l_x)_t + \\ + f_y(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y)(y_0 + t \cdot l_y)_t \quad (9)$$

при $t = 0$, $x = x_0$ и $y = y_0$. ■

4. Производная по направлению в пространстве

$\mathbb{D}$.4.3–3 (градиент функции трех переменных). *Если* $f(x, y, z)$ *определена в некоторой* $\Omega(M_0)$ *и дифференцируема в точке* M_0*, то градиентом называем вектор* $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y, f_z)$ *в точке* M_0.

Более подробно, градиентом дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ в точке M называется вектор

$$\operatorname{grad} f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\overrightarrow{k},$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{grad} f(M) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

Рассмотрим единичный вектор $\overrightarrow{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ - углы образованные вектором $\overrightarrow{a}$ с координатными осями декартовой системы координат. Пусть

$$x = x_0 + t\cos\alpha, y = y_0 + t\cos\beta, z = z_0 + t\cos\gamma.$$

Пусть $f(x, y, z)$ определена в некоторой $\Omega(M_0)$ и дифференцируема в точке M_0. Функция

$$U(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

представляет собой сложную функцию параметра t. По теореме о дифференцировании сложной функции,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Производная по направлению равна

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{a}} = (\operatorname{grad} U, \overrightarrow{a}) = |\operatorname{grad} U(M)| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ есть угол, образованный вектором градиента и вектором $\overrightarrow{a}$.

4.3.2. Определение касательной плоскости

$\mathbb{D}$.4.3–4 (касательная плоскость через угол между плоскостью и хордой). *Пусть $f(x, y)$ определена на множестве D пространства R^2 и точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой D. Пусть*

$$G = \{x, y, z\} : z = f(x, y), (x, y) \in D.$$

Плоскость Φ*, заданная уравнением*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

проходящая через точку $P_0(x_0,y_0,z_0)$*, называется касательной плоскостью к множеству* G*, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall P\in G:0<\rho(P,P_0)<\delta\ \textit{верно}\ \left|\angle(\Phi,\overrightarrow{P_0P})\right|<\varepsilon.$$

$\mathbb{T}$**.4.3–3 (эквивалентное определение касательной плоскости через нормаль).** *Если* $\vec{N}=(A,B,C)$ *– вектор нормали к поверхности* Φ *в точке* P_0*, то*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall P\in G:0<\rho(P,P_0)<\delta\ \textit{верно}\ \left|\frac{(\vec{N},\overrightarrow{PP_0})}{\left|\vec{N}\right|\left|\overrightarrow{PP_0}\right|}\right|<\varepsilon,$$

где $\vec{N}=(A,B,C)$ *– вектор нормали к* Φ*.*

4.3.3. Теоремы о касательной плоскости

$\mathbb{T}$**.4.3–4 (о единственности касательной плоскости).** *Если касательная плоскость существует, то она единственная.*

$\mathbb{T}$**.4.3–5 (об уравнении касательной плоскости).** *Если функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0,y_0)$*, то в этой точке существует касательная плоскость к поверхности* $z=f(x,y)$*, которая задается уравнением*

$$z-f(M_0)=(x-x_0)f_x(M_0)+(y-y_0)f_y(M_0).$$

□ Найдем $\dfrac{(\vec{N}, \overrightarrow{MM_0})}{\left|\vec{N}\right| \left|\overrightarrow{MM_0}\right|}$. Запишем определение дифференцируемой функции (Тейлора-Пеано-1):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) + \rho\cdot\alpha(M),$$

$$\Delta z = f_x\Delta x + f_y\Delta y + \rho\cdot\alpha(M),$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\Delta x,\, \Delta y, \Delta z),$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\Delta x, \Delta y, f_x\Delta x + f_y\Delta y + \rho\cdot\alpha(M)),$$

$$\vec{N} = (f_x(M_0), f_y(M_0),\, -1),$$

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = f_x\Delta x + f_y\Delta y - f_x\Delta x - f_y\Delta y + \rho\cdot\alpha(M),$$

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = \rho\cdot\alpha(M),$$

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1},$$

$$|\vec{r} - \vec{r_0}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (f_x\Delta x + f_y\Delta y + \rho\cdot\alpha(M))^2},$$

$$|\vec{r} - \vec{r_0}| \geq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$\frac{(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0)}{\left|\vec{N}\right|\cdot|\vec{r} - \vec{r}_0|} \leq \frac{\rho\cdot\alpha(M)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\alpha(M)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} = \beta(M).$$

■

4.3.4. Касательная к кривой, заданной явным образом

Пусть $f(x)$–дифференцируемая функция. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, имеет вид

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

4.3.5. Касательная к кривой, заданной неявным образом

Пусть $F(x,y)$–дифференцируемая функция. Если $F_x^2 + F_y^2 > 0$, то уравнение касательной к линии уровня $F(x,y) = C$ в точке

$M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) = 0.$$

4.3.6. Касательная к кривой, заданной параметрически

Уравнение касательной к кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

где $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{N} = (y_t; -x_t)$.

Равносильное условие:

$$(x - x_0)y_t(M_0) - (y - y_0)x_t(M_0) = 0,$$
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_t(M_0)}{x_t(M_0)},$$
$$x - x_0 = s \cdot x_t(M_0), \;\; y - y_0 = s \cdot y_t(M_0).$$

4.3.7. Касательная к поверхности, заданной явным образом

Пусть $f(x, y)$–дифференцируемая функция. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

4.3.8. Касательная к поверхности, заданной неявно

Пусть $F(x, y, z)$–дифференцируемая функция. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = C$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $F(x_0, y_0, z_0) = C$, имеет вид

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

при условии

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0.$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является уравнением касательной к поверхности

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0,$$

имеет вид

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

или

$$z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

4.3.9. Касательная к поверхности, заданной параметрически

Уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x = x(t, s), \ \ y = y(t, s), \ \ z = z(t, s)$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = [\vec{r_t}, \vec{r_s}]$, $\vec{r_t} = (x_t, y_t, z_t)$, $\vec{r_s} = (x_s, y_s, z_s)$, при условии

$$[\vec{r_t}, \vec{r_s}] \neq 0.$$

Все функции предполагаются дифференцируемыми.

$\mathbb{S}$.4.3–1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy$ в точке $M_0(2; 3; 6)$.

□ Заметим, что $z_x = y$, $z_y = x$, а в заданной точке M_0 имеем $z_x|_{M_0} = 3,\ z_y|_{M_0} = 2$.
Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - 6 = 3(x-2) + 2(y-3), z = 3x + 2y - 6.$$

Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке имеет вид

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{-1},$$

или

$$x = 2 + 3t,\ \ y = 3 + 2t,\ \ z = 6 - t.$$

■

$\mathbb{S}$**.4.3–2.** Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $M_0(1;\ 1;\ -1)$.
□ Заметим, что $z_x = 3x^2 - 3y$, $z_y = 3y^2 - 3x$,
в заданной точке $M_0(1;1;-1)$ $z_x|_{M_0} = 0,\ z_y|_{M_0} = 0$.
Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид $z+1 = 0$. Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке имеет вид

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1},$$

или $x = 1$, $y = 1$, $z = -1 + t$. ■

$\mathbb{S}$**.4.3–3.** Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2 - 2xy - x + 2y$ в точке $M_0(1;1;1)$.
Заметим, что в произвольной точке

$$z_x = 2x - 2y - 1, z_y = -2x + 2y + 2,$$

в заданной точке $M_0(1;1;1)$ $z_x|_{M_0} = -1,\ z_y|_{M_0} = 2$. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид $z - 1 = -(x-1) + 2(y-1)$, или

$$x - 2y + z = 0.$$

Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

$\mathbb{S}$.4.3–4. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = 4xyz - 1$ в точке $M_0(1;1;1)$.

□ Н■айдем дифференциалы левой и правой частей:

$$d(x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz + 1) = 0,$$
$$dx(3x^2 - 4yz) + dy(3y^2 - 4xz) + dz(3z^2 - 4xy) = 0,$$
$$(x - x_0)(3x_0^2 - 4y_0z_0) + (y - y_0)(3y_0^2 - 4x_0z_0) = 0,$$

в указанной точке

$$(x-1)(-1) + (y-1)(-1) + (z-1)(-1) = 0,$$
$$x + y + z = 3.$$

$\mathbb{S}$.4.3–5. Найдите производную функции

$$f(x,y,z) = y^2z - 2xyz + z^2$$

в точке $M_0(3;1;1)$ в направлении луча $\vec{l}$, который образует с координатными осями острые углы α, β, γ, причем $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$.

4.3.10. Приближенные вычисления с помощью первого дифференциала

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$. Запишем приращение функции в виде $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = P_1 + R_2$, где

$$P_1(x+\Delta x, y+\Delta y|x,y) = f + df = f(x,y) + f_x(x,y) \triangle x + f_y(x,y) \triangle y,$$

Оценкой первого порядка для $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ называется выражение

$$P_1(x+\Delta x, y+\Delta y|x,y).$$

Иначе,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x\Delta x + f_y\Delta y.$$

Впоследствии мы получим семейство формул Тейлора,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = P_n + R_{n+1},$$

где

$P_0 = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$,

$$P_1 = f + df,$$
$$P_2 = f + df + \frac{1}{2}d^2 f,$$
$$P_3 = f + df + \frac{1}{2}d^2 f + \frac{1}{6}d^3 f,$$
$$P_n = f + df + \frac{1}{2}d^2 f + \frac{1}{6}d^3 f + ... + \frac{1}{n!}d^n f,$$
$$P_1 = f(x,y) + f_x(x,y) \bigtriangleup x + f_y(x,y) \bigtriangleup y,$$
$$P_2 = f(x,y) + f_x \bigtriangleup x + f_y \bigtriangleup y + \frac{1}{2}(f_{xx} \bigtriangleup x^2 + 2f_{xy} \bigtriangleup x \bigtriangleup y + f_{yy} \bigtriangleup y^2).$$

Приближенная формула для $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx P_n(x+\Delta x, y+\Delta y|x,y).$$

Оценкой погрешности мы займемся позднее.

$\mathbb{S}$.4.3–6. Вычислите приближенно с помощью первого дифференциала значение $A = \sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$.

Пусть $f(x,y,z) = \sqrt{x^y + \ln z}$,

$$x = 1, y = 2, z = 1,$$

$$\bigtriangleup x = 0,04, \bigtriangleup y = -0,01, \bigtriangleup z = 0,02,$$

$$x + \triangle\, x = 1,04, y + \triangle\, y = 1,99, z + \triangle\, z = 1,02,$$

Найдем значение функции в центральной точке, $f(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$,

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2},$$

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}05,$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1; 2; 1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05.$$

Точное значение этого выражения: $1{,}049275\ldots$.

II-5. Дифференциалы старших порядков

5.1. Частные производные старших порядков

5.1.1. Понятие производных старших порядков

$\mathbb{D}$.5.1–1 (производной второго порядка). *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $D_1 = \{x \in \Omega(x_0), y = y_0\}$ и имеет на множестве D_1 производную $f_x(x, y)$. Если функция $f_x(x, y_0)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет производную по переменной x, то эта производная называется частной производной второго порядка по x два раза.*

Обозначение: Частная производная второго порядка по x два раза обозначается $f_{xx}(M_0)$.

$\mathbb{D}$**.5.1–2 (смешанной производной).** *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве G_2, которое является окрестностью каждой точки множества $D_2 = \{x = x_0, y \in \Omega(y_0)\}$, и имеет производную $f_x(x, y)$ на множестве D_2. Если функция $f_x(x_0, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет производную по переменной y, то эта производная называется смешанной частной производной второго порядка по x и по y.*

Обозначение: Смешанная производная второго порядка по x и по y обозначается $f_{xy}(M_0)$.

$\mathbb{D}$**.5.1–3 (частной производной второго порядка по y).** *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $D_3 = \{x = x_0, y \in \Omega(y_0)\}$ и имеет частную производную $f_y(x, y)$ на множестве D_3. Если функция $f_y(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет производную по переменной y, то эта частная производная называется частной производной второго порядка по y два раза.*

Обозначение: Частная производная второго порядка по y два раза обозначается $f_{yy}(M_0)$.

Обозначение: Производная функции $f_x(x, y)$ по переменной y обозначается

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

★ Аналогично определяются производные третьего и других порядков.

$\mathbb{D}$**.5.1–4.** *Производные f_{xy}, f_{yx}, f_{xyx}, f_{xyz} и т.д. называют смешанными.*

★ В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $f(x, y)$ определена на множестве $D = \Omega(M_0)$, $M_0(x_0, y_0)$.

5.1.2. О независимости от порядка дифференцирования

$\mathbb{T}$.5.1–1 (достаточное условие равенства смешанных производных). *Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} определены в некоторой окрестности точки M_0, причем f_{xy} и f_{yx} непрерывны в точке M_0, то*

$$f_{xy}(M_0) = f_{yx}(M_0),$$

т.е. результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

□ Пусть

$$\Phi(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - \\ - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0), \quad (1)$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0).$$

Тогда

$$\Phi(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(x_0 + \theta h) \cdot h = \\ = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)] \cdot h, \quad (2)$$

где $0 < \theta < 1$. Следовательно,

$$\Phi(h) = h^2 [(f_x)_y(x_0 + \theta h, y_0 + \mu h)] = h^2 [(f_x)_y(x_0, y_0) + o(1)].$$

Аналогично докажем, что

$$\Phi = [(f_y)_x(x_0, y_0) + o(1)] \cdot h^2,$$

Следовательно,

$$(f_x)_y(x_0, y_0) + o(1) = (f_y)_x(x_0, y_0) + o(1),$$

поэтому $f_{xy}(M_0) = f_{yx}(M_0)$. ■

5.2. Дифференциал второго порядка

5.2.1. Второй дифференциал функции двух переменных

1. Правила дифференцирования первого порядка

Напомним правила дифференцирования первого порядка. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $D = \Omega(M_0)$ и дифференцируемы в точке $M_0\big(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\big)$. Тогда функции

(1) $f(M) \pm g(M)$,

(2) $f(M) \cdot g(M)$,

(3) $\frac{f(M)}{g(M)}$ при условии $g(M_0) \neq 0$

также дифференцируемы в указанной точке, причем

$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$

$$d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df,$$

$$d\frac{f}{g} = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \text{ при условии } g(M) \neq 0.$$

При очевидных предположениях верны также формулы

$$d(f^g) = g \cdot f^{g-1}df + f^g \cdot \ln f \cdot dg,$$

$$d(\ln f) = \frac{df}{f}, \;\; d(\log_g f) = \frac{df}{f}\frac{1}{\ln g} - \frac{dg}{g}\frac{\ln f}{\ln^2 g},$$

$$d(fgh) = fg \cdot dh + fh \cdot dg + gh \cdot df.$$

2. Второй дифференциал функции двух переменных

$\mathbb{D}$**.5.2–1 (второй дифференциал).** *Если первый дифференциал*

$$df(x, y|dx, dy)$$

функции $f(x, y)$ *является дифференцируемой функцией в данной точке* M_0, *то функция* $f(x, y)$ *называется дважды дифференцируемой в точке* M_0. *В этом случае вторым дифференциалом называется дифференциал от первого дифференциала,*

$$d^2 f = d(df) = d(f_x dx + f_y dy).$$

Найдем значение второго дифференциала функции двух переменных,

$$d^2 f = d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = \\ = d(f_x)dx + d(f_y)dy + f_x d(dx) + f_y d(dy), \quad (3)$$

$$d(f_x) = f_{xx}dx + f_{xy}dy, \;\; d(f_y) = f_{yx}dx + f_{yy}dy,$$

$$d(dx) = d^2 x, \;\; dx \cdot dx = dx^2,$$

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2 x + f_y d^2 y.$$

В дальнейшем предполагаем все функции определены на множестве $D = \Omega(M_0)$, где $M_0(x_0, y_0)$, и дифференцируемыми нужное число раз в точке M_0.

Для случая независимых переменных x и y по определению

$$d^2 x = 0, \;\; d^2 y = 0,$$

поэтому для дважды дифференцируемой функции $f(x, y)$

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2.$$

$\mathbb{T}$**.5.2–1 (достаточное условие равенства смешанных производных дважды дифференцируемой функции).** *Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

в M_0.

$\mathbb{S}$**.5.2–1.** Пусть $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. Тогда

$$f_x = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$f_y = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_{yx} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = f_{xy},$$

$$f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$d^2 f = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 + 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy^2.$$

5.2.2. Оператор дифференцирования

1. Оператор дифференцирования первого порядка

Обозначим

$$d = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Имется в виду, что оператор d действует на дифференцируемую функцию $f(x, y)$ по правилу

$$df = dx\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y} = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f.$$

2. Оператор дифференцирования второго порядка

Оператор d^2 определяется как результат последовательного применения оператора d два раза:

$$d^2 = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2,$$

$$d^2 = dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Оператор d^2 действует на дважды дифференцируемую функцию $f(x, y)$ по правилу

$$d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f,$$

или, что то же самое,

$$d^2f = \left(dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f,$$

эту формулу обычно записывают в виде

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

5.2.3. Векторно-матричные обозначения дифференциала

1. Векторно-матричные обозначения дифференциала первого порядка

Рассмотрим сначала функцию двух переменных $f(x,y)$. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор–столбец, $dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$. Пусть $f_X = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$. Тогда выражение первого дифференциала $df = f_x dx + f_y dy$ можно записать в виде

$$df = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = f_X^T dX.$$

2. Векторно-матричные обозначения дифференциала второго порядка функции общего вида

По определению,

$$d^2 f = d(df) = d(f_X^T dX) \;\; = d(f_X^T) dX + f_X^T d(dX).$$

В развернутой форме второй дифференциал равен

$$d^2 f = d\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Оператор дифференцирования действует на векторную или матричную функцию поэлементно, сохраняя структуру вектора или матрицы:

$$d^2 f = \begin{pmatrix} d(f_x) & d(f_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 x \\ d^2 y \end{pmatrix},$$

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 x \\ d^2 y \end{pmatrix}.$$

В векторно-матричной форме дифференциал второго порядка функции общего вида равен

$$d^2 f = dX^T f_{XX^T} dX + f_X^T d^2. \tag{4}$$

Заметим, что для дважды дифференцируемой функции $f_{XX^T} = f_{X^TX}$.

3. Векторно-матричные обозначения дифференциала второго порядка функции двух независимых переменных

$$d^2f = dX^T f_{XX^T} dX.$$

4. Второй дифференциал функции трех переменных

$$d^2f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2x \\ d^2y \\ d^2z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

для случая независимых переменных

$$d^2f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

5. Третий дифференциал функции двух независимых переменных

$$d^3f = f_{xxx}dx^3 + 3f_{xxy}dx^2dy + 3f_{xyy}dxdy^2 + f_{yyy}dy^3,$$

6. Дифференциал n–го порядка

По определению,

$$d^nf = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f,$$

где
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}dx^k\frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}dy^{n-k}.$$

5.3. Дифференциал сложной функции

5.3.1. Первый дифференциал сложной функции

1. Функция двух переменных

$\mathbb{T}$.5.3–1 (о дифференцировании сложной функции двух переменных). *Пусть функции $x_1(t_1,t_2)$ и $x_2(t_1,t_2)$ дифференцируемы в точке $T_0(t_1^{(0)},t_2^{(0)})$, $x_1^{(0)}=x_1(t_1^{(0)},t_2^{(0)})$, $x_2^{(0)}=x_2(t_1^{(0)},t_2^{(0)})$, функция $f(x_1,x_2)$ дифференцируема в точке $X_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$, сложная функция определяется равенством*
$$u(t_1,t_2)=f\big(x_1(t_1,t_2),x_2(t_1,t_2)\big).$$
Тогда функция $u(t_1,t_2)$ дифференцируема в точке $T_0(t_1^{(0)},t_2^{(0)})$ и верны равенства

$$du=\big(f_{x_1}(x_1)_{t_1}+f_{x_2}(x_2)_{t_1}\big)dt_1+\big(f_{x_1}(x_1)_{t_2}+f_{x_2}(x_2)_{t_2}\big)dt_2,$$

$$du=f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2,$$

где

$$dx_1=(x_1)_{t_1}dt_1+(x_1)_{t_2}dt_2,\ \ dx_2=(x_2)_{t_1}dt_1+(x_2)_{t_2}dt_2,$$

$$du=u_{t_1}dt_1+u_{t_2}dt_2,$$

где

$$u_{t_1} = f_{x_1}(x_1)_{t_1} + f_{x_2}(x_2)_{t_1}, \;\; u_{t_2} = f_{x_1}(x_1)_{t_2} + f_{x_2}(x_2)_{t_2},$$

2. Векторно-матричные обозначения первого диференциала сложной функции

$$df = \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}, \;\; df = \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1)_{t_1} & (x_1)_{t_2} \\ (x_2)_{t_1} & (x_2)_{t_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix},$$

$$du = f_X^T X_{T^T} dT.$$

3. Функция двух переменных от одной переменной

Пусть $u(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$. Тогда

$$du = f_x dx + f_y dy = f_x(x_t dt) + f_y(y_t dt),$$

$$du = (f_x x_t + f_y y_t)dt = u_t dt, \;\; u_t = f_x x_t + f_y y_t.$$

5.3.2. Второй дифференциал сложной функции

1. Функция двух переменных в абстрактной форме

$$u = f(x, y), d^2u = d(du),$$

$$d^2u = d(f_x dx + f_y dy),$$

$$d^2u = d(f_x)dx + f_x d^2x + d(f_y)dy + f_y d^2y,$$

$$d^2u = (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy + f_x d^2x + f_y d^2y,$$

$$d^2u = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_xd^2x + f_yd^2y,$$

$$d^2f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^2x \\ d^2y \end{pmatrix},$$

II-6. Формула Тейлора

6.1. Многочлен Тейлора и остаточный член

Запишем формулы Тейлора для функции двух переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $D = \Omega(M_0)$, и дифференцируема нужное число раз в точке $M_0(x_0,y_0)$. Формулами Тейлора называют равенства

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = P_0(x_0,y_0|dx,dy) + R_1(x_0,y_0|dx,dy),$$

где

$$P_0(x_0,y_0|dx,dy) = f(x_0,y_0),$$

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = P_1(x_0,y_0|dx,dy) + R_2(x_0,y_0|dx,dy),$$

где

$$P_1(x_0,y_0|dx,dy) = P_0(x_0,y_0|dx,dy) + df(x_0,y_0|dx,dy),$$

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = P_2(x_0,y_0|dx,dy) + R_3(x_0,y_0|dx,dy),$$

где

$$P_2(x_0,y_0|dx,dy) = P_1(x_0,y_0|dx,dy) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0|dx,dy),$$

$\ldots,$

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = P_n(x_0,y_0|dx,dy) + R_{n+1}(x_0,y_0|dx,dy).$$

Функция

$$P_n(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0|dx, dy)$$

называется многочленом Тейлора n–го порядка. В частности,

$$P_0(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0),$$

$$P_1(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy),$$

$$P_2(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0|dx, dy) \quad (1)$$

Каждая формула Тейлора является определением соответствующей функции $R_{n+1}(x_0, y_0|dx, dy)$,

$$R_{n+1}(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - \left(f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0|dx, dy)\right). \quad (2)$$

Теоремы Тейлора устанавливают выражение остаточного члена при некоторых предположениях о свойствах функции f.

6.2. Формула Тейлора первого порядка

6.2.1. Формула Тейлора–Пеано первого порядка

$\mathbb{T}$**.6.2–1 (Тейлора–Пеано первого порядка).** *Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $D = \Omega(M_0)$, и дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0 верна формула Тейлора–Пеано,*

$$f(x_0+dx,y_0+dy)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0|dx,dy)+ \\ +R_2(x_0,y_0|dx,dy), \quad (3)$$

причем $R_2(x_0,y_0|dx,dy)=o(\rho)$, *где* $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

★ Заметим, что формула (6.2-3) означает существование предела некоторой функции двух переменных при $\rho\to 0$,

$$f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0|dx,dy)=o(\rho), \qquad (4)$$

$$\frac{f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0|dx,dy)}{\rho}=o(1), \qquad (5)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0|dx,dy)}{\rho}=0, \qquad (6)$$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M_0+dM)-f(M_0)-df(M_0|dM)}{\rho(M_0+dM,M_0)}=0, \qquad (7)$$

$$\lim_{\overrightarrow{r}\to\overrightarrow{r}_0}\frac{f(\overrightarrow{r}_0+d\overrightarrow{r})-f(\overrightarrow{r}_0)-df(\overrightarrow{r}_0|d\overrightarrow{r})}{|d\overrightarrow{r}|}=0, \qquad (8)$$

$$\lim_{\overrightarrow{r}\to\overrightarrow{r}_0}\frac{f(\overrightarrow{r}_0+d\overrightarrow{r})-P_1(\overrightarrow{r}_0|d\overrightarrow{r})}{|d\overrightarrow{r}|}=0, \qquad (9)$$

$$\lim_{\overrightarrow{r}\to\overrightarrow{r}_0}\frac{R_2(\overrightarrow{r}_0|d\overrightarrow{r})}{|d\overrightarrow{r}|}=0, \qquad (10)$$

★ Заметим, что из определения символа $o()$ следует, что функция $R_2(x_0,y_0|dx,dy)$ определена в пересечении области определения функция f и некоторой $\Omega(M_0)$.

★ Требования к функции f можно ослабить. В частности, достаточно, чтобы точка M_0 была предельной точкой области определения функции $f(x,y)$.

6.2.2. Формула Тейлора–Лагранжа первого порядка

$\mathbb{T}$**.6.2–2 (Тейлора–Лагранжа первого порядка).** *Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в некоторой выпуклой окрестности $D = \Omega(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда в этой окрестности точки M_0 верна формула Тейлора–Лагранжа,*

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0|dx,dy) + \\ +R_2(x_0,y_0|dx,dy), \quad (11)$$

причем $\forall M \in \Omega(M_0) \exists N(x_1,y_1)$:

$$R_2(x_0,y_0|dx,dy) = \frac{1}{2!}d^2 f(x_1,y_1|dx,dy), \quad (12)$$

причем $N(x_1,y_1)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$, $x = x_0 + dx$, $y = y_0 + dy$.

★ Требования к функции f можно ослабить. В частности, достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ была определена в так называемой звездной относительно точки M_0 области D_0. Это означает, что $\forall M \in D_0$, $\forall t \in (0;1)$ верно условие $N(x_1,y_1) \in D_0$, где $x_1 = x_0 + tdx$, $y_1 = y_0 + tdy$.

6.3. Формула Тейлора второго порядка

6.3.1. Формула Тейлора-Пеано второго порядка

$\mathbb{T}$**.6.3–1 (Тейлора-Пеано второго порядка).** *Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0*

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0|dx,dy) + \\ + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0|dx,dy) + R_3(x_0,y_0|dx,dy), \quad (13)$$

причем $R_3(x_0,y_0|dx,dy) = o(\rho^2)$.

★ (6.3-13) равносильно

$$\lim_{\overrightarrow{r}\to\overrightarrow{r}_0} \frac{f(\overrightarrow{r}_0 + d\overrightarrow{r}) - P_2(\overrightarrow{r}_0|d\overrightarrow{r})}{|d\overrightarrow{r}|^2} = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{\overrightarrow{r}\to\overrightarrow{r}_0} \frac{R_3(\overrightarrow{r}_0|d\overrightarrow{r})}{|d\overrightarrow{r}|^2} = 0, \quad (15)$$

6.3.2. Формула Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа

$\mathbb{T}$**.6.3–2.** *Тейлора–Лагранжа второго порядка*Пусть функция $f(x,y)$ трижды дифференцируема в некоторой выпуклой окрестности $\Omega(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда в этой окрестности точки M_0 верна формула Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, $\forall M(x,y) \in \Omega(M_0)\ \exists N(x_1,y_1) : N \in (M_0,M)$ (отрезку без концов) и

$$R_3(x_0,y_0|dx,dy) = \frac{1}{3!}d^3f(x_1,y_1|dx,dy).$$

6.4. Матрица Гессе

6.4.1. Матрица Гессе функции двух независимых переменных

Запишем второй дифференциал функции двух независимых переменных в векторно–матричной форме,

$$d^2f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

и назовем матрицей Гессе функциональную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Дифференциал векторной величины X обозначим dX. Операция транспонирования примененная к dX, дает вектор-строку $dX^T = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}$. Поэтому выражение второго дифференциала можно записать также в виде

$$d^2f = dX^T H dX.$$

6.4.2. Матрица Гессе функции трех независимых переменных

Для функции трех независимых переменных матрица Гессе имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Дифференциал n–го порядка определяется только для n раз дифференцируемой функциии, поэтому матрица Гессе всегда симметрическая.

$\mathbb{S}$.6.4–1. Пусть $f(x, y) = xy(3 - x - y)$. Тогда

$$f_x = 3y - 2xy - y^2, \;\; f_y = 3x - 2xy - x^2,$$

$$f_{xx} = -2y, \ \ f_{xy} = 3 - 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \ \ f_{yx} = 3 - 2y - 2x,$$
$$H = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Второй дифференциал функции $f(x, y)$ равен

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

В каждой заданной точке матрица Гессе есть числовая матрица, например,

$$H(1;1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $(1; 1)$ равен

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

6.4.3. Главные угловые миноры

Рассмотрим матрицу Гессе функции трех независимых переменных,

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Назовем главными угловыми минорами определители квадратных матриц,

$$A_1 = f_{xx}, \ \ A_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \ \ A_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

Аналогично определяются главные угловые миноры для функции n переменных.

$\mathbb{S}$.6.4–2. Например, если $f(x,y) = xy(3-x-y)$, то

$$H(x,y) = \left(\begin{array}{cc} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{array} \right),$$

$$H(1;1) = \left(\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{array} \right),$$

в этой точке $A_1 = -2$, $A_2 = 3$.

$\mathbb{S}$.6.4–3. Пусть

$$f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z),$$

тогда

$$f_x = yz(4-x-y-z) - xyz, \tag{16}$$

$$f_y = xz(4-x-y-z) - xyz, \tag{17}$$

$$f_z = xy(4-x-y-z) - xyz, \tag{18}$$

$$f_{xx} = -2yz, \ \ f_{yy} = -2xz, \ \ f_{zz} = -2xy, \tag{19}$$

$$f_{xy} = z(4-x-y-z) - yz - xz, \tag{20}$$

$$f_{xz} = y(4-x-y-z) - yz - xy, \tag{21}$$

$$f_{yz} = x(4-x-y-z) - xy - xz, \tag{22}$$

$$H = \left(\begin{array}{ccc} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array} \right),$$

$$H(1;1;1) = \left(\begin{array}{ccc} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{array} \right),$$

$$A_1 = -2, \ \ A_2 = 3, \ \ A_3 = -4.$$

6.4.4. Приближенные вычисления

$\mathbb{S}$.6.4–4. Пусть $f(x,y) = xy(3-x-y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x = 1{,}1$, $y = 0{,}9$. Тогда

$df = (3y - 2xy - y^2)dx + (3x - 2xy - x^2)dy$,

$df(1;1) = (3-2-1)dx + (3-2-1)dy = 0$,

$d^2f = (-2y)dx^2 + 2(3-2x-2y)dxdy + (-2x)dy^2$,

$d^2f(1;1|dx,dy) = (-2)dx^2 + 2(-1)dxdy + (-2)dy^2$,

$d^2f(1;1|0{,}1;-0{,}1) = (-2)0{,}01 + 2(-1)(-0{,}01) + (-2)0{,}01 = -0{,}02 + 0{,}02 - 0{,}02 = -0{,}02$.

Таким образом, если $f(x,y) = xy(3-x-y)$, то $f(1;1) = 1$, $f(1{,}1;0{,}9) = 1{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot (3 - 1{,}1 - 0{,}9) = 0{,}99$,

$f(1{,}1;0{,}9) \approx f(1;1) + df + \frac{1}{2}d^2f = 1 + 0 + \frac{1}{2}(-0,02)$.

$\mathbb{S}$.6.4–5. Пусть $f(x,y) = x^y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $x = 2{,}01$, $y = 3{,}02$. Тогда $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}02$,

$$df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy,$$

$$df(2;3) = 3 \cdot 2^2 dx + 2^3 \ln 2 dy,$$

$$df(2;3|0{,}01;0{,}02) = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 2^3 \ln 2 \cdot 0{,}02 =$$
$$= 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 2^3 \ln 2 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}12 + 0{,}111 = 0{,}231, \quad (23)$$

$$f(2{,}01;3{,}02) \approx f(2;3) + df \approx 8 + 0{,}231 = 8{,}231.$$

$$f(x,y) = 8{,}234\,782, \quad (24)$$

$$f(x_0,y_0)+df=8{,}230904, \tag{25}$$

$$f(x_0,y_0)+df+\frac{1}{2}d^2f=8{,}234\,736. \tag{26}$$

6.5. Теорема Тейлора для многочлена Тейлора произвольного порядка

6.5.1. Теорема Тейлора–Лагранжа

$\mathbb{T}$.6.5–1 (Тейлора–Лагранжа n–го порядка). *Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_m)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в выпуклой окрестности $\Omega(M_0)$ точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$. Тогда $\forall M\in\Omega(M_0)\exists N\in(M_0,M)$:*

$$f(M)=P_n(M,M_0)+R_{n+1}(M,M_0),$$

где

$$P_n(M,M_0)=f(M_0)+df|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2f\Big|_{M_0}+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf\Big|_{M_0},$$

$$R_{n+1}(M,M_0)=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f\Big|_N.$$

Имеется в виду $N\in(M_0,M)$ (интервал).

Иначе, $\exists\vartheta\in(0;1)$:

$$\begin{aligned}f(x_1,\ldots,x_m)&=f(x_1^0,\ldots,x_m^0)+\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f\Bigg|_{M_0}+\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{n+1} f\Bigg|_N,\end{aligned} \tag{27}$$

где $N = \big(x_1 + \theta(x_1 - x_1^0), \ldots, x_m + \theta(x_m - x_m^0)\big)$.

★ Значение многочлена Тейлора и его производных порядка от 1 до n включительно в точке M_0 совпадают со значениями функции $f(M_0)$ и ее производных в точке M_0.

□ Докажем, что

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f\Bigg|_{M_0} + \\ + \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\Bigg|_{N}. \quad (28)$$

Пусть $g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, $t \in [0;1]$,

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k g\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} g\big|_{t=\theta},$$

$$g(0) = f(x_0,y_0), \quad g(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

$$dg = f_x(x_0,y_0)x_t + f_y(x_0,y_0)y_t = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y,$$

$$d^2 g = (dt \cdot \frac{d}{dt})^2 g = (t \cdot \frac{d}{dt})^2 g,$$

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\ d^2 g\big|_{t=0,dt=1} = \\ = (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x,y)\Bigg|_{(x_0,y_0)}, \quad (29)$$

$$d^2 g\big|_{t=0,dt=1} = d^2 f\big|_{(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)}, \dots,$$

$$d^k g\Big|_{t=0,dt=1} = d^k f\Big|_{(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)},$$

$$d^{n+1} g\big|_{t=\vartheta,dt=1} = d^{n+1} f\big|_{(x_0+\vartheta\Delta x,y_0+\vartheta\Delta y,\Delta x,\Delta y)}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Тейлора-Лагранжа для функции $g(t)$ на отрезке $t \in [0;1]$. ■

6.5.2. Теорема Тейлора-Пеано

$\mathbb{T}$.6.5–2 (Тейлора–Пеано n–го порядка). *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_m)$ дифференцируема n раз в точке $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0)$. Тогда функцию $f(x_1,\dots,x_m)$ в некоторой окрестности точки M_0 можно представить в виде*

$$f(M) = P_n(M,M_0) + R_{n+1}(M,M_0),$$

где

$$P_n(M,M_0) = f(M_0) + df|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2 f\Big|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^n f\Big|_{M_0},$$

$$R_{n+1}(M,M_0) = o(\rho^n),$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \dots + (x_m - x_m^{(0)})^2}.$$

Иными словами,

$$f(x_1,\dots,x_m) = f(x_1^0,\dots,x_m^0) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f\Bigg|_{M_0} +$$

$$+ o(\rho^n). \quad (30)$$

6.5.3. Метод математической индукции.

При $n = 1$ формула Тейлора-Пеано имеет вид

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = \\ = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy + o(\rho^2). \quad (31)$$

Так как эта формула совпадает с определением дифференцируемой функции, то она верна (в некоторой окрестности точки M_0).

При $n = 2$ формула Тейлора-Пеано имеет вид

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + \\ + f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy + \\ + \frac{1}{2}(f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2) + o(\rho^2), \quad (32)$$

где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Предположим, что верна формула Тейлора-Пеано порядка $(n - 1)$. Докажем, что

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f \right\} \Bigg|_{M_0} + o(\rho^n). \quad (33)$$

Обозначим $dx = \Delta x = x - x_0, dy = \Delta y = y - y_0$,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{k}C_k^q(dx)^q(dy)^{k-q}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\frac{\partial^{k-q}}{\partial y^{k-q}}f\Bigg|_{M_0}+o(\rho^n), \quad (34)$$

Обозначим

$$P=Q_0+\sum_{k=1}^{n}Q_k,$$

$$Q_0=f(x_0,y_0),$$

$$Q_k=\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{k}C_k^q(dx)^q(dy)^{k-q}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\frac{\partial^{k-q}}{\partial y^{k-q}}f\Bigg|_{M_0}.$$

Прямая проверка показывает, что

$P(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)$,

$P_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$, $P_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$,

Докажем, что при $s<k$ верно равенство

$$(Q_k)_{x^jy^{s-j}}\big|_{M_0}=0.$$

Докажем, что при $s=k$ верно равенство $(Q_k)_{x^jy^{k-j}}\big|_{M_0}=(f(x,y))_{x^jy^{k-j}}\big|_{M_0}$.

Докажем, что при $s>k$ верно равенство

$$(Q_k)_{x^jy^{s-j}}\big|_{M_0}=0.$$

Поэтому

$$(P(x,y))_{x^jy^{k-j}}\big|_{M_0}=(f(x,y))_{x^jy^{k-j}}\big|_{M_0}$$

при всех $k\in\{0,...,n\}$, $j\in\{0,...,k\}$.

$$R(x,y)=f(x,y)-P(x,y),$$

$$R(M_0) = f(M_0) - P(M_0) = 0,$$

$$R_x(M_0) = f_x(M_0) - P_x(M_0) = 0,$$

$$R_y(M_0) = f_y(M_0) - P_y(M_0) = 0,$$

$$R_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = (f - P)_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = 0$$

при всех $k \in \{0, ..., n\}$, $j \in \{0, ..., k\}$.

$$R(x, y) = R(x_0, y_0) + R_x(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy)dx+ \\ + R_y(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy)dy, \quad (35)$$

Но

$$(R_x)_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = (f_x - P_x)_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = 0,$$

$$(R_y)_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = (f_y - P_y)_{x^j y^{k-j}}\big|_{M_0} = 0$$

при всех $k \in \{0, ..., n-1\}$, $j \in \{0, ..., k\}$, поэтому

$$R_x(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy) = o(\rho^{n-1}),$$

$$R_y(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy) = o(\rho^{n-1}),$$

Но к тому же $|dx| \le \rho$, $|dy| \le \rho$,

$$R(x, y) = o(\rho^{n-1})dx + o(\rho^{n-1})dy = o(\rho^n)$$

6.5.4. Стандартные обозначения при записи формулы Тейлора

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy+$$

$$+\frac{1}{2}(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2)+o(\rho^2), \quad (36)$$

$$f(x_0+dx,y_0+dy,z_0+dz)=f(x_0,y_0,z_0)+$$
$$+f_x(x_0,y_0,z_0)dx+f_y(x_0,y_0,z_0)dy+f_z(x_0,y_0,z_0)dz+$$
$$+\frac{1}{2}(f_{xx}dx^2+f_{yy}dy^2+f_{zz}dz^2)+$$
$$+\frac{1}{2}\{2f_{xy}dxdy+2f_{xz}dxdz+2f_{yz}dydz\}+o(\rho^2), \quad (37)$$

$$f(x+dx,y+dy)=f(x,y)+\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}+o(\rho^2), \quad (38)$$

II-7. Локальный экстремум

7.1. Необходимые условия локального экстремума

7.1.1. Понятие: локальный экстремум

Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки M_0 (это условие далее не будет оговариваться).

$\mathbb{D}$.7.1–1 (точка локального минимума). *Точка M_0 называется точкой локального минимума функции $f(M)$, если*

$$\exists\Omega(M_0):\forall M\in\Omega(M_0): M\neq M_0 \text{ верно } f(M)>f(M_0).$$

Точка M_0 называется точкой локального максимума функции $f(M)$, если

$$\exists\Omega(M_0):\forall M\in\Omega(M_0): M\neq M_0 \text{ верно } f(M)<f(M_0).$$

$\mathbb{D}$**.7.1–2 (отрицание локального минимума).** *Точка* M_0 *не является точкой локального минимума (максимума) функции* $f(M)$*, если*

$$\forall\Omega(M_0)\ \exists M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0 \text{ и } f(M) \leq f(M_0)$$

или соответственно

$$\forall\Omega(M_0)\ \exists M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0 \text{ и } f(M) \geq f(M_0).$$

$\mathbb{D}$**.7.1–3 (точкой нестрогого локального минимума).** *Точка* M_0 *называется точкой нестрогого локального минимума функции* $f(M)$*, если*

$$\exists\Omega(M_0) : \forall M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0 \text{ и } f(M) \geq f(M_0).$$

7.1.2. Теорема Ферма

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0.

$\mathbb{T}$**.7.1–1 (Ферма, необходимые условия экстремума первого порядка дифференцируемой функции).**

1) Пусть функция $f(x, y, z)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда* $df(M_0) = 0$*, или, что то же самое,*

$$\forall dx, dy, dz \begin{pmatrix} f_x(M_0) & f_y(M_0) & f_z(M_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0,$$

или, что то же самое,

$$f_x(M_0) = 0 \wedge f_y(M_0) = 0 \wedge f_z(M_0) = 0.$$

2) Пусть функция $f(x, y, z)$ имеет частную производную f_x в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $f_x(M_0) = 0$.
Аналогичные условия верны для всех остальных переменных.

3) Пусть функция $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет производную по направлению $\vec{l}$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = 0$.

★ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ для $\vec{l} = (1; 0; 0)$ (имеется в виду функция трех переменных).

$\mathbb{T}$.7.1–2. *Если найдется такое направление $\vec{l}$, что $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) \neq 0$, то $f(x, y, z)$ в $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не имеет локального экстремума.*

7.2. Достаточные условия локального экстремума

7.2.1. Квадратичные формы

1. Определение: квадратичная форма

$\mathbb{D}$.7.2–1 (квадратичная форма). *Квадратичной формой называется функция*

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j.$$

Всегда предполагаем, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Векторно-матричная запись квадратичной формы размерности 3:

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{D}$.7.2–2 (положительно определенная квадратичная форма). *Квадратичная форма называется положительно определенной, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$ при всех значениях $x_1, \ldots, x_m$, кроме случая одновременного равенства $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$.*

★ Любая квадратичная форма в точке $O(0, 0, \ldots, 0)$ равна нулю.

$\mathbb{D}$.7.2–3 (отрицательно определенная). *Квадратичная форма называется отрицательно определенной, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0$ при всех значениях $x_1, \ldots, x_m$, кроме одновременного равенства $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$.*

Если квадратичная форма является положительно определенной или отрицательно определенной, то она называется знакоопределенной.

$\mathbb{D}$.7.2–4 (знакопеременная). *Квадратичная форма называется знакопеременной, если*

$$\exists \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} : Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0, \qquad (1)$$

$$\exists \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} : Q(y_1, y_2, \ldots, y_m) > 0. \qquad (2)$$

7.2.2. Критерий Сильвестра

Напомним, что матрица A квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m +$$

$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2m}x_2x_m + \ldots + a_{mm}x_mx_m \quad (3)$$

равна

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Угловыми минорами называются определители вида:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.,}$$

$$A_m = \det A.$$

$\mathbb{T}$.7.2–1 (Критерий Сильвестра). *1) Для того чтобы квадратичная форма Q была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были одновременно верны равенства*

$$A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \ldots,\ A_n > 0.$$

2) Для того чтобы квадратичная форма Q была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались в следующем порядке:

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ \ldots.$$

$\mathbb{T}$.7.2–2 (достаточные условия знакопеременной формы). *Для того, чтобы квадратичная форма Q была знакопеременной, достаточно выполнения неравенства*

$$A_2 < 0.$$

★ Можно привести пример знакопеременной квадратичной формы, для которой $A_2 = 0$, или $A_2 > 0$. Однако, в этом случае можно так переименовать координаты, что после переименования будет выполнено неравенство $A_2 < 0$.

7.2.3. Достаточные условия

$\mathbb{T}$.7.2–3 (достаточные условия локального экстремума второго порядка функции трех переменных).

1) Пусть функция $f(x, y, z)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, верно равенство $df(M_0) = 0$, и в этой точке выполнены условия положительной определенности квадратичной формы

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

(условия Сильвестра), а именно,

$$A_1 > 0,\ A_2 >,\ A_3 > 0,$$

где

$$A_1 = f_{xx},\ \ A_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix},\ \ A_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

Тогда функция $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет локальный минимум.

2) Если в точке M_0 выполнены условия отрицательной определенности квадратичной формы $d^2 f$, а именно,

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,$$

то $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет локальный минимум.

★ В данном случае указанные условия знакоопредеденности квадратичной формы являются необходимыми и достаточными.

$\mathbb{T}$.7.2–4 (достаточные условия отсутствия локального экстремума функции функции трех переменных). *Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0.*

(1) *Если квадратичная форма второго дифференциала функции $f(M)$ в точке M_0 является знакопеременной, то функция $f(M)$ в точке M_0 не имеет локального экстремума.*

(2) *Если $A_2 < 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то в этой точке локального экстремума нет.*

□ Докажем теорему о достаточных условия минимума для функции трех переменных. Запишем формулу Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0, dM) + \frac{1}{2}d^2f(M_0, dM) + \rho^2 o(1),$$

где $\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Приращение функции f равно

$$\Delta f(M_0, M) = df(M_0, dM) + \frac{1}{2}d^2f(M_0, dM) + o(\rho^2).$$

Так как первый дифференциал в точке M_0 равен нулю, то

$$\begin{aligned}\Delta f(M_0, M) = \frac{1}{2}d^2f(M_0, dM) + o(\rho^2) = \\ = \frac{1}{2}\rho^2\Big(\frac{d^2f(M_0, dM)}{\rho^2} + o(1)\Big) = \\ = \frac{1}{2}\rho^2\Big(\frac{Q(dx, dy, dz)}{\rho^2} + \alpha(x, y, z)\Big),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha(x, y, z) = o(1)$ при $\rho \to +0$, причем Q есть квадратичная форма

$$Q(dx, dy, dz) = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

матрица которой совпадает с матрицей Гессе, найденной в точке M_0. Заметим, что

$$\frac{Q}{\rho^2} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

где $h_1 = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$, $h_2 = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$, $h_3 = \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$, причем $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$. Обозначим K сферу $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$ в пространстве (h_1, h_2, h_3). Тогда K замкнутое ограниченное множество. На множестве K функция

$$\frac{Q(dx, dy, dz)}{\rho^2} = P(h_1, h_2, h_3)$$

непрерывна, поэтому в соответствии с первой теоремой Вейерштрасса функция $P(h_1, h_2, h_3)$ ограничена на Q. Следовательно, $\exists m_1, m_2$:

$$P(h_1, h_2, h_3)|_K \in [m_1, m_2] \, .$$

Из условия положительной определенности Q следует, что непрерывная функция P принимает на K только положительные значения. Теперь из второй теоремы Вейерштрасса следует, что $m_1 > 0$. Таким образом, на K верно неравенство

$$P(h_1, h_2, h_3)|_K \geq m_1 > 0.$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{m_1}{2}$. Теперь заметим, что так как α есть бесконечно малая функция, то $\exists \delta > 0 : \forall dx, dy, dz : \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} < \delta$ верно неравенство

$$|\alpha(x,y,z)| < \frac{m_1}{2},$$

$$\frac{m_1}{2} < \frac{Q(dx,dy,dz)}{\rho^2} + \alpha(x,y,z) < m_2 + \frac{m_1}{2}.$$

■

□ Докажем теорему о достаточных отсутствиях экстремума.

$$\exists h' : P(h_1', h_2', h_3')\big|_K = -m_3 < 0,$$

$$\exists h'' : P(h_1'', h_2'', h_3'')\big|_K = m_4 > 0.$$

Пусть $\varepsilon = \dfrac{\min(m_3, m_4)}{2}$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall dx, dy, dz : \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} < \delta$$

верно неравенство

$$|\alpha(x,y,z)| < \varepsilon,$$

$$\frac{Q(dx', dy', dz')}{\rho^2} + \alpha(x,y,z) < -\frac{m_3}{2} < 0,$$

$$0 < \frac{m_4}{2} < \frac{Q(dx'', dy'', dz'')}{\rho^2} + \alpha(x,y,z),$$

■

7.3. Необходимые условия старших порядков

7.3.1. Необходимые условия второго порядка

$\mathbb{T}$.7.3–1 (необходимые условия локального экстремума второго порядка). *Пусть функция $f(x, y, z)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет в этой точке локальный минимум. Тогда $df(M_0) = 0$, и в этой точке квадратичная форма d^2f является или положительно определенной, или полуопределенной (неотрицательной). В последнем случае для главных угловых миноров первого и второго порядка верны неравенства $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$.*

7.3.2. Необходимые условия третьего порядка

$\mathbb{T}$.7.3–2 (необходимые условия локального экстремума третьего порядка). *1) Пусть функция $f(x, y, z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и в этой точке имеет локальный экстремум. Если к тому же $d^2f(M_0) = 0$, то верно неравенство $d^3f(M_0) = 0$.*
2) Пусть функция $f(x, y, z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $df(M_0) = 0$, $d^2f(M_0) = 0$, $d^3f(M_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x, y, z)$ в этой точке не имеет локального экстремума.

7.3.3. Сравнение с функциями одной переменной

1. Определение

Напомним **$\mathbb{D}$.7.3–1.** *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется точкой локального минимума (локального максимума) функции $f(x)$, если*
$\exists\Omega(x_0) : \forall x \in \Omega(M_0) : x \neq x_0$ *верно неравенство*

$$f(x) \geq f(x_0)$$

или соответственно

$\exists\Omega(x_0) : \forall x \in \Omega(x_0) : x \neq x_0$ *верно*

$$f(x) \leq f(x_0).$$

2. Теорема Ферма

$\mathbb{T}$.7.3–3 (Ферма, необходимые условия экстремума первого порядка дифференцируемой функции). *1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $df(x_0) = 0$, или, что то же самое, $\forall dx$ верно $f'(x_0)dx = 0$, или, что то же самое, $f'(x_0) = 0$.*

3. Достаточные условия

$\mathbb{T}$.7.3–4 (достаточные условия локального экстремума второго порядка). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x_0$, верно равенство $f_x(x_0) = 0$, и в этой точке $f_{xx} > 0$, то $f(x)$ в точке $M_0(x_0)$ имеет локальный минимум. Если $f_{xx}(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет локальный максимум.*

4. Необходимые условия второго порядка

$\mathbb{T}$.7.3–5 (необходимые условия локального экстремума второго порядка). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x_0$ и имеет в этой точке локальный минимум. Тогда*

$$f_x(x_0) = 0 \text{ и } f_{xx}(x_0) \geq 0.$$

Нарушение любого из этих условий влечет отсутствие локального минимума. Аналогично для максимума.

5. Необходимые условия третьего порядка

$\mathbb{T}$.7.3–6 (необходимые условия локального экстремума третьего порядка). (1) *Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке $x = x_0$, $f(x)$ в этой точке имеет локальный экстремум, и $d^2f(M_0) = 0$. Тогда $d^3f(M_0) = 0$.*

(2) *Пусть функция $f(x, y, z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $df(M_0) = 0$, $d^2f(M_0) = 0$, $d^3f(M_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет локального экстремума.*

7.3.4. Примеры

$\mathbb{S}$.7.3–1. Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x + y)^2.$$

Решение. ◄ Заданная функция дифференцируема на R^2, поэтому необходимые условия экстремума даются теоремой Ферма и имеют вид $\left\{\begin{array}{l} f_x = 0, \\ f_y = 0. \end{array}\right.$ Запишем необходимые условия экстремума (условия Ферма): $\left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 6(x + y) = 0, \\ 3y^2 - 6(x + y) = 0, \end{array}\right.$ из этого следует $x^2 = y^2$, равносильно $x = \pm y$. Если $x + y = 0$, то $x = y = 0$. Если $x = y$, то или $x = y = 0$, или $x = y = 4$. Таким образом, имеется ровно две точки возможного экстремума. Второй дифференциал функции $f(x, y)$ равен $d^2f = (6x - 6)dx^2 - 12dxdy + (6y - 6)dy^2$, матрица Гессе
$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & -6 \\ -6 & 6y - 6 \end{pmatrix}$.
Исследуем сначала наличие или отсутствие локального экстремума в точке $x = y = 0$. В этой точке

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix},$$

критерий Сильвестра не дает ответа о знакоопределенности квадратичной формы второго дифференциала. Заметим, что

$$f(x,y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y).$$

Построим семейство линий нулевого уровня функции $f(x,y)$ в окрестеости точки $(0;0)$. Уравнение $f(x,y) = f(0,0)$ равносильно уравнению $f(x,y) = 0$ и равносильно совокупности уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y = 0, \end{array} \right.$$

первое из которых определяет прямую $x + y = 0$, а второе определяет кривую второго порядка. Стандартный анализ показывает, что эта кривая второго порядка есть эллипс. Очевидно, что этот эллипс проходит через точку $(0;0)$. Легко показать, что касательная к этому эллипсу в точке $(0;0)$ совпадает с прямой $x + y = 0$. Поэтому в некоторой шаровой окрестности $\mathcal{K}\big((0;0),\rho\big)$ точки $(0;0)$ линии нулевого уровня функции $f(x,y)$ разбивают эту шаровую окрестность на четыре области, в двух из которых $f(x,y) > 0$, в остальных двух $f(x,y) < 0$. Пусть $\rho > \varepsilon > 0$. Пересечение каждой из четырех указанных областей и круга $\mathcal{K}\big((0;0),\varepsilon\big)$ непусто. Поэтому в любой окрестности точки $(0;0)$ найдутся точки, в которых $f(x,y) > f(0,0)$ и найдутся точки, в которых $f(x,y) < f(0,0)$. Следовательно, точка $(0;0)$ не является точкой локального экстремума функции $f(x,y)$.

Можно примменить другой метод. Рассмотрим $f(x,y)$ как функцию от x и от параметра y. Тогда эта функция при всех y имеет корень $x_1 = -y$, и еще два корня

$x_{2,3} = \frac{1}{2}\big(y + 3 \pm \sqrt{9 + 18y - 4y^2}\big) = \frac{1}{2}\big(y + 3 \pm \big(3 + 3y - \frac{13}{6}y^2 + o(y^2)\big)\big).$

один из корней

$x_2 = \frac{1}{2}\big(y - 3\big(3 + 3y - \frac{13}{6}y^2 + o(y^2)\big)\big) = \frac{1}{2}\big(y + 3 - 3 - 3y + \frac{13}{6}y^2 + o(y^2)\big) =$
$= \frac{1}{2}\big(-2y + \frac{13}{6}y^2 + o(y^2)\big) = -y + \frac{13}{12}y^2 + o(y^2).$

Таким образом, найдется окрестность точки $x = y = 0$, в которой при всех $y \neq 0$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет два корня, а функция $f(x, y)$ имеет две точки перемены знака. Это означает, что в сколь угодно малой шаровой окрестности точки $x = y = 0$ найдутся точки, в которых $f(x, y) > 0$ и найдутся точки, в которых $f(x, y) < 0$. Экстремума нет.

Задание 1. *Исследуйте наличие локального экстремума указанной функции в точке* $x = y = 4$.

▶

Задание 2. *Докажите, что в некоторой океcтности точки* $(0; 0)$ *решение уравнения* $x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y = 0$ *можно представить в виде* $y = -x + Cx^2 + o(x^2)$, *где* $C \neq 0$. Из этого также будет следовать отсутствие локального экстремума в точке $(0; 0)$.

II-8. Неявные функции

8.1. Понятие неявной функции

8.1.1. Одно уравнение с двумя переменными

Одно уравнение с двумя переменными $u(x, y) = 0$ определяет, вообще говоря, одну или несколько функций вида $y = f(x)$.

$\mathbb{S}$**.8.1–1.** Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет окружность на плоскости, которую можно рассматривать как объединение графиков функций $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$\mathbb{S}$**.8.1–2.** Уравнение $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ определяет на плоскости кривую, которую называют декартов лист. Это уравнение, рассматриваемое как уравнение относительно y с параметром x, имеет одно, два или три решения в зависимости от значения $x \in (-\infty, +\infty)$.

$\mathbb{S}$**.8.1–3.** Уравнение $xy = 1$ определяет гиперболу, которую можно рассматривать как объединение графиков двух функций, $y = \frac{1}{x}$, $-\infty < x < 0$, и $y = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$.

8.1.2. Одно уравнение с тремя переменными

Неявную функцию $z = f(x, y)$ можно задать уравнением вида $u(x, y, z) = 0$.

$\mathbb{S}$**.8.1–4.** Уравнение $x^2+y^2+z^2 = 1$ определяет сферу в пространстве (x, y, z). Сферу можно рассматривать как объединение графиков двух функций двух переменных, каждая из которых определена на круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ на плоскости (x, y).

$\mathbb{S}$**.8.1–5.** Уравнение $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 8\sqrt{2}\,xyz = 0$ в пространстве (x, y, z) определяет поверхность, которую можно рассматривать как объединение графиков нескольких функций вида $z = f_j(x, y)$. Более детально это уравнение рассмотрим позднее.

8.1.3. Два уравнения с тремя переменными

Неявную функцию можно задать системой вида

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$\mathbb{S}$**.8.1–6.** Система $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ определяет окружность в пространстве (x, y, z).

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

8.1.4. Два уравнения с четырьмя переменными

$\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2, \\ \dfrac{y}{x}=tg\phi, \end{cases}$ преобразование координат.

8.2. Определение неявной функции

$\mathbb{D}$**.8.2–1 (неявная функция $F(x,y)=0$).** *Пусть функция $F(x,y)$ определена в области $D=\{x\in(a,b)\bigcap y\in(c,d)\}$ и $\forall x\in(a,b)$ уравнение*

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

имеет единственный корень $y\in(c,d)$. Тогда говорят, что уравнение (8.2-1) определяет в области D неявную функцию $y=f(x)$, которая определена на множестве $x\in(a,b)$.

$\mathbb{S}$**.8.2–1.** $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y\geq 0, \end{cases}$ полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$.

$\mathbb{D}$**.8.2–2 (неявная функция $F(x,y,z)=0$).** *Пусть D область на плоскости, функция $F(x,y,z)$ определена в области $G=\{(x,y)\in D\bigcap z\in\mathcal{Z}\}$, $\mathcal{Z}$ промежуток вещественной оси, и $\forall(x,y)\in D$ уравнение*

$$F(x,y,z)=0 \tag{2}$$

имеет единственный корень $z\in\mathcal{Z}$. Тогда говорят, что уравнение (8.2-2) определяет в области G неявную функцию $z=f(x,y)$, причем функция $f(x,y)$ определена на множестве $(x,y)\in D$.

$\mathbb{S}$**.8.2–2.** Система $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z\geq 0, \end{cases}$, определяет полусферу $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\leq 1\right\}$.

8.3. Теорема о неявной функции $F(x,y)=0$

8.3.1. Формулировка и доказательство

$\mathbb{T}$.8.3–1 (о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением с двумя переменными). *Пусть функция $F(x, y)$ определена в некоторой окрестности $G = \Omega(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$, и*

(1) $F(M_0) = 0$,

(2) $F(x, y)$ *непрерывна в* G,

(3) F_y *существует в* G *и непрерывна в* M_0,

(4) $F_y(M_0) \neq 0$.

Тогда найдется окрестность точки M_0, в которой определена единственная функция $y = f(x)$, для которой $F(x, f(x)) = 0$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке M_0.

□ Докажем существование. Пусть $F_y(M_0) > 0$ и F_y непрерывна в точке M_0. Тогда

(1) $\exists \Omega_0(M_0) = \{|x - x_0| < \delta_0 \bigcap |y - y_0| < \delta_0\}$,
внутри которой $F_y(x, y) > 0$.

(2) $F(x_0, y)$ возрастает (как функция y) на множестве $y \in (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$.

(3) Найдется $y_1 = y_0 - \delta_3$, $\delta_3 > 0$, $M_1(x_0, y_1) : F(M_1) < 0$,

(4) Найдется $y_2 = y_0 + \delta_3$, $M_2(x_0, y_2) : F(M_2) > 0$,

(5) Найдется $\Omega_1(M_1) = \{|x - x_0| < \delta_1 \bigcap |y - y_1| < \delta_1\}$: $F(M) < 0$ для всех $M \in \Omega_1(M_1)$,

(6) Найдется $\Omega_2(M_2) = \{|x - x_0| < \delta_2 \bigcap |y - y_2| < \delta_2\} : F(M) > 0$ для всех $M \in \Omega_2(M_2)$,

(7) Найдется $\delta_4 > 0$: на множестве

$\mathrm{P}_0(M_0) = \{|x-x_0| \le \delta \bigcap |y-x_0| \le \delta_4\}$ имеем

$\forall M \in \mathrm{P}_0(M_0)$ верно $F_y(M) > 0$, для всех $x \in \{|x_0 - x| \le \delta\}$ верно

$F(x,y)$ на множестве $y \in (y_0 - \delta_4, y_0 + \delta_4)$,

$F(x, y_0 - \delta_4) < 0$, $F(x, y_0 + \delta_4) > 0$, поэтому

$\exists y \in (y_0 - \delta_4, y_0 + \delta_4) : F(x,y) = 0$. Тем самым построена функция, задающая единственное y для каждого x в указанной окрестности точки x_0 ■

□ Докажем непрерывность. ■

$\mathbb{T}$.8.3–2 (о дифференцировании неявной функции, определяемой одним уравнением с двумя переменными). *Пусть выполнены условия теоремы (8.3–1) и*

5) $F(x,y)$ дифференцируема в M_0.

Тогда функция $f(x,y)$, определенная уравнением $u(x,y) = 0$,, дифференцируема в точке M_0, причем

$$y_x = -\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)}, \quad dy = -\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)}dx.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $F_x dx + F_y dy = 0$, или $dF = 0$.

□ Докажем дифференцируемость.

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = F(x_0,y_0)+F_x\Delta x+F_y\Delta y+\alpha(M)\Delta x+\beta(M)\Delta y,$$

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0,$$

$$F_x\Delta x + F_y\Delta y + \alpha(M)\Delta x + \beta(M)\Delta y = 0,$$

$$(F_x + \alpha)\Delta x + (F_y + \beta)\Delta y = 0.$$

Найдется такая прямоугольная окрестность

$$\Omega_0(M_0) = \Big\{|x - x_0| < \delta_0 \bigcap |y - x_0| < \delta_0\Big\}$$

точки M_0, что в этой окрестности

$$F_y(M_0) + \beta(M) > 0,$$

поэтому в этой окрестности

$$\Delta y = -\frac{F_x(M_0) + \alpha(M)}{F_y(M_0) + \beta(M)}\Delta x.$$

Используя теоремы о пределах суммы и частного от деления двух функций, приведем это выражение к виду

$$\Delta y = \Big(-\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)} + \gamma(M)\Big)\Delta x,$$

где $\gamma(M)$ есть б.м. функция при $M \to M_0$. Это условие равносильно дифференцируемости $y = f(x)$ в точке x_0. ■

8.3.2. Вычисление дифференциала

Рассмотрим неявную функцию $y = f(x)$, определенную уравнением $F(x, y) = 0$. Так как на множестве $\{a < x < b,\, y = f(x)\}$ верно равенство $F(x, y) = 0$, то на этом множестве $F_x dx + u_y dy = 0$, $F_y dy = -F_x dx$, поэтому

$$dy = -\frac{F_x}{F_y}dx, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

8.3.3. Вычисление второго дифференциала

Так как на множестве $\{a < x < b,\, y = f(x)\}$ верно ревенство $F_x dx + F_y dy = 0$, то на этом множестве $d(F_x dx + F_y dy) = 0$, $d(F_x dx) + d(F_y dy) = 0$,

$$d(F_x)dx + F_x d(dx) + d(F_y)dy + F_y d(dy) = 0,$$

$$d(F_x)dx + F_x d^2x + d(F_y)dy + F_y d^2y = 0,$$

$$d(F_x) = F_{xx}dx + F_{xy}dy, \;\; d(F_y) = F_{yx}dx + F_{yy}dy,$$

$$(F_{xx}dx + F_{xy}dy)dx + F_x d^2x + (F_{yx}dx + F_{yy}dy)dy + F_y d^2y = 0.$$

Если x – независимая переменная, то $d^2x = 0$, и тогда

$$F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2 + F_y d^2y = 0,$$

$$d^2y = -\frac{F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2}{F_y},$$

причем $dy = -\dfrac{F_x}{F_y}dx$.

$$d^2y = -\frac{F_{xx}dx^2 - 2F_{xy}dx \cdot \frac{F_x}{F_y}dx + F_{yy}(-\frac{F_x}{F_y}dx)^2}{F_y},$$

$$d^2y = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_y)^3}dx^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_y)^3}.$$

8.3.4. Случай точки возможного экстремума

Пусть M_0 есть точка возможного экстремума дифференцируемой неявной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, так что $dy = 0$, т.е. $-\dfrac{F_x}{F_y}dx = 0$, т.е. $F_x = 0$. Необходимое условие экстремума неявной функции имеет вид: $F_x = 0$.

Тогда $d(F_x dx + F_y dy) = 0$,

$$(F_{xx}dx + F_{xy}dy)dx + F_x d^2x + (F_{yx}dx + F_{yy}dy)dy + F_y d^2y = 0,$$

$$d^2x = 0, dy = 0,$$

поэтому в точке возможного экстремума

$$F_{xx}dx^2 + F_y d^2y = 0,\ \ d^2y = -\frac{u_{xx}}{u_y}dx^2,$$

поэтому достаточное условие локального экстремума имеет вид

$dy = 0$, $-\dfrac{u_{xx}}{u_y}dx^2 > 0$ (минимум),

$dy = 0$, $-\dfrac{u_{xx}}{u_y}dx^2 < 0$ (максимум).

8.3.5. Примеры неявных функций

1. Примеры неявной функции $u(x,y)=0$**.**

$\mathbb{S}$.8.3–1. $x^2+y^2=1$, $y>0$, $2xdx+2ydy=0$, $xdx+ydy=0$, $dy=-\frac{x}{y}dx$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

$$d(xdx+ydy)=0, d(xdx)+d(ydy)=0$$

$$dxdx + xd^2x + dydy + yd^2y = 0,$$

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y = 0,$$

$$dx^2 + (-\frac{x}{y}dx)^2 + yd^2y = 0,$$

$$d^2y = -\frac{1+(-\frac{x}{y})^2}{y}dx^2 = -\frac{y^2+x^2}{y^3}dx^2,$$

Точка возможного экстремума: $x=0$, $y=1$ (есть еще одна), $d^2y = -dx^2$, локальный максимум.

$\mathbb{S}$.8.3–2. $xy=1$,

$$ydx + xdy = 0, dy = -\frac{y}{x}dx, \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

$$d(ydx+xdy)=0, dydx + yd^2x + dxdy + xd^2y = 0,$$

$$2dxdy + xd^2y = 0, 2dx(-\frac{y}{x}dx) + xd^2y = 0,$$

$d^2y = 2\frac{y}{x^2}dx^2$, локального экстремума нет.

$\mathbb{S}$**.8.3–3.** $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $x > 0 \bigcap y > 0$,

1) Первый дифференциал.

$$3x^2dx + 3y^2dy - 3ydx - 3xdy = 0,$$

$$x^2dx + y^2dy - ydx - xdy = 0,$$

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0,$$

$$dy = -\frac{(x^2 - y)}{(y^2 - x)}dx, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 - y)}{(y^2 - x)},$$

2) Необходимое условие экстремума

$$\frac{dy}{dx} = 0, x^2 - y = 0, y = x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ y = x^2, \end{array} \right. \quad x^3 + x^6 - 3x^3 = 0,$$

$$x^3(x^3 - 2) = 0, \quad x = 2^{\frac{1}{3}}, \quad y = 2^{\frac{2}{3}}.$$

3) Достаточные условия экстремума,

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0,$$

$$d((x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy) = 0,$$

$$d(x^2 - y)dx + (x^2 - y)d^2x + d(y^2 - x)dy + (y^2 - x)d^2y = 0,$$

Так как $x^2 - y = 0$ и $d^2x = 0$, то

$$d(x^2 - y)dx + (y^2 - x)d^2y = 0,$$

$$(2xdx - dy)dx + (y^2 - x)d^2y = 0,$$

$$(2xdx)dx + (y^2 - x)d^2y = 0,$$
$$2xdx^2 + (y^2 - x)d^2y = 0,$$

$$d^2y = -\frac{2xdx^2}{(y^2 - x)} = -\frac{2x}{y^2 - x}dx^2,$$

$$d^2y = -\frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}dx^2 = -\frac{2}{2-1}dx^2 = -2dx^2 < 0,$$

это локальный максимум.

$\mathbb{S}$.8.3–4. Исследуйте точки локального экстремума функции $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y = 0$.

(1) Первый дифференциал,

$$(x^2 + y^2)^2 - bx^2y = 0,$$
$$u(x, y) = 0,$$
$$u_x dx + u_y dy = 0,$$
$$u_x = 4x(x^2 + y^2) - 2bxy, \;\; u_y = 4y(x^2 + y^2) - bx^2,$$
$$2(x^2 + y^2)2xdx + 2(x^2 + y^2)2ydy - 2bxydx - bx^2dy = 0,$$
$$dx(2(x^2 + y^2)2x - 2bxy) + dy(2(x^2 + y^2)2y - bx^2) = 0,$$
$$dx(2x(2x^2 + 2y^2 - by)) + dy(4y(x^2 + y^2) - bx^2) = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(2x^2 + 2y^2 - by)}{4y(x^2 + y^2) - bx^2}.$$

(2) Необходимое условие экстремума,

$$4x(x^2 + y^2) - 2bxy = 0,$$
$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) - by = 0, \\ (x^2 + y^2)^2 - bx^2y = 0, \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) - by = 0, \\ \frac{b^2y^2}{4} - bx^2y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ by-4x^2=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ by-4x^2=0, \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)-4x^2=0, 2x^2+2y^2-4x^2=0,$$

$$y^2-x^2=0, y=x, 4x^2-bx^3=0,$$

$$4x^4-4x^3=0, 4x-4=0, y=x=1,$$

А теперь поясним технику проверки достаточных условий экстремума,

$$u_x dx+u_y dy=0, d(u_x dx+u_y dy)=0,$$

$$d(u_x)dx+d(u_y)dy+u_y d^2y=0,$$

Только в точке возможного экстремума

$$d(u_x)dx+u_y d^2y=0,$$
$$(u_{xx}dx+u_{xy}dy)dx+u_y d^2y=0,$$
$$u_{xx}dx^2+u_y d^2y=0, d^2y=-\frac{u_{xx}}{u_y}dx^2$$
$$u_x=4x(x^2+y^2)-2bxy,$$
$$u_{xx}=12x^2+4y^2-2by=8,\ \ u_y=4y(x^2+y^2)-bx^2=4,$$

$d^2y=-2dx^2$, $d^2y<0$, максимум

8.4. Неявные функции вида $F(x,y,z)=0$

8.4.1. Теорема о неявной функции $F(x,y,z)=0$

$\mathbb{T}$.8.4–1 (о неявной функции, определенной уравнением $F(x,y,z)=0$). *Пусть функция $F(M)$, $M=(x,y,z)$, определена в некоторой окрестности $D=\Omega(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$,*

(1) $F(M_0)=0$,

(2) $F(M)$ *непрерывна в* D,

(3) F_z *существует в* D *и непрерывна в* M_0,

(4) $F_z(M_0)\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *определена единственная функция* $z=f(x,y)$, *для которой* $F\big(x,y,f(x,y)\big)=0$. *Если к тому же*

(5) F *дифференцируема в* M_0,

то $f(x,y)$ *дифференцируема в* $N_0=(x_0,y_0)$, *причем*

$$dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy,\ \ z_x=-\frac{F_x}{F_z},\ \ z_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

★ Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0,$$

или $dF=0$.

☐ **1.** Докажем существование. Пусть $F_z(M_0)>0$ и непрерывна в точке M_0. Тогда

1) $\exists\Omega_0(M_0)=\{|x-x_0|<\delta_0\bigcap|y-y_0|<\delta_0\bigcap|z-z_0|<\delta_0\}$, внутри которой $F_z(x,y,z)>0$.

2) $F(x_0,y_0,z)$ возрастает как функция от z на множестве $z\in(z_0-\delta_0,z_0+\delta_0)$ при всех $(x,y):|x-x_0|<\delta_0\bigcap|y-y_0|<\delta_0$.

3а) Найдется $\delta_3>0$, $\delta_3<\delta_0$ такое, что $F(M_1)<0$, где $M_1(x_0,y_0,z_1)$, $z_1=z_0-\delta_3$,

3б) Найдется $\delta_4>0$, $\delta_4<\delta_0$, такое, что $F(M_2)>0$, где $M_2(x_0,y_0,z_2)$, $z_2=z_0+\delta_4$,

4а) Найдется $\delta_1 > 0$: $\Omega_1(M_1) = =$
$\{|x-x_0|<\delta_1 \bigcap |y-y_0|<\delta_1 \bigcap |z-z_1|<\delta_1\}$
такое, что $F(M)<0$, $M\in\Omega_1(M_1)$,
4б) $F(M)>0$, $M\in\Omega_2(M_2)$,

$$\Omega_2(M_2)=\{|x-x_0|<\delta_2\}\bigcap\bigcap\{|y-y_0|<\delta_2\}\bigcap\{|z-z_2|<\delta_2\}.$$

5) На множестве
$\mathrm{P}_0(M_0)=\{|x-x_0|\le\delta\bigcap|y-y_0|\le\delta\bigcap|z-z_0|\le\delta_4\}$ имеем
$\forall M\in\mathrm{P}_0(M_0)$ верно $F_z(M)>0$,
$(x,y)\in\{|x-x|\le\delta\bigcap|y-y|\le\delta\}$ будет верно
$F(x,y,z)$ на множестве $z\in(z_0-\delta_4,z_0+\delta_4)$,

$$F(x,y,z_0-\delta_4)<0, F(x,y,z_0+\delta_4)>0,$$

$$\exists z\in(z_0-\delta_4;z_0+\delta_4): F(x,y,z)=0.$$

■

□ **2.** Докажем непрерывность. ■

$\mathbb{T}$**.8.4–2 (о дифференцировании).** *Пусть выполнены условия теоремы 1а и*
5) $F(M)$ дифференцируема в M_0.
Тогда функция $z=f(x,y)$, определенная теоремой 2а, дифференцируема в $N_0(x_0,y_0)$, причем

$$dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy, z_x=-\frac{F_x}{F_z}, z_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $F_xdx+F_ydy+F_zdz=0$, или даже в виде $dF=0$.

□ Докажем дифференцируемость.

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) =$$
$$= F(x_0,y_0,z_0) + F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z +$$
$$+ \alpha(M)\Delta x + \beta(M)\Delta y + \gamma(M)\Delta z, \quad (3)$$

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - F(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

$$F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z + \alpha(M)\Delta x + \beta(M)\Delta y + \gamma(M)\Delta z = 0,$$

$$(F_x+\alpha)\Delta x + (F_y+\beta)\Delta y + (F_z+\gamma)\Delta z = 0,$$

$\Omega_0(M_0) = \{|x-x_0|<\delta_0 \bigcap |y-x_0|<\delta_0 \bigcap |z-z_0|<\delta_0\}$:

$$F_z + \gamma(M) > 0,$$

$$\Delta z = -\frac{F_x(M_0)+\alpha(M)}{F_z(M_0)+\gamma(M)}\Delta x - \frac{F_y(M_0)+\beta(M)}{F_z(M_0)+\gamma(M)}\Delta y,$$

$\Delta z = (-\frac{F_x(M_0)}{F_z(M_0)} + \tilde{\alpha}(M))\Delta x + (-\frac{F_y(M_0)}{F_z(M_0)} + \tilde{\beta}(M))\Delta y$, где $\tilde{\alpha}(M)$ и $\tilde{\beta}(M)$ есть б.м. функции при $M \to M_0$.

Это условие равносильно дифференцируемости функции $z=f(x,y)$ в точке $N_0=(x_0,y_0)$. ■

1. Вычисление первого дифференциала

$$F(x,y,z)=0, u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0,$$

пусть $u_z \neq 0$,

$$dz = -\frac{u_x}{u_z}dx - \frac{u_y}{u_z}dy, \quad z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

2. Вычисление второго дифференциала

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0, \ \ d(u_x dx + u_y dy + u_z dz) = 0,$$

$(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz)dx + (u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yz}dz)dy + (u_{zx}dx + u_{zy}dy + u_{zz}dz)dz + ... = 0,$

Так как

$z = f(x,y)$, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, $d^2z \neq 0$,

$$(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz)dx + (u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yz}dz)dy + \\ + (u_{zx}dx + u_{zy}dy + u_{zz}dz)dz + u_z d^2z = 0, \quad (4)$$

причем $dz = -\frac{u_x}{u_z}dx - \frac{u_y}{u_z}dy$.

Отсюда получим после подстановки

$$d^2z = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

3. Примеры $F(x,y,z)=0$.

$\mathbb{S}$.8.4–1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$.

1) $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$, $xdx + ydy + zdz = 0$,

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}, z_x = -\frac{x}{z}, z_y = -\frac{y}{z},$$

2) $d(xdx + ydy + zdz) = 0$, $dx^2 + xd^2x + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0$, $dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0$, $d^2z = -\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z}$, $d^2z = -\frac{dx^2+dy^2+(-\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy)^2}{z}$,

$$d^2z = -\frac{(x^2+z^2)dx^2 + (y^2+z^2)dy^2 + 2xydxdy}{z^3}.$$

3) В точке возможного экстремума $dz = 0$,

$x = y = 0$, $z = \pm 1$, например, $z = 1$,

$$dx^2 + dy^2 + zd^2z = 0, d^2z = -\frac{dx^2 + dy^2}{z},$$

$d^2z = -dx^2 - dy^2$ локальный максимум.

$\mathbb{S}$.8.4–2. Докажите, что в некоторой окрестности точки $M_0 = (1; 1; 1)$ существует единственная функция $z = f(x, y)$, определенная неявно уравнением

$$x^5 + y^5 + z^5 = 3xyz.$$

Найдите dz и d^2z.

1) $u(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 3xyz$,

1а) $u(x, y, z)$ непрерывна и дифференцируема в R^3.

1б) $u_z = 5z^4 - 3xy$ непрерывна в R^3.

1в) Т.к. $u_z = 5z^4 - 3xy$, то $u_z(M_0) = 2 > 0$.

По теореме*, в некоторой $\Omega(M_0)$ найдется единств. $z = f(x, y)$, опр. неявно уравнением (). Эта функция непрерывна в $\Omega(M_0)$ и дифференцируема в M_0,

2а) $dx(5x^4 - 3yz) + dy(5y^4 - 3xz) + dz(5z^4 - 3xy) = 0$,

$dz = -\frac{5x^4 - 3yz}{5z^4 - 3xy}dx - \frac{5y^4 - 3xz}{5z^4 - 3xy}dy$, ()

$$z_x = -\frac{5x^4 - 3yz}{5z^4 - 3xy}, z_y = -\frac{5y^4 - 3xz}{5z^4 - 3xy},$$

2б)

$dxd(5x^4 - 3yz) + d^2x(5x^4 - 3yz) + dyd(5y^4 - 3xz) + d^2y(5y^4 - 3xz) + dzd(5z^4 - 3xy) + d^2z(5z^4 - 3xy) = 0$,

$dx(20x^3dx - 3ydz - 3zdy) + dy(20y^3dy - 3xdz - 3zdx) + dz(20z^3dz - 3xdy - 3ydx) + d^2z(5z^4 - 3xy) = 0$,

$d^2z = \frac{-1}{5z^4 - 3xy}\{dx(20x^3dx - 3ydz - 3zdy) + dy(20y^3dy - 3xdz - 3zdx) + dz(20z^3dz - 3xdy - 3ydx)\}$,

Ответ:

$d^2z = \frac{-1}{5z^4-3xy}\{dx^2\cdot 20x^3 + dxdy\cdot(-3z) + dydz(-3y) + dydx\cdot(-3z) + dy^2\cdot(20y^3) + dydz(-3x) + dzdx\cdot(-3y) + dzdy\cdot(-3x) + dz^2(20z^3)\}$,

причем dz следует подставить из ().

$\mathbb{S}$.8.4–3. $(x^2+y^2+z^2)^2 - 8\sqrt{2}\cdot xyz = 0$,

$(x^2+y^2+z^2)^2 - bxyz = 0$, где $b = 8\sqrt{2}$, и пусть $R^2 = x^2+y^2+z^2$.

1) Вычислим первый дифференциал,

$2(x^2+y^2+z^2)(2xdx+2ydy+2zdz) - bxydz - bxzdy - byzdx = 0$,

$(R^2)^2 - b\cdot xyz = 0$,

$dx(4xR^2 - byz) + dy(4yR^2 - bxz) + dz(4zR^2 - bxy) = 0$,

$(x-x_0)(4x_0R^2 - by_0z_0) + (y-y_0)(4y_0R^2 - bx_0z_0) + (z-z_0)(4z_0R^2 - bx_0y_0) = 0$,

$$dz = -\frac{dx(4xR^2-byz)+dy(4yR^2-bxz)}{4zR^2-bxy},$$

$$z_x = -\frac{4xR^2-byz}{4zR^2-bxy},\ z_y = -\frac{4yR^2-bxz}{4zR^2-bxy}.$$

2) Ищем локальный экстремум только в области $x>0\bigcap y>0\bigcap z>0$. Положим $dz=0$, $R^4 = bxyz$,

$$\begin{cases} R^4 - bxyz = 0, \\ 4xR^2 = byz, \\ 4yR^2 = bxz, \end{cases}$$

$x = y > 0$,

$$\begin{cases} R^4 - bx^2z = 0, \\ 4R^2 = bz, \\ y = x, \end{cases}$$

$\frac{b^2z^2}{16} - bx^2z = 0$, $\frac{bz}{16} - x^2 = 0$, $\frac{8\sqrt{2}z}{16} - x^2 = 0$, $z = x^2\sqrt{2}$,

$$(x^2+x^2+2x^4)^2 - 8\sqrt{2}x^4\sqrt{2} = 0,$$

$$4(x^2+x^4)^2 - 8\sqrt{2}x^4\sqrt{2} = 0,$$

$$(1+x^2)^2-4=0,(1+x^2)=2,x^2=1$$

3) Решение: $x=y=1$, $z=\sqrt{2}$.

4) Второй дифференциал,

$$dx(4xR^2-byz)+dy(4yR^2-bxz)+dz(4zR^2-bxy)=0,$$

$(x-x_0)(4x_0R^2-by_0z_0)+(y-y_0)(4y_0R^2-bx_0z_0)+(z-z_0)(4z_0R^2-bx_0y_0)=0,$

$$d[dx(4xR^2-byz)+dy(4yR^2-bxz)$$

$$+dz(4zR^2-bxy)]=0,$$

$$dx\cdot d(4xR^2-byz)+dy\cdot d(4yR^2-bxz)$$

$$+dz\cdot d(4zR^2-bxy)+(4zR^2-bxy)d^2z=0,$$

Но в точке возможного экстремума $dz=0$, поэтому

$$dx\cdot d(4xR^2-byz)+dy\cdot d(4yR^2-bxz)+(4zR^2-bxy)d^2z=0,$$

$$dx(4R^2dx+4x(2xdx+2ydy)-bzdy)$$
$$+\,dy\cdot(4R^2dy+4y(2xdx+2ydy)-bzdx)$$
$$+\,(4zR^2-bxy)d^2z=0, \quad (5)$$

$$d^2z=-\frac{(4R^2+8x^2)dx^2}{4zR^2-bxy}-\frac{(-2bz+16xy)dxdy}{4zR^2-bxy}-\frac{(4R^2+8y^2)dy^2}{4zR^2-bxy}.$$

$$R^2=1+1+2=4,$$

$$4zR^2-bxy=4\sqrt{2}\cdot4-8\sqrt{2}\cdot1=8\sqrt{2},$$

$$H=\frac{-1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4R^2+8x^2 & -bz+8xy \\ -bz+8xy & 4R^2+8y^2 \end{pmatrix},$$

$$H=\frac{-1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -24 & 8 \\ 8 & -24 \end{pmatrix},$$

Это максимум.

II-9. Векторные неявные функции

Напомним, что неявная функция – это функция, которая каждому упорядоченному набору переменных $x_1,...,x_m$, принадлежащему некоторому допустимому множеству, ставит в соответствие упорядоченный набор переменных $y_1,...,y_n$, заданный единственным образом, такой, что одновременно выполняются уравнения

$F_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0,$

$F_2(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0,$

...

$F_{n'}(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0.$

Переменные $x_1,...,x_m$ мы называем независимыми, переменные $y_1,...,y_n$ мы называем зависящими. Как правило, выбор набора независимых и зависящих переменных есть выражение нашей воли (с определенными ограничениями).

Переменные $x_1,...,x_m$ можно рассматривать как векторную переменную, $X=\left(x_1,...,x_m\right)^T$. Переменные $y_1,...,y_n$ также можно рассматривать как векторную переменную, $Y=\left(y_1,...,y_n\right)^T$.

В нашем курсе мы рассматриваем только такие неявные функции, для которых $Y(X)$ есть непрерывная функция. Мы рассматриваем только случай главного положения, который можно охарактеризовать равенством $n' = n$.

Скалярная неявная функция–это неявная функция, для которой $n = 1$. Векторная неявная функция–это неявная функция, для которой $n \geqslant 2$.

9.1. Неявные функции, определяемые системой двух уравнений с тремя переменными

Мы рассмотрим сначала простейшую систему уравнений, которая определяет векторную неявную функцию. Условие $n \geqslant 2$ выполнено для $m = 1$, $m = 2$ и меньшие значения m и n выбрать невозможно. Именно этот случай рассмотрим наиболее подробно.

Рассмотрим систему двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

В данной записи система не предполагает выбора какой-то пары зависящих переменных и соответственно одной независимой переменной. Поэтому сделаем этот выбор, будем считать x независимой, y и z зависящими переменными.

9.1.1. Теорема о неявной функции, определяемой системой двух уравнений с тремя переменными

$\mathbb{T}$.9.1–1 (о неявной функции, определяемой системой $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть

(1) *функции* $F(x,y,z)$ *и* $G(x,y,z)$ *определены на некотором множестве* G, *которое является окрестностью точки* $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

(2) $F(M_0)=0$, $G(M_0)=0$,

(3) $F(x,y,z)$ *и* $G(x,y,z)$ *непрерывны на множестве* G,

(4) $F(x,y,z)$ *и* $G(x,y,z)$ *дифференцируемы в точке* M_0,

(5) F_y, F_z, G_y, G_z *существуют на множестве* G *и непрерывны в точке* M_0,

(6) $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ *в точке* M_0.

Тогда

(1) *Найдется такая окрестность* D_0 *точки* x_0, *найдется такая окрестность* $G_0 \in G$ *точки* M_0, *что* $\forall x \in D_0$ *найдется единственная пара чисел* (y,z), *такая, что* $(x,y,z) \in G_0$ *и одновременно верны равенства*

$$\begin{cases} F\big(x, f(x), g(x)\big) = 0, \\ G\big(x, f(x), g(x)\big) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Иначе говоря, на множестве G_0 *определены функции* $y=f(x)$, $z=g(x)$, *такие, что* $(x,f(x),g(x)) \in G_0$ *и выполнены равенства (9.1-2).*

(б) Эти функции дифференцируемы в точке M_0, *причем*

$$\begin{cases} F_y dy + F_z dz = -F_x dx, \\ G_y dy + G_z dz = -G_x dx, \end{cases} \tag{3}$$

определитель этой системы отличен от нуля, и дифференциалы зависящих переменных можно найти из равенств

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} -F_x dx & F_z \\ -G_x dx & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_y G_z - F_z G_y} dx,$$

$$dz = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x dx \\ G_y & -G_x dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_y G_x - F_x G_y}{F_y G_z - F_z G_y} dx.$$

★ Заметим, что формулу для dy, dz можно записать в виде

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. □ 1. Докажем существование.

(1) Так как $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0, то или $F_y(M_0) \neq 0$, или $F_z(M_0) \neq 0$.

(2) Пусть $F_y(M_0) \neq 0$. Тогда выполнены все условия теоремы 2, так что уравнение $F(x, y, z) = 0$ можно разрешить относительно y, и найти $y = h(x, z)$ такую, что $F(x, h(x, z), z) = 0$ в некоторой прямоугольной окрестности D точки (x_0, z_0).

(3) Наш план: решим уравнение $G(x, h(x, z), z) = 0$ и найдем $z = g(x)$. Тогда $y = h(x, g(x)) = f(x)$.

(4) Условия 1–4 теоремы 1 для уравнения $G(x, h(x, z), z) = 0$ выполнены. Проверим, что

$$A = \frac{d}{dz} G(x, h(x, z), z) \neq 0$$

в точке (x_0, z_0). Найдем

$$A = \frac{d}{dz} G(x, h(x, z), z) = G_y h_z + G_z.$$

Так как $F(x, h(x, z), z) = 0$, то

$$F_y h_z + F_z = 0, \;\; h_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

Теперь найдем

$$\frac{d}{dz}G(x,h(x,z),z) = -G_y\frac{F_z}{F_y} + G_z =$$

$$= \frac{-G_yF_z + G_zF_y}{F_y} = \frac{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}{F_y} \neq 0. \quad (5)$$

Таким образом, все условия теоремы 2 для уравнения $G(x,h(x,z),z) = 0$ выполнены. Поэтому найдется окрестность точки x_0, в которой выполнено утверждение теоремы. ■

9.1.2. Методика вычисления второго дифференциала

Для того, чтобы найти второй дифференциал неявной функции, следует продифференцировать систему уравнений два раза. Если система имеет вид $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$
то результат однократного дифференцирования

$$\begin{cases} F_ydy + F_zdz = -F_xdx, \\ G_ydy + G_zdz = -G_xdx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy = -\dfrac{F_xG_z - F_zG_x}{F_yG_z - F_zG_y}dx, \\ dz = -\dfrac{F_yG_x - F_xG_y}{F_yG_z - F_zG_y}dx, \end{cases}$$

результат двукратного дифференцирования

$$\begin{cases} F_yd^2y + F_zd^2z + dydF_y + dzdF_z = -dxdF_x, \\ G_yd^2y + G_zd^2z + dydG_y + dzdG_z = -dxdG_x, \end{cases}$$

соберем слева слагаемые, содержащие вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} F_yd^2y + F_zd^2z = -dydF_y - dzdF_z - dxdF_x, \\ G_yd^2y + G_zd^2z = -dydG_y - dzdG_z - dxdG_x, \end{cases}$$

Далее найдем $dF_y = F_{yx}dx + F_{yy}dy + F_{yz}dz$, причем для dy и dz используем явные выражения.

9.1.3. Примеры

1. $F(x,y,z)=0$ **и** $G(x,y,z)=0$**.**

$\mathbb{S}$.9.1–1. Пусть функции $z=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ определены системой уравнений $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6, \end{array}\right.$ Найдите dz, d^2z, dy, d^2y.

Решение. ◀ **(1)** Найдем первые дифференциалы,
$\left\{\begin{array}{c} dx+dy+dz=0, \\ xdx+ydy+zdz=0, \end{array}\right.$ $dy=-dx-dz$,
$xdx-y(dx+dz)+zdz=0$,

$dz(z-y)=dx(y-x)$, $dz=\frac{y-x}{z-y}dx$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z-y}$, причем $z-y\neq 0$.

(2) Найдем вторые дифференциалы,
$\left\{\begin{array}{c} d^2x+d^2y+d^2z=0, \\ xd^2x+yd^2y+zd^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0, \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{c} d^2y+d^2z=0, \\ yd^2y+zd^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c} d^2y+d^2z=0, \\ yd^2y+zd^2z=-dx^2-dy^2-dz^2 \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{c} yd^2y+yd^2z=0, \\ yd^2y+zd^2z=-dx^2-dy^2-dz^2, \end{array}\right.$

$$(z-y)dz^2=-dx^2-dy^2-dz^2,$$

$$\left\{\begin{array}{l} d^2z=\dfrac{-dx^2-dy^2-dz^2}{z-y}, \\ dz=\dfrac{y-x}{z-y}dx, \quad dy=\dfrac{x-z}{z-y}dx, \end{array}\right.$$

$d^2z = -\dfrac{1+(\frac{x-z}{z-y})^2+(\frac{y-x}{z-y})^2}{z-y}dx^2 = -\dfrac{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}{(z-y)^3}dx^2,$

$$dz=0, \frac{y-x}{z-y}=0, y=x, \left\{\begin{array}{c} 2x+z=4, \\ 2x^2+z^2=6, \end{array}\right.$$

a) $y=x=1$, $z=2$, $d^2z<0$, максимум

b) $y=x=\frac{5}{3}$, $z=\frac{2}{3}$, $d^2z>0$, минимум ▶

9.1.4. Неявные функции, определяемые системой двух уравнений с четырьмя переменными

Рассмотрим систему двух уравнений с четырьмя переменными:

$$\begin{cases} f(x,y,u,v) = 0, \\ g(x,y,u,v) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

$\mathbb{S}$**.9.1–2.** Пусть

$$\begin{cases} x = uv, \\ 2y = u^2 + v^2, \end{cases} \tag{7}$$

и $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Найдите du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. ◀ Из 9.1-6 следует:

$$\begin{cases} dx = vdu + udv, \\ dy = udu + vdv, \end{cases} \quad \begin{cases} vdu + udv = dx, \\ udu + vdv = dy, \end{cases}$$

$$\begin{cases} uvdu + u^2dv = udx, \\ uvdu + v^2dv = vdy, \end{cases} \quad (u^2-v^2)dv = udx-vdy, dv = \frac{u}{u^2-v^2}dx+\frac{-v}{u^2-v^2}dy$$

$$\begin{cases} v^2du + uvdv = vdx, \\ u^2du + uvdv = udy, \end{cases} \quad (u^2 - v^2)du = udy - vdx, \; du = \tfrac{-v}{u^2-v^2}dx + \tfrac{u}{u^2-v^2}dy,$$

$$u_x = \frac{-v}{u^2-v^2}, ensu_y = \frac{u}{u^2-v^2}, \;\; v_x = \frac{u}{u^2-v^2}, \;\; v_y = \frac{-v}{u^2-v^2},$$

$$\begin{cases} vd^2u + dudv + ud^2v + dudv = d^2x = 0, \\ ud^2u + du^2 + vd^2v + dv^2 = d^2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} vd^2u + ud^2v = -2dudv, \\ ud^2u + vd^2v = -du^2 - dv^2, \end{cases}$$

$$(u^2 - v^2)d^2u = -udu^2 + 2vdudv - udv^2,$$

$$\begin{cases} d^2u = \frac{-udu^2+2vdudv-udv^2}{(u^2-v^2)}, \\ du = \frac{-v}{u^2-v^2}dx + \frac{u}{u^2-v^2}dy, \\ dv = \frac{u}{u^2-v^2}dx + \frac{-v}{u^2-v^2}dy, \end{cases}$$

►

9.2. Большая теорема о неявной функции.

Обозначим

$$X = (x_1, ..., x_m), \quad Y = (y_1, ..., y_n),$$
$$X_0(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}), \quad Y_0(y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}),$$

и рассмотрим систему

$F_1(X, Y) = 0$, $F_2(X, Y) = 0$, $\ldots F_n(X, Y) = 0$,

которую запишем в векторно-матричной форме, $F(X, Y) = 0$, где $F(X, Y) = (F_1(X, Y), ..., F_n(X, Y))^T$.

$\mathbb{T}$**.9.2–1 (о векторной неявной функции).** *Пусть*

1) функция $F(X, Y)$ непрерывна в $\Omega(X_0, Y_0)$,

2) $F(X_0, Y_0) = 0$,

3) $F(X, Y)$ дифференцируема в M_0,

4) F_Y существует в $\Omega(X_0, Y_0)$ и непрерывна в (X_0, Y_0),

5) $|F_Y| \neq 0$ в (X_0, Y_0).

Тогда в некоторой $\Omega(X_0, Y_0)$ определена функция $Y = f(X)$, для которой $F(X, f(X)) = 0$. Эта функция дифференцируема в точке (X_0, Y_0), причем $F_Y dY = -F_x dx$, определитель этой системы отличен от нуля.

★ Формулу для дифференциала можно записать в виде $F_Y dY + F_x dx = 0$.

9.3. Сводка результатов

9.3.1. Одна переменная

$\mathbb{T}$**.9.3–1.** *Пусть* **(1)** *функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, **(2)** $f(x_0) = 0$, **(3)** $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \neq 0$. *Тогда найдется такая окрестность точки* x_0, *в которой уравнение*

$$f(x) = 0$$

не имеет других решений, кроме $x = x_0$.

9.3.2. Три переменных

$\mathbb{T}$**.9.3–2.** *Пусть* **(1)** *функция* $F(x, y, z)$ *непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, **(2)** $F(M_0) = 0$, **(3)** *матрица* $\big(F_x, F_y, F_z\big)$ *в точке* M_0 *имеет ранг равный 1, (для определенности,* $F_z(M_0) \neq 0$*). Тогда* **(1)** *в некоторой окрестности точки* M_0 *существует единственная функция* $f(x, y)$, *для которой* $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$, **(2)** $f(x, y)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* $N_0 = (x_0, y_0)$, *причем*

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

это уравнение однозначно разрешимо относительно dz.

★ Ранг матрицы $\big(F_x, F_y, F_z\big)$ в точке M_0 равен 1 тогда и только тогда, когда $\triangledown F(M_0) \neq \overrightarrow{0}$.

$\mathbb{T}$**.9.3–3.** *Пусть* **(1)** *функции* $F(x, y, z)$ *и* $G(x, y, z)$ *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, **(2)** $F(M_0) = 0$, $G(M_0) = 0$, **(3)** *Матрица*

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

в точке M_0 *имеет ранг равный 2, для определенности,*

$$\left| \begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix} \right| \Bigg|_{M_0} \neq 0.$$

Тогда **(1)** *в некоторой окрестности точки* M_0 *существует единственная векторная функция* $\big(f(x), g(x)\big)^T$, *для которой*

$$\begin{cases} F\big(x, f(x), g(x)\big) = 0, \\ G\big(x, f(x), g(x)\big) = 0, \end{cases}$$

(2) *Функции* $y = f(x)$ *и* $z = g(x)$ *дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0, *причем*

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0, \end{cases}$$

эта система однозначно разрешимо относительно dy, dz.

★ Ранг матрицы $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ равен 2 тогда и только тогда, когда вектор $\bigtriangledown F(M_0)$ неколлинеарен вектору $\bigtriangledown G(M_0)$.

$\mathbb{T}$**.9.3–4.** *Пусть* **(1)** *функции* $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, *и* $H(x, y, z)$ *дифференцируемы в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, **(2)** $F(M_0) = 0$, $G(M_0) = 0$, $H(M_0) = 0$, **(3)** *Матрица*

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$$

в точке M_0 *имеет ранг равный 3, т.е. невырождена. Тогда найдется окрестность точки* M_0 *в которой система уравнений*

$$\begin{cases} F\big(x, y, z\big) = 0, \\ G\big(x, y, z\big) = 0, \\ H\big(x, y, z\big) = 0, \end{cases}$$

не имеет других решений, кроме M_0.

★ Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$$

в точке M_0 равен 3 тогда и только тогда, когда векторы $\bigtriangledown F(M_0)$, $\bigtriangledown G(M_0)$, $\bigtriangledown H(M_0)$ некомпланарны.

II-10. Нелинейные уравнения с параметром

$\mathbb{T}$.10.0–1 (о зависимости положения точки локального экстремума дифференцируемой функции от параметра). *Пусть точка $M_0(x_0, y_0, p_0)$,*

1) $u_x(M_0) = 0$, $u_y(M_0) = 0$,

2) функции $u_x(x, y, p)$ и $u_y(x, y, p)$ непрерывны в $\Omega(M_0)$,

2) $u_x(x, y, p)$ и $u_y(x, y, p)$ дифференцируемы в M_0,

3) u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy} существуют окрестности M_0 и непрерывны в M_0,

4) $\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0.

Тогда в некоторой окрестности p_0 определены функции $x = f(p)$, $y = g(p)$ для которых $u_x(f(p), g(p), p) = 0$, $u_y(f(p), g(p), p) = 0$.

Эти функции дифференцируемы в M_0, причем $\begin{cases} u_{xx}dx + u_{xy}dy = -u_{xp}dp, \\ u_{yx}dx + u_{yy}dy = -u_{yp}dp, \end{cases}$ определитель системы отличен от нуля, или, что то же самое,

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -u_{xp} & u_{xx} \\ -u_{yp} & u_{yx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}} dp, dy = \frac{\begin{vmatrix} u_{xx} & -u_{xp} \\ u_{yx} & -u_{yp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}} dp.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $\begin{cases} u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xp}dp = 0, \\ u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yp}dp = 0, \end{cases}$.

II-11. Условный экстремум

11.1. Экстремум функции двух или трех переменных

11.1.1. Понятие

Рассмотрим задачу поиска экстремума функции $u(x, y)$ при условии $v(x, y) = 0$.

$\mathbb{D}$**.11.1–1.** *Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, причем $v(x, y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неявной функции в точке M_0. В частности, $v(x_0, y_0) = 0$ и $v_y(x_0, y_0) \neq 0$. Точка M_0 называется точкой экстремума функции $u(x, y)$ при условии $v(x, y) = 0$ (условного экстремума), если найдется такая $\hat{\Omega}(M_0)$, в которой $\forall M \in \hat{\Omega}(M_0) : v(x, y) = 0$ верно условие $u(M) < u(M_0)$ (максимум), или $u(M) > u(M_0)$ (минимум).*

11.1.2. Метод исключения

$\mathbb{T}$**.11.1–1 (Необходимые условия экстремума функции $f(x, y)$ с условием $g(x, y) = 0$).** *Пусть в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ с условием $g(x, y) = 0$ принимает экстемальное значение. Тогда в этой точке*

$$\frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y} = 0. \tag{1}$$

□ Так как в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение $g(x, y) = 0$ можно решить относительно y, то в окрестности точки M_0 существует единственная функция $y = \eta(x)$, для которой $g(x, \eta(x)) = 0$. Поэтому в некоторой $\Omega(x_0)$

$$f(x, y) = f(x, \eta(x)) = F(x),$$

причем

$$F'(x) = (f(x, \eta(x)))_x = f_x + f_y \eta_x.$$

в точке возможного экстремума $f_x + f_y\eta_x = 0$ в соответствии с теоремой Ферма. Продифференцируем условия связи,

$$g_x dx + g_y dy = 0, \;\; \frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y}, \;\; \eta_x = -\frac{g_x}{g_y}.$$

В точке возможного экстремума функции $F(x)$ верно

$$f_x + f_y\left(-\frac{g_x}{g_y}\right) = 0,$$
$$\frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y} = 0.$$

■

$\mathbb{T}$**.11.1–2 (Достаточные условия экстремума функции** $f(x, y)$ **с условием** $g(x, y) = 0$**).** *Пусть в точке* (x_0, y_0) *выполнены необходимые условия экстремума функции* $f(x, y)$ *с условием* $g(x, y) = 0$*, и*

$$\frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2} - \frac{f_y}{g_y}\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2} \neq 0. \qquad (2)$$

Тогда в этой точке функция $f(x, y)$ *с условием* $g(x, y) = 0$ *принимает экстремальное значение.*

□ Найдем

$$d^2 f = d(f_x dx + f_y dy) = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2 y. \qquad (3)$$

При условии $dy = -\frac{g_x}{g_y}dx$ найдем

$$d^2 f = \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 + f_y d^2 y. \qquad (4)$$

Но при выполнении условия связи $dg = g_x dx + g_y dy = 0$, поэтому

$$d^2 g = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 + g_y d^2 y = 0, \qquad (5)$$

$$d^2y = -\frac{1}{g_y}\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2, \tag{6}$$

так что

$$d^2f = \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 - \\ - \frac{f_y}{g_y}\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2. \tag{7}$$

■

$\mathbb{S}$.11.1–1. Найдите все точки экстремума функции $u(x,y) = xy$ при условии $v(x,y) = 0$, где $v(x,y) = x + y - 2$.

(1) Используем метод исключения. Так как из условия связи $x+y = 2$ следует $y = 2 - x$, то на допустимом множестве

$$u(x,y) = u\big(x, y(x)\big) = f(x),\ \ f(x) = x(2-x) = 2x - x^2,$$

$$f' = 2 - 2x,\ \ 2 - 2x = 0,$$

$x = 1$, $y = 1$ (одна точка возможного экстремума).

(2) $f'' = -2$, это точка максимума.

$\mathbb{S}$.11.1–2. Найдите все точки экстремума функции $u(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $xy = 1$.

(1) Пусть $v(x,y) = xy - 1$. Так как из условия связи $v(x,y) = 0$ следует $y = \frac{1}{x}$, $f(x) = u\big(x, y(x)\big) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $f' = 2x - \frac{2}{x^3} = 2\frac{x^4-1}{x^3} = 0$, $x^4 = 1$,

$$(x,y) \in \{(1;1), (-1,-1)\},$$

две точки возможного экстремума.

(2) $f'' = 2 + \frac{6}{x^4}$, это точка минимума.

$\mathbb{S}$.11.1–3. Найдите все точки экстремума функции $u(x, y) = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.

(1) Пусть $v(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. Тогда условие связи можно записать в виде $v(x, y) = 0$. Из условия связи следует, что $y = \pm\sqrt{2 - x^2} = m \cdot \sqrt{2 - x^2}$, где $m = \pm 1$, $f(x) = u\big(x, y(x)\big) = mx\sqrt{2 - x^2}$,

$$f' = m\sqrt{2 - x^2} - \frac{mx^2}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{m(2 - x^2) - mx^2}{\sqrt{2 - x^2}} = 2m\frac{1 - x^2}{\sqrt{2 - x^2}},$$

$x^2 = 1$,

$$(x, y) \in \{(1; 1), (1, -1), (-1; 1), (-1, -1)\},$$

имеется четыре точки возможного экстремума.

(2)

$$f'' = 2m\frac{-2x\sqrt{2 - x^2} + (1 - x^2)\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}}{\sqrt{2 - x^2}} =$$
$$= 2m\frac{-2x(2 - x^2) + x(1 - x^2)}{2 - x^2} = 2m\frac{-3x + x^3}{2 - x^2}, \quad (8)$$

точки минимума $(x, y) \in \{1, -1), (-1; 1)\}$ и максимума $(x, y) \in \{(1; 1), (-1, -1)\}$.

11.1.3. Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу поиска экстремума целевой функции $f(x, y)$ при условии $g(x, y) = 0$.

1. $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

2. $dL = (f_x + \lambda g_x)dx + (f_y + \lambda g_y)dy$,

3. $dL = 0$, или $\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$

4. Найдем d^2L при условии $g_x dx + g_y dy = 0$. Заметим, что коэффициенты при d^2x, а при d^2y равны нулю.

11.1.4. Теорема Лагранжа, 1

$\mathbb{T}$.11.1–3 (необходимые условия экстремума в форме Лагранжа). *Пусть* **(1)** *функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ определены в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$,* **(2)** *дифференцируемы в точке M_0,* **(3)** *функция $g(x,y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.3–1 о неявной функции вида $y = f(x)$, в частности, $g_y \neq 0$ в точке M_0.* **(4)** *Пусть в точке M_0 функция $f(x,y)$ с условием $g(x,y) = 0$ имеет точку экстремума. Тогда найдется значение λ, при котором выполнены необходимые условия экстремума в форме Лагранжа, т.е. одновременно*

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

★ Эти три уравнения равносильны выполнению условий связи и условия $dL = 0$.

□ Мы доказали, что в точке экстремуа функции $f(x,y)$ с условием $g(x,y) = 0$ верно условие

$$f_x + f_y\Big(-\frac{g_x}{g_y}\Big) = 0,$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = -\lambda,$$

это и есть требуемое значение λ. Следовательно,

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \end{cases},$$

а если $g_x = 0$, то $f_x = 0$. ■

11.1.5. Теорема Лагранжа, 2

$\mathbb{T}$.11.1–4 (достаточные условия экстремума в форме Лагранжа). *Пусть*

(1) *выполнены условия теоремы 11.1–3,*

(2) *функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ дважды дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$,*

(3) *в точке $M_0(x_0, y_0)$ верно условие $dL = 0$, где*

$$L = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

(4) *$d^2L > 0$ при условии $g_x dx + g_y dy = 0$.*

Тогда функция $f(x, y)$ с условием $g(x, y) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет точку минимума.

□ Мы доказали, что

$$d^2F = \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 -$$

$$- \frac{f_y}{g_y}\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2. \quad (10)$$

Теперь займемся функцией Лагранжа. Если выполенны необходимые условия экстремума в форме Лагранжа, то

$$dL = f_x dx + f_y dy + \lambda g_x dx + \lambda g_y dy =$$

$$= dx(f_x + \lambda g_x) + dy(f_y + \lambda g_y), \quad (11)$$

$$d^2L = dx \cdot d(f_x + \lambda g_x) + dy \cdot d(f_y + \lambda g_y) + \\ + d^2x \cdot (f_x + \lambda g_x) + d^2y \cdot (f_y + \lambda g_y). \quad (12)$$

В точке $M_0(x_0, y_0)$

$$dx(f_x + \lambda g_x) + dy(f_y + \lambda g_y) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{поэтому в точке } M_0(x_0, y_0)$$

$$d^2L = dx \cdot d(f_x + \lambda g_x) + dy \cdot d(f_y + \lambda g_y) = \\ = dx \cdot d(f_x) + dyd(f_y) + \lambda \cdot dx \cdot d(g_x) + \lambda \cdot dy \cdot d(g_y), \quad (14)$$

причем $g_x dx + g_y dy = 0$ и $d(g_x dx + g_y dy) = 0$.

$$d^2L = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + \lambda(g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2) = \\ = \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 + \lambda\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 = \\ = \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2 - \frac{f_y}{g_y}\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^2}dx^2, \quad (15)$$

$$d^2L = d^2f.$$

Применим теперь достаточные условия локального экстремума. ■

11.1.6. Примеры (метод Лагранжа)

Пример 11.1–4. Найти $xy \to extr$ при условии $x + y = 2$.

◀ 1) $L = xy + \lambda(x + y - 2)$,

2) $dL = dx(y + \lambda) + dy(x + \lambda)$,

3) $\begin{cases} y + \lambda = 0, \\ x + \lambda = 0, \quad x = y = 1, \text{ т.в.э.} \\ x + y = 2, \end{cases}$

4) $d^2L = d(dL)$, $d^2L = d(dx(y + \lambda) + dy(x + \lambda))$,

при вычислении коэффициенты при d^2x и d^2y равны нулю, $d^2L = 2dxdy$,

! не исследовать методом Сильвестра!

$$x + y - 2 = 0,$$

$dx + dy = 0$, поэтому $dy = -dx$,

$d^2L = -2dx^2 < 0$, Максимум. ▶

Пример 11.1–5. Найдите $\frac{y}{x} \to extr$ при условии $(x-3)^2+(y-1)^2 = 2$.

◀ $L = \dfrac{y}{x} + \lambda\left[(x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 2\right]$,

$$dL = dx\left[\frac{-y}{x^2} + 2\lambda(x - 3)\right] + dy\left[\frac{1}{x} + 2\lambda(y - 1)\right],$$

$$\begin{cases} \frac{-y}{x^2} + 2\lambda(x - 3) = 0, \\ \frac{1}{x} + 2\lambda(y - 1) = 0, \qquad x = y = 2, \lambda = -\dfrac{1}{4}. \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2, \end{cases}$$

При вычислении d^2L коэффициенты при d^2x и d^2y равны нулю,

$$d^2L = dx \cdot d\left[\frac{-y}{x^2} + 2\lambda(x - 3)\right] + dy \cdot d\left[\frac{1}{x} + 2\lambda(y - 1)\right],$$

$$d^2L = dx\left[2\frac{y}{x^3}dx - \frac{dy}{x^2} + 2\lambda dx\right] + dy\left[-\frac{1}{x^2}dx + 2\lambda dy\right],$$

$$+d^2x\left[\frac{-y}{x^2}+2\lambda(x-3)\right]+d^2y\left[\frac{1}{x}+2\lambda(y-1)\right]$$

$$d^2L=dx^2\left[\frac{2y}{x^3}+2\lambda\right]-\frac{2}{x^2}dxdy+dy^2\left[2\lambda\right],$$

! не исследовать методом Сильвестра!

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2,$$

$2(x-3)dx+2(y-1)dy=0$, поэтому $dy=dx$,

$$d^2L=dx^2\left[\frac{2y}{x^3}+2\lambda-\frac{2}{x^2}+2\lambda<0\right],$$

Максимум. ►

11.1.7. Три переменных + условие связи

1. Метод Лагранжа

Пример 11.1–6. Найдите точки экстремума функции $u(x,y,z)$ при условии $v(x,y,z)=0$.

◄ Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda)=u(x,y,z)+\lambda v(x,y,z),$$

$$dL=dx(u_x+\lambda v_x)+dy(u_y+\lambda v_y)+dz(u_z+\lambda v_z),$$

$$\begin{cases} u_x+\lambda v_x=0,\\ u_y+\lambda v_y=0,\\ u_z+\lambda v_z=0,\\ v(x,y,z)=0.\end{cases}$$

$$d^2L=dx\cdot d(u_x+\lambda v_x)+d(dx)\cdot(u_x+\lambda v_x)+\ldots,$$

Только в точке возможного экстремума

$$d^2L = dx \cdot d(u_x + \lambda v_x) + ...,$$

$$\begin{cases} d^2L = dx \cdot d(u_x + \lambda v_x) + ..., \\ dv = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2L = dx(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz + \lambda v_x) + ..., \\ dv = 0, \end{cases}$$

$d^2L = dx(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz) + \lambda dx(v_{xx}dx + v_{xy}dy + v_{xz}dz) + ...$ при условии $v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$. ►

2. Примеры

Пример 11.1–7. Найдите точки экстремума функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $x + y + z = 3$.

◄ **(1)** $L = xyz + \lambda(x + y + z - 3)$,

(2) $dL = dx(yz + \lambda) + dy(xz + \lambda) + dz(xy + \lambda)$,

(3) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ yz + \lambda = 0, \\ xz + \lambda = 0, \\ xy + \lambda = 0, \end{cases}$ $\quad x = y = z = 1,\ \lambda = -1$,

(4) $d^2L = 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$,

! не исследовать методом Сильвестра!

(5) $dx + dy + dz = 0$, поэтому $dz = -dx - dy$,

$$d^2L = 2zdxdy + 2ydx(-dx - dy) + 2xdy(-dx - dy),$$

$$d^2L = 2dxdy - 2dx^2 - 2dxdy - 2dydx - 2dy^2,$$

$d^2L = -2dx^2 - 2dydx - 2dy^2$, $H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, это максимум. ►

Пример 11.1–8. $x^2y^3z^4 \to extr$ при условии $2x+3y+4z=9$, которое запишем в виде. $2x+3y+4z-9=0$.

◀

(1) $L = x^2y^3z^4 + \lambda(2x+3y+4z-9)$,

(2) $dL = dx(2xy^3z^4 + 2\lambda) + dy(3x^2y^2z^4 + 3\lambda) + dz(4x^2y^3z^3 + 4\lambda)$,

(3) $\begin{cases} 2x+3y+4z=9, \\ xy^3z^4+\lambda=0, \\ x^2y^2z^4+\lambda=0, \\ x^2y^3z^3+\lambda=0, \end{cases}$ $\quad x=y=z=1,\ \lambda=-1$,

(4) $d^2L = d(dL) = d(dx(2xy^3z^4 + 2\lambda)) + d(dy(3x^2y^2z^4 + 3\lambda)) + d(dz(4x^2y^3z^3 + 4\lambda))$

$$= 2y^3z^4dx^2 + 6xy^2z^4dxdy + 8xy^3z^3dxdz$$

$$+6xy^2z^4dxdy + 6x^2yz^4dy^2 + 12x^2y^2z^3dydz$$

$$+8xy^3z^3dxdz + 12x^2y^2z^3dydz + 12x^2y^3z^2dz^2,$$

В точке возможного экстремума

$d^2L = 2dx^2 + 6dxdy + 8dxdz + 6dxdy + 6dy^2 + 12dydz + 8dxdz + 12dydz + 12dz^2$,

! не исследовать методом Сильвестра!

$2x+3y+4z=9$, $2dx+3dy+4dz=0$, $dz = -\frac{1}{2}dx - \frac{3}{4}dy$,

$$d^2L = 2dx^2 + 6dxdy + 8dx(-\frac{1}{2}dx - \frac{3}{4}dy) + 6dxdy + 6dy^2 + \\ + 12dy(-\frac{1}{2}dx - \frac{3}{4}dy) + (8dx + 12dy)(-\frac{1}{2}dx - \frac{3}{4}dy) + \\ + 12(-\frac{1}{2}dx - \frac{3}{4}dy)^2 \quad (16)$$

$$d^2L = 2dx^2 + 6dxdy - 4dx^2 - 6dxdy + 6dxdy + 6dy^2 - 6dxdy -$$
$$- 9dy^2 - 4dx^2 - 6dxdy - 6dxdy - 9dy^2 +$$
$$+ 3dx^2 + 9dxdy + \frac{27}{4}dy^2, \quad (17)$$

$d^2L = -3dx^2 - 3dxdy - \frac{19}{4}dy^2 < 0$, это максимум. ▶

$\mathbb{S}$.11.1–9. Найти $x^3y^5z^7 \to extr$ при условии $3x + 5y + 7z = 15$.

11.2. Большая теорема об условном экстремуме

11.2.1. Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу поиска всех точек экстремума функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (18)$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ \quad ... \\ g_n(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0. \end{cases}$$

Используя векторно матричные обозначения, запишем задачу в виде

$$\begin{cases} f(X, Y) \to \text{extremum}, \\ G(X, Y) = 0, \end{cases}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad (19)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad (20)$$

$$G(X, Y) = \begin{pmatrix} g_1(X, Y) & g_2(X, Y) & \dots & g_n(X, Y) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \quad (21)$$

Условие $G(X,Y)=0$ можно записать также в развернутом виде,

$$\begin{cases} g_1(X,Y)=0, \\ g_2(X,Y)=0, \\ \quad\quad ... \\ g_n(X,Y)=0. \end{cases} \tag{22}$$

Предположим, что выполнены условия теоремы о неявной функции, определяемой системой уравнений (11.2-22). Перечислять все условия, включающие требования непрерывности функций и производных, не будем. Напоинрм только, что в число условий теоремы о неявной функции входит условие

$$\left|\frac{DG}{DY^T}\right| \neq 0, \tag{23}$$

где

$$\left|\frac{DG}{DY^T}\right| \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{24}$$

в точке M_0. Составим функцию Лагранжа

$$L(X,Y,\Lambda) = f(X,Y) + \lambda_1 g_1(X,Y) + ... + \lambda_n g_n(X,Y). \tag{25}$$

Функцию Лагранжа можно записать также в виде

$$L(X,Y,\Lambda) = f(X,Y) + \Lambda^T G(X,Y), \tag{26}$$

где

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T.$$

Метод Лагранжа состоит в поиске всех точек возможного экстремума с помощью необходимых условий в форме Лагранжа, и затем в проверке выполнения достаточных условий в форме Лагранжа.

Будем обозначать

$X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{20} & \dots & x_{m0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

11.2.2. Теорема о необходимых условиях экстремума в форме Лагранжа

$\mathbb{T}$.11.2–1 (необходимые условия экстремума в форме Лагранжа). *Пусть уравнение $G(X, Y) = 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неявной функции, в частности,*

$$\left| \frac{dG}{dY^T} \right| \neq 0$$

в точке $M_0(X_0, Y_0)$. Пусть в точке M_0 функция $f(X, Y)$ с условием $G(X, Y) = 0$ имеет точку экстремума. Пусть

$$L(X, Y) = f(X, Y) + \Lambda^T G(X, Y),$$

или, что то же самое,

$$L(X, Y, \Lambda) = f(X, Y) + \lambda_1 g_1(X, Y) + ... + \lambda_n g_n(X, Y).$$

Тогда найдется значение Λ, при котором одновременно

$$\begin{cases} f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T} = 0_{[1][m]}, \\ f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T} = 0_{[1][n]}. \end{cases} \tag{27}$$

★ В развернутой форме,

$\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \dots & f_{x_m} \end{pmatrix} +$

$$+\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} f_{y_1} & f_{y_2} & \ldots & f_{y_n} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & ... & dx_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_m} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & ... & dy_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_n} & ... & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = 0, \quad (30)$$

★

$$\begin{cases} f_{X^T} + \left(G^T\right)_X \Lambda = 0_{[m][1]}, \\ u_Y + \left(G^T\right)_Y \Lambda = 0_{[n][1]}, \\ G_{X^T} dX + G_{Y^T} dY = 0_{[n][1]}. \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ ... \\ dx_m \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ ... \\ dy_n \end{pmatrix} = 0, \quad (32)$$

□ Продифференцируем равенство $G(X,Y) = 0$, получим $G_{X^T}dX + G_{Y^T}dY = 0$, откуда

$$dY = -(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T}dX,$$

причем определитель матрицы G_{Y^T} отличен от нуля вследствие условия (11.2-23). Поэтому

$$df = f_{X^T}dX + f_{Y^T}dY = \\ = f_{X^T}dX + f_{Y^T}\big(-(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T}dX\big) = \\ = \big(f_{X^T} - f_{Y^T}(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T}\big)dX. \quad (33)$$

Таким образом, необходимое условие экстремума имеет вид

$$du = \big(f_{X^T} - f_{Y^T}(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T})dX = 0, \quad (34)$$

поэтому в точке возможного экстремума

$$f_{X^T} - f_{Y^T}(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T} = 0. \quad (35)$$

Из второго равенства (11.2-27) найдем

$$\Lambda^T = -f_{Y^T}(G_{Y^T})^{-1}.$$

Теперь подставим это выражение в первое из равенств (11.2-27):

$$f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T} = f_{X^T} - f_{Y^T}(G_{Y^T})^{-1}G_{X^T} = 0,$$

так как верно равенство (11.2-35). ■

11.2.3. Теорема о достаточных условиях экстремума в форме Лагранжа

$\mathbb{T}$.11.2–2 (достаточные условия экстремума в форме Лагранжа). *Пусть выполнены условия теоремы (11.2–1),* **(1)** *функция Лагранжа определена равенством*

$$L = f(X,Y) + \Lambda^T G(X,Y),$$

(2) *в точке $M_0(X_0,Y_0)$ верно равенство $dL = 0$ и*

(3) *$d^2L > 0$ при выполнении условий связи в дифференциальной форме,*

$$G_{X^T}dX + G_{Y^T}dY = 0. \tag{36}$$

Тогда в точке M_0 функция $f(X,Y)$ с условиями $G(X,Y) = 0$ имеет точку минимума.

□ **1.**

$$df = f_{X_T}dX + f_{Y_T}dY,$$
$$dg = g_{X_T}dX + g_{Y_T}dY,\ \ dg = 0,$$
$$dY = -g_{Y_T}^{-1}g_{X_T}dX,$$
$$d^2g = dg_{X_T}dX + dg_{Y_T}dY + g_{Y_T}d^2Y,\ \ d^2g = 0,$$

$$d^2Y = -g_{Y_T}^{-1} dg_{X_T} dX - g_{Y_T}^{-1} dg_{Y_T} dY,$$
$$d^2Y = -g_{Y_T}^{-1} dg_{X_T} dX + g_{Y_T}^{-1} dg_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} g_{X_T} dX,$$
$$d^2 f = df_{X_T} dX + df_{Y_T} dY + f_{Y_T} d^2Y,$$

$$d^2 f = df_{X_T} dX - df_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} g_{X_T} dX - f_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} dg_{X_T} dX + f_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} dg_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} g_{X_T} dX, \quad (37)$$

$$df_{X_T} - df_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} g_{X_T} - f_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} dg_{X_T} + f_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} dg_{Y_T} g_{Y_T}^{-1} g_{X_T} \neq 0,$$

■

□ **2.** Продифференцируем равенство

$$L(X, Y) = f(X, Y) + \Lambda^T G(X, Y)$$

и приравняем нулю первый дифференциал,

$$dL = (f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T}) dX + (f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T}) dY = 0,$$

$$\begin{cases} f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T} = 0, \\ f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Отсюда

$$\Lambda^T = -f_{Y^T} G_{Y_T}^{-1}.$$

Найдем второй дифференциал функции Лагранжа,

$$d^2L = d(f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T}) dX + d(f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T}) dY + (f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T}) d^2X + (f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T}) d^2Y. \quad (39)$$

В точке возможного экстремума выполнены условия (11.2-38), поэтому

$$d^2L(M_0) = d(f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T}) dX + d(f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T}) dY,$$

$$d^2L = d(f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T})dX + d(f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T})\big(G_{Y^T}\big)^{-1} G_{X^T} dX =$$
$$= \Big[d(f_{X^T} + \Lambda^T G_{X^T}) + d(f_{Y^T} + \Lambda^T G_{Y^T})\big(G_{Y^T}\big)^{-1} G_{X^T}\Big] dX, \quad (40)$$

поэтому $d^2 f = d^2 L$ при выполнении условий связи в дифференциальной форме, что гарантирует наличие точки экстремума. ■

11.2.4. Примеры

Пример 11.2–1. Найдите экстремум функции $u(x, y, z) = xyz$, при выполнении условий

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ xy + xz + yz = 8. \end{cases}$$

◄ **(1)** $L = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + xz + yz - 8)$,

(2) Найдем

$$dL = dx(yz + \lambda + \mu y + \mu z) + dy(xz + \lambda + \mu x + \mu z) +$$
$$+ dz(xy + \lambda + \mu x + \mu y), \quad (41)$$

(3) Составим систему
$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ xy + xz + yz = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} yz + \lambda + \mu y + \mu z = 0, \\ xz + \lambda + \mu x + \mu z = 0, \\ xy + \lambda + \mu x + \mu y = 0, \end{cases}$ решим методом исключения: $z(y - x) + \mu(y - x) = 0$, $(z + \mu)(y - x) = 0$,

A) $x = y$, $\begin{cases} 2x + z = 5, \\ x^2 + 2xz = 8, \end{cases}$ $x^2 + 2x(5 - 2x) - 8 = 0$,

$$3x^2 - 10x + 8 = 0, x = \frac{5 \pm 1}{3} \in \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}.$$

Точки возможного экстремума

A1) $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

A2) $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{7}{3}$.

Дифференцирование условий связи

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ xy + xz + yz = 8, \end{cases}$$

дает

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ (y + z)dx + (x + y)dz + (x + z)dy = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dz + dy = -dx, \\ (x + y)dz + (x + z)dy = -(y + z)dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)dz + (x + y)dy = -(x + y)dx, \\ (x + y)dz + (x + z)dy = -(y + z)dx, \end{cases}$$

$$(z - y)dy = (x - z)dx, \;\; dy = \frac{x - z}{z - y}dx,$$

$$\begin{cases} (x + z)dz + (x + z)dy = -(x + z)dx, \\ (x + y)dz + (x + z)dy = -(y + z)dx, \end{cases}$$

$$(z - y)dz = (y - x)dx, \;\; dz = \frac{x - y}{z - y}dx,$$

теперь с учетом (11.2-41)

$$d^2L = dx(ydz + zdy + \mu dy + \mu dz)+ \\ + dy(xdz + zdx + \mu dx + \mu dz)+ \\ + dz(xdy + ydx + \mu dx + \mu dy), \quad (42)$$

A1) $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$, $\lambda = 4$.

$$dy = dx, dz = 0,$$

$$d^2L = dx(zdx + \mu dx) + dx(zdx + \mu dx),$$

$$d^2L = (2z + 2\mu)dx^2 = -2dx^2,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2 + \lambda + 2\mu + \mu = 0, \\ 2 + \lambda + 2\mu + \mu = 0, \quad \mu = -2, \lambda = 4, \\ 4 + \lambda + 2\mu + 2\mu = 0, \end{array}\right.$$

►

Пример 11.2–2. Найдите экстремум функции

$$u(x, y, t, s) = (x - t)^2 + (y - s)^2$$

при выполнении условий $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2, \\ 2t + 2s = 8. \end{array}\right.$

◄ Запишем функцию Лагранжа:

$$L = (x - t)^2 + (y - s)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(2t + 2s - 8),$$

$$dL = 2(x-t)(dx-dt) + 2(y-s)(dy-ds) + 2\lambda(xdx+ydy) + 2\mu(dt+ds),$$

$$dL = dx(x - t + \lambda) + dy(y - s + \lambda) + dt(t - x + \mu) + ds(s - y + \mu),$$

$$x = y = 1, \;\; t = s = 2, \;\; \lambda = 1, \;\; \mu = -1.$$

При вычислении второго дифференциала примем во внимание условия связи в дифференциальной форме,

$$\left\{\begin{array}{l} xdx + ydy = 0, \\ dt + ds = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} dy = -dx, \\ ds = -dt, \end{array}\right.$$

$$d^2x = d^2y = 0, d^2t = d^2s = 0,$$

$$\frac{1}{2}dL = (x - t)(dx - dt) + (y - s)(dy - ds) + \lambda(xdx + ydy) + \mu(dt + ds),$$

$$\frac{1}{2}d^2L = (dx - dt)(dx - dt) + (dy - ds)(dy - ds) + \lambda(dx^2 + dy^2),$$

$$\frac{1}{2}d^2L = (dx - dt)(dx - dt) + (-dx + dt)(-dx + dt) + \lambda(dx^2 + dx^2),$$

$$\frac{1}{2}d^2L = 2(dx - dt)^2 + 2dx^2.$$

►

Пример 11.2–3. Задача о равновесии гантели на двух линейных опорах. Пусть

$$u(x, y, t, s) = y + s,$$

$$\begin{cases} y = x, \\ s = t, \\ (x + t)^2 + (y - s)^2 = 2^2, \end{cases}$$

◄ Запишем функцию Лагранжа:

$$L = y + s + p(y - x) + q(s - t) + \frac{r}{2}\left[(x + t)^2 + (y - s)^2 - 4\right],$$

найдем дифференциал функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} dL = dy + ds + p(dy - dx) + q(ds - dt) + \\ + r\big[(x + t)(dx + dt) + (y - s)(dy - ds)\big] = \\ = dy(1 + p + ry - rs) + ds(1 + q - ry + rs) + \\ + dx(-p + rx + rt) + dt(-q + rx + rt). \end{aligned} \tag{43}$$

Запишем необходимые условия в форме Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + p + ry - rs = 0, \\ 1 + q - ry + rs = 0, \\ -p + rx + rt = 0, \\ -q + rx + rt = 0, \end{cases}$$

$p = q$, $p = rx + rt$,

$dL = +dy(1 + rx + rt + ry - rs) + ds(1 + rx + rt - ry + rs),$

$$dL = dy(1 + 2rx) + ds(1 + 2rt),$$

$$x = t, 2x^2 = 2^2, x = \pm 1.$$

Теперь проверим выполнение достаточных условий в форме Лагранжа □ Самостоятельно. ■

►