

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(теория для истолкования экспериментов)

В.Я. Шкадов¹, Е.А. Демехин²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Южный Научный Центр РАН

E-mail: demexin@mail.ru

УДК 532.516

В 1967 г. одним из авторов была предложена математическая модель течения слоя вязкой жидкости, которая явилась основой для разработки теории волновых движений в стекающих пленках. Интенсивные исследования, продолжающиеся почти 40 лет, к настоящему времени привели к созданию теории нелинейных волн, в значительной степени завершенной, пригодной к истолкованию и прогнозированию экспериментальных наблюдений. Успеху этой теории способствовало, прежде всего, обоснованное упрощение исходной системы уравнений Навье—Стокса со сложными краевыми условиями с помощью известного как в России, так и за рубежом метода Капицы—Шкадова. Выведенная система дифференциальных уравнений сохраняет все основные количественные свойства исходной краевой задачи и позволяет применить к исследованию волн современные математические методы теории бифуркаций, теории динамических систем, теоремы Шильникова о ветвлении петель сепаратрис, теории Фейгенбаума о каскаде бифуркаций удвоения периода. Цель данной работы заключается в том, чтобы собрать в одном месте основные результаты и очертить контуры построенной теории нелинейных волн. С практической точки зрения важность этой теории определяется тем, что она является базовой для распространения на широкий класс пленочных течений с поверхностью раздела и связанных с ними технологических проблем.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное изучение течений тонких слоев вязкой жидкости связано с широким практическим применением пленок жидкости в технике и технологии. Огромная поверхность таких пленок, имеющих толщину доли миллиметра, а зачастую и всего несколько десятков микрон, позволяет ускорить физико-химические процессы на поверхности раздела газ—жидкость.

В химической технологии жидкая фаза генерируется в виде тонкого слоя и, двигаясь, взаимодействует с газовым потоком. Частицы жидкости в слоях интенсивно перемешиваются, что, в свою очередь, увеличивает межфазный теплообмен. Пленки являются составной частью теплопередачи в оросительных холодильниках и градирнях, скрубберах и ректификационных колоннах при движении двухфазных парожидкостных смесей в трубах паровых котлов, выпарных аппаратах и нефтеперегонных печах. Расплавленный металл может образовать волновую пленку на поверхности тела (космического корабля или метеорита), обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. В последнее время большой интерес проявился к вопросам, связанным с использованием систем с транспирационным охлаждением для сохранения неизменной геометрии спускаемых космических аппаратов и их структурной целостности в условиях аэродинамического нагрева. Сущность такой защиты состоит в инжектировании жидкого охладителя в критической области тела, что приводит к образованию защитного жидкого слоя.

Пленка конденсата присутствует в явлениях, происходящих в машинах и оборудовании, обслуживающих газоконденсатные месторождения, например, в газовых турбодетандерах и сепараторах для отделения газа от конденсата.

Пленочные течения являются основой некоторых технических процессов на космических станциях, таких как выращивание кристаллов, длительное хранение криогенных жидкостей и т.д.

Пленки при наличии термокапиллярной конвекции нашли свое применение для разработки одного из способов бессеребряной фотографии — термографии.

С развитием приложений магнитной гидродинамики для атомной энергетики, МГД-генераторов, металлургической и сталелитейной промышленности существенно повысился интерес к течению слоев жидкости, управляемых электромагнитным полем.

Основная трудность теоретического исследования пленочных течений заключается в том, что поверхность слоя, как правило, покрыта сложной системой существенно нелинейных волн, как двумерных, так и трехмерных.

Изучение волновых режимов стекающих пленок жидкости имеет кроме практической ценности общетеоретический интерес как пример нелинейных волн в среде с диссипацией и подкачкой энергии. Волны в пленках занимают особое место в теории нелинейных волн. Относясь к процессам в неконсервативных средах, они резко отличаются по свойствам от волн Стокса, морских волн, волн на мелкой воде и ближе к волнам Толмина—Шлихтинга. Несмотря на сложность, связанную с наличием поверхности раздела, развитие нелинейной неустойчивости в тонких пленках может быть исследовано проще процессов, возникающих при потере устойчивости таких сдвиговых течений, как течения Пуазейля, Куэтта, Блазиуса. В определенном смысле в изучении тонких

вязких слоев можно идти впереди в описании нелинейных волн и турбулентности по сравнению с однофазными сдвиговыми течениями. Результаты, полученные для тонкого слоя, могут оказаться полезными для понимания развития неустойчивости, рождения и эволюции нелинейных структур, роли локализованных сигналов и т.д. в других случаях активных сред. В последние годы интенсивно развиваются исследования в области нелинейной теории гидродинамической неустойчивости, теории бифуркаций, теории динамических систем. Применение методов и результатов, полученных в этих областях, позволило создать замкнутую теорию волновых движений жидких пленок на твердых поверхностях.

Особенно важным является случай свободного вертикального стекания жидкости, теоретическое и экспериментальное изучение которого началось с работ П.А. Капицы и С.П. Капицы [1, 2].

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Теоретический подход к исследованию волн в пленках, предложенный в [1], был использован в [3] для разработки метода корректного упрощения полной постановки задачи и сведения ее к содержательным модельным уравнениям. Этим методом в [3] выведена система эволюционных дифференциальных уравнений, занимающая центральное место в теоретических исследованиях волн в пленках конечной толщины. Работа [3] положила начало теории, развитие которой продолжается более тридцати лет. Построение нелинейных волновых решений для истолкования экспериментальных данных [2] было одним из стимулов при разработке теории. В списке литературы выделены в отдельные группы работы, соответствующие отдельным этапам исследований при сохранении сквозной нумерации отдельных ссылок.

1.1. Основы теории нелинейных волн в пленках

Основы теории нелинейных волн в стекающих капиллярных пленках созданы в работах [3–8]. В [3] построено семейство регулярных пространственно-периодических волн конечной амплитуды (первое семейство), в [7] открыты уединенные волны, затухающие при $x \rightarrow \pm\infty$. Регулярные периодические и уединенные волны построены как решения основной системы [3], зависящие от одной переменной $x - ct$ (x — пространственная координата, t — время). Впервые было получено согласование решений [3] и экспериментов [2] по фазовым скоростям, амплитудам и длинам волн первого семейства (рис. 1.1). В [4] исследована задача о нестационарных волнах, порождаемых гидродинамической неустойчивостью, когда регулярные пространственно-периодические волны получают как предельные решения при возрастании t , развивающиеся из малых произвольных начальных возмущений безволновой пленки.

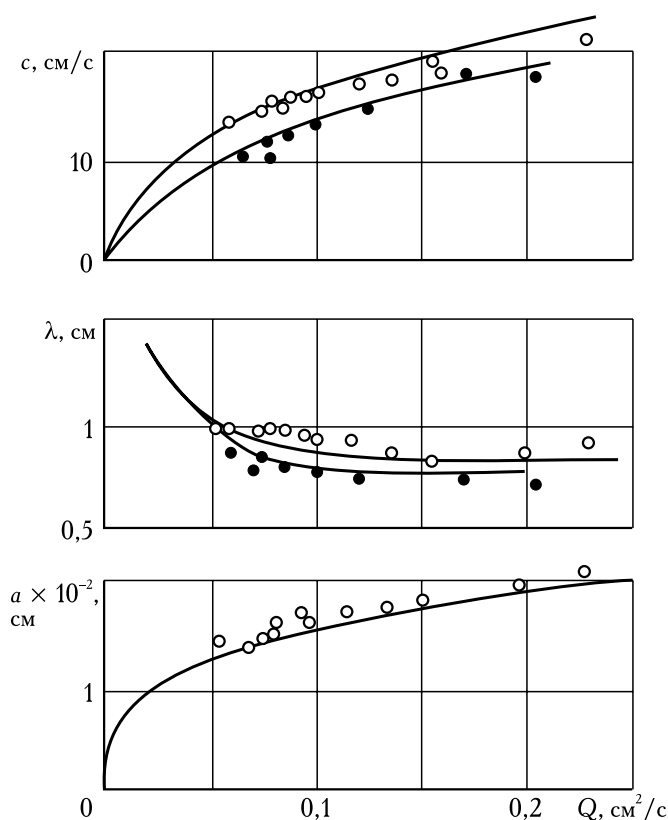


Рис. 1.1. Фазовые скорости, длины волн и средние толщины пленки.

Оптимальные режимы первого семейства [3]

○ — вода, ● — спирт (эксперименты [2])

В [4] поставлена также задача о неустойчивости регулярных волн и показано, что развитие неустойчивости существенно зависит от длины волны и типа возмущений.

В [5, 6] исследована связь основной системы [3] со слабонелинейными модельными уравнениями, которые получаются из полной постановки разложением решений по малому волновому числу. Показано, что слабонелинейные модели выводятся из системы [3] при условии, что расход жидкости в пленке стремится к нулю.

В [7] установлено, что основная система [3] может быть приведена к форме, содержащей единственный внешний параметр подобия δ , отражающий влияние сил тяжести, капиллярности, вязкости, и внутренний параметр s — нормированное волновое число $0 < s \leq 1$. Этот результат способствовал успешному построению регулярных волновых решений и изучению их свойств. Ориентируясь по значениям δ , можно выделить три класса волн: 1) математические волны при бесконечно малых расходах жидкости (при $\delta \rightarrow 0$); 2) регулярные волны, наблюдаемые в экспериментах при умеренных расходах в пленках конечной толщины; 3) неустойчивые стохастические волновые режимы при достаточно больших расходах. Волны второго типа наблюдались в [2] при $0,04 < \delta < 0,4$, в ряде других экспериментов — при $0,1 < \delta < 0,5$. Именно такие волны представляют основной интерес для рассматриваемой теории.

1.2. Первое семейство пространственно-периодических волн

В [9–13] рассматривались волны первого семейства. Исследована проблема сохранения точности решения в цепочке переходов: полная постановка краевой задачи для уравнений Навье–Стокса — приближение пограничного слоя с самоиндуцированным давлением вследствие действия капиллярных сил — модельная система эволюционных уравнений для толщины слоя и расхода жидкости. Показано, что система [3] с высокой точностью воспроизводит результаты, следующие из приближения пограничного слоя при достаточно больших значениях числа Капицы [9]. Поставлена задача о диффузии в пленку, волновая поверхность которой описывается решениями системы [3] для регулярных волн и проведены систематические расчеты. Дано обобщение основной модели на пленочные течения вдоль наклонной к горизонту удерживающей поверхности, а также на течения пленки под воздействием граничного потока [10, 12].

1.3. Второе семейство и уединенные волны

Следующий этап связан с исследованиями более сложных волновых решений системы [3]: периодических волн второго семейства, семейств быстрых и медленных уединенных волн, а также уединенных волн — скачков толщины слоя [14–31].

Основные принципиальные свойства регулярных волн при конечных значениях δ сформулированы в [15, 16] и подробно изложены в [17–20]. Установлено, что первое семейство, ответвляющееся при $s = 1$ в сторону меньших значений s , переходит в медленный солитон при $s \rightarrow 0$. Второе семейство ответвляется от первого семейства вблизи точки $s = 0,5$ и имеет пределом быстрый солитон. При каждом значении δ существует спектр решений в виде уединенных волн (солитонов), а именно, имеется дискретный набор фазовых скоростей и соответствующих собственных решений. Количество быстрых ($c > 3$) и медленных ($c < 3$) солитонов накапливается к точке $c = 3$ при $s = 0$. Эти свойства регулярных волновых решений подтверждены прямыми численными решениями в [19, 31] и сопоставлениями с экспериментами [2] (рис. 1.2). В [20, 21, 28] основная система [3] обобщена на трехмерный случай и показано, что трехмерные волны существуют как нелинейные решения этой системы.

1.4. Бифуркации регулярных волн и аттракторы

В цикле работ [32–40] исследовалась наиболее полная картина бифуркаций семейств регулярных волн для системы [3], а также притягивающие свойства этих решений и самоформирование их из произвольных начальных данных. Сложность картины бифуркаций возрастает с ростом δ . Дополнительно к основному первому и второму семействам

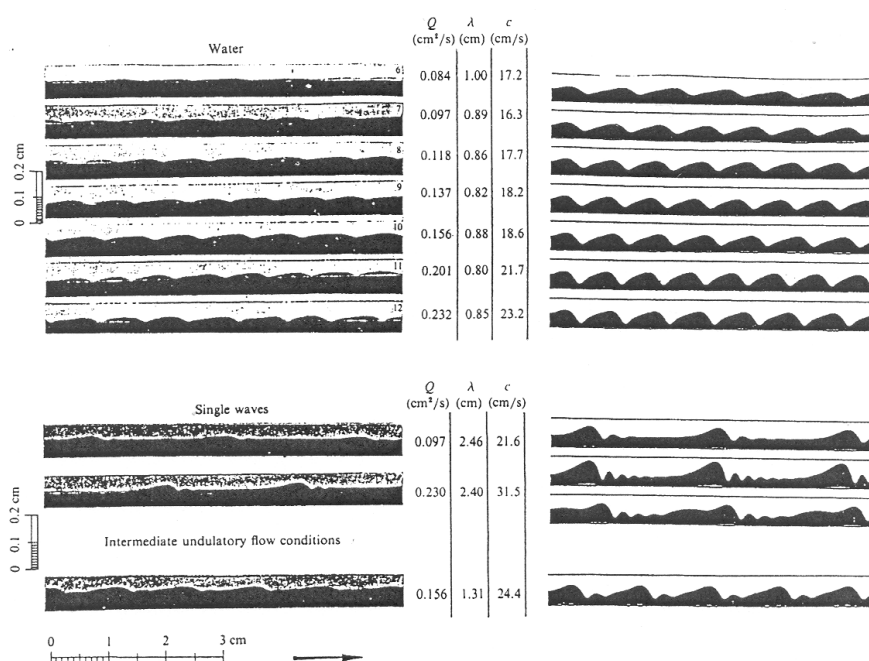


Рис 1.2. Экспериментальные [2] и расчетные [31] профили волн

обнаружены также промежуточные свойства, точки ответвления которых расположены на оси s правее точки бифуркации второго семейства s_b . Каждое из этих семейств продолжается по параметру s и при $s \rightarrow 0$ переходит в медленный солитон. Левее точки s_b имеется множество точек ветвления других семейств разных типов; это множество накапливается при уменьшении s и при $s \rightarrow 0$ каждое из семейств переходит в быстрый ($c > 3$) или медленный ($c < 3$) солитон. Прямыми численными расчетами задачи Коши показано, что существует множество доминирующих волн [32, 33], составляющее в целом глобальный аттрактор системы [3]. При каждом $\delta \neq 0$ глобальный аттрактор составлен из кусочно-непрерывных подмножеств регулярных волн, упорядоченных на отрезке $0 < s \leq 1$ следующим образом в порядке уменьшения s : первое семейство — n семейств промежуточных бифуркаций — второе семейство. Значение n зависит от величины δ : $n = 1$ при $\delta < \delta_1$, $n = 2$ при $\delta_1 < \delta < \delta_2$ и т.д. Саморазвитие начального возмущения при фиксированном s с течением времени заканчивается формированием волнового режима, принадлежащего глобальному аттрактору. Это свойство решений основной системы [3] позволяет заменить физический эксперимент численными расчетами при условии, что множество доминирующих волн при каждом исследуемом значении δ известно. Таблица решений для доминирующих волн в зависимости от s позволяет воспроизвести зависимости между любыми волновыми параметрами, фиксируемые в экспериментах. В [32–40] в развитие [4] разработаны численные методы решения задачи Коши для динамических систем, возникающих из Фурье-представлений пространственно-периодических решений системы [3]. Систематические расчеты позволили установить сценарии развития ре-

гулярных волн из малых возмущений и выделить зоны притяжения в плоскости основных управляющих параметров s , δ . Анализ нестационарных решений модельных динамических систем позволил также классифицировать регулярные волны по свойствам их устойчивости и неустойчивости к малым возмущениям во всей области их существования $0 < s \leq 1$, $\delta > 0$.

1.5. Пространственное развитие взаимодействующих солитонов

В цикле работ [41–48] продолжено углубленное изучение свойств нелинейных режимов периодических и уединенных волн как решений системы [3] и некоторых ее обобщений. При малых значениях δ исследования касаются двух главных проблем: 1) взаимодействия уединенных волн, составляющих развивающиеся по пространству волновые цепочки; 2) неустойчивость двумерных нелинейных волн, переход к трехмерным волновым структурам и формирование трехмерной волны-солитона. Теоретические исследования приближены к экспериментальным условиям путем перехода к изучению пространственной эволюции волны. С вычислительной точки зрения это означает переход от задачи Коши к краевой двухточечной задаче для динамической системы для Фурье-коэффициентов.

1.6. Согласование экспериментов и расчетов

Теоретические исследования волн на всех этапах регулярно сопоставлялись с экспериментальными [49, 61]. Практически любой отдельный эксперимент оказалось возможным воспроизвести решением системы [3] при подходящем подборе основных управляющих параметров δ , s . Экспериментальные значения фазовых скоростей, длин и амплитуд волн успешно сопоставлялись с теоретическими [55] во всех случаях, когда количество измеряемых параметров было достаточно для однозначного выделения соответствующего волнового режима. С другой стороны, теоретические зависимости для параметров волн оказывались полезными для планирования измерений в экспериментах. В монографии [55] “полностью нелинейная система интегральных уравнений Шкадова” систематически применяется для численного моделирования волн и сопоставления экспериментальных результатов с расчетами. Установлено, что в диапазоне умеренных чисел Рейнольдса “этот интегральный подход дает замечательные результаты”. На рис. 1.3 дается пример сопоставления теории и экспериментов для профилей волн.

1.7. Течения пленок в усложненных условиях

В работах [62–75] развиты обобщения модели [3] на течения пленок в усложненных условиях. Прежде всего, следует отметить задачи, связанные с нанесением жидких пленок на твердые поверхности и вы-

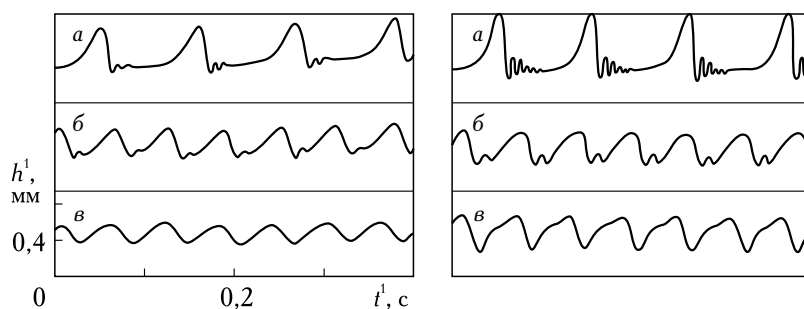


Рис. 1.3. Сравнение профилей установившихся волн при $Re = 8,05$; $\nu = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\sigma/\rho = 57,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$. Слева экспериментальные результаты [51], справа — теоретические [27]

теснением вязкой жидкости из капилляров [62, 63, 66, 67]. Получаемые в расчетах параметры стационарных течений вполне согласуются с результатами измерений. Обнаружены также более сложные течения с пространственно-периодическими профилями поверхности раздела, возникающими при увеличении максимальной скорости. Принципиально новое обобщение модели [3] дано в статьях [65, 69, 73], где в рассмотрение включены тангенциальные силы на поверхности пленки, порождаемые эффектом Марангони от воздействия испаряющихся поверхностно-активных веществ. Схема течения включает перенос растворенного ПАВ в пределах диффузионного пограничного слоя вблизи свободной поверхности. Подробный анализ возможностей обобщения модели [3] на термокапиллярные течения подогреваемой пленки жидкости дан в [64]. В [70] рассматривается случай, когда силы Марангони порождаются нагревом стекающей пленки. В [71, 72] в развитие работы [5] исследуются волновые течения осесимметричной пленки на вращающемся диске. В [75] показано, что пространственная неоднородность течения пленки может составлять существенную часть механизма отбора неустойчивых возмущений, самопроизвольно развивающихся в регулярные нелинейные волны. В [74] по аналогии с [3] выведена система уравнений для двухслойной стекающей пленки и исследованы моды неустойчивости.

1.8. Приложения и развитие модели [3]

Группа публикаций [76–100] включает исследования, в которых авторы активно применяют разработанные в [3–8] математические подходы к динамике волн в пленках, прежде всего, основную модель [3] и слабонелинейные асимптотические варианты этой модели. Исследуются различные частные случаи волновых режимов и, как правило, результаты их дополняют сведения о свойствах волн, полученных в работах [9–75]. В то же время многочисленные прямые расчеты течений волновых пленок по модели [3] продемонстрировали возможность появления некоторых более сложных бифуркаций наряду с мягкой бифуркацией

первого семейства от стационарного течения и жесткими бифуркациями второго и промежуточных семейств от первого семейства. Публикации [64, 76–100] принадлежат исследователям из ряда стран, в них обсуждаются разнообразные вопросы гидродинамики волновых пленок, связанные как с математическими проблемами теории нелинейных волн, так и с практикой наблюдения волновых пленок в экспериментальных и технологических установках. Объединяет эти публикации то обстоятельство, что в качестве основной теоретической модели для исследований принята система уравнений [3]. История таких публикаций начинается в 1972 г. с работы [86], в которой анализ нелинейных волн и различных известных к тому времени подходов заканчиваются выводом: *“метод Шкадова представляет единственное согласованное решение задачи о стекающих пленках, использующее подход Капицы”*. Однако в течение ряда последующих лет в западных журналах публиковались, в основном, работы, в которых использовались различные варианты длинноволновых слабонелинейных приближений, выводимых из точной постановки для уравнений Навье–Стокса разложениями по малому волновому числу. Общий недостаток таких подходов — практически полная непригодность к описанию волн в реальных пленках малой, но конечной толщины. Эти теоретические исследования по своему уровню отставали от публикуемых в отечественных журналах работ по теории нелинейных волн в пленках. Ситуация изменилась в начале 90-х годов, когда появились результаты коллективов с участием российских исследователей по этой проблеме, освоивших опыт работы с основной моделью [3]. В связи с этим обстоятельством можно отметить несколько групп работ, к примеру [8, 41–47, 71–73, 85, 90]. В монографии [47] *“модель Шкадова”* систематически применяется для исследования задач о сложных взаимодействиях волн, развивающихся по пространству. В ряде современных публикаций эта основная модель поставлена в центр исследований интенсивных пленочных течений с повышенной вязкостью [91, 95, 99], с проявлениями концентрационного и термокапиллярного эффекта Марангони при нагреве стенки [64, 70, 73]; течений вдоль профилированных поверхностей с пространственно-периодическими рельефами [100], течений пленки на вращающемся диске при непрерывной подаче массы в центре [71, 72, 75]. Расчеты волн по модели [3] используются при решении задач о диффузии в пленках и вычислении коэффициента массообмена. Исследование интенсивных пленочных течений потребовало дальнейших разработок по усовершенствованию и обобщениям модели [3], как это продемонстрировано в [93–98].

1.9. К истории исследований волн в пленках

Статьи [101–113] не связаны непосредственно с основной моделью излагаемой здесь теории, однако они неразрывно связаны с многолетней историей изучения волновых пленочных течений. В них отраже-

ны многочисленные идеи и подходы, и хотя ни одна из них не получила развития в законченную теорию, они оказали стимулирующее воздействие на разработчиков теории [3–48, 65, 73]. Сопоставление соответствующих результатов позволяло не только открывать преимущества развиваемой модели [3], но и формулировать вопросы для новых исследований. В этих статьях применяется метод разложений по малому параметру и анализ решений получающихся при этом слабонелинейных модельных уравнений. Отметим в числе их обзоры [106, 112].

1.10. Дополнительная литература

В теоретических публикациях [114–124] содержатся результаты, которые при исследовании нелинейных волн в пленках были необходимы на всех этапах работы для оценки и классификации результатов в соответствии с современными представлениями гидродинамики и математики о динамических системах и о нелинейных волнах в средах с диссипацией и дисперсией. Существенно влияние результатов Г.И. Петрова [114, 115] в области прямых методов решения задач аэрогидродинамики, в частности теории гидродинамической устойчивости, которые сыграли важную роль в выборе подходов к анализу волновых пленок и завершились созданием метода Капицы–Шкадова и обобщений этого метода [47, 64, 86, 88, 106].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим движение вязкого слоя несжимаемой жидкости по вертикальной поверхности, $y = 0$, под действием силы тяжести [3–6]. Слой имеет свободную поверхность раздела $f(\mathbf{x}, t) = 0$. Нормальные напряжения на этой поверхности со стороны газовой фазы сводятся к атмосферному давлению, $p_0 = \text{const}$, действующему по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности. При переходе через границу раздела фаз, имеющую кривизну $K(f)$, нормальные напряжения испытывают скачок, обусловленный действием капиллярных сил. Касательные напряжения на поверхности раздела равны нулю. Приведем величины к безразмерному виду, взяв в качестве базисных величин безволновую толщину слоя l_0 , среднюю по сечению скорость, $\langle u \rangle = gl_0/(3\nu)$, плотность жидкости ρ . Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение свободного падения. Уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{3}{R} \mathbf{G} \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $R = \langle u \rangle l_0 / \nu$ — число Рейнольдса, $\mathbf{G} = (1, 0, 0)$ — вектор массовых сил. Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t) = y - h(x, z, t) = 0: \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{u} = 0, \\ [p - p_0 - WK(h)]n_i - \tau_{ij}n_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$y = 0: \quad \mathbf{u} = 0.$$

Здесь

$$\tau_{ij} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$W = \sigma / \rho \langle u \rangle^2 l_0$ — безразмерное поверхностное натяжение, n_i — компоненты вектора нормали к поверхности.

Система (2.1)–(2.2) описывается двумя параметрами: R и W . Иногда бывает удобно в качестве этих параметров взять R и γ , где $\gamma = \sigma \nu^{-1} \nu^{-4/3} g^{-1/3}$ — число Капицы, безразмерный параметр, характеризующий свойства жидкости [1, 2, 102]. Тогда, согласно [5],

$$W = 3^{1/3} \gamma R^{-5/3}. \quad (2.3)$$

Существующие теоретические подходы к нелинейным волновым процессам в пленках жидкости можно разделить на два направления. В первом, исходя из тех или иных соображений, выводятся и исследуются упрощенные уравнения. Успех исследования при таком подходе в значительной степени зависит от выбранного уравнения, и результаты его решения должны тщательно проверяться сравнением с опытными данными или решением в неупрощенной постановке. В работах другого направления решают полную систему (2.1)–(2.2). Такая постановка имеет преимущества перед первой в строгости подхода, но ее решение — технически весьма трудная задача, требующая, кроме того, большого расхода машинного времени. Хотя числа Рейнольдса пленочных течений, как правило, невелики, граница раздела фаз заранее неизвестна и на этой границе ставятся сложные краевые условия. Поэтому по степени сложности численное решение задачи сопоставимо с исследованием нелинейной неустойчивости в течениях типа Пуазейля или Куэтта. Однако при умеренных числах Рейнольдса существует возможность, учитывая специфику задачи, существенно ее упростить. Суть этого упрощения сводится к тому, что в большинстве встречающихся в экспериментах случаев волны длинные, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial y}.$$

Для воды при числах Рейнольдса вплоть до сотен толщина слоя имеет порядок долей миллиметра, в то время как волны на поверхности раздела — порядка сантиметров [55].

Преобразуем скорость v и переменные x, t , рассмотрев для простоты двумерный случай [3, 7, 19]

$$v \rightarrow v/\varkappa, \quad x \rightarrow x\varkappa, \quad t \rightarrow t\varkappa,$$

где $\varkappa$ пока не определено. Тогда уравнения (2.1)–(2.2) для двумерного случая примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varkappa}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 + \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\varkappa R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$y = h(x, t): \quad v = h_t + u h_x, \quad (2.4)$$

$$p + \frac{W}{\varkappa^2} \frac{h_{xx}}{\left(1 + \frac{h_x^2}{\varkappa^2}\right)^{3/2}} - \frac{2}{\varkappa R} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1 + \frac{h_x^2}{\varkappa^2}}{1 - \frac{h_x^2}{\varkappa^2}} = p_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4h_x}{\varkappa^2 \left(1 - \frac{h_x^2}{\varkappa^2}\right)} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$y = 0: \quad u = v = 0.$$

Будем рассматривать течения, в которых капиллярные, гравитационные и вязкие силы имеют одинаковый порядок

$$\frac{3\varkappa}{R} = \frac{W}{\varkappa^2} = \frac{1}{5\delta}.$$

Вместо R и W удобно ввести параметры δ и ε :

$$\delta = \frac{R}{15\varkappa}, \quad \varepsilon = \frac{1}{15\varkappa^2}. \quad (2.5)$$

Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Если оставить в (2.4) члены $O(\varepsilon)$ и преобразовать $p \rightarrow p/\delta$, то уравнения примут вид

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \right) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \left[\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - 15\delta \left(u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$y = h(x, t): \quad v = h_x + u h_x, \quad (2.6)$$

$$p + \frac{1}{5\delta} h_{xx} - p_0 = 2\varepsilon \left[\frac{9}{4} h_{xx} h_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} - h_x \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 15\varepsilon \left[h_x^2 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - 4h_x \frac{\partial v}{\partial y} \right],$$

$$y = 0: \quad u = v = 0.$$

Формулы (2.5) можно переписать:

$$\delta = 3^{-7/9} 5^{-1} \gamma^{-1/3} R^{11/9}, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon = 3^{4/9} 15^{-1} \gamma^{-2/3} R^{4/9}, \quad (2.8)$$

$$\varkappa = 3^{-2/9} \gamma^{1/3} R^{-2/9}. \quad (2.9)$$

Для большинства жидкостей при нормальных условиях и числах Рейнольдса от нуля до сотен $\varepsilon \ll 1$ и $\varepsilon\delta \ll 1$. В нижеприведенной таблице даны значения ε и δ в зависимости от числа Рейнольдса R для ртути $\gamma = 28000$, воды $\gamma = 2850$ и глицерина $\gamma = 0,18$. Значения ε и $\varepsilon\delta$ оказываются малыми: для ртути вплоть до $R = 1000$, для воды — вплоть до 200–300. С другой стороны, для глицерина ε велико уже при $R = 1$. То же самое имеет место для минеральных масел, не приведенных в табл. 2.1. Однако, как видно из (2.8), $\varepsilon \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$ для любого конечного фиксированного γ .

Таблица 2.1

R	Ртуть, 20°C		Вода, 15°C		Глицерин, 20°C	
	δ	$\varepsilon \cdot 10^4$	δ	$\varepsilon \cdot 10^3$	δ	ε
1	0,0028	1,2	0,006	0,54	0,151	0,341
5	0,02	2,4	0,0429	1,1	1,078	0,697
10	0,0467	3,3	0,1	1,51	2,514	0,948
50	0,334	6,7	0,716	3,13	17,97	1,939
100	0,78	9,1	1,67	4,21	41,94	2,638
500	5,576	18,7	11,94	8,53	299,86	5,395
1000	13,01	25	27,86	12	699,59	7,341

Если нормированные $u, v, \partial/(\partial x), \partial/(\partial y)$ стали порядка единицы, то членами в правой части (2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно пренебречь. Тогда система уравнений примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$y = h(x, t): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = 0: \quad u = v = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy = 0, \quad (2.11)$$

где кинематическое условие удобно заменить на интегральное (2.11). Пространственно-периодические решения этой системы, выведенной в [3] с использованием параметров R, W , исследовались в [9]. С использованием параметра δ [7] система приведена к виду (2.10)–(2.11) в [17].

Совершенно аналогичным образом проводятся рассуждения в трехмерном случае, $z \rightarrow \varkappa z$. Уравнения принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta h + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta h + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$y = h(x, y, t): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$y = 0: \quad u = v = w = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w \, dy = 0. \quad (2.14)$$

Здесь $\delta, \varkappa, \varepsilon$ определяются формулами (2.7)–(2.9) и W выражается через γ и R по формуле (2.3). Системы (2.10)–(2.11) и (2.12)–(2.14) можно назвать уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным

капиллярными силами давлением. Как двумерная, так и трехмерная задачи о вертикальном стекании описывается только одним параметром δ , что резко уменьшает исследовательские сложности. Это позволяет провести исследование для всех жидкостей с большим числом Капицы γ .

Уравнение погранслоного типа с самоиндуцированным давлением существенно проще для исследования, чем полная система. Тем не менее, и исследование, и получение решения даже для случая стационарной бегущей волны довольно сложно. Введем криволинейную систему координат, выпрямляющую границу раздела:

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, z, t)}, \quad \zeta = z.$$

Разложим u, v по полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (2.13):

$$\psi_k(0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_k(1)}{\partial \eta} = 0,$$

$$\psi_1 = \eta - \frac{1}{2} \eta^2, \quad \psi_2 = \eta^2 - \frac{2}{3} \eta^3, \quad \dots, \quad \psi_k = \eta^k - \frac{k}{(k+1)} \eta^{k+1}.$$

Ограничимся конечным числом базисных функций N , найдя вертикальную компоненту скорости v из уравнения неразрывности.

Проектировать уравнения движения будем на функции $\psi_1 = 1, \psi_2 = \eta, \dots, \psi_N = \eta^{N-1}$. Имеем, таким образом, $2N + 1$ неизвестное и $2N + 1$ уравнение.

При $N = 1$ получим систему уравнений, известную как система Шкадова [20, 47, 55, 64]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \underbrace{\frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qp}{h} \right)}_I = \frac{1}{5\delta} \left\{ \underbrace{h \frac{\partial}{\partial x} \Delta h}_{II} + \underbrace{h}_{III} - \underbrace{\frac{q}{h^2}}_{IV} \right\}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \underbrace{\frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qp}{h} \right) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p^2}{h} \right)}_I = \frac{1}{5\delta} \left\{ \underbrace{h \frac{\partial}{\partial z} \Delta h}_{II} - \underbrace{\frac{p}{h^2}}_{IV} \right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.16)$$

Здесь в качестве неизвестных было удобно выбрать расходы в направлении x и z , q и p . При наличии одной базисной функции компоненты скоростей имеют автомодельный параболический профиль

$$u = \frac{3q}{h} \left(\eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad w = \frac{3p}{h} \left(\eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right).$$

Заметим, что если ввести вектор расхода $\omega = (q, p)$, то (2.15)–(2.16) можно представить в инвариантном относительно координат векторном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{6}{5} \left[\omega \nabla \left(\frac{\omega}{h} \right) + \left(\frac{\omega}{h} \nabla \right) \omega \right] = \frac{1}{5} \delta \left[hf + h \nabla (\Delta h) - \frac{\omega}{h^2} \right], \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \omega = 0.$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{g}/|\mathbf{g}|$ — единичный вектор силы тяжести, $\nabla = \mathbf{i}(\partial/(\partial x)) + \mathbf{j}(\partial/(\partial z))$ — оператор Гамильтона, $\Delta = \partial^2/(\partial x^2) + \partial^2/(\partial z^2)$ — оператор Лапласа. Система (2.17) напоминает систему уравнений математической гидравлики и уравнения для плоской нестационарной задачи газовой динамики, где роль плотности играет толщина слоя h . Однако наличие члена $h \nabla (\Delta h)$, ответственного за капиллярные силы, приводит к тому, что свойства (2.17) резко отличаются от свойств гиперболических систем, описывающих газодинамические задачи и задачи математической гидравлики.

Система (2.15)–(2.16) допускает двумерные решения, $p = 0$, $\partial/(\partial z) = 0$, описываемые уравнениями

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \underbrace{\frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right)}_I = \frac{1}{5\delta} \left(\underbrace{hh_{xxx}}_{II} + \underbrace{h}_{III} - \underbrace{\frac{q}{h^2}}_{IV} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Уравнения (2.15)–(2.16) и (2.18) представляют собой усредненные по поперечной координате уравнения баланса импульса и массы. Члены I ответственны за конвективную часть ускорения, члены II и III характеризуют соответственно капиллярные силы и силы веса, IV — вязкую диссипацию в слое. Основные результаты о нелинейных двумерных волнах в пленках, излагаемые в данной работе, получены из анализа решений базовой модельной системы (2.18), выведенной в [3].

Предположение автомодельного параболического профиля скоростей, заложенное в уравнения при умеренных числах Рейнольдса, не

должно сильно влиять на интегральные величины типа распределения толщины слоя $h(x, z)$, скорости волны и т.д. С физической точки зрения волнообразование в пленке жидкости является поверхностным и, следовательно, слабо зависящим от профиля скоростей явлением. В этом состоит одно из отличий неустойчивости пленок от течений типа Пуазейля, Куэтта, Блазиуса, течений в затопленных струях, следа за телом от стекающих жидких слоев.

При $\delta \rightarrow 0$ (малые числа Рейнольдса) каждая из систем (2.15)–(2.16), (2.18) приводится к одному уравнению [6, 7]. Введем замены переменных

$$t_1 = \alpha_n t, \quad x_1 = \alpha_n x, \quad z_1 = \alpha_n z, \quad h = 1 + \alpha_n^3 H, \quad \alpha_n \equiv \sqrt{15\delta}.$$

Тогда при $\alpha_n \rightarrow 0$ из (2.15) последовательно получаем

$$q = h^3 + o(\alpha_n^6), \quad \frac{\partial q}{\partial t_1} = -9h^4 \frac{\partial h}{\partial x_1} + o(\alpha_n^6),$$

$$q = h^3 + \alpha_n^3 \left[h^3 \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta h + h^6 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] + o(\alpha_n^9),$$

$$p = \alpha_n^3 h^3 \frac{\partial}{\partial z_1} \Delta h + o(\alpha_n^9),$$

$$h^3 = 1 + 3\alpha_n^3 H + 3\alpha_n^6 H^2 + o(\alpha_n^9).$$

Подставляя q, p в уравнение (2.16), получаем с точностью $o(\alpha_n^9)$ уравнение Бенни [103]

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial h^3}{\partial x_1} + \alpha_n^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta h + h^3 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(h^3 \frac{\partial}{\partial z_1} \Delta h \right) \right] = 0. \quad (2.19)$$

Введем растяжение переменных

$$t_2 = \alpha_n^3 t_1, \quad x_2 = x_1 - (3 + \alpha_n^3 \tilde{c}) t_1, \quad z_1 = z_2.$$

Теперь из (2.19) выводим при $\alpha_n \rightarrow 0$ слабонелинейное уравнение теории пленочных течений

$$\frac{\partial H}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(3H^2 - \tilde{c}H + \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z_2^2} \right)^2 = 0. \quad (2.20)$$

Таким образом, уравнение (2.20) представляет предельную асимптотическую форму модельной системы [3] при стремлении расхода к нулю. Впервые уравнение (2.20) выведено этим методом в [6] для двумерного случая.

Системы (2.15)–(2.16) и (2.18) при конечных значениях $\delta \neq 0$ описывают физические волны, которые можно сравнить с экспериментами. Асимптотическое уравнение (2.20) описывает математические волны бесконечной длины и бесконечно малой амплитуды и не содержит параметров, связанных с экспериментальными условиями. Математическая модель нелинейных волн в пленках сводится к одному уравнению только при условии $\delta \rightarrow 0$. Для конечных значений δ математическая модель волновых течений пленок сводится к системе двух уравнений [3].

В [5] методом разложения по α^2 выведено уравнение

$$\varphi_t + [Q_0 \varphi + 3\varphi^2 + Q_1 \varphi_\xi + Q_2 \varphi_{\xi\xi\xi}]_\xi = 0,$$

которое совпадает с (2.20) с точностью до обозначений. Там же построено семейство периодических решений (2.20) на интервале нормированных волновых чисел $0,5 \leq s \leq 1$, что составляет часть интервала неустойчивости $0 \leq s \leq 1$. Характерные свойства этого решения: $\tilde{c} = 0$, точка максимальной амплитуды $s = 0,850$, точка наибольшего инкремента нарастания линейных волн $s = 0,707$. Доказана устойчивость решения этого семейства при $0,577 \leq s \leq 1$ к возмущениям той же длины волны и сдвигом по фазе. Исследования [5, 6] по уравнению (2.20) продолжены в [17–19, 24, 32, 76, 77] и в других работах. Наиболее полная картина бифуркаций семейств волн и аттракторов дана в [30]. В циклах работ [14–40] уравнение (2.20) использовалось в качестве полезной модели для получения параметров нелинейных волн при малых значениях δ ; от этих данных численные решения систем (2.15)–(2.16), (2.18) продолжались к конечным значениям δ , характерным для реальных пленок конечной толщины.

При больших числах Рейнольдса удобно ввести растяжение переменных $t_1 = 1/\delta t$, $x_1 = 1/\delta x$, тогда система переходит в

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q^2}{h} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\delta^3} h \frac{\partial^3 h}{\partial x_1^3} + h - \frac{q}{h^2} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0.$$

При $\delta \rightarrow \infty$ поверхностные капиллярные силы становятся малы по сравнению с массовыми силами гравитации и инерции и ими можно пренебречь. Система при этом переходит в систему гиперболических уравнений математической гидравлики типа системы Сен-Венана

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q^2}{h} \right) = \frac{1}{5} \left(h - \frac{q}{h^2} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0.$$

При решении этой системы нужно учитывать возможность разрывов, и поэтому она должна быть дополнена условиями на скачке.

В обзоре [8] приводятся обобщения систем (2.15)–(2.16) и (2.18) на случаи, когда удерживающая поверхность наклонена к горизонту и на свободной поверхности пленки действует касательная сила, вызываемая граничным потоком газа или градиентами поверхностного натяжения.

3. ПЕРВИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Система (2.15)–(2.16) при всех δ имеет простейшее тривиальное решение $h = q = 1$, $p = 0$, которое соответствует плоскому течению с постоянной толщиной и расходом. При выходе жидкости из распределителя имеет место это плоскопараллельное течение, которое, однако, теряет устойчивость. Эта неустойчивость, которую мы условимся называть первичной, вызывает каскад других неустойчивостей и переходов вниз по каналу. Наложение на плоское течение бесконечно малых синусоидальных возмущений с действительными волновыми числами α и β по пространственным координатам и комплексной скорости c приводит к дисперсионному соотношению, связывающему волновые числа и комплексную скорость,

$$5c^2 - 12c + 6 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2 \delta} + \frac{i}{\alpha \delta} (3 - c) \quad (3.1)$$

и условию нейтральной устойчивости

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha \sqrt{15\delta}.$$

Типичное поведение коэффициента роста αc_i как функции α и β при фиксированном δ показано на рис. 3.1, а.

Возмущения, имеющие максимальный коэффициент роста αc_i^m , по теореме Сквайра являются двумерными. Этот максимум достигается при наиболее опасном волновом числе $\alpha = \alpha_m$, которое можно пересчитать в наиболее опасную частоту $\omega = \alpha_m c_m$. Возмущения с данными параметрами α , ω реализуются из случайного шума вниз по потоку. Поверхность нейтральной устойчивости изображена на рис. 3.1, б. Сечения этой повер-

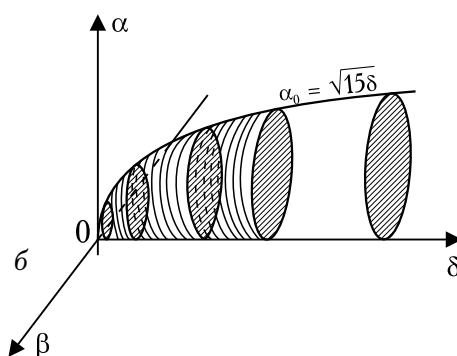
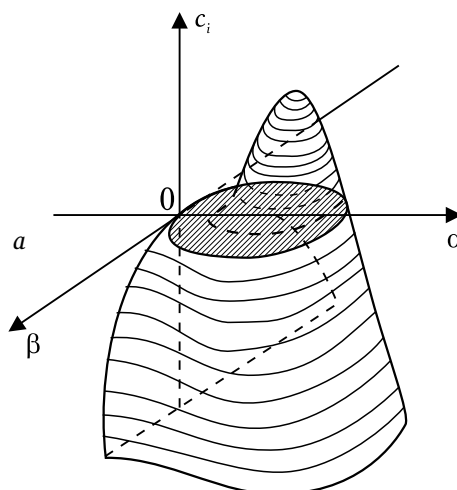


Рис. 3.1. а) Коэффициент роста как функция волновых чисел; б) нейтральная поверхность в зависимости от модифицированного числа Рейнольдса

хности — окружности, касающиеся оси δ . Двумерные нейтральные возмущения описываются соотношением $\alpha_0 = \sqrt{15\delta}$. Итак, вертикальное плоское течение неустойчиво уже при очень малых (теоретически нулевых) числах Рейнольдса δ . Первичная неустойчивость приводит к выделению из всего спектра случайных возмущений на входе узкой полосы частот около частоты максимального роста ω_m . Таким образом, первичная неустойчивость регулирует трехмерный случайный шум на входе, превращая его в почти регулярные двумерные волны на некотором расстоянии от входа L . Это расстояние можно оценить по линейной теории, принимая, что амплитуда возмущения растет от амплитуды шума $o(\epsilon)$ до $o(1)$, где наступает нелинейное насыщение волны:

$$L = \frac{c_m}{\alpha c_i^{\max}} \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

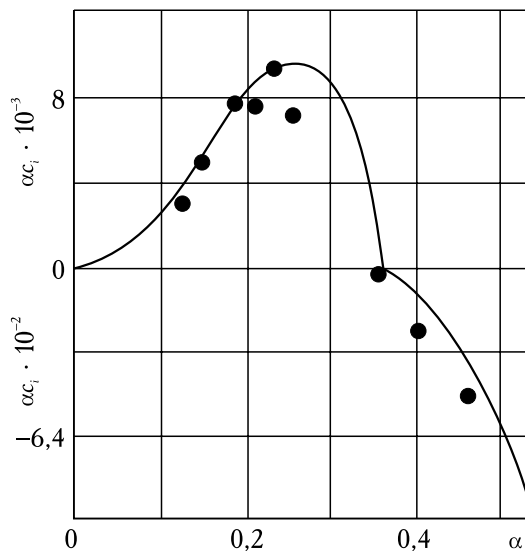


Рис. 3.2. Экспериментальный [58] и теоретический коэффициенты роста как функции волнового числа

Следует подчеркнуть, что в рамках постановки (2.1)–(2.2) линейная задача об устойчивости приводит к исследованию собственных значений дифференциального уравнения Орра—Зоммерфельда с соответствующими краевыми условиями и не имеет аналитического решения. Исследование же первичной неустойчивости в рамках подхода Капицы—Шкадова исключительно просто. Вместе с тем, теория количественно правильно описывает экспериментальные данные. Так, на рис. 3.2 приведены результаты решения дисперсионного соотношения (3.1) в сравнении с экспериментом, показывающие очень хорошее соответствие.

4. ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛН

В результате развития первичной неустойчивости устанавливаются периодические волны конечной амплитуды, близкие к стационарным бегущим волнам. Такие волны устанавливаются вследствие нелинейного насыщения развивающихся вниз по потоку возмущений и равновесия между эффектами нелинейности, неустойчивости и дисперсии. Система (2.18) для стационарных бегущих волн приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка относительно толщины слоя $h(x)$ [3, 7]

$$h^3 h''' + \delta [6(q_0 - c)^2 - c^2 h^2] h' + [h^3 - q_0 - c(h - 1)] = 0 \quad (4.1)$$

где q_0 — постоянная интегрирования, для периодической волны означающая средний по периоду расход в слое.

Уравнение (4.1) имеет тривиальное решение $h(x) = 1$, $q_0 = 1$. В зависимости от краевых условий существуют также другие решения (4.1):

а) периодические волны с длиной волны $2\pi/\alpha$

$$h(0) = h(2\pi/\alpha), \quad h'(0) = h'(2\pi/\alpha), \quad h''(0) = h''(2\pi/\alpha);$$

б) уединенные волны

$$x \rightarrow \pm\infty: \quad h \rightarrow 1; \quad h', \quad h'' \rightarrow 0; \quad (4.2)$$

в) решения типа гидравлических прыжков с разностью уровней a

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty: \quad h &\rightarrow 1; \quad h', \quad h'' \rightarrow 0, \\ x \rightarrow -\infty: \quad h &\rightarrow 1+a; \quad h', \quad h'' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ определяет волну сжатия, $a < 0$ — волну разрежения;

г) решения типа двухпериодических $h(\alpha_1 x, \alpha_2 x)$ с периодом 2π по переменным

$$x_1 = \alpha_1 x, \quad x_2 = \alpha_2 x.$$

Если взять более общее условие ограниченности h, h', h'' на всей числовой оси $x \in (-\infty, +\infty)$, то уравнение (4.1) имеет еще

д) пространственно-стохастические решения.

4.1. Качественное поведение решений в фазовом пространстве

Ряд существенных свойств стационарных бегущих волн можно получить, не прибегая к численному решению (4.1), из общих соображений о поведении фазовых кривых динамической системы 3-го порядка [118]. Интерес в данном случае представляют не притягивающие множества (4.1), а решения, ограниченные при $x \in (-\infty, +\infty)$. Являются ли они аттракторами или нет — этот вопрос должен решаться в нестационарной постановке (2.15)–(2.16). Обычно в механике сплошных сред динамические системы получаются из малопараметрического разложения по пространству; таким образом, их поведение является простым по пространству, но может быть сложным во времени. В данном случае поведение во времени просто: ищется решение типа бегущей волны. Поведение же в пространстве, то есть профиль волны $h(x)$, может быть весьма сложным. Для исследования решений уравнения (4.1) в фазовом пространстве удобно перенормировкой положить неизвестную $q_0 = 1$, как это сделано в [22], и пользоваться понятиями теории динамических

систем, рассматривая задачу как эволюционную, а не краевую, интерпретируя x как время [24]. Введем трехмерное фазовое пространство

$$h_1 = h, \quad h_2 = h', \quad h_3 = h'' \quad (4.3)$$

и запишем (4.1) в виде динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} &= h_2, \\ \frac{dh_2}{dx} &= h_3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{dh_3}{dx} = \delta \left[\frac{c^2}{h_1} - \frac{6(1-c^2)}{h_1^3} \right] h_2 + \frac{1-h_1^3 + c(h_1-1)}{h_1^3}.$$

Фазовый поток, определяемый системой (4.4), сохраняет фазовый объем

$$\frac{\partial h'_1}{\partial h_1} + \frac{\partial h'_2}{\partial h_2} + \frac{\partial h'_3}{\partial h_3} = 0. \quad (4.5)$$

Эта система, не являясь гамильтоновой, должна иметь некоторые свойства гамильтоновости [118–120]. При фиксированном δ параметр c определяет однопараметрическое семейство фазовых потоков в пространстве $\{h_1, h_2, h_3\}$. Ищутся такие значения c , при которых в фазовом пространстве имеются ограниченные интегральные кривые. Плоскопараллельному режиму течения $h = \text{const}$, $h' = h'' = 0$ соответствует стационарная точка фазового пространства. Пространственно-периодическому решению соответствует цикл; солитону — петля сепаратрисы стационарной точки; гидравлическому прыжку — гетероклиническая кривая, идущая из одной стационарной точки в другую; двухпериодическому движению — обмотка инвариантного тора в $\{h_1, h_2, h_3\}$. Кроме того, в фазовом пространстве имеются сложные кривые стохастической природы.

При $c > 3/4$ система (4.4) имеет три стационарные точки O_1, O_2, O_3 с координатами: $(1, 0, 0)$, $(-1/2 \pm (c - 3/4)^{1/2}, 0, 0)$. Третья стационарная точка не имеет физического смысла, так как для нее $h_1 < 0$. Значение $c = 3$ является бифуркационным значением параметра, при котором две первые стационарные точки сливаются.

Характеристическое уравнение, описывающее поведение малых решений вблизи O_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma^3 + \delta\omega\sigma + (3-c) &= 0, \\ \omega &= 5c^2 - 12c + 6. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если величина $\varepsilon = (3 - c)^2/4 + \delta^3\omega^3/27 > 0$, то (4.6) имеет 1 действительный корень $\sigma_1 = 2m$. При $c > 3$ этот корень положителен, при $c < 3$ — отрицателен. Два других корня $\sigma_{2,3} = -m \pm i\beta$ — комплексно-сопряженные, знак их действительной части противоположен знаку σ_1 . В фазовом пространстве O_1 является седлофокусом с одномерным притягивающим многообразием W_1^s для $c < 3$ (двумерным для $c > 3$) и устойчивым многообразием W_1^u , двумерным для $c < 3$ (одномерным для $c > 3$). Если $\varepsilon < 0$, то (4.6) имеет три действительных корня, причем в силу равенства $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ знаки всех трех корней не могут быть одинаковыми. Стационарная точка, следовательно, является седлоузлом.

Значение $\varepsilon = 0$ служит границей, разделяющей случаи седлоузла и седлофокуса. При этом должно выполняться равенство

$$\delta = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{27(3-c)^2}{4} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

При $c > 3$ равенство (4.7) для положительных δ не выполняется, и в этом случае O_1 может быть только седлофокусом. При $c < 3$ точка O_1 может быть как седлофокусом, так и седлоузлом. В случае седлоузла $\sigma_1 < 0$, $\sigma_{2,3} > 0$ и O_1 имеет одномерное устойчивое многообразие W_1^s и двумерное неустойчивое W_1^u .

Вторая стационарная точка O_2 для $c < 3$ ($c > 3$) имеет двумерное (одномерное) устойчивое многообразие W_2^s и одномерное (двумерное) неустойчивое многообразие W_2^u . При $c < 3$ точка O_2 всегда седлофокус, при $c > 3$ O_2 может быть как седлофокусом, так и седлоузлом.

4.2. Гомоклинические и гетероклинические орбиты

Петля сепаратрисы $c > 3$, соответствующая на физической плоскости солитону, является кривой, двоякоасимптотической к стационарной точке O_1 при $x \rightarrow \pm\infty$. Кривая Γ выходит из O_1 по неустойчивому многообразию W_1^u и входит по устойчивому W_1^s , оказываясь, таким образом, на пересечении этих многообразий, $\Gamma = W_1^s \cap W_1^u$, см. рис. 4.1. Устойчивое многообразие двумерно, неустойчивое — одномерно, и их пересечение не является случаем общего положения (структурно неустойчиво) и возможно лишь при дискретном множестве значений $\{c_k\}$.

Когда стационарная точка O_1 — седлофокус, ее седловая величина $\sigma_1 + \sigma_2^R = m > 0$, где σ_2^R — вещественная часть комплексного корня σ_2 . Тогда по теореме Шильникова [117] в окрестности Γ существует счетное множество седловых циклов и канторово множество стохастических траекторий. При варьировании параметра c циклы могут влипать в стационарную точку, образуя новые петли сепаратрис, соответствующие на физической плоскости многогорбым солитонам.

В случае, когда O_1 — седлоузел, существует такая достаточно малая окрестность Γ , в которой нет ни одного цикла. Стохастические траектории в этой окрестности тоже отсутствуют.

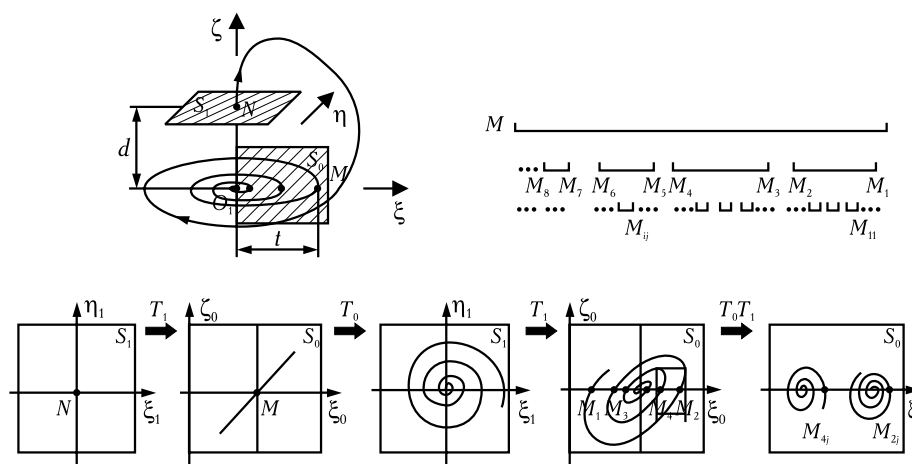


Рис. 4.1. Гомоклиническая орбита Γ , лежащая на пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий O_1 . Сечения Пуанкаре показывают наличие многовитковых сепаратрис Γ_{ij} , Γ_{jk} , соответствующих многогорбым солитонам

Гидравлическому прыжку соответствует в фазовом пространстве гетероклиническая кривая L , асимптотически приближающаяся к точке $O_2(O_1)$ при $x \rightarrow -\infty$ и к точке $O_1(O_2)$ при $x \rightarrow +\infty$. Эта кривая является пересечением неустойчивого многообразия стационарной точки O_2 (точки O_1) и устойчивого многообразия точки $O_1(O_2)$: $L = W_2^u \cap W_1^s$ ($L = W_1^u \cap W_2^s$). Разность уровней гидравлического прыжка a связана со скоростью выражением

$$a = [-3/2 + (c - 3/4)^{1/2}].$$

Имеем $a > 0$ при $c > 3$ (скачок сжатия), $a < 0$ при $1 < c < 3$ (скачок разрежения). Для скачка сжатия $L = W_2^u \cap W_1^s$. Многообразия W_2^u и W_1^s при $c > 3$ всегда двумерны, следовательно, их пересечение по некоторой кривой — случай общего положения, возможный на непрерывном множестве значений c . Передний фронт такого скачка при $x \rightarrow +\infty$ всегда осциллирует, задний фронт при $x \rightarrow -\infty$ при малых a также осциллирует, а при достаточно больших a — спадает монотонно.

Для скачка разрежения $L = W_2^u \cap W_1^s$, причем при $s > 3$ многообразия W_2^u, W_1^s одномерны. Пересечение W_2^u и W_1^s по некоторой траектории возможно лишь при одновременном варьировании s и δ , то есть на дискретном наборе пар $\{s_k, \delta_k\}$. Оба фронта скачка разрежения спадают монотонно.

Случай скачка, соответствующего гетероклинической кривой, идущей из стационарной точки O_2 в точку O_1 , сводится к рассмотренному случаю простой перенормировкой уровней. В случае существования волны разрежений имеет место гомоклинический контур, состоящий из двух гетероклинических кривых: идущей из O_1 в O_2 и из O_2 в O_1 . В нашем случае седловая величина контура положительна и, следовательно, в его окрестности имеется счетное множество периодических движений и канторово множество стохастических траекторий [117].

4.3. Циклы и теория Флоке

Перейдем к рассмотрению периодических движений. При $c > 3$ стационарная точка O_1 имеет двумерное устойчивое многообразие W_1^s . При уменьшении c и прохождении через $c = 3$ на этом многообразии происходит бифуркация Ландау–Хопфа: пара комплексно-сопряженных корней $\sigma_{2,3} = -m \pm i\beta$ меняет знак своей действительной части, проходя через ноль: $m|_{c=3} = 0$, $\beta|_{c=3} \neq 0$, и при $c < 3$ в окрестности стационарной точки O_1 рождается цикл γ , соответствующий на физической плоскости пространственно-периодической стационарной бегущей волне. При дальнейшем уменьшении c цикл “пухнет”, отходя от точки O_1 , и при некотором $c = c_* \in (1, 3)$ цикл умирает, вливаясь в стационарную точку O_2 с образованием петли сепаратрисы (солитона).

При изменении цикла γ от точки рождения до точки исчезновения возможны различные бифуркации. Для того, чтобы их понять, необходимо рассмотреть окрестность цикла [18, 19]. Пусть $h(x)$ — периодическое решение с периодом $2\pi/\alpha$. Наложим на это решение малое возмущение $h \rightarrow h + f$. При подстановке этого выражения в (4.1) и линеаризации получим уравнение относительно возмущения f

$$f''' + a_1 f' + a_2 f = 0, \quad (4.8)$$

$$a_1 = \delta[6(1 - c^2)/h^3 - c^2/h], \quad a_2 = 3h'''/h - 2\delta c^2 h'/h^2 + 3/h - c/h^3.$$

Уравнение (4.8) является линейным дифференциальным уравнением с $2\pi/\alpha$ -периодическими коэффициентами. Необходимым условием ответвления от исходного решения нового $2\pi m/\alpha$ -периодического решения ($m = 1, 2, \dots$) является существование решения с таким периодом у уравнения (4.8). Пусть $U(x)$ — нормированная фундаментальная матрица решений (4.8), или матрица монодромии:

$$U(x) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{pmatrix}, \quad U(0) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ρ_k матрицы монодромии являются мультипликаторами (4.8), а

$$\lambda_k = (\ln |\rho_k| + i \arg \rho_k) / 2\pi, \quad (k = 1, 2, 3)$$

являются характеристическими числами; λ_k определены с точностью до слагаемого ni , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда по теореме Флоке имеется одно решение (4.8), такое что

$$f(x + 2\pi/\alpha) = \rho_k f(x), \quad f(x) = F(x) \exp(\alpha \lambda_k x),$$

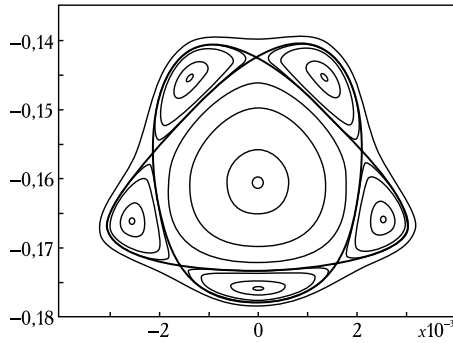


Рис. 4.2. Торы КАМ в окрестности эллиптического периодического решения (в центре)

В силу действительности коэффициентов (4.8) либо мультипликаторы — комплексно-сопряженные числа, лежащие на единичной окружности комплексной плоскости, $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$ (эллиптический случай), либо ρ_1 и $\rho_2 = 1/\rho_1$ — чисто действительные числа, оба положительные или оба отрицательные (гиперболический случай). В эллиптическом случае, что следует из (4.5), цикл оказывается окруженным системой инвариантных торов. Пример сечения Пуанкаре в окрестности эллиптического цикла показан на рис. 4.2. Кроме того, возможно ответвление новых периодических решений. В гиперболическом случае (4.8) не имеет ограничений при $x \rightarrow \pm\infty$ решений и ветвления не происходит. Однако в гиперболическом случае пересечение неустойчивого многообразия цикла γ с устойчивым многообразием другого цикла γ_2 или стационарной точки O_1 может породить сложные стационарные волны, состоящие из фрагментов циклов γ и γ_2 и солитонов. Заметим, что для нашего уравнения случай $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$ является грубым и не устраняется слабым шевелением параметров c, δ системы.

Переход от эллиптического случая к гиперболическому возможен только при двух положениях мультипликаторов: либо $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ($\theta = 0$), либо $\rho_1 = \rho_2 = -1$ ($\theta = \pi$). При этом пара мультипликаторов — на единичной окружности $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$ — сливается, и затем мультипликаторы расходятся, уже находясь на действительной полуоси, в первом случае — положительной, во втором случае — отрицательной. При изменении параметра c в эллиптическом случае величина $N = 2\pi/\theta$ меняется: от $N = 2$ ($\rho_{1,2} = -1$) до $N = \infty$ ($\rho_{1,2} = 1$), непрерывно проходя все промежуточные значения. При целых значениях $N = 2, 3, \dots$ выполняются необходимые условия бифуркации удвоения, утроения, и т.д. периода и возможно ответвление новых циклов от γ .

В гиперболическом случае цикл γ является седловым и лежит на пересечении двух инвариантных многообразий размерности 2, устойчивого W_γ^u , неустойчивого W_γ^s . Существование седловых циклов приводит к возможности существования новых гомоклинических структур. Причиной их возникновения может быть пересечение инвариантных устойчивых и неустойчивых многообразий: а) одного цикла, б) двух циклов, в) цикла и стационарной точки.

где $F(x)$ — $2\pi/\alpha$ -периодическая функция. В частности, при $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3$ таких решений три: f_1, f_2, f_3 .

Заметим, что $f_3 = h'(x)$ является $2\pi/\alpha$ -периодическим решением уравнения (4.1), то есть $\rho_3 = 1$ — мультипликатор (4.8). Это является следствием автономности уравнения (4.1). Число мультипликаторов, значимых с точки зрения ветвления, равно двум. Так как в уравнении (4.1) отсутствует член со второй производной, то $\rho_1\rho_2\rho_3 = 1$ или $\rho_1\rho_2 = 1$.

4.4. Медленное и быстрое семейства периодических волн

Семейства решений типа стационарных бегущих волн существуют при $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 = (15\delta)^{1/2}$. В частности, первое семейство таких решений ответвляется от тривиального на верхней кривой нейтральной устойчивости $\alpha = \alpha_0(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$h = 1 + 2\sqrt{\varepsilon}\beta \cos \alpha x + \varepsilon\beta^2 \left(-\frac{7}{5} \cos 2\alpha x + \frac{1}{\alpha_0^3} \sin 2\alpha x \right), \quad (4.9)$$

$$c = 3 - \frac{123}{10} \varepsilon\beta^2, \quad q_0 = 1 + 6\varepsilon\beta^2, \quad \beta^2 = 2\alpha_0^6 / (3 + 621/50\alpha_0^6).$$

При фиксированном δ решение (4.9) можно продолжить по α , разлагая решение в ряд Фурье и используя численные методы. Это семейство условимся называть первым.

На рис. 4.3–4.5 показаны зависимости нелинейного искажения расхода $\Delta q = q_0 - 1$, фазовой скорости c , амплитуды волны $a = h_{\max} - h_{\min}$ от нормированного к единице волнового числа $s = \alpha/\alpha_0$ и от δ . Волны первого семейства при всех волновых числах и числах Рейнольдса отстают от нейтральных по линейной теории волн, $c < 3$, поэтому это семейство

будем называть семейством медленных волн. Волны, для которых q_0 имеет максимум, будем называть оптимальными режимами [3].

При уменьшении волнового числа α и удалении от точки ветвления $\alpha = \alpha_0$ синусоидальная форма волны искажается: во впадинах она заостряется, а на вершинах уплощается; передний фронт волны укручивается, задний становится более пологим, рис. 4.6. При некотором α появляется участок $h = \text{const}$, который при

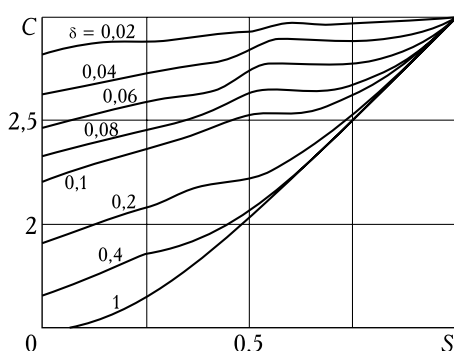


Рис. 4.3. Фазовая скорость волн первого семейства

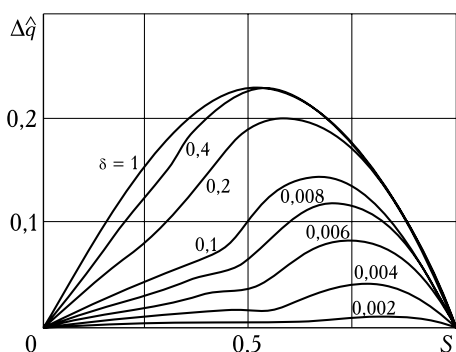


Рис. 4.4. Нелинейное искажение расхода волн первого семейства

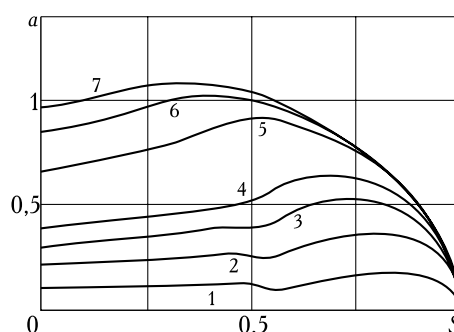


Рис. 4.5. Амплитуда волн первого семейства

уменьшении δ расширяется. При $\alpha = 0$ периодическая волна переходит в уединенную типа впадины. В фазовом пространстве при $\alpha \rightarrow 0$ происходит влипание цикла γ в стационарную точку O_1 с образованием петли сепаратрисы. Скорость такой уединенной волны $s < 3$, как и для всех решений первого семейства.

Решения семейства медленных волн, мягко ответвляющиеся на кривой нейтральной устойчивости от тривиального решения, являются неединственными. Для нахождения новых периодических решений необходимо сначала исследовать решения (4.8) и найти области волновых чисел α , при которых мультипликаторы лежат на единичной окружности комплексной плоскости, $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$. Исследование показало, что существуют две зоны волновых чисел, где возможно ветвление новых решений. Введем $\alpha = \alpha_0(1 - \varepsilon)$, тогда $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ и $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ при $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ мультипликаторы соответствуют эллиптическому случаю $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$. Зависимости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ от ε_3 приведены в табл. 4.1. В точках $\alpha = \alpha_0(\delta)$, $\alpha = \alpha_3(\delta)$ мультипликаторы $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $N = \infty$. В точках

Таблица 4.1

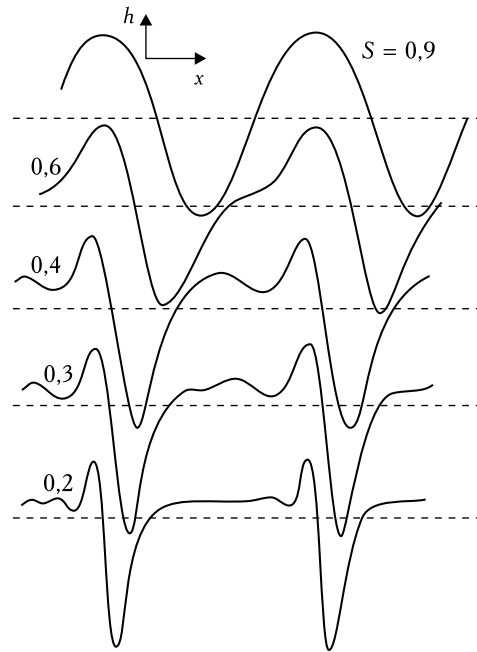
$\delta \times 10^2$	0	2	4	6	8	10	12
$\varepsilon_1 \times 10^3$	4,2	4,7	8	16,9	33,4	59,9	98,8
$\varepsilon_2 \times 10^3$	7,6	8,2	11,4	16,3	20	21,7	21,7
$\varepsilon_3 \times 10^2$	10,1	15,3	19,5	25,9	35,4	38,5	40,7

$= \alpha_1(\delta)$, $\alpha = \alpha_2(\delta)$ мультипликаторы $\rho_1 = \rho_2 = -1$, $N = 2$, следовательно, в точках $\alpha = 2\alpha_1$, $\alpha = 2\alpha_2$ от решения первого семейства с удвоенным периодом ответвляются соответственно второе и третье семейства волн.

Удобно считать, что из точек $s = 1/2, 1/3, \dots, 1/m, \dots$ от тривиального решения ответвляются волновые решения первого семейства с периодами соответственно $\pi, 2\pi/3, \dots, 2\pi/m$. В частности, из $s = 1/2$ выходит решение, получаемое из (4.9), заменой $x \rightarrow 2x$:

$$s = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon),$$

$$h = 1 + 2\sqrt{\varepsilon}\beta \sin 2x - \varepsilon\beta^2 / \alpha_0^3 \sin 4x + 7 / 5\varepsilon\beta^2 \cos 4x.$$


 Рис. 4.6. Профили волн первого семейства, $\delta = 0,04$

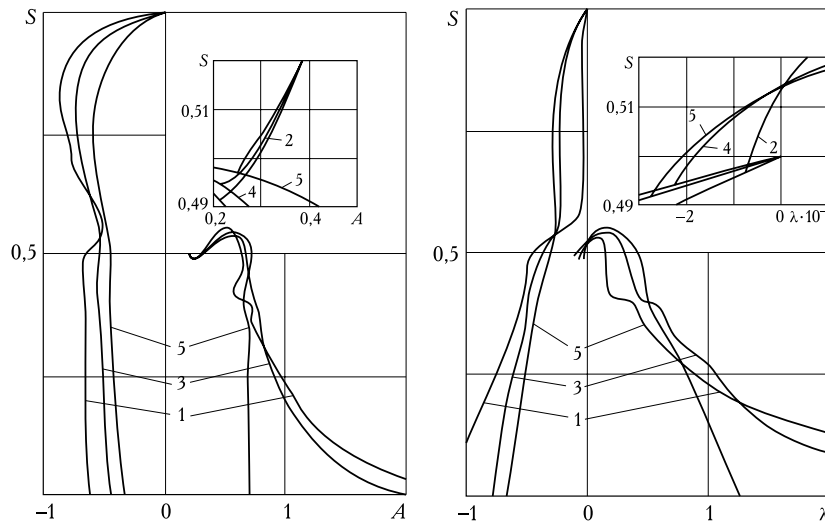


Рис. 4.7. Бифуркационные диаграммы первого и второго семейств периодических волн: 1 — $\delta = 0,01$; 2 — $0,02$; 3 — $0,04$; 4 — $0,05$; 5 — $0,06$

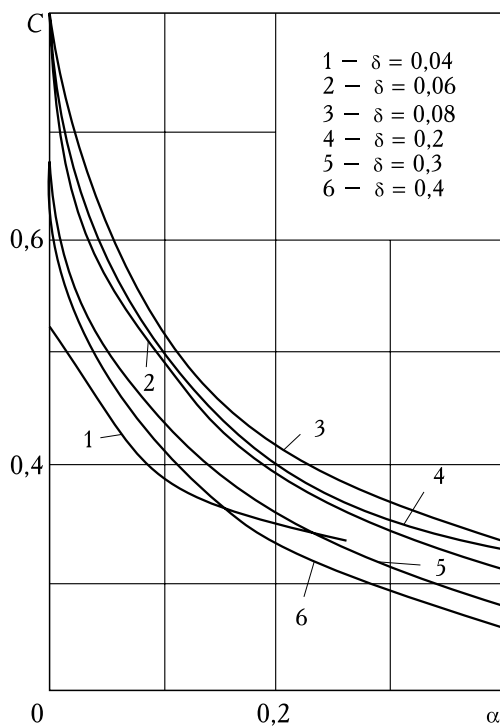


Рис. 4.8. Фазовая скорость волн второго семейства

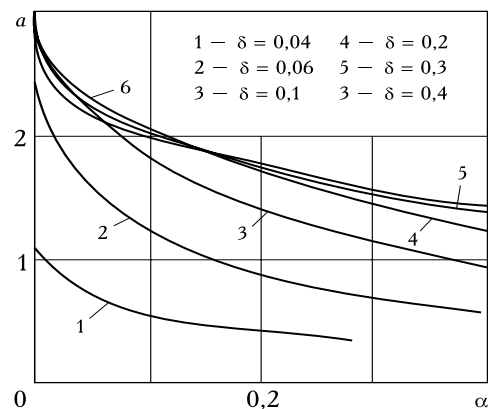


Рис. 4.9. Амплитуда волн второго семейства

рис. 4.7 даны зависимости растянутой амплитуды волны $A = (h_{\max} - h_{\min})/\alpha_0^3$, фазовой скорости $\lambda = (c - 3)/\alpha_0^3$ от волнового числа $s = \alpha/\alpha_0$ и от δ . На рис. 4.8–4.10 приведены зависимости a , c , q_0 от α и δ . Решения второго семейства существуют при $s < s_m$ (при малых значениях δ имеем $s_m \simeq 0,53-0,58$).

Тогда в точке $s = 1/2(1 - \varepsilon_1)$ от этого решения ответвляется решение с периодом π — происходит так называемая бифуркация удвоения периода. Такая же бифуркация происходит в точке $s = 1/2(1 - \varepsilon_2)$. Условимся называть полученную ветвь решения вторым семейством. На

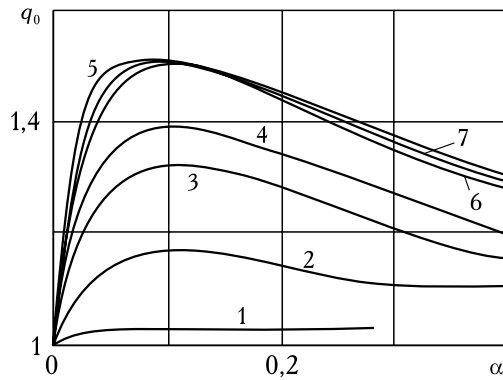


Рис. 4.10. Нелинейное искажение расхода волн второго семейства: 1 — $\delta = 0,04$; 2 — $0,06$; 3 — $0,08$; 4 — $0,1$; 5 — $0,2$; 6 — $0,3$; 7 — $0,4$

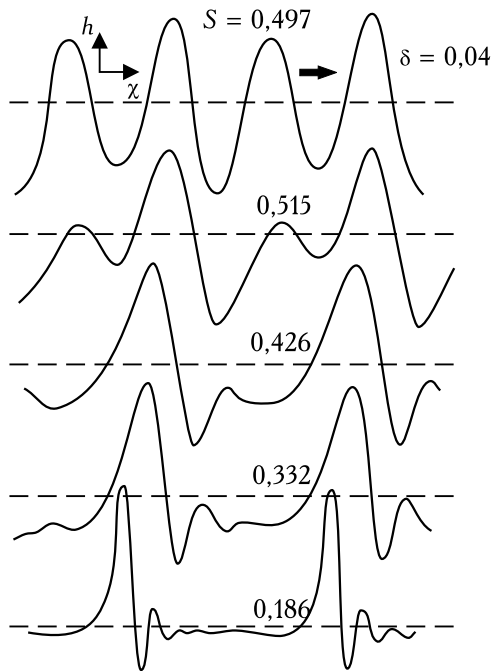


Рис. 4.11. Профили волн второго семейства, $\delta = 0,04$

зовом пространстве $\{h_1, h_2, h_3\}$ произошло влипание цикла в стационарную точку O_1 с образованием петли сепаратрисы. Будем называть дальше солитон-впадину при $s < 3$ отрицательным, а солитон типа горба при $s > 3$ — положительным.

4.5. Уединенные волны

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения s (4.1), (4.2). Главные результаты о существовании решений и спектрах медленных и

В небольшой окрестности точки бифуркации второго семейства $s < 3$; при увеличении δ эта окрестность увеличивается; в основном же для второго семейства $s > 3$, т.е. волны второго семейства опережают нейтральные по линейной теории волны. Поэтому волны второго семейства будут также называться быстрыми. Параметры волн, соответствующие максимуму q_0 , условимся называть оптимальными режимами второго семейства.

На рис. 4.11 показано типичное изменение формы волны при изменении α . Как видно из рисунка, вблизи точки ветвления волна по форме близка к двум периодам синусоиды. При отходе от точки бифуркации один из “периодов” увеличивается по амплитуде, в то время как второй уменьшается. Волна очень быстро приобретает характерную форму горба с одной, а затем — несколькими осцилляциями перед ним. Все дальнейшее изменение формы волны сводится к образованию между горбами гладкого участка и его расширению. При $s \rightarrow 0$ волны второго семейства переходят в солитон типа горба с осциллирующим передним фронтом и экспоненциально спадающим задним. В фа-

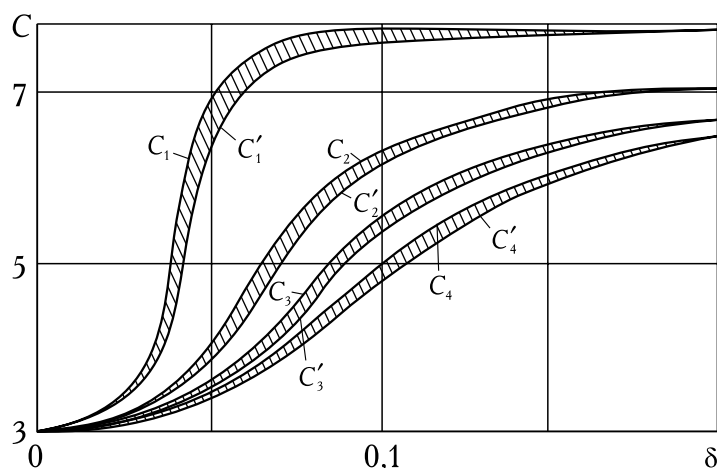
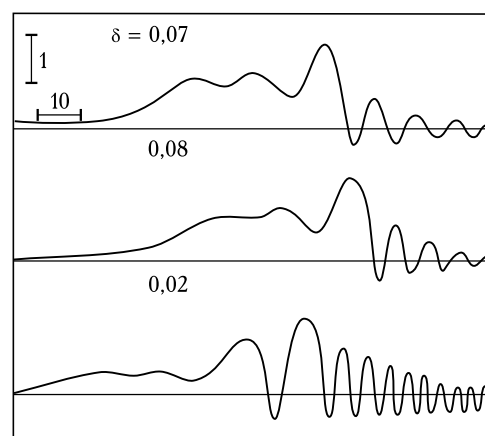


Рис. 4.12. Области существования быстрых солитонов

быстрых солитонов получены методами асимптотических представлений и прямыми численными расчетами в [7, 16, 17, 19, 23]. Рассмотрим здесь качественный анализ задачи методами фазового пространства [15, 18, 24]. В силу того, что $h = h - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, уравнение (4.1) можно линеаризовать в окрестности стационарной точки $(1, 0, 0)$:

$$\hat{h}''' + \delta\omega\hat{h}' + (3 - c)\hat{h} = 0, \quad \omega = 5c^2 - 12c + 6. \quad (4.10)$$

Решения описываются характеристическим уравнением (4.6), имеющим три корня $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Рассмотрим сначала положительные солитоны, $c > 3$. При $c > 3$ $\sigma_1 = 2m > 0$, $\sigma_{2,3} = -m + i\beta$, седловая величина первой стационарной точки положительна, что обещает сложное поведение солитонных решений. Расчеты [19, 24] подтвердили предсказания теоремы Шильникова [117] и показали, что при каждом фиксированном δ имеется счетное множество сегментов, вне которых ограниченных при $x \in (-\infty, +\infty)$ решений, в том числе и солитонов, нет. Концы каждого сегмента $[c_1, c'_1], [c_2, c'_2], \dots$ — собственные значения, соответствующие многогорбым солитонам. Сегменты имеют точку сгущения $c = 3$ и образуют на плоскости c - δ полосы, изображенные на рис. 4.12. Здесь c_1 соответствует одnogорбому солитону, c'_1 и c_2 — двугорбым солитонам, c'_2 и c_3 — трехгорбым, ..., c'_{k-1} и c_k — k -горбым солитонам. Полосы выходят из точки $\delta = 0, c = 3$ [22–24]. При увеличении δ амплитуда и скорость положительных солитонов выходят на по-

Рис. 4.13. Форма положительного трехгорбого солитона, $C = C_3$, различные δ

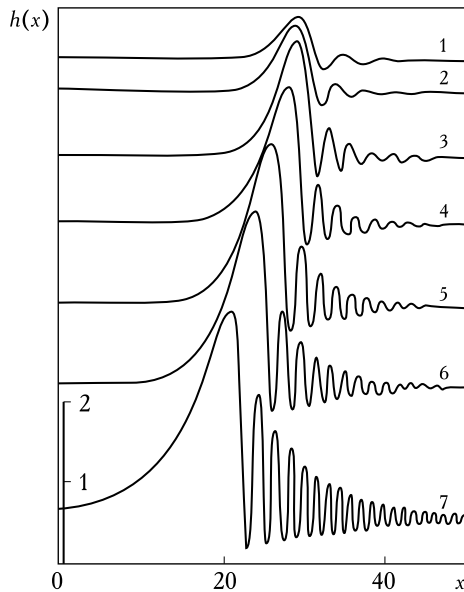


Рис. 4.14. Профили одногорбого положительного солитона:
 1 — $\delta = 0,036$; 2 — $0,0392$;
 3 — $0,045$; 4 — $0,05$; 5 — $0,06$;
 6 — $0,07$; 7 — $0,12$

цы сегмента — собственные значения, соответствующие многогорбым солитонам. Как показывает вышеприведенное качественное исследование, опирающееся на результаты [117], внутри каждого из подсегментов $[c_{ij}, c'_{ij}]$ имеются новые подсегменты $[c_{ijk}, c'_{ijk}]$, вне которых нет ограниченных решений и т.д. Концы подсегментов соответствуют новым многогорбым солитонам, рис. 4.1. Каждому из солитонов можно поставить в соответствие некоторый номер, т.е. общее число солитонов при фиксированном δ счетно. Внутри сегментов имеется также счетное число седловых периодических движений и канторово множество стохастических.

Перейдем к описанию отрицательных солитонов. При $c < 3$ первая стационарная точка O_1 имеет одномерное устойчивое многообразие и двумерное неустойчивое. Если сделать замену $x \rightarrow -x$, то неустойчивое двумерное многообразие станет структурно устойчивым, а устойчивое одномерное — неустойчивым. При такой замене процедура будет полностью эквивалентна имеющей место при $c > 3$, седловая величина положительна.

В случае седлоузла поведение петли сепаратрисы Γ в фазовом пространстве резко отличается. Проанализируем поведение отрицательных солитонов. В области II с положительной седловой величиной, рис. 4.15, а, имеется счетное множество сегментов, вне которых солитонов нет: $[c_{-1}, c'_{-1}]$, $[c_{-2}, c'_{-2}]$, Точке сгущения сегментов соответствует $c = 3$. Отрицательные солитоны стремятся к этой точке снизу, $c < 3$, положительные — сверху, $c > 3$. Полосы, образованные сегментами на плоскости $c-\delta$, изображены на рис. 4.15, а. Эти полосы являются столь узкими, что на рисунке сливаются в одну линию.

стоянную. Ширина каждой из полос сначала увеличивается, а затем, пройдя через максимум, начинает уменьшаться. Профили одногорбых C_1 и трехгорбых C_3 солитонов в зависимости от δ приведены на рис. 4.13, 4.14. При росте δ осцилляции на переднем фронте становятся более жесткими и слабее затухающими. При $\delta \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика:

$$m = \frac{c-3}{2\omega\delta} \rightarrow 0, \quad \beta = \sqrt{\delta\omega} \rightarrow \infty.$$

Фазовая скорость и одногорбого, и многогорбых солитонов примерно пропорциональна амплитуде: $c-3 \approx 1,8a$. Сегменты $[c_i, c'_i]$ имеют сложную внутреннюю структуру, численно найдено, что внутри $[c_i, c'_i]$ имеются подсегменты $[c_{ij}, c'_{ij}]$, вне которых нет ограниченных решений. Кон-

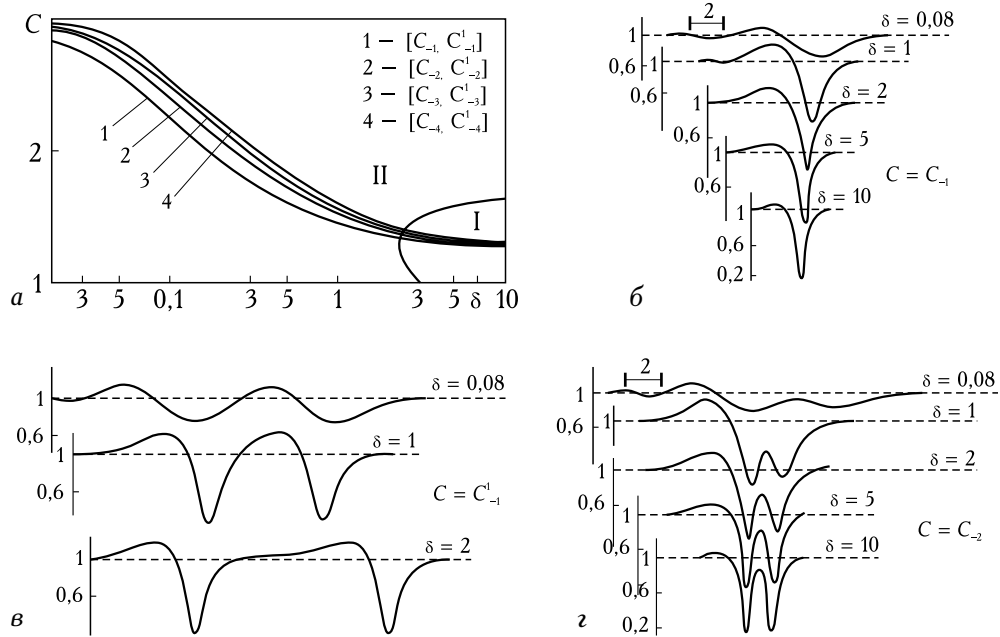


Рис. 4.15. Многогорбые отрицательные солитоны:
а) область существования; б, в, г) типы солитонов

Профили отрицательных солитонов c_{-1} , c'_{-1} , c_{-2} приведены на рис. 4.15, б, в. При увеличении δ горбы солитонов становятся уже, осцилляции на заднем фронте — менее жесткими. При переходе через кривую, разделяющую области I и II, осцилляции исчезают и оба фронта солитона теперь спадают на бесконечности монотонно, корни характеристического уравнения теперь действительны. Для отрицательных солитонов при $\delta \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика:

$$\sigma_1 = \sqrt{-\omega\delta} \rightarrow +\infty, \quad \sigma_2 \rightarrow -\sigma_1 \rightarrow -\infty,$$

$$\sigma_3 = \frac{3-c}{\delta\omega} \rightarrow -0.$$

Скорость отрицательных солитонов, как и в случае $c > 3$, примерно пропорциональна амплитуде $a = h_{\max} - h_{\min}$: $c - 3 \simeq 1,7a$.

Сегменты $[c_{-k}, c'_{-k}]$ имеют ту же внутреннюю структуру, что и $[c_k, c'_k]$, и заполнены многогорбыми солитонами, периодическими решениями, стохастическими сигналами.

Как и для положительных солитонов, сложность этой структуры вытекает уже из того, что стационарная точка O_1 является седлофокусом с положительной седловой величиной. При смене седлофокуса седлоузлом сложная структура исчезает. Рис. 4.15, с характеризует изменения, происходящие с профилем волны $h(x)$ при увеличении δ . Расстояние между вершинами двугорбого солитона, соответствующего $c = c'_{-1}$, при переходе к границе седлофокуса и седлоузла растет до бесконечности. Такой же процесс происходит с другими солитонами, заполняющими как сегмент $[c_{-1}, c'_{-1}]$, так и другие сегменты. Таким образом, от всей структуры

сегмента $[c_{-1}, c'_{-1}]$ остается один одnogорбый солитон, от структуры сегмента $[c_{-k}, c'_{-k}]$ — один k -горбый солитон. На рис. 4.15, г показана эволюция формы двугорбого солитона, соответствующего $c = c'_{-2}$, при увеличении δ .

4.6. Расширенная картина бифуркаций регулярных волн

Обратимся к результатам численных экспериментов [32–40], в которых прямыми расчетами строились регулярные волновые решения, при возрастании параметра δ до значений, характерных для реальных экспериментов. Исследование установившихся регулярных волн сводится к нелинейной задаче на собственные значения (4.1), вытекающей из (2.18). Решения представляются конечным Фурье-разложением

$$h = \sum_{k=-N}^N h_k \exp i\alpha k \xi, \quad h_k = h_{-k}^*, \quad h_0 = 1, \quad \alpha = s\sqrt{15\delta}.$$

В (4.1) δ , s — заданные внешний и внутренний, связанный со структурой волны, параметры, а c , q_0 — собственные значения. Методом Галеркина из (4.1) выводится система нелинейных алгебраических уравнений для h_k , из которой находятся h_k , c , q_0 . Наряду с решением для основного течения $h = 1$, а также для первого и второго семейств регулярных волн [3, 19, 23], эта задача имеет двухпараметрическое множество других решений, которые могут быть упорядочены в форме отдельных семейств в сечениях $\delta = \text{const}$ [32, 35]. Примеры таких семейств приведены на рис. 4.16, а, б, в. Все семейства возникают с малой, но конечной амплитудой в точках бифуркации s , расположенных вблизи значений $s_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, как почти гармонические волны с периодом $2\pi/n$, и непрерывно продолжаются до $s = 0$. Предельные при $s \rightarrow 0$ профили толщины пленки представляют собой уединенные волны с одним или двумя главными горбами (рис. 4.17). Все волны объединяются в две группы — быстрые и медленные ($c > 3$ и $c < 3$ для предельных при $s \rightarrow 0$ волн семейства, соответственно).

Первое семейство начинается в точке $s = 1$; волны этого типа имеют наименьшую фазовую скорость среди всех других решений, существующих при $0 < s \leq 1$. Второе семейство начинается в точке бифуркации s_b , зависящей от δ ; эти волны имеют наибольшую фазовую скорость при каждом s в интервале $0 < s < s_b$. Существуют промежуточные семейства медленных волн, точки бифуркаций которых s_* расположены в интервале $s_b < s_* < 1$. Имеются также другие семейства волн с точками бифуркации в интервале $0 < s < s_b$ (рис. 4.16). В каждой точке бифуркации, как правило, возникают два семейства, из которых либо каждое принадлежит к типу медленных волн (SS -бифуркация), либо одно — к семейству медленных, второе — к семейству быстрых волн (SF -бифуркация). Второе основное семейство соответствует первой би-

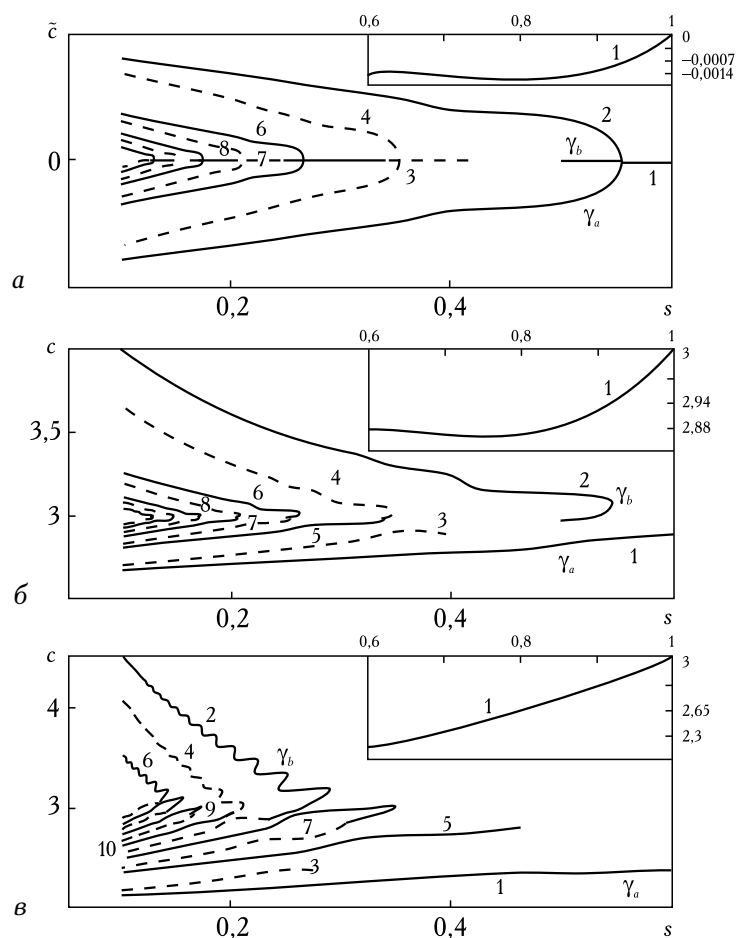


Рис. 4.16. Следы семейств волн в плоскости (c, s) : 1 — $\gamma_{-1,1}$; 2 — $\gamma_{+1,1}$; 3 — $\gamma_{-1,2}$; 4 — $\gamma_{+1,2}$; 5 — $\gamma_{-2,1}$; 6 — $\gamma_{+2,1}$; 7 — $\gamma_{-2,2}$; 8 — $\gamma_{+2,2}$; 9 — $\gamma_{-3,2}$; 10 — $\gamma_{-4,2}$;
а) — $\delta = 0,001$; б) — $\delta = 0,04$; в) — $\delta = 0,15$

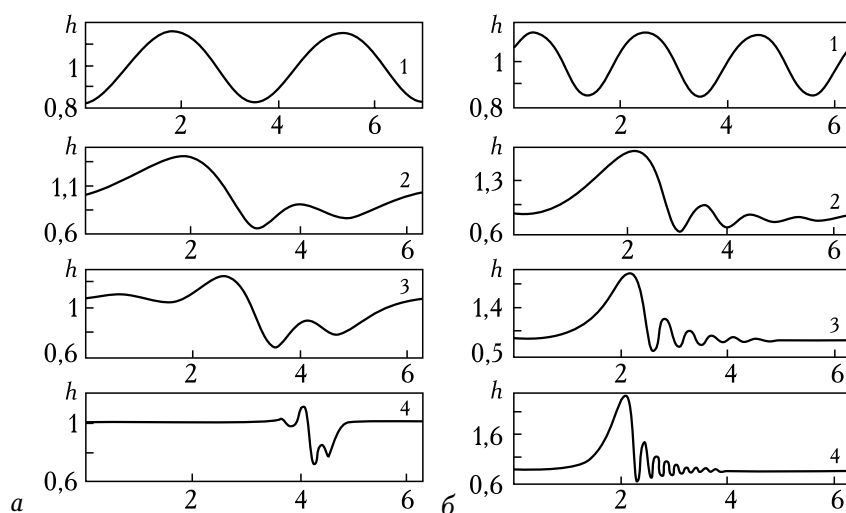


Рис. 4.17. Профили регулярных волн первого семейства при $\delta = 0,1$:
а) — первое семейство: 1 — $s = 0,4763$; 2 — 0,4; 3 — 0,25; 4 — 0,05;
б) — второе семейство: 1 — $s = 0,3208$; 2 — 0,26; 3 — 0,15; 4 — 0,08

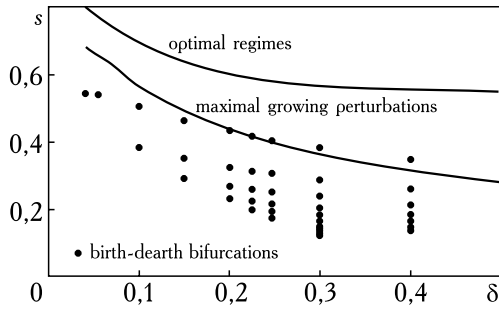


Рис. 4.18. Точки бифуркаций семейств волн

фуркации SF типа, возникающей при уменьшении s от точки $s = 1$. Семейства промежуточных бифуркаций относятся к типу SS .

Для указания семейства волн в [35] введено обозначение $\gamma_{\pm m, j}^n$. Здесь индекс $+$, $-$ указывает принадлежность семейства к группе быстрых или медленных волн, m — номер семейства в группе, $j = 1, 2$ для одnogорбой и двугорбой

предельной уединенной волны семейства, соответственно. Верхний индекс n — номер точки бифуркации.

С ростом δ имеем $s_b \rightarrow 0$, и количество промежуточных бифуркаций m при этом возрастает: в частности, $m = 0, 1, 2, 5$ при $\delta = 0,04, 0,1, 0,15, 0,247$. На рис. 4.18 показаны точки бифуркации первого ($s = 1$), второго ($s = s_b$) и промежуточных ($s_b < s < 1$) семейств при различных значениях δ . Нижняя точка бифуркаций на рис. 4.18 при каждом δ соответствует второму семейству.

Рис. 4.16–4.18 отчетливо показывают, что при каждом значении δ и $s \leq 0,5$ существует несколько решений задачи (4.1) в виде регулярных волн. С уменьшением s число таких решений быстро возрастает. При $\delta = 0,4$ показано восемь вычисленных бифуркаций, причем второе основное семейство порождается бифуркацией с еще более высоким номером.

Волновые режимы, имеющие при фиксированных δ, s наибольшие значения фазовой скорости, среднего расхода и амплитуды, называются доминирующими [32]. Если зафиксировать δ , то получим множество доминирующих волн на $0 \leq s \leq 1$. Это множество кусочно-непрерывное с разрывами в точках s , в которых происходит переход с одного семейства на другое.

Как следует из определения, множество доминирующих волн при любом значении δ включает часть волн первого и второго семейства, а также всех промежуточных семейств, имеющихся при данном δ .

При малых δ ($\delta < 0,1$, рис. 4.7) имеются два интервала непрерывности, соответствующих первому и второму семействам. Эта ситуация исследовалась в работах [14–31] и подробно изложена выше в разделе 4. Имеются три интервала непрерывности при $\delta = 0,1$ и четыре при $\delta = 0,15$ (рис. 4.16). Количество интервалов, относящихся к промежуточным семействам, растет с ростом δ (рис. 4.18). Эти более сложные случаи исследовались в [32–40].

5. ВТОРИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН

Как и плоскопараллельное течение, периодические двумерные волны могут быть неустойчивы. Вторичная неустойчивость разрушает режим периодических двумерных волн и приводит к стохастизации волновой картины, либо к формированию более устойчивых волн. Таковыми могут быть, в частности, режимы с максимально возможными значениями среднего расхода [4, 32–40] или с предельно малыми, но конечными значениями волнового числа [38, 42–46]. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений типа периодической стационарной бегущей волны с волновым числом α [29]. Наложим на это решение бесконечно малые возмущения вида

$$\begin{aligned} h(\xi) &= h_0(\xi) + \hat{H}(\xi) \exp(\lambda t), \\ q(\xi) &= q_0(\xi) + \hat{Q}(\xi) \exp(\lambda t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\xi = x - ct$.

При подстановке (5.1) в (2.18) получим задачу на собственные значения

$$\lambda \hat{Q} + a_1 \hat{H}''' + a_2 \hat{H}' + a_3 \hat{H} + a_4 \hat{Q}' + a_5 \hat{Q} = 0, \quad (5.2)$$

$$\lambda \hat{H} + \hat{Q}' - c \hat{H}' = 0,$$

$$a_1 = -\frac{h_0}{5\delta}, \quad a_2 = -\frac{6q_0^2}{5h_0^2},$$

$$a_3 = -\frac{6}{5} \left(\frac{q_0^2}{h_0^2} \right)' - \frac{h_0'''}{5\delta} - \frac{1}{5\delta} \left(1 + \frac{2q_0}{h_0^3} \right),$$

$$a_4 = -c + \frac{12}{5} \frac{q_0}{h_0}, \quad a_5 = \frac{12}{5} (q_0 / h_0)' + \frac{1}{5\delta h_0^2},$$

$$\sup_{\zeta \in R} |H|, |Q| < \infty, \quad (5.3)$$

где R — множество вещественных чисел. Если у всех λ из спектра решений (5.2)–(5.3) действительная часть $\lambda_R = \operatorname{Re}(\lambda) < 0$, то решение типа бегущей стационарной волны устойчиво; если хотя бы у одного решения $\lambda_R > 0$, то стационарная волна неустойчива.

Уравнения (5.2)–(5.3) представляют из себя линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Тогда, согласно теореме Флоке, решение можно искать в виде: $f = F(\zeta) \exp(i\lambda\zeta) + F^*(\zeta) \exp(-i\lambda\zeta)$.

Здесь $F(\zeta)$ — комплексная периодическая функция того же периода, что и $h_0(\xi)$; в силу требования ограниченности решений величина $\varkappa$ действительна. Значение аргумента определено с точностью до целого числа; будем считать, что $\varkappa \in [0, 1/2]$.

Каждому решению того или иного семейства при заданных α и δ соответствует набор собственных значений $\{\lambda^{(k)}(\varkappa)\}$, $k = 1, 2, \dots$; $\varkappa \in [0, 1/2]$. Считаем, что собственные значения пронумерованы в порядке убывания их действительной части: $\lambda_R^{(1)} > \lambda_R^{(2)} > \lambda_R^{(3)} > \dots$. Максимальным инкрементом нарастания возмущения будет величина

$$\lambda_m = \max_{\varkappa \in [0, 1/2]} (\lambda_R^{(1)}(\varkappa)).$$

На рис. 5.1 в координатах α — δ изображены границы существования и устойчивости различных решений. От кривой 1 в сторону меньших α ответвляются волновые решения первого семейства; 2 — кривая $\alpha = \alpha_m(\delta)$. Штрих-пунктирная линия — кривая, на которой коэффициент нарастания возмущений плоскопараллельного течения достигает максимального значения. Штриховые линии соответствуют волновым числам, при которых расход $q_0(\alpha)$ имеет локальный максимум, заштрихованными внутри кривыми изображены области устойчивости стационарных бегущих волн. Верхняя область, обозначенная 1, с границами $\alpha_1(\delta)$ и $\alpha'_1(\delta)$, относится к семейству медленных волн, как и лежащая несколько выше 1 штриховая линия. Остальные пять областей

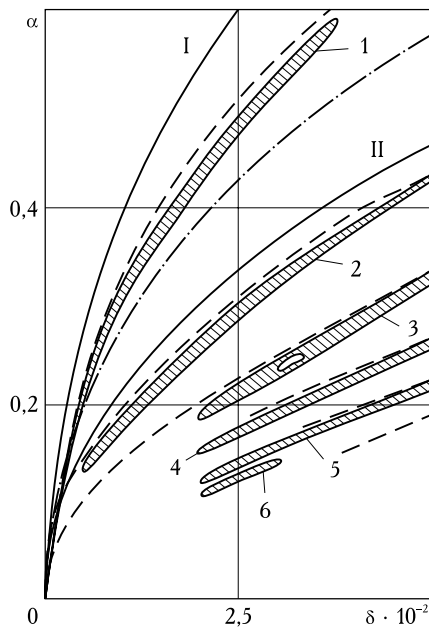


Рис. 5.1. 1 — область устойчивости волн первого семейства; 2, 3, 4, 5, 6 — области устойчивости волновых решений второго семейства

устойчивости (α_2, α'_2) , (α_3, α'_3) , ..., (α_6, α'_6) , обозначенные на рисунке цифрами 2, 3, ..., 6, относятся к семейству быстрых волн. Устойчивых решений других семейств найдено не было.

Исследование подтвердило установленный в [4] принцип устойчивости или минимальной неустойчивости режимов первого семейства, близких к оптимальным, т.е. переносящих максимум расхода q_0 . Существует единственная область устойчивости $\alpha \in (\alpha_1, \alpha'_1)$, лежащая вблизи максимума q_0 . Эта область начинается при $\delta = 0$ и заканчивается при $\delta = 0,037$. При $\delta > 0,037$ первое семейство теряет устойчивость, однако линия, где медленные волны минимально неустойчивы, находится вблизи оптимальных волновых режимов. Длина волны устойчивых режимов первого семейства несколь-

ко меньше длины волны, соответствующей максимальному коэффициенту роста плоскопараллельного течения. Для практических нужд можно приближенно определить длину волн, реализующихся на эксперименте, из условия, что при этой длине волны переносится максимум расхода q_0 .

Перейдем к анализу областей устойчивости второго семейства или семейства быстрых волн. При $\alpha \in (\alpha_k, \alpha'_k)$, $k = 2, \dots, 6$, решения этого семейства устойчивы; все области начинаются с конечных δ ; внутри второй области устойчивости (α_3, α'_3) имеется небольшая подобласть неустойчивости, как это показано на рис. 5.1. Немного выше каждой из областей устойчивости лежит кривая максимальных расходов, как и для первого семейства.

Зависимость $q_0(\alpha)$ при фиксированном δ для второго семейства имеет осциллирующий характер и, соответственно, несколько максимумов. При больших значениях δ имеется единственный максимум $q_0(\alpha)$. Волновые режимы, соответствующие этому максимуму, были названы оптимальными режимами второго волнового семейства [19, 27]. Область устойчивости (α_6, α'_6) имеет конечную длину по δ .

Проанализируем некоторые опытные факты с точки зрения теоретических результатов. В [1, 2] экспериментально получено, что существуют два устойчивых режима стекания слоя: при относительно небольших числах Рейнольдса — волны, близкие к синусоидальным; при больших числах Рейнольдса — волны типа горбов. Такой вывод следует и из рассмотрения устойчивости волновых семейств.

Существует два типа возбуждения волн в активных средах: естественное и вынужденное. При естественном волнообразовании на входе рабочего участка имеется плоскопараллельное течение, на которое наложены малые случайные возмущения; можно считать, что в спектре этих возмущений имеются с тем или иным весом все волновые числа $\alpha \in (0, \infty)$ со своим инкрементом нарастания $\alpha_s(\alpha)$. Эволюция естественных волн начинается с развития неустойчивости плоскопараллельного течения с длительными переходными процессами и последующим выходом на притягивающее решение — устойчивую бегущую волну или более сложный аттрактор [27].

При вынужденном волнообразовании на входе рабочего участка возбуждаются возмущения со строго заданным волновым числом α , имеющие достаточно большую амплитуду, близкую к амплитуде стационарной бегущей волны. Можно принять, что при таком возмущении при $t = 0$ задается стационарная волна с наложенными на нее возмущениями. Тогда процесс начинается с развития неустойчивости возмущений, наложенных на стационарную бегущую волну. Если считать эти возмущения малыми, то их эволюция в конечном итоге определяется спектром собственных значений $\lambda_R^{(k)}$ задачи (5.2)–(5.3). При $\lambda_R^{(k)} < 0$, $k = 1, 2, \dots$, возмущения затухают и в эксперименте реализуется устойчивая бегущая волна того или иного семейства. Если $\lambda_R^{(1)} > 0$ при данном волновом числе α , то возможны два случая: а) $\lambda_R^{(1)}$ достаточно мало, б) неустойчивое

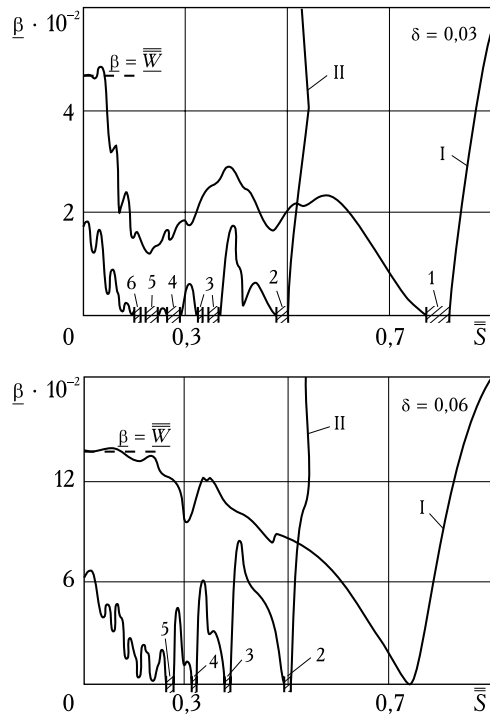


Рис. 5.2. Зависимости максимального инкремента нарастания возмущений:

- I — для волн первого семейства,
- II — для волн второго семейства;
- 1, 2, ..., 6 — области устойчивости волновых решений

ремента нарастания возмущений β от α . Заметим, что при тех α , для которых одновременно существуют семейства быстрых и медленных волн, для последних инкремент нарастания больше: быстрые волны в целом менее неустойчивы, чем медленные. Эта разница сглаживается при $\delta \rightarrow 0$ и увеличивается при росте δ .

Проанализируем графики на рис. 5.2, данные для $\delta = 0,03$, двигаясь по α от нейтрального волнового числа α_0 . При $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ решения первого семейства сильно неустойчивы, причем более неустойчивы, чем плоскопараллельное течение. То есть возмущения разваливают нелинейную волну быстрее, чем плоскопараллельное течение. Этим объясняется тот факт, что в эксперименте (см., например, [49, 55]) при вынужденном волнообразовании волны первого семейства не реализуются для $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$. В области $\alpha \in (\alpha_1, \alpha'_1)$ волны первого семейства устойчивы, они реализуются как при естественном, так и при вынужденном волнообразовании.

При $\alpha \in (\alpha'_1, \alpha_2)$ волны первого семейства неустойчивы. Однако инкременты их нарастания относительно малы, и при задании на выходе возмущения достаточно большой амплитуды на некотором расстоянии от входа могут существовать стационарные бегущие волны с вы-

собственное значение имеет действительную часть $\lambda_R^{(k)}$ того же порядка, что и устойчивые. В первом случае часть возмущения, соответствующая устойчивым собственным значениям, быстро затухнет, а неустойчивая часть за это время не успеет развиваться. Волна по форме и характеристикам близко подойдет к соответствующей бегущей стационарной волне, которая может пройти довольно большое расстояние, пока неустойчивая мода успеет вырасти и разрушить квазистационарную волну. Во втором случае затухание и рост соответствующих частей возмущения идут с соизмеримыми скоростями и стационарная бегущая волна не реализуется в эксперименте. Таким образом, для анализа возбужденных волн требуется знание не только областей устойчивости, но и значений $\lambda^{(k)}$ при неустойчивости.

На рис. 5.2 представлены зависимости максимального инкремента нарастания возмущений β от α .

шеуказанными длинами волн. Такая волна до своего развала проходит несколько своих длин. Волны второго семейства при $\alpha \in (\alpha_m, \alpha_2)$ имеет большой инкремент β и не реализуются даже при вынужденном волнообразовании.

При $\alpha < \alpha_2$ на опыте могут наблюдаться только волны второго семейства. При естественном их образовании они соответствуют волновым числам $(\alpha_2, \alpha'_2), \dots, (\alpha_6, \alpha'_6)$. При вынужденном волнообразовании волны второго семейства могут реализовываться при всех $\alpha \in (\alpha_2, \alpha'_6)$. Это подтверждается экспериментами [49, 55]. Инкременты нарастания в неустойчивых областях (α_2, α'_6) относительно малы.

При $\alpha < \alpha'_6$ λ_m резко возрастает при уменьшении волнового числа и при $s = 0,1$ достигает значений порядка 0,02 для быстрых волн и порядка $\alpha c_i^{\max}$ для медленных. При $\alpha = \alpha_6$ в эксперименте даже при вынужденном волнообразовании не реализуются ни волны первого, ни волны второго семейства. Граница $\alpha = \alpha'_6(\delta)$ была названа в [49] нижней границей существования волновых режимов.

Понять поведение возмущений при малых волновых числах можно из простых качественных рассуждений. При $\alpha \rightarrow 0$ периодические волны стремятся к солитонным. Для такой периодической волны имеется длинный гладкий участок, разделяющий волны; при $\alpha \rightarrow 0$ его длина неограниченно растет. Плоскопараллельное течение неустойчиво с максимальным коэффициентом нарастания возмущений $\alpha c_i^{\max}$. Разумно ожидать, что при $\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_m \rightarrow \alpha c_i^{\max}$, так как волна, близкая к уединенной, будет разваливаться возмущениями на плоскопараллельных участках, а вклад этих участков в неустойчивость волны будет расти при $\alpha \rightarrow 0$. В этом состоит одно из отличий солитонов в активных средах с подкачкой энергии и диссипацией от солитонов в консервативных средах. В последних плоскопараллельный участок солитона нейтрально устойчив к возмущениям, и распад солитона может произойти только от внутренней неустойчивости горба или впадины.

На рис. 5.2 также изображено поведение λ_m при $\delta = 0,06$ и $\alpha c_i^{\max} = 0,1376$. Область устойчивости первого семейства исчезла, однако вблизи оптимального режима λ_m имеет ярко выраженный минимум, $\lambda_m = 0,00151$. При меньших значениях α для семейств медленных волн наблюдается более равномерный рост $\lambda_m(\alpha)$, чем при $\delta = 0,03$; при $s = 0,01$ λ_m совпадает тремя значащими цифрами с $\alpha c_i^{\max}$, выходя на асимптоту. Второе семейство теперь имеет четыре области устойчивости (α_k, α'_k) , $k = 2, 3, 4, 5$. При $\alpha < \alpha_4$ λ_m сильно осциллирует и при некоторых значениях α подходит довольно близко к нулю. При дальнейшем уменьшении α λ_m резко возрастает, и при $\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_m \rightarrow \alpha c_i^{\max}$.

6. ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Применимость теории, основанной на решениях системы (2.18), к истолкованию результатов реальных экспериментов с регулярными волнами определяется двумя ограничениями: $\delta \leq 0,5$; $\kappa^2 \ll 1$ ($\kappa = \lambda^{-1}$). Первое из них задает границу, выше которой регулярные волны не существуют как устойчивые решения этой системы. Второе условие задает порядок членов, отбрасываемых при выводе (2.18), которые должны оставаться малыми. На рис. 6.1 а, б, представлены линии $\delta = \text{const}$ в плоскостях (Re, γ) , (κ^2, γ) . На рис. 6.1, а представлены также интервалы чисел Рейнольдса и значения γ для целого ряда экспериментов [55]. Видно, что условие $\delta < 0,5$ выполняется на большей части экспериментальных данных по числу Re . Условие $\kappa^2 < 1$ выполняется для этих значений δ при $\gamma \geq 500$. Таким образом, применимость теории по существу ограничена только при малых значениях γ .

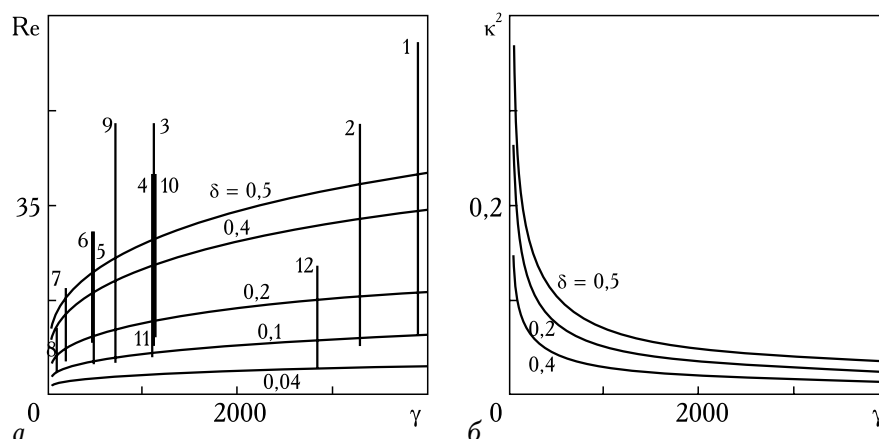


Рис. 6.1. Области применимости теории [36]

Развитие нелинейных волн при вынужденном волнообразовании моделируется численным решением нестационарной задачи при заданном волновом числе s , определяющем период пространственной периодичности. При этом численно интегрируется по времени соответствующая динамическая система метода Галеркина.

На рис. 1.3 и в табл. 6.1 показано сравнений фазовых скоростей s , s' стационарных волновых режимов, взятых из эксперимента [55] и полученных из решения нестационарной задачи (2.18) методом установления. Несмотря на некоторые различия, соответствия налицо.

Таблица 6.1

№	R	δ	q_0	a	$\tilde{\lambda}$, мм	$\tilde{c}$, мм/с	$\tilde{c}'$, мм/с
а	5,833	0,127	1,38	1,48	38	350	372
б	7,129	0,158	1,156	0,86	18	290	270
в	7,252	0,165	1,110	0,77	15,2	254	242

Как было найдено теоретически, при естественном волнообразовании и дальнейшей нелинейной конкуренции может “выжить” только один из двух устойчивых волновых режимов. Это те волны, которые при фиксированном числе Рейнольдса переносят максимум расхода. Уже в первых экспериментах Капицы [1, 2] наблюдались два типа регулярных волн: близкие к синусоидальным и крупноамплитудные образования с крутым передним фронтом и капиллярной рябью перед ними. Для волн первого типа теория построена в основополагающей работе [3], согласование с экспериментами [2] показано на *рис. 1.1*. Рассмотрим периодические решения второго типа. Начнем с условной нижней границы их существования, которую задают оптимальные режимы второго семейства. Безразмерные параметры волн второго семейства с максимальным расходом приведены к размерным в нижеприведенной *табл. 6.2*.

Таблица 6.2

$\langle R \rangle / \gamma^3$	1	2	2,5	3	3,5	4
$\alpha \langle R \rangle / \kappa$ эксп.	0,25	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85
$\alpha \langle R \rangle / \kappa$ теор.	0,47	0,6	0,63	0,65	0,66	0,67

Здесь $\langle R \rangle$ — число Рейнольдса, построенное по среднему расходу при волновом течении, $\langle R \rangle = q_0 R$. Далее, $\langle R \rangle / \gamma^3 = 7,508 \delta^{9/11} q_0$, $\alpha \langle R \rangle / \kappa = 15 \alpha \delta q_0^{4/3}$. Параметры в первой строке характеризуют расход, во второй и третьей — экспериментальное [55] и теоретическое волновое число. Между значениями эксперимента и теории имеется хорошее соответствие. Следует учесть, что экспериментальная зависи-

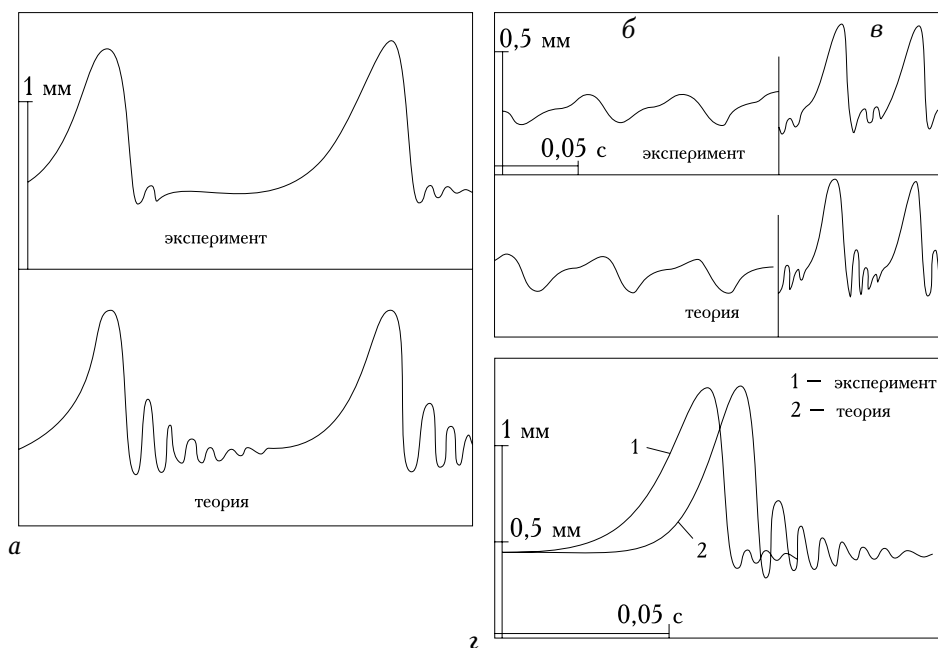


Рис. 6.2. Сравнение экспериментальных [52] и расчетных профилей периодических волн [21, 22]. Параметры волн см. в табл. 6.3

Таблица 6.3

№	$\nu \times 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\sigma/\rho \times 10^6, \text{ м}^2/\text{с}^2$	γ	$\langle R \rangle$	δ	$\lambda, \text{ мм}$	$\tilde{c}, \text{ эксп.}, \text{ мм/с}$	$\tilde{c}, \text{ теор.}, \text{ мм/с}$
a	11,2	55,9	104	12,4	0,215	28,5	0,463	0,448
б	3	62,5	675	7,6	0,106	13,8	0,23	0,198
в	3	62,5	675	22,7	0,33	20,6	0,43	0,392
г	11,2	55,9	104	2,53	0,057	∞	0,463	0,448

мость построена усреднением данных по нескольким жидкостям и довольно приближенна. Сравнение профилей волн и других параметров приведено на рис. 6.2 и в табл. 6.3. Задний фронт теоретической волны второго семейства полностью соответствует экспериментальному, теоретически предсказываемые осцилляции на заднем фронте являются более жесткими, их амплитуда несколько больше экспериментальной, хотя значения h близки. Соответствие в целом является хорошим. На рис. 6.3 представлена зависимость скорости волны от ее длины для волн второго семейства. Имеется полное соответствие теории с экспериментом. Дан-

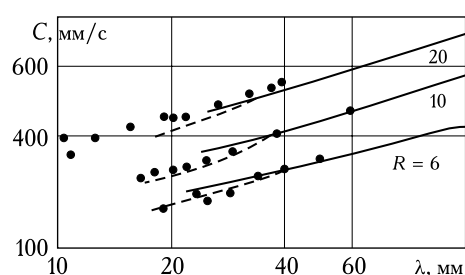


Рис. 6.3. Зависимость скорости волны от ее длины. Эксперименты [52] и теоретические данные [22]

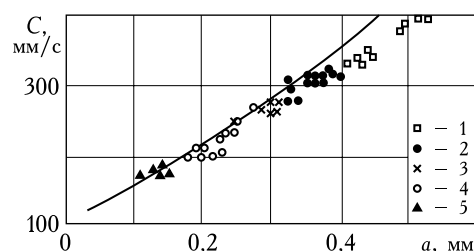


Рис. 6.4. Теоретические и экспериментальные зависимости скорости солитона от его амплитуды: $\nu = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\sigma/\rho = 28,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\gamma = 491$; 1 — $\langle R \rangle = 29$; 2 — 19; 3 — 14; 4 — 9,7; 5 — 5,6

ные представлены для $\nu = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\sigma/\rho = 57,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. На рис. 6.4 показана скорость волны как функция амплитуды.

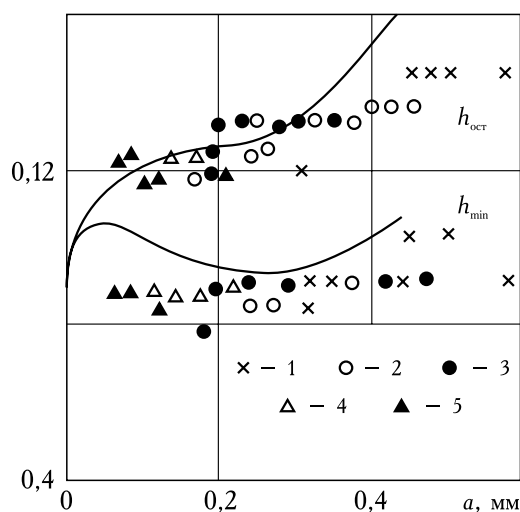


Рис. 6.5. Сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей толщины остаточного слоя $h_{\min}$ от амплитуды: $\nu = 1,03 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\sigma/\rho = 72,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\gamma = 3298$; 1 — $\langle R \rangle = 49$; 2 — 30; 3 — 19; 4 — 14; 5 — 9,8

Значения толщины остаточного слоя и минимальная толщина пленки важны с точки зрения тепло- и массопереноса. Теоретическая и экспериментальная зависимости толщины остаточного слоя h_k^* и минимальной толщины $h_{\min}^*$ от амплитуды a^* даны на рис. 6.5. При $\delta \rightarrow 0$ $a \rightarrow 0,657(15\delta)^{3/2}$, но тогда можно построить асимптотику при малых $\tilde{a}$:

$$h_k \rightarrow 1,0083\gamma^{1/13}(3\nu^2/2g)^{11/39}\tilde{a}^{2/13}.$$

Зависимость от поверхностного натяжения крайне слабая: изменение σ в 10^4 раз ведет к изменению h_k^* в два раза. При малых $\tilde{a}$ имеется весьма резкая зависимость h_k^* и $h_{\min}^*$ от амплитуды, при больших же $\tilde{a}$ зависимость слабая, как это и наблюдается в эксперименте.

Взяв не одну, а несколько галеркинских функций в разложении по поперечной координате y , можно получить теоретический профиль скоростей, а не задавать его, см. рис. 6.6 [25].

6.1. Доминирующие волны как глобальные аттракторы

Неединственность регулярных волновых решений системы (2.18) при заданных значениях управляющих параметров δ , s выдвигает проблему выбора того решения, которое следует сравнивать с экспериментальными данными. В [3] было введено понятие оптимальных режимов: на множестве решений первого семейства волн такой режим обеспечивает наибольший, возможный расход при фиксированной средней толщине пленки. В [4] показано, что оптимальные режимы обладают преимуществом в отношении устойчивости: они наименее неустойчивы к возмущениям.

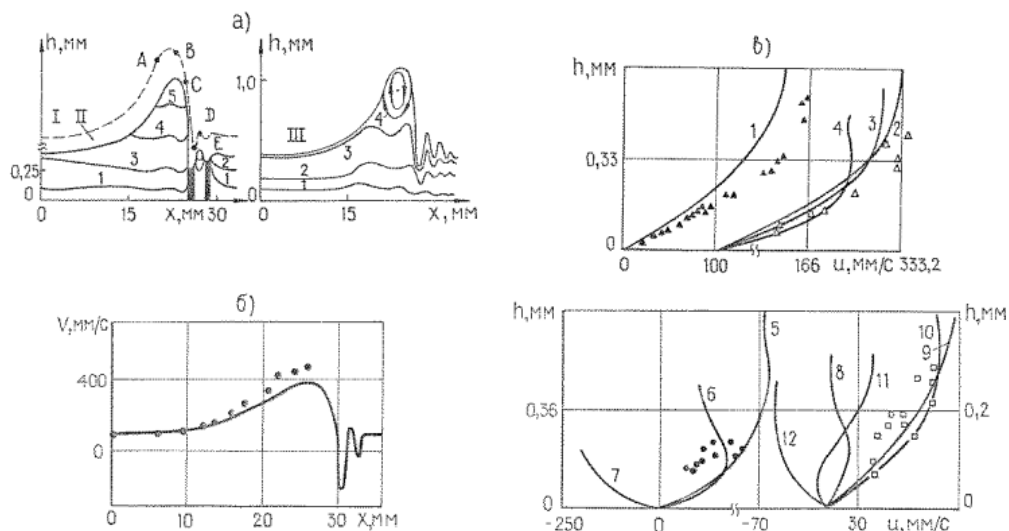


Рис. 6.6. Сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей параметров солитона от его амплитуды: $\nu = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\sigma/\rho = 57,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$; $\gamma = 193,6$; $\langle R \rangle = 3,064$; $\delta = 0,567$:

а) профилей волны; б) скоростей на поверхности раздела;

в) мгновенных профилей скорости

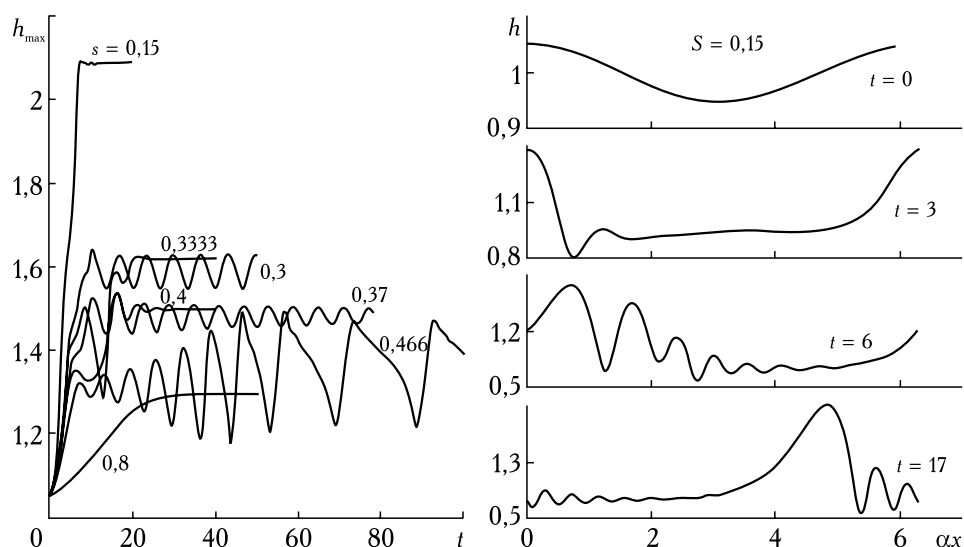


Рис. 6.7. Развитие нелинейных волн из малых возмущений стационарного течения пленки ($\delta = 0,15$)

ниям определенных типов. Идея, связанная с выделением решений по экстремальным свойствам их средних характеристических параметров, получила дальнейшее развитие в [32, 33] и завершилась введением понятия доминирующих волн (рис. 4.16, 4.18). Прямыми численными решениями задачи Коши по времени для системы (2.18) показано, что доминирующие волны устойчивы и обладают свойством притягивать нестационарные решения из малых окрестностей других регулярных волн, иначе говоря, множество их составляет глобальный аттрактор для пространственно-периодических решений системы (2.15), (2.16).

Для любых малых гармонических или стохастических начальных возмущений основного состояния $h = 1$, $q = 1$ предельными при $t \rightarrow \infty$ состояниями оказываются, как правило, доминирующие волны. Дополнительно к ним обнаружены также осциллирующие режимы в окрестности тех пар значений (δ, s) , для которых множество доминирующих волн терпит разрывы (рис. 6.7, 6.8, а). Если в качестве начальных данных принимать регулярные решения (2.15), (2.16) не принадлежащие к множеству доминирующих волн, то последующее развитие их определяется свойством неустойчивости этих решений. Неизбежные ошибки вычислений при расчете регулярных волн соответствуют малым случайным возмущениям в начальных данных. Развитие их приводит к перестройке выбранной волны в ту доминирующую волну, которая существует для выбранных δ, s (рис. 6.8, а). Притягивающие свойства доминирующих волн ослабевают с уменьшением s (при $s < 0,1$) и с ростом δ (при $\delta > 0,5$).

В первом случае структура предельной, регулярной волны усложняется по мере приближения к точке $s = 0$ по ветви второго семейства, и все труднее реализуется вычисление таких волн. Это связано с тем, что

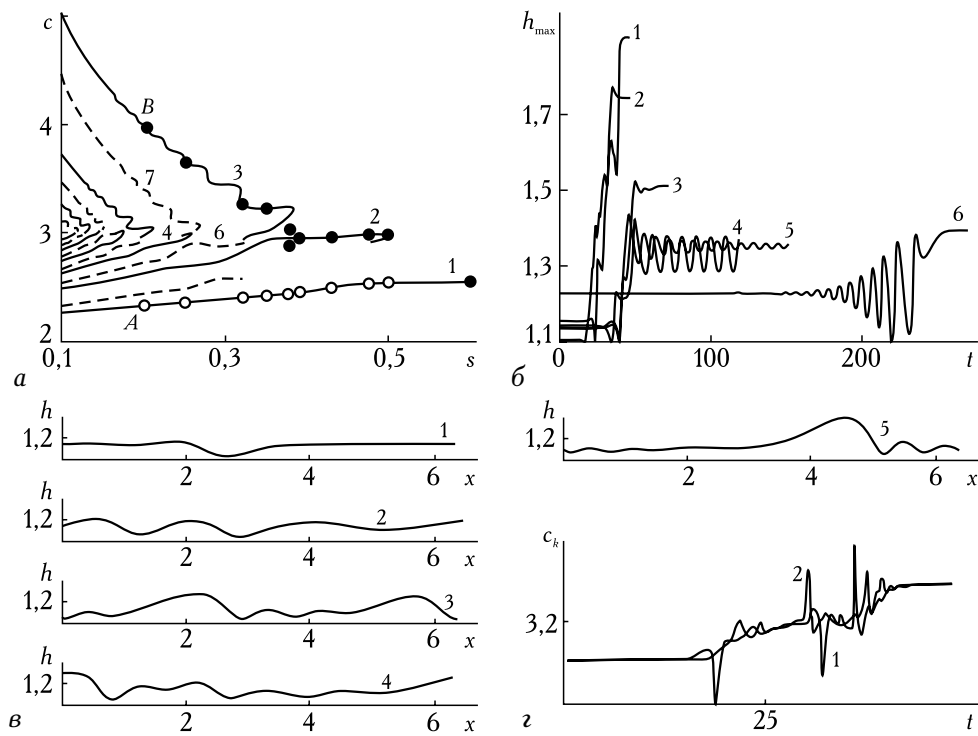


Рис. 6.8. а) Семейства нелинейных волн при $\delta = 0,1$: 1 – $\gamma_{-1,1}^1$, 2 – $\gamma_{-2,1}^2$, 3 – $\gamma_{+1,1}^3$, 4 – $\gamma_{-3,1}^4$, 5 – $\gamma_{-1,2}^2$, 6 – $\gamma_{-2,2}^3$, 7 – $\gamma_{+1,2}^4$; б) Развитие волн $\gamma_{-1,1}^1$ во времени при $\delta = 0,1$: 1 – $s = 0,2$; 2 – $0,25$; 3 – $0,35$; 4 – $0,38$; 5 – $0,39$; 6 – $0,5$; в) профили волн h : 1 – $t = 0$; 2 – 20 ; 3 – 28 ; 4 – 37 ; 5 – 48 ; г) фазовые скорости гармоник c_k : 1 – $k = 2$; 2 – 4

второе семейство имеет максимум среднего расхода при значениях $s < 0,1$ (рис. 4.10). И хотя фазовая скорость и амплитуда стационарной волны при дальнейшем уменьшении s продолжают расти, средний расход q уменьшается, и аттракторы начинают терять свойства доминирования. В частности, если $s = 0,05$, $\delta = 0,4$, то в расчетах реализуется предельная волна, соответствующая $s = 0,1$ [38]. Это соответствует переходу $s \rightarrow 2s$ и, соответственно, переходу к цепочке быстрых волн с меньшим расстоянием между главными горбами. Этот результат соответствует экспериментальным наблюдениям [2, 55], согласно которым имеется граница, определяющая максимальную длину волны, достижимую в пленке

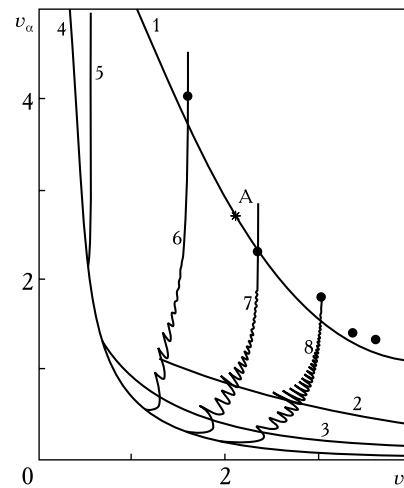


Рис. 6.9. Границы волновых режимов: линии 1–4 эксперименты [55], 5–8 – доминирующие волны, $\delta = 0,04; 0,1; 0,15; 0,2$; [38].
 $v_q = (45\delta)^{9/11} q_0^3^{-1}$, $v_\alpha = (30\pi\delta q_0^{4/3})^{-1}$

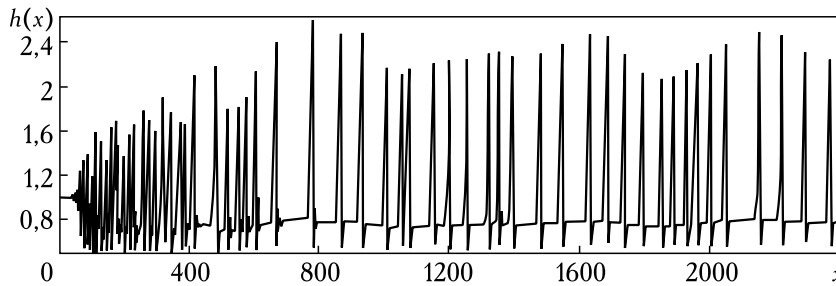


Рис. 6.10. Поверхность волновой пленки при возбуждении случайных колебаний расхода в начальном сечении [45]

при заданном расходе уменьшением частоты малых возмущений в начальном сечении пленки. На рис. 6.9 показаны экспериментальные и расчетные границы волновых режимов. Линия 1 соответствует предельно длинным волнам, точки соответствуют вычисленным оптимальным доминирующим режимам, иначе говоря, решениям второго семейства с наибольшим средним расходом q_0 . Имеется вполне четкое соответствие экспериментов и расчетов. Во втором случае с ростом δ быстро возрастает количество промежуточных бифуркаций, поэтому возникают нестационарные волны в узких интервалах по s (рис. 4.18). В связи с ростом числа бифурцирующих семейств влияние фактора случайности в возбуждении промежуточных колебательных режимов также должно возрастать. Это согласуется с тем, что при больших значениях $\delta > 0,5$ регулярные волновые режимы в экспериментах не наблюдаются. Перестройка цепочек уединенных волн при малых s , вызванная их неустойчивостью, рассматривается в [43–46]. Для системы (2.18) ставилась начально-краевая задача на достаточно протяженном интервале $0 \leq x \leq x_k$ с краевыми условиями следующего вида:

$$x = 1: h = 1, \quad q = q_0(1 + F(t)),$$

$$x = x_k: \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma(h - 1), \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

В начальном сечении $x = 0$ задаются малые случайные колебания расхода с характерной частотой F_0 . В конечном сечении $x = x_k$ задаются так называемые мягкие условия, которые исключают быстрый рост решения при возрастании x . В качестве $\sigma < 0$ принималось одно из собственных чисел линейной задачи о пространственной неустойчивости невозмущенной пленки.

Численное решение этой начально-краевой задачи требует более значительных вычислительных ресурсов по сравнению с задачей Коши о саморазвитии во времени пространственно-периодических волн. На рис. 6.10 представлена мгновенная картина толщины пленки после некоторого достаточно большого времени развития под воздействием $F(t)$. На ней отчетливо видна эволюция малых возмущений в последовательность нелинейных уединенных волн с удалением от начального сечения.

На рис. 6.11 показано, как изменяется расстояние между горбами. Предельная волновая картина рис. 6.11, изображается точкой *A* на рис. 6.9, которая практически точно попадает на линию оптимальных доминирующих режимов. В [47] численные эксперименты с волнами, развивающимися по пространственной координате, приведены также и для обобщенной системы (2.18) с учетом нескольких аппроксимирующих функций в методе Галеркина. Основное внимание уделялось взаимодействиям уединенных волн, вызываемых отклонениями волновой цепочки от регулярной структуры.

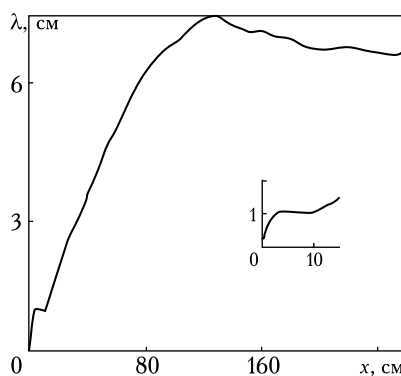


Рис. 6.11. Расстояния между главными горбами на рис. 6.10
 $\delta = 0,216$

6.2. Теория для истолкования и прогнозирования реальных экспериментов

Притягивающие свойства доминирующих волн выделяют их из множества периодических решений (2.18) как наиболее подходящие волны для сопоставления с экспериментами рис. 6.12. Если имеются рассчитанные таблицы параметров доминирующих волн как функций s при различных значениях δ , то можно поставить вычислительный эксперимент вместо физических экспериментов [36]. Пусть выбрана рабочая жидкость, тогда определен параметр γ . Задавая δ , по таблицам находим при различных s характеристические парамет-

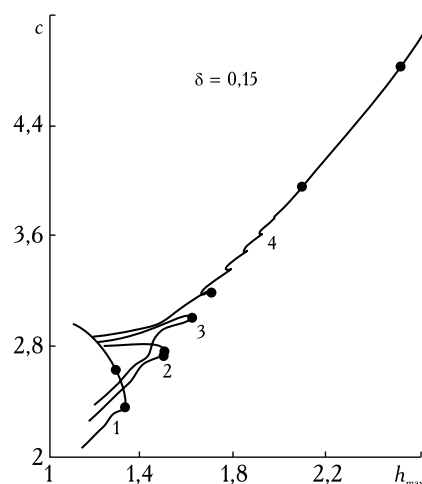


Рис. 6.12. Саморазвитие доминирующих волн (точки) из малых начальных возмущений

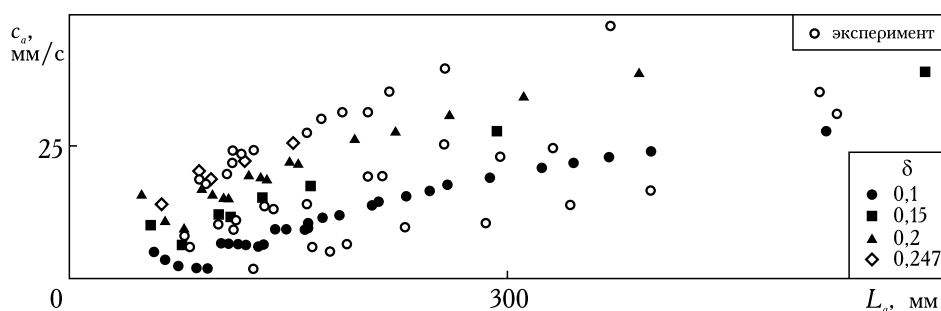


Рис. 6.13. Сравнение доминирующих волн с экспериментами [55]

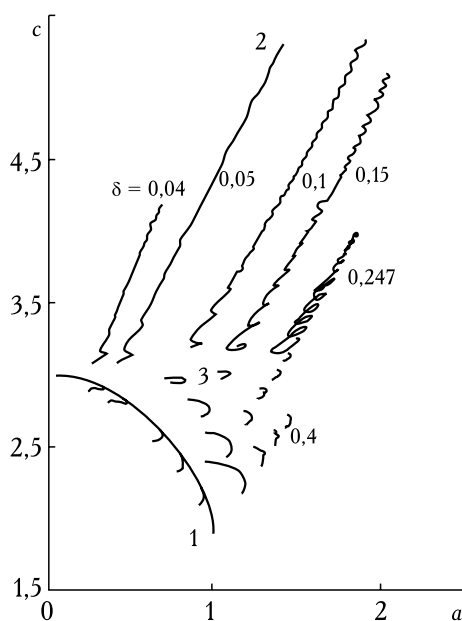


Рис. 6.14. Следы доминирующих волн в плоскости (c, a)

ся три группы результатов. Точки, соответствующие первым семействам при разных δ , располагаются вдоль дуги 1 и в ее близкой окрестности. Каждое семейство имеет четкий максимум значения амплитуды a (оптимальные режимы [3]). Точки, относящиеся ко вторым семействам, расслаиваются, располагаясь вдоль параллельных прямых 2 и в их малых окрестностях. Разброс точек относительно прямых возрастает с ростом δ , однако при всех $\delta < 0,4$ зависимость фазовой скорости от амплитуды приводится к единой прямой с постоянным наклоном. Это вполне соответствует экспериментальным данным о длинных волнах. Точки, относящиеся к семействам промежуточных бифуркаций, заполняют в плоскости (c, a) область 3 и к единой кривой не приводятся.

На рис. 6.15 такие режимы заполняют полосу вместе с экспериментальными точками. Теоретические и экспериментальные волны этого типа развиваются из возмущений с частотами, принадлежащими окрестности частоты наиболее растущих волн и в [55] названы волнами в области волнообразования.

7. ТРЕТИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОД К ТРЕХМЕРНОМУ РЕЖИМУ

Результатом эволюции случайных возмущений на входе вниз по потоку являются двумерные солитоны, они наблюдаются в экспериментах [49, 50, 55, 59, 60, 105], однако при достаточно больших числах Рейнольдса и достаточной длине канала они распадаются на трехмерные локализованные образования [55, 57, 58].

ры волн c , q_0 , $h_{\max}$, a , λ , а затем вычисляем расход и число Рейнольдса. Перебирая значения δ и соответствующие им расходы, получим ансамбль точек в любой плоскости, принимаемой для представления экспериментальных данных.

Пример такого численного эксперимента приведен на рис. 6.13, где даны экспериментальные [55] и расчетные [36] точки. Используем теперь численные данные о характеристических параметрах регулярных волн для установления корреляционных зависимостей между этими параметрами. На рис. 6.14, где представлены данные для доминирующих волн в плоскости (c, a) , выделяют-

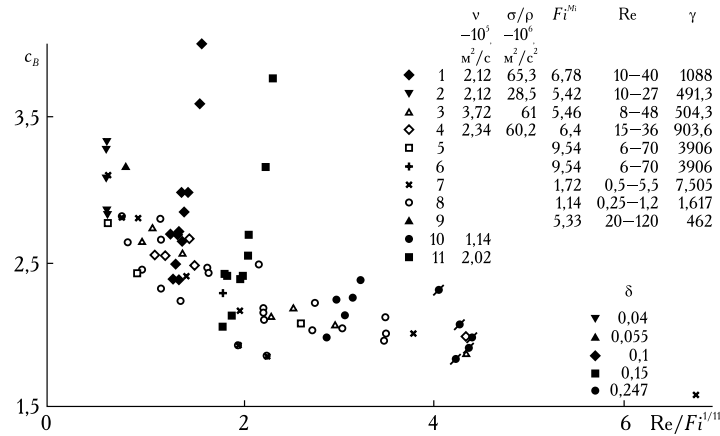


Рис. 6.15. Фазовые скорости доминирующих волн, принадлежащих семействам промежуточных бифуркаций

Чтобы исследовать это явление, наложим на двумерное решение типа солитона малые возмущения вида

$$\begin{aligned} h &= h_0(\xi) + \hat{H}(\xi)e^{i\beta z + \lambda t}, \\ q &= q_0(\xi) + \hat{Q}(\xi)e^{i\beta z + \lambda t}, \\ p &= i\hat{P}(\xi)e^{i\beta z + \lambda t}, \quad \xi = x - ct. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Подставляя (7.1) в (2.15)–(2.16) и линеаризируя, получим краевую задачу на собственные значения λ [48]:

$$\begin{aligned} \lambda \hat{Q} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{12}{5} \frac{q_0}{h_0} \hat{Q} - \frac{6}{5} \frac{q_0^2}{h_0^2} \hat{H} - c \hat{Q} \right) - \frac{6}{5} \beta \frac{q_0}{h_0} \hat{P} = \\ = \frac{1}{5\delta} \left\{ h_0 \frac{d^3 \hat{H}}{d\xi^3} + h_0''' \hat{H} - \beta^2 h_0 \frac{d\hat{H}}{d\xi} + \hat{H} - \frac{1}{h_0^2} \hat{Q} + \frac{2q_0}{h_0^3} \hat{H} \right\}. \\ \lambda \hat{P} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{6}{5} \frac{q_0}{h_0} \hat{P} - c \hat{P} \right) = \frac{1}{5\delta} \left\{ \beta h_0 \frac{d^2 \hat{H}}{d\xi^2} - \beta^3 h_0 \hat{H} - \frac{1}{h_0^2} \hat{P} \right\}, \quad (7.2) \\ \lambda \hat{H} + \frac{d}{d\xi} \left(\hat{Q} - c \hat{H} \right) - \beta \hat{P} = 0, \\ \hat{H}, \hat{Q}, \hat{P} \rightarrow 0 \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Эта система при $\beta = 0$ и $\hat{H} = 0$ переходит в (5.2) и описывает устойчивость к двумерным возмущениям. При $\xi \rightarrow \pm\infty$ (7.1) стремится к системе с постоянными коэффициентами, которая имеет решение вида $\exp(\sigma x)$, σ определяется дисперсионным соотношением

$$\begin{aligned} &(\sigma^4 + ((5c^2 - 12c + 6)\delta - 2\beta^2)\sigma^2 + \\ &+ (3 - 10\lambda c\delta + 12\lambda\delta - c)\sigma + 5\lambda^2\delta + \lambda + \beta^4) \times \\ &\times ((6 - 5c)\delta\sigma + 5\lambda\delta + 1) = 0, \end{aligned}$$

три корня которого, σ_k , $\text{Re}\{\sigma_k\} > 0$, соответствуют затухающим при $\xi \rightarrow -\infty$ решениям, имеющим вид $A_1\exp(\sigma_1 x) + A_2\exp(\sigma_2 x) + A_3\exp(\sigma_3 x)$. Решение при $\xi \rightarrow +\infty$ имеет вид $B_1\exp(\sigma_4 x) + B_2\exp(\sigma_5 x)$.

На этой основе построен численный алгоритм нахождения решений. Найдено, что при всех δ существует одно неустойчивое действительное собственное значение, $\lambda(\beta)$. В малой окрестности $\beta = 0$ $\lambda = 0$; при увеличении β растет λ , проходит через максимум λ_m при $\beta = \beta_m$ и затем пересекает ноль при $\beta = \beta_0$ и уходит в устойчивую зону $\lambda < 0$.

При $\delta \rightarrow 0$ было найдено асимптотическое решение $\beta_m \rightarrow 0,3255(158)^{1/2}$, $\lambda_m \rightarrow 0,0545(158)^2$, $\beta_0 \rightarrow 0,4758(158)^{1/2}$. При достаточно больших δ решение выходит на другую асимптотику, $\beta_m \rightarrow 0,361$, $\lambda_m \rightarrow 0,2382$, $\beta_0 \rightarrow 0,832$.

Пересчет β_m на размерную величину для воды, $\gamma = 2850$, дает наиболее опасную длину волны $1,42\text{Re}^{1/9}$, для чисел Рейнольдса от 5 до 80 она составляет порядка 2 см, что хорошо соответствует экспериментам [55, 57, 58].

Расчеты [48] показали, что при $\delta < \delta_* \cong 0,05 \div 0,07$ (для воды $\text{Re}_* \cong 6$), несмотря на линейную неустойчивость, не происходило полного развала двумерного солитона, а сигнал принимал стационарную “квазидвумерную” форму, слабо искривленную в направлении z . При $\delta > \delta_* \cong 0,05$ неустойчивость приводит к полному развалу двумерного солитона и установлению трехмерных локализованных образований, рис. 7.1.

8. ТРЕХМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ И ПОВЕРХНОСТНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

При достаточно больших числах Рейнольдса (число Рейнольдса, основанное на расходе подающего устройства, 40, число Рейнольдса, подсчитанное по подслою солитона, больше 5) поверхность вертикально стекающей пленки жидкости покрыта сильно сцепленными трехмерными локализованными когерентными структурами, имеющими подковообразную форму [55]. Эти структуры получаются как результат разрушения двумерных солитонов. Поверхность пленки визуально выглядит хаотичной, хотя числа Рейнольдса слишком малы для проявления неустойчивости Толлмина—Шлихтинга и обычной турбулентности. Поэтому этот режим иногда называют поверхностной турбулентностью.

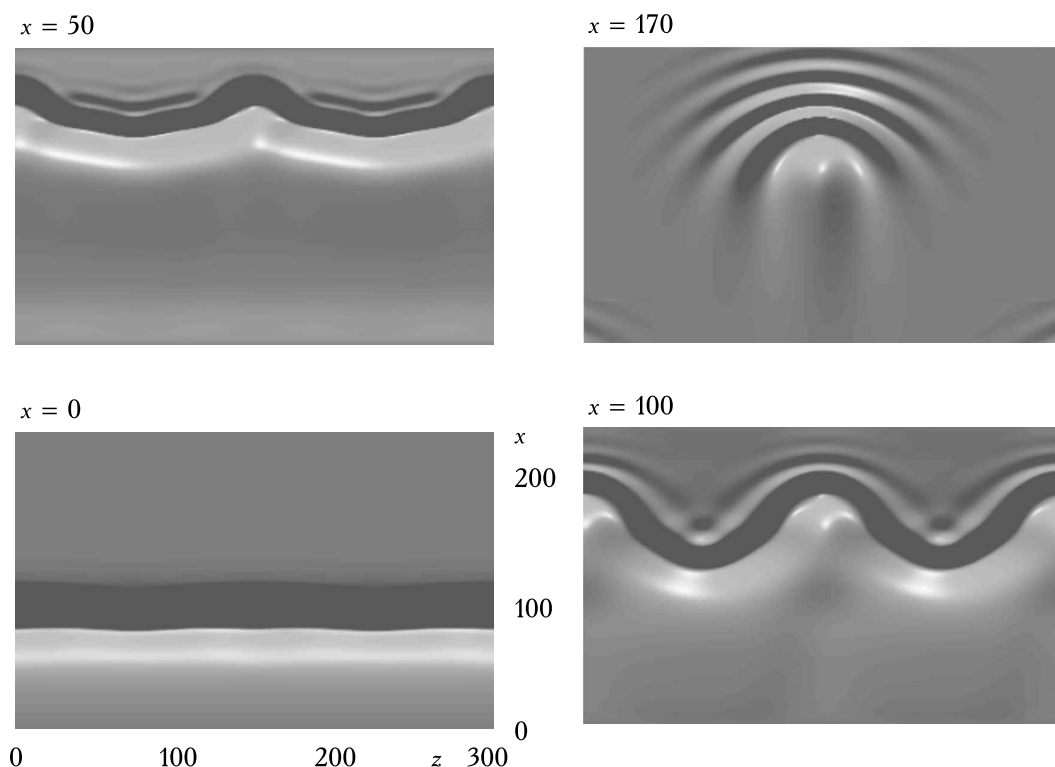


Рис. 7.1. Развал двумерного солитона на трехмерные локализованные образования [48]

Будем искать решения типа трехмерных солитонов [48]. Для локализованных решений типа солитонов при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$, т.е. достаточно далеко от горба, течение становится плоскопараллельным. Для нахождения решения вблизи плоского течения, рассмотрим сначала систему (2.15)–(2.16) при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ и, линеаризовав ее около тривиального решения, сведем ее к одному уравнению относительно $h = h - 1 \rightarrow 0$. Кроме того, учтем, что далеко от горба детали поведения локализованного образования не влияют на решение. Заменив это локализованное образование на δ -функцию, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \hat{h} + 5\delta\omega \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} - (c - 3) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = \delta(x)\delta(z),$$

$$\omega = c^2 - 12/5c + 6/5.$$

Решение, определенное с точностью до мультипликативной постоянной, может быть найдено двойным преобразованием Фурье по обеим координатам, $\sigma = i\alpha$, $v = i\beta$,

$$\hat{h} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\sigma x} d\sigma \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{vz} dv}{\Pi(v)},$$

$$\Pi = (\sigma^2 + v^2)^2 + 5\delta\omega\sigma^2 - (c - 3)\sigma = \sum_{k=1}^4 (v - v_k(\sigma)),$$

$$v_k = \pm \sqrt{-\sigma^2 \pm \sqrt{(c - 3)\sigma - 5\delta\omega\sigma^2}}.$$

Первый интеграл можно получить, воспользовавшись теоремой о вычетах,

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{vz} dv}{\Pi(z)} = 2\pi i \sum_{k=1}^2 F_k(\sigma) e^{v_k(\sigma)z},$$

$$F_k = \frac{1}{4v(\sigma^2 + v^2)} \Big|_{v=v_k}.$$

Представляя результат в полярной системе координат $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, получим

$$\hat{h} = \frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} [F_1(\sigma)e^{\varphi_1 r} + F_2(\sigma)e^{\varphi_2 r}] d\sigma, \quad \varphi_k = v_k(\sigma) + \sigma \sin v, \quad k = 1, 2.$$

Интегралы оценивались при $r \rightarrow \infty$ методом скорейшего спуска, и стационарная точка σ_* находилась из соотношения

$$\frac{\partial v(\sigma_*)}{\partial \sigma} + \operatorname{tg} v = 0.$$

В конечном итоге получим выражение

$$\hat{h} \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi r |\varphi_*''|}} F_1(\sigma_*) e^{\varphi_* r} e^{-i\frac{\theta}{2} + i\frac{\pi}{2}} + \text{к.с.},$$

которое можно представить в виде

$$\hat{h} \sim \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-\mu r} \cos(\gamma r),$$

где A , μ и γ — функции угла θ . Из этого соотношения можно вывести условия при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} (r^{1/2} \hat{h})'' + 2\mu(r^{1/2} \hat{h})' + (\mu^2 + \gamma^2)(r^{1/2} \hat{h}) = 0, \\ (r^{1/2} \hat{h})''' + (\gamma^2 - 3\mu^2)(r^{1/2} \hat{h})' - 2\mu(\mu^2 + \gamma^2)(r^{1/2} \hat{h}) = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Запишем систему (2.15), (2.16) в полярной системе координат $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\theta = \arctg(x/z)$, и будем искать решение в виде ряда Фурье по углу θ , $h = \sum_{k=0}^N H_k(r) \cos k\theta$, аналогично для других неизвестных.

В качестве краевых условий брались условие отсутствия особенности при $r = 0$ и условие (8.1) при достаточно большом $r = R$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений для $H_k(r)$, $Q_k(r)$ и $P_k(r)$ решалась конечноразностным методом с помощью итераций, в ходе которых также находилось c . В конкретных вычислениях бралось $N = 10 \div 50$, $Re = 20 \div 40$.

Типичный волновой профиль [48] при $\delta = 0,05$ представлен на рис. 8.1. Волна имеет большую искривленную головку с капиллярной рябью перед ней, с двумя наклонными “усами”. Имеется глубокая впадина за головкой и между “усами”. Укажем на явное сходство найденного решения с Λ -структурами турбулентности. При $\delta < 0,02$ решение совпало с найденным в [107]. При увеличении δ волна становится более вытянутой, впадина — глубже, а головка — более заостренной, “усы” — более протяженными. При достаточно больших δ скорость трехмерного солитона выходит на постоянную $c \approx 4,56$, в то время как для двумерных солитонов эта константа равна $c \approx 7,67$. Скорость двумерных солитонов всегда больше скорости трехмерных. Амплитуда $h_{\max} - 1$ примерно пропорциональна скорости: $h_{\max} - 1 = 0,95(c - 3)$.

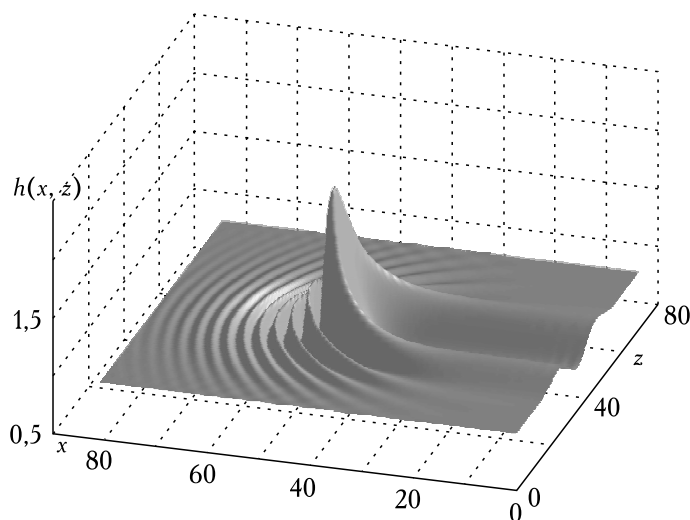


Рис. 8.1. Типичный профиль трехмерного солитона [48]

ВЫВОДЫ

Рассматриваемая теория нелинейных волн с самого начала ориентирована на пленки малой, но конечной толщины, и это ее свойство оказывается важным с точки зрения практических приложений. Базовая модельная система этой теории содержит один параметр подобия, по значениям которого можно выделить класс течений с умеренными расходами, в которых наблюдаются регулярные нелинейные волны.

Таким же способом выделяются течения с предельно малыми расходами (математические волны) и с большими расходами (неустойчивые и стохастические волны). По значениям параметра подобия можно сделать также вывод о применимости базовой модельной системы к исследованию волновой пленки конкретной жидкости. Если условия применимости выполнены, то теория практически исчерпывающим образом описывает свойства волновых режимов и дает теоретическое истолкование основных экспериментальных фактов.

Основные количественные результаты, пригодные для сопоставления с экспериментальными наблюдениями волн, получаются численными методами. Это предполагает наличие специальных алгоритмов и пакетов программ, которые позволяют проводить расчеты динамики развития нелинейных волн на больших интервалах времени без существенного накопления вычислительных ошибок. Использовались алгоритмы вычислений основанные на методе Галеркина с применением техники быстрого преобразования Фурье, допускающие также переход к расширенной системе по методу инвариантного погружения для расчета установившихся периодических и уединенных волн. Методы реализованы на модельных уравнениях метода Галеркина с одной и несколькими аппроксимирующими функциями по поперечной координате. Подробное описание их дается в цитированных выше публикациях.

Новые задачи о течениях волновых пленок выдвигаются в настоящее время прежде всего практикой интенсификации процессов тепло-массопереноса и организацией соответствующих интенсивных пленочных течений. Развитие теории требуется для истолкования и прогнозирования волновой динамики в пленках на профилированных (рельефных) подложках, а также для течений, в которых тепло-массоперенос и гидродинамика существенно связаны и оказывают взаимно-определяющее влияние. Это касается сильновязких жидкостей, в частности, растворов, вязкость которых возрастает при интенсивном испарении. В ряде случаев возникает необходимость учитывать переменность коэффициента вязкости по полю течения и даже переходить к моделям неньютоновских жидкостей. Переменность вдоль поверхности пленки коэффициента поверхностного натяжения при интенсивном нагреве или переносе поверхностно-активных веществ приводит к появлению эффекта Марангони и связанных с ним новых типов неустойчивости. Включение в расчеты возрастающих значений безразмерных критериев, характерных для реальных течений пленок конечной толщины, обычно

приводит к противоречиям с предположениями, принятыми при выводе используемой модели, и это сказывается в некоторых парадоксах теории. Эти парадоксы представляют существенный стимул к развитию теории волновых пленок.

При всех различиях конкретных рассматриваемых задач об интенсивных пленочных течениях, они могут быть исследованы приведением задачи к модельным системам на основе метода Капицы—Шкадова. Это направление исследований получило в настоящее время достаточно широкое распространение, однако изложение соответствующих результатов выходит за рамки данного обзора.

Авторы выражают благодарность Г.М. Сисоеву, В.П. Шкадовой, Д.А. Тушканову, В.С. Шелистову, Е.И. Могилевскому за помощь при подготовке материалов к публикации.

Литература

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, 18(1), с. 3–28.
2. Капица П.Л., Капица С.П. Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1949, 19(2), с. 105–120.
3. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, 1, с. 43–51.
4. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, 2, с. 20–25.
5. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1973, № 25, 192 с.
6. Шкадов В.Я. Вопросы нелинейной гидродинамической устойчивости слоев вязкой жидкости, капиллярных струй и внутренних течений. Дисс. докт. физ.-мат. наук. Механико-математический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 1973.
7. Шкадов В.Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, 1, с. 63–66.
8. Shkadov V.Y. Hydrodynamics of sloped falling films. In: M. Velarde, R.K. Zeytounian, editors. Interfacial phenomena and the Marangoni effect, Springer-Verlag, 2002, p. 191–224.
9. Шкадов В.Я., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М. К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости. Теорет. основы хим. технол. 1970, 4(6), с. 859–867.
10. Есмаиль М.Н., Шкадов В.Я. К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, 4, с. 54–59.
11. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А. О расчете волновых характеристик стекающей пленки жидкости. Теорет. основы хим. технол. 1971, 5(4), с. 559–563.

12. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М. Определение толщины пленки, скорости на поверхности и касательного напряжения на основании решения уравнения Навье—Стокса в нелинейной постановке. Теорет. основы. хим. технол. 1974, 8(3), с. 402—406.
13. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. Наука, Москва, 1990, 271 с.
14. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, 3, с. 151—154.
15. Бунов А.В., Демехин Е.А., Епихин В.Е., Филянд Я.В., Шкадов В.Я. Отчет № 2564. Институт механики Моск. Гос. Ун-та, 1981, 100 с.
16. Бунов А.В., Демехин Е.А., Епихин В.Е., Сисоев Г.М., Филянд Я.В., Шкадов В.Я. Отчет № 2745. Институт механики Моск. Гос. Ун-та, 1982, 62 с.
17. Демехин Е.А., Демехин И.А., Шкадов В.Я. Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, 4, с. 9—16.
18. Демехин Е.А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в вязком слое жидкости на наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, 5, с. 36—44.
19. Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое. ПММ, 1984, 48(4), с. 691—696.
20. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1984, 5, с. 21—27.
21. Shkadov V.Y., Demekhin E.A. On some transition process in spatial flows with a transversal velocity gradient. In: V.V. Kozlov, editor. IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Novosibirsk, 1984, Springer-Verlag, 1985, p. 755—759.
22. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, 3, 63—67.
23. Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я. Бифуркации уединенных волн в стекающем слое жидкости. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 1986, 2, 73—78.
24. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. К теории солитонов в системах с диссипацией. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, 3, с. 91—97.
25. Демехин Е.А., Каплан М.А., Шкадов В.Я. О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1987, 6, 73—81.
26. Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я. О существовании критического числа Рейнольдса для стекающей под действием веса пленки жидкости. ТОХТ, 1987, 21(4), с. 555—559.
27. Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я. Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости. Теорет. основы хим. технол. 1987, 21(2), 177—183.
28. Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я. Численное моделирование эволюции трехмерных волн в стекающем слое вязкой жидкости. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 1988, 2, 50—53.
29. Демехин Е.А., Каплан М.А. Об устойчивости стационарных бегущих волн на поверхности вертикально стекающего слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1989, 3, с. 33—41.

30. Demekhin E.A., Tokarev G.Y., Shkadov V.Y. Hierarchy of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media. *Physica D*, 1991, 5(2), p. 338–361.
31. Chang H.-C., Demekhin Ye.A., Kopelevich D.I. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film. *J. Fluid Mech.*, 1993, 250, p. 433–480.
32. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Доминирующие волны в стекающих пленках вязкой жидкости. Доклады РАН, 1997, 357(4), с. 483–486.
33. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Развитие доминирующих волн из малых возмущений в стекающих пленках вязкой жидкости. Изв. РАН, МЖГ, 1997, 6, с. 30–41.
34. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Неустойчивость и когерентность нестационарных уединенных волн в жидких пленках. Доклады РАН, 1998, 363(4), с. 489–493.
35. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. О двухпараметрическом многообразии волновых решений уравнения стекающей пленки вязкой жидкости. Доклады РАН, 1999, 367(1), с. 56–61.
36. Shkadov V.Y., Sisoiev G.M. Wavy falling films: theory and computations instead of physical experiment. In: H.-C. Chang, editor, IUTAM Symposium on Nonlinear Waves in Multi-Phase Flow, vol. 57 of Fluid Mechanics and its Applications, Notre Dame, USA, Kluwer, Hardbound, 2000, p. 1–10.
37. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Неустойчивости и переформирования регулярных волн в стекающих пленках вязкой жидкости. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2000, 4, с. 44–48.
38. Шкадов В.Я., Сисоев Г.М. К теории одиночных волн в стекающем слое вязкой жидкости. Доклады РАН, 2001, 380(6), с. 774–778.
39. Shkadov V.Ya., Sisoiev G.M. Waves induced by instability in falling films of finite thickness. *Fluid Dyn. Research*, 2004, 35, p. 357–389.
40. Shkadov V.Ya., Sisoiev G.M. Numerical bifurcation analysis of the travelling waves on a falling liquid films. *Computers and Fluids*, 2005, 34, p. 151–168.
41. Chang H.-C., Cheng M., Demekhin E.A., Kopelevich D.I. Secondary and tertiary excitation of three-dimensional patterns on a falling film. *J. Fluid Mech.* 1994, 270, p. 251–275.
42. Chang H.-C., Demekhin E.A. Solitary wave formation and dynamics on a falling film. *Adv. in Appl. Mech.*, 1995, 32, p. 1–58.
43. Chang H.-C., Demekhin E.A., Kalaidin E.N. Interaction dynamics of solitary waves on a falling film. *J. Fluid Mech.* 1995, 294, p. 123–154.
44. Chang H.-C., Demekhin E.A., Kopelevich D.I. Stability of a solitary pulse against wave packet disturbance in an active medium. *Phys. Rev. Let.* 1995, 75, p. 1747–1750.
45. Chang H.-C., Demekhin E.A., Kalaidin E.N. A simulation of noise-driven wave dynamics on a falling film. *AIChE J.*, 1996, 42(6), p. 1553–1568.
46. Chang H.-C., Demekhin E.A., Kalaidin E.N., Y. Ye. Coarsening dynamics of falling-film solitary waves. *Phys. Rev. E.*, 1996, 54, p. 1467–1471.
47. Chang H.-C., Demekhin E.A. Complex wave Dynamics on thin Films. Elsevier, 2002, 402 p.
48. Калайдин Е.Н., Власкин С.Ю., Демехин Е.А., Каллиадасис С. Об устойчивости двумерных солитонов и двумерно-трехмерном переходе в стекающем вязком слое. Доклады РАН, 2005, 405(5), с. 21–27, 2006, 406(1), с. 44–46.

49. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Троян Е.Н., Алексеенко С.В. Течение тонких пленок жидкости. В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1975, с. 129–206.
50. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В., Орлов В.В. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости. ИФЖ, 1977, 33(3), с. 399–405.
51. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости. ИФЖ, 1976, 30(5), с. 780–785.
52. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости: препринт, Новосибирск, ИТ СО АН СССР, 1979, с. 36–79.
53. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.Y., Pokusaev B.G. Wave formation on a vertical falling liquid film. AIChE J. 1985, 31, p. 1446–1460.
54. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.Y., Pokusaev B.G. Wave formation on vertically falling liquid film. Int. J. Multiphase flow, 1985, 11(5), p. 607–627.
55. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. Наука: Сибирское отделение, 1992, 255 с.
56. Krantz W.B., Goren S.L. Finite-amplitude, long waves on liquid films flowing down a plane. Ind. Eng. Chem. Fundam., 1970, 9(1), p. 107–113.
57. Portalsky S., Clegg A.J. An experimental study of falling liquid films. Chem. Eng. Sci., 1972, 27, p. 1257–1265.
58. Pierson F.W., Whitaker S. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films. Ind. Eng. Chem. Fundam., 1977, 16, p. 401–408.
59. Liu J., Paul J.P., Gollub J.P. Measurement of the primary instabilities of film flows. J. Fluid Mech, 1993, 220, p. 69–101
60. Liu J., Gollub J.P. Solitary wave dynamics of film flows. Phys. Fluids, 1994, 6, p. 1702–1712.
61. Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Observations of solitary wave dynamics of film flows. J. Fluid Mech, 2001, 435, p. 191–215.
62. Шкадов В.Я., Шкадова В.П. Инерциальные режимы течения капиллярных пленок. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 1997, 2, с. 47–50.
63. Шкадова В.П., Кулаго А.Е., Шкадов В.Я. К задаче вытеснения вязкой жидкости из капилляра. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 1997, 4, с. 42–46.
64. Зейтунян Р.Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара–Марангони. Успехи физ. наук., 1998, 168(3), с. 259–286.
65. Веларде М.Г., Шкадова В.П., Шкадов В.Я. Влияние поверхностно-активных веществ на неустойчивость стекающей жидкой пленки. Изв. РАН, МЖГ, 2000, 4, с. 56–67.
66. Shkadov V.Ya., Sisoev G.M. Influence of electric field to nonlinear waves on downflowing liquid films. P. Atten, A. Denaut (eds). 2nd Intern. Workshop Electrical Conduction, Convection and Breakdown in Fluids, Genoble, France, 2000, p. 146–149.
67. Такмазян А.К., Шкадов В.Я. Течение пленки жидкости под воздействием термокапиллярного эффекта Марангони. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 2002, с. 46–50.

68. Шкадов В.Я., Такмазьян А.К. Инерциальные режимы вытеснения вязкой жидкости из капилляра. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 2003, 3, с. 81–89.
69. Веларде М.Г., Шкадова В.П., Шкадов В.Я. Устойчивость стекающей пленки жидкости с неравновесным адсорбированным подслоем растворимого поверхностно-активного вещества. Изв. РАН, МЖГ, 2003, 5, с. 20–35.
70. Kalliadasis S., Kiyashko A., Demekhin E.A. Marangoni instability of a thin liquid film heated from below by a local heat source. J. Fluid Mech, 2003, 475, p. 377–408.
71. Sisoiev G.M., Matar O.K., Lowrence C.J. Axisymmetric wave regimes in viscous liquid film flow over a spinning disk. J. Fluid Mech, 2003, 495, p. 385–411.
72. Matar O.K., Sisoiev G.M., Lowrence C.J. Evolution scales for wave regimes in liquid film flow over a spinning disk. Phys. Fluids, 2004, 16(3), p. 1–14.
73. Shkadov V.Ya., Velarde G.M., Shkadova V.P. Falling films and the Marangoni effect. Phys. Rev. E 69, 056310–1, 2004, p. 1–15.
74. Тушканов Д.А., Шкадов В.Я. Нелинейные волны в двухслойных пленках. Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, Матем. Механика, 2004, 2, с. 51–57.
75. Шкадов В.Я. К теории нелинейных волн в пленке жидкости на вращающемся диске. Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, мат. мех., 2005, 1, с. 59–65.
76. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, 3, с. 28–34.
77. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений. В кн.: Гидродинамика. Сб. науч. тр. Вып. 5. Пермь, 1974, с. 91–104.
78. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке. Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1979, № 6, с. 77–87.
79. Накоряков В.Е., Алексеенко С.В. Волны на поверхности наклонной пленки жидкости. Волновые процессы в двухфазных системах. Сб. науч. тр. Новосибирск, 1980, с. 64–79.
80. Семенова И.П., Якубенко А.Е. Стационарные волновые режимы в стекающей пленке вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, 3, с. 16–27.
81. Трифонов Ю.А., Цвелодуб О.Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке. ПМТФ, 1985, 5, с. 15–19.
82. Трифонов Ю.А., Цвелодуб О.Ю. Трехмерные стационарные бегущие волны на вертикально стекающей пленке жидкости. ПМТФ, 1986, 6, с. 35–43.
83. Трифонов Ю.А., Цвелодуб О.Ю. О ветвлении стационарных бегущих волновых режимов вязкой пленки жидкости. ПМТФ, 1988, 4, с. 55–60.
84. Трифонов Ю.А., Цвелодуб О.Ю. Устойчивость волновых режимов пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1988, 5, с. 126–131.
85. Trifonov V.Y., Tsvlodub O.Y. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Part 1. Waves of the first family and their stability. J. Fluid Mech, 1991, 229, p. 531–554; Part 2. Bifurcations of the first-family waves and other types of nonlinear waves. J. Fluid Mech, 1992, 244, p. 149–169.

86. Webb D.R. A note on periodic solutions to flow in a liquid film. *AIChE J.*, 1972, 18(5), p. 1068–1069.
87. Prokopiou Th., Cheng M., Chang H.-C. Long waves on inclined films at high Reynolds number. *J. Fluid Mech*, 1991, 222, p. 665–691.
88. Chang H.-C. Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1994, 26, p. 103–136.
89. Cheng M., Chang H.-C. Competition between subharmonic and sideband secondary instabilities on a falling film. *Phys. Fluids*, 1995, 7(1), p. 34–54.
90. Koulago A.E., Parseghian D. A propos d'une équation de la dynamique ondulatoire dans les films liquides. *Journal de Physique III, France*, 1995, 5, p. 309–312.
91. Yu L.Q., Wadsen F.K., Dukler A.E., Balakotaiah V. Nonlinear evolution of waves on falling films at high Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 1995, 7(8), p. 1886–1992.
92. Lee J., Mei C. Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers. *J. Fluid Mech*, 1996, 307, p. 191–229.
93. Ruyer-Quil C., Manneville P. Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J.*, 1998, B, 6, p. 277–292.
94. Ruyer-Quil C., Manneville P. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J.*, 2000, B, 15, p. 357–369.
95. Nguen L.T., Balakotaiah V. Modelling and experimental studies of wave evolution on free falling viscous films. *Phys. Fluids*, 2000, 12, p. 2236–2256.
96. Ruyer-Quil C., Manneville P. Further accuracy and convergence results on the modelling of flows down inclined planes by wighted-residual approximations. *Phys. Fluids*, 2002, v. 14, № 1.
97. Ruyer-Quil C., Manneville P. Comment on low-dimensional models for vertically falling viscous films. *Phys. Rev. Lett.* 2004, 93(19), p. 199–441.
98. Ruyer-Quil C., Manneville P. On the speed of solitary waves running down a vertical wall. *J. Fluid Mech*, 2005, 531, p. 181–190.
99. Panga M., Mudumuri R., Balakotaiah V. Long-wave equation for vertically falling films. *Physical Review E*, 2005, 71, 36310, p. 1–18.
100. Valluri P., Matar O.K., Hewitt G.F., Mendes M.A. Thin film flow over structured packings at moderate Reynolds numbers. *Chem. Engineering Science*, 2005, 60, p. 1965–1975.
101. Семенов П.А. Течение жидкости в тонких слоях. *ЖТФ*, 1950, 20(8), с. 980–990.
102. Benjamin T.B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech*, 1957, 2, p. 554–574.
103. Benney B.J. Long waves in liquid films. *J. Math. Phys.*, 1966, 45, p. 150–155.
104. Lee J. Kapitza's method of film flow description. *Chem. Eng. Sci.*, 1969, 24, p. 309–1313.
105. Roskes G.J. Three-dimensional long waves on a liquid film. *Phys. Fluids*. 1970, v. 13, № 6, p. 1440–1445.
106. Lin S.P., Wang C.Y. Modeling wavy film flow. in: *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. ed. V.P. Chermisinoff (Gulf, Houston), 1985, v. 1, p. 931–951.
107. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости. *Докл. АН СССР*, 1978, 238(6), с. 1321–1323.

108. Pumir A., Manneville P., Pomeau Y. On solitary waves running down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 1983, 135, с. 2–50.
109. Gjevik B. Occurance of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. *Phys. Fluids*, 1970, 13(8), p. 1918–1925.
110. Lin S.P. Profile and speed of finite amplitude waves in a falling liquid layer. *Phys. Fluids*, 1971, 14(2), p. 263–268.
111. Nakaya C. Waves on a viscous fluid film down a vertical wall. *Phys. Fluids*, 1989, A1(7), p. 1143–1154.
112. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*. 1997, v. 69, № 3, p. 931–980.
113. Ooshida T. Surface equation of falling film flows which is valid even far beyond the criticality. *Phys. Fluids*, 1999, 11, p. 3247–3269.
114. Петров Г.И. Применение метода Галеркина к задачам об устойчивости течения вязкой жидкости. *ПММ*, 1940, 4(3), с. 3–12.
115. Петров Г.И. Оценка точности приближенного вычисления собственного значения методом Галеркина. *ПММ*, 1957, 21(2), с. 72–80.
116. Levich B. *Physicochemical hydrodynamics*. Prentice Hall, 1962.
117. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений. *Докл. АН СССР*, 1965, 160(3), с. 558–561.
118. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
119. Arnold V.I., Sevryuk M.B. Oscillations and bifurcations in reversible systems. In: *Nonlinear Phenomena in plasma physics and hydrodynamics*. Ed. Sagdeev R.Z., Moscow, Mir Publishers, 1986, p. 31–64.
120. Sevryuk M.B. Reversible systems. *Lect. Notes in Math.* Berlin: Springer-Verlag, 1986, 1211.
121. Шкадов В.Я., Запрянов З.Д. Течения вязкой жидкости. М.: Изд. МГУ, 1984, 200 с.
122. Pego R.L., Weinstein M.I. Eigenvalues and instabilities of solitary waves. *Phil. Trans. R. Soc. London. A*, 1992, 340, p. 47–94.
123. Pego R.L., Weinstein M.I. Asymptotic stability of solitary waves. *Commun. Math. Phys.*, 1994, 164, p. 305–349.
124. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980, 608 с.

Статья поступила в редакцию
18 января 2006 года