

ВРЕМЕНА ДОСТИЖЕНИЯ С ЗАПРЕТОМ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

Е. Вл. Булинская

Для симметричного однородного неразложимого случайного блуждания по d -мерной целочисленной решетке с конечной дисперсией скачков изучаются времена прохождения (принимающие значения в $[0, \infty]$), задаваемые стартовой точкой x , точкой достижения y и запрещенной точкой z . Найдена вероятность того, что эти времена прохождения конечны, и исследовано асимптотическое поведение хвостов их функций распределения. В частности, оказалось, что для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, порядок убывания хвоста определяется только размерностью d . При этом для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ асимптотические свойства времен достижения с запретом существенно зависят от взаимного расположения точек x , y и z . Эти задачи возникли недавно при изучении ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления.

Ключевые слова и фразы: случайные блуждания по целочисленным решеткам, времена достижения, (переходные) вероятности с запрещениями, ветвящееся случайное блуждание.

§1. Введение

Статья посвящена исследованию новых объектов в рамках модели случайного блуждания с непрерывным временем по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, а именно, временам достижения с запретом. Точнее говоря, для любых точек $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $y \neq z$, мы определяем функцию $H_{x,y,z}(t)$, $t \geq 0$, как (несобственную) функцию распределения момента первого достижения (или первого возвращения, когда $x = y$) точки y , если точкой старта случайного блуждания является состояние x , а точка z — запрещенное состояние. В данной работе мы находим предельное значение $H_{x,y,z}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} H_{x,y,z}(t)$ и анализируем асимптотическое поведение $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для неразложимого симметричного однородного по пространству и времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00266а).

Наиболее интересным оказывается случай $d = 1$, поскольку тогда существуют два совершенно различных вида асимптотического поведения функции $H_{x,y,z}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от того, является ли случайное блуждание простым или нет. Стоит также упомянуть, что для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, значение $H_{x,y,z}(\infty)$ лежит строго в интервале $(0, 1)$, а порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ определяется только размерностью d независимо от значений x, y и z . При этом для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ именно взаимное расположение точек x, y и z задает как значение $H_{x,y,z}(\infty) \in [0, 1]$, так и порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$, когда $t \rightarrow \infty$.

Напомним, что свойства времен достижения (или, более общо, времен прохождения, включающих времена первого попадания в некоторое множество и последнего выхода из множества) и переходных вероятностей с запретами для однородной марковской цепи изложены в [11] и [21] соответственно (о переходных вероятностях с запрещениями см. также статью [8] и ссылки в ней). Аналог функции $H_{x,y,z}(\cdot)$ для однородной марковской цепи использовался и ранее (см., например, [4, с. 202; 18, с. 31]), но служил вспомогательным инструментом и не изучался сам по себе.

Отметим, что рассматриваемые в статье задачи возникли при изучении ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$.

§2. Основные результаты

Предполагается, что все случайные величины (принимаяющие значения в $[-\infty, \infty]$) определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение. Пусть ν — некоторая вероятностная мера на $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, и матрица $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ такова, что ее элементы обладают следующими свойствами:

$$a(x, y) \geq 0 \text{ при } x \neq y, \quad a(x, x) < 0, \quad \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} a(x, y) = 0 \text{ и } \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |a(x, x)| < \infty.$$

Тогда марковская цепь $S = \{S(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем, пространством состояний $\mathbb{Z}^d$ (т. е. $S(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^d$ для каждого $t \geq 0$), начальным распределением ν и генератором A называется *случайным блужданием по $\mathbb{Z}^d$* .

Существование такого процесса обеспечивает теорема 2 в [7, гл. 3, § 2]. Далее мы рассматриваем только симметричное однородное неразложимое случайное блуждание S с конечной дисперсией скачков, начальное распределение ν которого сосредоточено в некоторой фиксированной точке решетки. *Симметрия* и *однородность* означают, что для $x, y \in \mathbb{Z}^d$ справедливы соотношения $a(x, y) = a(y, x)$ и $a(x, y) = a(\mathbf{0}, y - x) =: a(y - x)$

соответственно (здесь и далее символ $\mathbf{0}$ обозначает начало координат решетки $\mathbb{Z}^d$). Случайное блуждание называется *неразложимым*, если для любых состояний $x, y \in \mathbb{Z}^d$ найдется момент $t > 0$ такой, что

$$\mathbb{P}(S(t) = y \mid S(0) = x) > 0,$$

т. е. все точки решетки $\mathbb{Z}^d$ достижимы. Говорят, что случайное блуждание имеет *конечную дисперсию скачков*, если $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \|x\|^2 a(\mathbf{0}, x) < \infty$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^d$.

Условия, налагаемые на элементы $a(x, y)$, позволяют использовать явную конструкцию случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с генератором A (см., например, теорему 1.2 в [15, гл. 9, разд. 1]). Согласно этой конструкции случайный процесс S является скачкообразным процессом с непрерывными справа траекториями. Скачок процесса из состояния $x \in \mathbb{Z}^d$ в состояние $y \in \mathbb{Z}^d$, $x \neq y$, происходит с вероятностью $-a(x, y)/a(x, x)$ независимо от предшествующего развития S . Более того, для времен перехода $\tau^{(0)} := 0$ и $\tau^{(n)} := \inf \{t \geq \tau^{(n-1)} : S(t) \neq S(\tau^{(n-1)})\}$, $n \geq 1$, имеет место следующее утверждение. Случайные величины $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ независимы и каждая из них подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $a := -a(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. В дальнейшем рассматривается только модификация процесса S , построенная по указанной схеме.

Заметим, что по последовательности $\{\tau^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ можно ввести *вложенную марковскую цепь* $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, где $S_n := S(\tau^{(n)})$. Напомним, что $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная дискретная марковская цепь с переходными вероятностями $a(x, y)/a$ при $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ (см., например, [15, гл. 8, разд. 4]).

Приведем еще несколько фактов, касающихся введенного случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$. Пусть $p(t; x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, — *переходные вероятности* случайного блуждания, т. е.

$$p(t; x, y) := \mathbb{P}(S(t+u) = y \mid S(u) = x) = \mathbb{P}(S(t) = y \mid S(0) = x)$$

для любого $u \geq 0$. Тогда при $h \rightarrow 0+$ имеем

$$\begin{aligned} p(h; x, y) &= a(x, y)h + o(h), \quad x \neq y, \\ p(h; x, x) &= 1 + a(x, x)h + o(h). \end{aligned}$$

Согласно [6; 13, гл. 2, разд. 1] верно асимптотическое равенство

$$p(t; x, y) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где

$$\gamma_d := \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|\det \phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0})|}} \quad \text{и} \quad \phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0}) := \left(\frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\mathbf{0}} \right)_{i,j \in \{1, \dots, d\}}.$$

В свою очередь,

$$\phi(\theta) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{0}, z) \cos(z, \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

и $(\cdot, \cdot)$ есть скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Кроме того, в [13, гл. 2, разд. 1] установлено, что

$$p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t; x, y) \sim \frac{\tilde{\gamma}_d(y - x)}{t^{d/2+1}}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где

$$\tilde{\gamma}_d(z) := \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (v, z)^2 e^{1/2(\phi''_{\theta\theta}(\mathbf{0})v, v)} dv, \quad z \in \mathbb{Z}^d.$$

Положим

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; x, y) dt, \quad \lambda > 0, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d,$$

т. е. функция $G_\lambda(x, y)$ является преобразованием Лапласа переходной вероятности $p(\cdot; x, y)$. Как показано в [13, гл. 2, разд. 2], эта функция допускает представление

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta. \quad (3)$$

Принимая во внимание соотношение (1), легко видеть, что при $d \geq 3$ функция Грина $G_0(x, y)$ конечна для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Однако при $d = 1$ или $d = 2$ имеем $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} G_\lambda(x, y) = \infty$. Это явление согласуется с транзиентностью случайного блуждания при $d \geq 3$ и его возвратностью при $d = 1$ и $d = 2$ (более подробно см., например, [20, гл. 4, разд. 1 и 2]).

Ввиду (2) функция $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} (G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda(x, y))$ конечна при всех $d \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно, можно положить

$$\rho_d(x) := \begin{cases} a \lim_{\lambda \rightarrow 0+} (G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0}, x)), & x \neq \mathbf{0}, \\ 1, & x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Равенство (3) позволяет получить другую формулу для функции $\rho_d(x)$, если $x \neq \mathbf{0}$:

$$\rho_d(x) = \frac{a}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{\cos(x, \theta) - 1}{\phi(\theta)} d\theta. \quad (4)$$

Введем еще ряд обозначений, необходимых для формулировки основных результатов статьи. Пусть $\tau := \inf \{t \geq 0 : S(t) \neq S(0)\}$, т. е. марковский момент τ (относительно естественной фильтрации случайного процесса S) — это время первого выхода из точки старта случайного блуждания. С учетом явной конструкции случайного блуждания имеем $\tau = \tau^{(1)}$ почти наверное (п. н.) и, как следствие,

$$G(t) := \mathbb{P}(\tau \leq t \mid S(0) = x) = 1 - e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Пусть

$$\tau_{y,z} := \inf \{t \geq \tau : S(t) = y, S(u) \neq z, \tau \leq u \leq t\} \quad \text{при } y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z.$$

Как обычно, $\inf \{t \in \emptyset\} = \infty$. Назовем марковский момент $\tau_{y,z}$ *временем (первого) достижения состояния y с запретом в состоянии z* . Обозначим через $H_{x,y,z}(t) := \mathbb{P}(\tau_{y,z} \leq t \mid S(0) = x)$, $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq z$, $t \geq 0$, (несобственную) функцию распределения этого марковского момента при условии старта случайного блуждания в точке x .

Величина

$$\tau_{y,z}^- := \inf \{t \geq 0 : S(t + \tau) = y, S(u) \neq z, \tau \leq u \leq t + \tau\}, \quad y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z,$$

не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса S . При этом случайная величина $\tau_{y,z}^-$ может быть также названа *временем (первого) достижения состояния y с запретом в состоянии z после выхода из начального состояния*, поскольку в этом случае отсчет времени происходит не с момента старта процесса, а с момента первого выхода из стартового состояния. Аналогично полагаем

$$H_{x,y,z}^-(t) := \mathbb{P}(\tau_{y,z}^- \leq t \mid S(0) = x), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq z, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, $\tau_{y,z} = \tau_{y,z}^- + \tau$ п. н. Кроме того, в силу строго марковского свойства случайного блуждания по отношению к марковскому моменту τ (см., например, [15, гл. 8, разд. 4]) случайные величины $\tau_{y,z}^-$ и τ независимы. Поэтому $\tau_{y,z}$ имеет (несобственное) абсолютно непрерывное распределение как сумма двух случайных величин, одна из которых обладает плотностью. С другой стороны, явная конструкция марковской цепи S обнаруживает, что распределение $\tau_{y,z}^-$ имеет атом в нуле при $x \neq y$, а именно, $H_{x,y,z}^-(0) = a(x, y)/a$.

Отметим, что из тождеств $a(x, y) = a(x - y) = a(-x, -y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, следуют свойства функции $H_{x,y,z}$ такие, как однородность и инвариантность относительно отражений решетки $\mathbb{Z}^d$, т. е. если $r, x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ и $y \neq z$, то

$$H_{x+r,y+r,z+r}(t) = H_{x,y,z}(t), \quad H_{-x,-y,-z}(t) = H_{x,y,z}(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Для всех точек $x, y \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $y \neq \mathbf{0}$, зададим функции $C_d(x, y)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} C_1(x, y) &:= \frac{\rho_1(y-x) + \rho_1(x) - \rho_1(y)}{4a\pi\gamma_1} \\ &\quad + \frac{a\pi y^2 \gamma_1^3 (\rho_1(y-x) - \rho_1(x) - \rho_1(y))}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi xy \gamma_1^3}{\rho_1(y)}, \\ C_2(x, y) &:= \frac{\rho_2(y-x) + \rho_2(x) - \rho_2(y)}{4a\gamma_2}, \\ C_d(x, y) &:= \frac{2\gamma_d(\rho_d(y-x) + \rho_d(x) - \rho_d(y))}{a(d-2)(G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, y))^2}, \quad d \geq 3. \end{aligned}$$

В следующих трех теоремах содержатся основные результаты статьи.

Теорема 1. Пусть точки $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таковы, что $y \neq z$. Тогда для случайного блуждания S по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, справедливы соотношения

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{\rho_d(x-z) + \rho_d(y-z) - \rho_d(y-x)}{2\rho_d(y-z)} \in (0, 1), \quad d = 1 \text{ или } d = 2, \quad (6)$$

а при $d \geq 3$

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})G_0(x, y) - G_0(x, z)G_0(y, z)}{G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0^2(y, z)} \in (0, 1), \quad x \neq y, \quad x \neq z, \quad (7)$$

$$H_{y,y,z}(\infty) = 1 - \frac{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{a(G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0^2(y, z))} \in (0, 1), \quad (8)$$

$$H_{z,y,z}(\infty) = \frac{G_0(y, z)}{a(G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0^2(y, z))} \in (0, 1). \quad (9)$$

Более того, при $t \rightarrow \infty$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_1(x-z, y-z)}{\sqrt{t}}, \quad d = 1, \quad (10)$$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_2(x-z, y-z)}{\ln t}, \quad d = 2, \quad (11)$$

$$H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{C_d(x-z, y-z)}{t^{d/2-1}}, \quad d \geq 3, \quad (12)$$

где $C_d(\cdot, \cdot)$, $d \in \mathbb{N}$, — положительные функции, определенные выше.

Теорема 2. Если S — простое случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ и точки $x, y, z \in \mathbb{Z}$ таковы, что $y \neq z$, то

$$1 - H_{x,y,z}(t) \sim \frac{\sqrt{2}|y-x|}{\sqrt{a\pi}\sqrt{t}}, \quad x < y < z \text{ или } z < y < x, \quad (13)$$

$$1 - \frac{1}{2|y-z|} - H_{y,y,z}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2a\pi}\sqrt{t}}, \quad (14)$$

$$\frac{x-z}{y-z} - H_{x,y,z}(t) = o(e^{-a\varepsilon t}), \quad z < x < y \text{ или } y < x < z, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2|y-z|} - H_{z,y,z}(t) = o(e^{-a\varepsilon t}), \quad (16)$$

$$H_{x,y,z}(t) \equiv 0, \quad x < z < y \text{ или } y < z < x, \quad (17)$$

для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Теорема 3. Утверждения теорем 1 и 2 останутся верными, если функцию $H_{x,y,z}$ в левых частях соотношений (6)–(17) заменить функцией $H_{x,y,z}^-$, в то время как правые части этих формул оставить неизменными.

Теоремы 1 и 2 доказаны в § 4 и 5 соответственно. Доказательства основаны на применении преобразований Лапласа и Лапласа — Стильеса к основным уравнениям, содержащим как функции $H_{x,y,z}$ и $H_{x,z,y}$, так и функции $H_{x,y}$, $H_{z,y}$, $H_{x,z}$ и $H_{y,z}$. Здесь $H_{x,y}(t)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, — (несобственная) функция распределения времени (первого) достижения точки y , если точка старта блуждания находилась в x . Далее используется аппарат тауберовых теорем, а при достаточно высоких размерностях d важную роль играют вспомогательные результаты теории восстановления в объеме § 3 в [6]. Существенная трудность, возникающая на этом пути, заключается в проверке положительности функций $C_d(x, y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq 0$, при выполнении условий теоремы 1. Теорема 3 устанавливается в § 6 как следствие теорем 1 и 2.

§3. Вспомогательные результаты

Для неотрицательной функции $\kappa(t)$ и неотрицательной неубывающей функции $\chi(t)$, $t \geq 0$, положим

$$\widehat{\kappa}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \kappa(t) dt, \quad \check{\chi}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\chi(t), \quad \lambda > 0,$$

если интегралы в правых частях равенств существуют. Напомним полезное соотношение между преобразованием Лапласа — Стильеса ограниченной функции $\chi(t)$ и преобразованием Лапласа функции $\chi(\infty) - \chi(t)$, где $\chi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t)$, а именно,

$$(\widehat{\chi(\infty) - \chi})(\lambda) = \frac{\chi(\infty) - \check{\chi}(\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (18)$$

Это тождество следует из формулы интегрирования по частям.

Введем марковский момент $\tau_y := \inf \{t \geq \tau : S(t) = y\}$, который будем называть *временем (первого) достижения точки* $y \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим его функцию распределения при условии, что случайное блуждание стартовало в точке x , как $H_{x,y}(t) := \mathbb{P}(\tau_y \leq t \mid S(0) = x)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$. Предельное значение $H_{x,y}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} H_{x,y}(t)$ и асимптотическое поведение функции $H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ найдены в [3; 6; 16; 17; 22] при $y = \mathbf{0}$ и $x \in \mathbb{Z}^d$. В силу однородности случайного блуждания эти результаты легко сформулировать в более общем виде.

Лемма 1. Пусть $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Тогда

$$H_{x,y}(\infty) = 1 \quad \text{при } d = 1 \text{ и } d = 2, \quad (19)$$

$$H_{x,x}(\infty) = 1 - \frac{1}{a G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})} \quad \text{при } d \geq 3, \quad (20)$$

$$H_{x,y}(\infty) = \frac{G_0(x, y)}{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})} \quad \text{при } d \geq 3 \text{ и } y \neq x. \quad (21)$$

Более того, при $t \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$1 - H_{x,y}(t) \sim \frac{\rho_1(y - x)}{a \gamma_1 \pi \sqrt{t}} \quad \text{при } d = 1, \quad (22)$$

$$1 - H_{x,y}(t) \sim \frac{\rho_2(y - x)}{a \gamma_2 \ln t} \quad \text{при } d = 2, \quad (23)$$

$$H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t) \sim \frac{2\gamma_d \rho_d(y - x)}{a (d - 2) G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) t^{d/2-1}} \quad \text{при } d \geq 3.$$

Из доказательства этой леммы приведем только два соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\check{H}_{x,x}(\lambda) = 1 - \frac{(\widehat{1 - G})(\lambda)}{G_\lambda(x, x)} = 1 - \frac{(\widehat{1 - G})(\lambda)}{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})} = \check{H}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(\lambda), \quad (24)$$

$$\check{H}_{x,y}(\lambda) = \frac{G_\lambda(x, y)}{G_\lambda(y, y)} = \frac{G_\lambda(x - y, \mathbf{0})}{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})} = \frac{G_\lambda(y - x, \mathbf{0})}{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})} = \check{H}_{x-y, \mathbf{0}}(\lambda) = \check{H}_{y-x, \mathbf{0}}(\lambda). \quad (25)$$

В следующей лемме выводится линейное интегральное уравнение относительно функций $H_{x,y,z}(t)$ и $H_{x,z,y}(t)$, которое является основой доказательств теорем 1 и 2.

Лемма 2. Пусть $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ и $y \neq z$. Тогда имеет место уравнение

$$H_{x,y}(t) = H_{x,y,z}(t) + \int_0^t H_{z,y}(t - u) dH_{x,z,y}(u), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Доказательство. Вначале отметим, что величины τ_y и $\tau_{y,z}$ совпадают п. н. на событии $\{\tau_{y,z} < \infty\}$ в силу их определения, т. е. $\tau_y \mathbb{I}(\tau_{y,z} < \infty) = \tau_{y,z} \mathbb{I}(\tau_{y,z} < \infty)$ п. н. ($\mathbb{I}(B)$ обозначает индикатор множества B). Поэтому $\{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} \leq t\} = \{\tau_{y,z} \leq t\}$ для каждого неотрицательного числа t . Более того, видим, что $\tau_y \mathbb{I}(\tau_{z,y} < \infty) \geq \tau_{z,y} \mathbb{I}(\tau_{z,y} < \infty)$ п. н. Следовательно,

$$\{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} > t\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{y,z} = \infty\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{z,y} < \infty\} = \{\tau_y \leq t, \tau_{z,y} \leq t\}$$

для каждого $t \geq 0$. Эти соотношения позволяют написать

$$\begin{aligned} H_{x,y}(t) &= \mathbb{P}(\tau_y \leq t, \tau_{y,z} \leq t \mid S(0) = x) + \mathbb{P}(\tau_y \leq t, \tau_{y,z} > t \mid S(0) = x) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{y,z} \leq t \mid S(0) = x) + \mathbb{P}(\tau_y \leq t, \tau_{z,y} \leq t \mid S(0) = x) \\ &= H_{x,y,z}(t) + \int_0^t \mathbb{P}(\tau_y \leq t \mid \tau_{z,y} = u, S(0) = x) dH_{x,z,y}(u). \end{aligned}$$

Обращаясь к определениям τ_y и $\tau_{z,y}$, а также к определению марковской цепи, проверяем, что

$$\mathbb{P}(\tau_y \leq t \mid \tau_{z,y} = u, S(0) = x) = \mathbb{P}(\tau_y \leq t - u \mid S(0) = z).$$

Предыдущие рассуждения вместе с этим равенством приводят к искомому утверждению. $\square$

Полученное уравнение имеет естественную интерпретацию, а именно, левая часть уравнения (26) отвечает траекториям случайного блуждания, стартующим в точке x и достигающим точки y до момента t . Каждая такая траектория принадлежит одному из двух типов. Траектории первого типа не проходят через точку z прежде, чем достигнут точки y . Они учитываются первым слагаемым в правой части уравнения (26). Что касается траектории второго типа, то она достигает точки z в момент u , $0 \leq u \leq t$, прежде, чем достигнет точки y так, что часть траектории после достижения точки z — это путь, начинающийся в точке z и достигающий точки y до момента $t - u$. Второе слагаемое в правой части уравнения (26) отвечает траекториям второго типа.

Получим следствие леммы 2, в котором дается преобразование Лапласа — Стилтеса решения уравнения (26).

Следствие. Если $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ и $y \neq z$, то для любого $\lambda > 0$ справедливо представление

$$\check{H}_{x,y,z}(\lambda) = \frac{\check{H}_{x,y}(\lambda) - \check{H}_{x,z}(\lambda)\check{H}_{z,y}(\lambda)}{1 - \check{H}_{z,y}(\lambda)\check{H}_{y,z}(\lambda)}. \quad (27)$$

Доказательство. В силу леммы 2 имеется система двух линейных интегральных уравнений относительно функций $H_{x,y,z}(t)$ и $H_{x,z,y}(t)$

$$\begin{cases} H_{x,y}(t) = H_{x,y,z}(t) + H_{x,z,y} * H_{z,y}(t), \\ H_{x,z}(t) = H_{x,z,y}(t) + H_{x,y,z} * H_{y,z}(t). \end{cases}$$

Применение преобразования Лапласа — Стильтьеса к каждому уравнению системы приводит к новой системе алгебраических уравнений относительно функций $\check{H}_{x,y,z}(\lambda)$ и $\check{H}_{x,z,y}(\lambda)$

$$\begin{cases} \check{H}_{x,y}(\lambda) = \check{H}_{x,y,z}(\lambda) + \check{H}_{x,z,y}(\lambda)\check{H}_{z,y}(\lambda), \\ \check{H}_{x,z}(\lambda) = \check{H}_{x,z,y}(\lambda) + \check{H}_{x,y,z}(\lambda)\check{H}_{y,z}(\lambda). \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем представление (27). Что и требовалось доказать. $\square$

Для доказательства теоремы 1 нам также понадобится следующая лемма. Ее доказательство основано на рассмотрении всех возможных скачков случайного блуждания после времени ожидания τ .

Лемма 3. Для точек $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $y \neq z$, имеем

$$H_{x,y,z}^-(\infty) - H_{x,y,z}^-(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^d, r \neq x, r \neq y, r \neq z} \frac{a(x, r)}{a} (H_{r,y,z}(\infty) - H_{r,y,z}(t)), \quad t \geq 0. \quad (28)$$

Доказательство. В силу определений случайных величин τ и $\tau_{y,z}^-$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} H_{x,y,z}^-(\infty) - H_{x,y,z}^-(t) &= \mathbb{P}(t < \tau_{y,z}^- < \infty \mid S(0) = x) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}^d, r \notin \{x, y, z\}} \mathbb{P}(t < \tau_{y,z}^- < \infty, S(\tau) = r \mid S(0) = x) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}^d, r \notin \{x, y, z\}} \mathbb{P}(S(\tau) = r \mid S(0) = x) \mathbb{P}(t < \tau_{y,z}^- < \infty \mid S(\tau) = r, S(0) = x). \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbb{P}(t < \tau_{y,z}^- < \infty \mid S(\tau) = r, S(0) = x) = \mathbb{P}(t < \tau_{y,z} < \infty \mid S(0) = r)$$

в силу равенства $\tau_{y,z} = \tau + \tau_{y,z}^-$ п. н. и благодаря строго марковскому свойству случайного блуждания относительно момента остановки τ (см., например, [15, гл. 8, разд. 4]). Более того, в соответствии с явной конструкцией марковской цепи S соотношение $\mathbb{P}(S(\tau) = r \mid S(0) = x) = a(x, r)/a$ также справедливо. Объединяя полученные равенства с предыдущими рассуждениями, приходим к соотношению (28). $\square$

Последний вспомогательный результат будет полезен при доказательстве теоремы 2.

Лемма 4. Для каждого числа $x \in \mathbb{N}$ имеет место следующее равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos x\theta}{1 - \cos \theta} d\theta = 2\pi x.$$

Для доказательства достаточно переписать данный интеграл в виде интеграла Фейера (см., например, [10, гл. 9, § 3]).

§4. Доказательство теоремы 1

Во-первых, ввиду однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно доказать теорему 1 для $z = \mathbf{0}$. Во-вторых, нам придется рассматривать отдельно случаи $d = 1$, $d = 2$ и $d \geq 3$, поскольку доказательство теоремы существенно зависит от размерности d . Прежде чем перейти к непростому случайному блужданию по $\mathbb{Z}$, приведем несколько формул, имеющих один и тот же вид для всех размерностей $d \in \mathbb{N}$.

Пусть $x, y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $x \neq y$. Используя тождества (18), (24), (25) и (27), а также вспоминая, что $\int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - G(t)) dt = (\lambda + a)^{-1}$, $\lambda \geq 0$, выводим следующие соотношения:

$$(H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) - H_{x,y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{G_\lambda(x, y)G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0}, x)G_\lambda(\mathbf{0}, y)}{(G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y))\lambda}, \quad (29)$$

$$(H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty) - H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{G_\lambda(\mathbf{0}, y)}{(G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y))(\lambda + a)\lambda}, \quad (30)$$

$$(H_{y,y,\mathbf{0}}(\infty) - H_{y,y,\mathbf{0}})(\lambda) = \frac{H_{y,y,\mathbf{0}}(\infty)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{(G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y))(\lambda + a)\lambda}. \quad (31)$$

4.1. Случай $d = 1$. В этом разделе мы сосредоточимся на непростом случайном блуждании по $\mathbb{Z}$, хотя некоторые аргументы будут справедливыми и для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Вначале найдем значение $H_{x,y,0}(\infty)$ при $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, с помощью формулы $H_{x,y,0}(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$. С этой целью для функции $\check{H}_{0,r}(\lambda)$, $r \in \mathbb{Z}$, выпишем асимптотическое представление

$$\check{H}_{0,r}(\lambda) = 1 - \frac{\rho_1(r) \sqrt{\lambda}}{a \gamma_1 \sqrt{\pi}} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow 0+, \quad (32)$$

которое в силу равенства (18) получается в результате применения тауберовой теоремы из [9, гл. 13, § 5, теорема 4] к соотношению (22). Подставляя (32) в (27) и учитывая однородность функции $H_{x,y}$, вычисляем $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$ и, следовательно, приходим к формуле для значения

$H_{x,y,0}(\infty)$, которая также верна и при рассмотрении простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Однако для завершения доказательства соотношения (6) при $d = 1$ нам остается показать, что $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$. Отметим, что ввиду равенства (19) уравнение (26) влечет эквивалентности

$$H_{x,y,0}(\infty) = 0 \Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 1, \quad H_{x,y,0}(\infty) = 1 \Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 0.$$

Следовательно, для проверки утверждения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, достаточно установить, что $H_{x,y,0}(\infty) > 0$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. В свою очередь, последнее справедливо, если, например, соотношение (10) имеет место при $C_1(x, y) > 0$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. Таким образом, исходная задача обоснования соотношения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$ сводится к доказательству формулы (10) и демонстрации положительности функции $C_1(\cdot, \cdot)$. Остальная часть раздела посвящена проверке этих двух утверждений.

Доказательство соотношения (10) основано на формулах (29)–(31), в которые подставляются асимптотические выражения (при $\lambda \rightarrow 0+$) функций $G_\lambda(0, 0)$ и $G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, r)$ для $r = x$, $r = y$ и $r = y - x$. Предельное поведение функции $G_\lambda(0, 0)$ при $d = 1$, вытекающее из соотношения (1), в силу тауберовой теоремы из [9, гл. 13, § 5, теорема 4] имеет вид

$$G_\lambda(0, 0) = \frac{\gamma_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow 0+. \quad (33)$$

Более того, обращаясь к той же тауберовой теореме, заключаем, что

$$\begin{aligned} G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, r) \\ = a^{-1} \rho_1(r) - 2\sqrt{\pi} \tilde{\gamma}_1(r) \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow 0+, \quad r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (34)$$

В самом деле,

$$a^{-1} \rho_1(r) = \int_0^\infty (p(t; 0, 0) - p(t; 0, r)) dt < \infty$$

ввиду соотношения (2) и цепочки равенств

$$\begin{aligned} G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, r) - a^{-1} \rho_1(r) \\ = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (p(t; 0, 0) - p(t; 0, r)) dt - a^{-1} \rho_1(r) \\ = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^t (p(u; 0, 0) - p(u; 0, r)) du \right) dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} a^{-1} \rho_1(r) dt \\ = -\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_t^\infty (p(u; 0, 0) - p(u; 0, r)) du \right) dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\int_t^\infty (p(u; 0, 0) - p(u; 0, r)) du \sim 2\tilde{\gamma}_1(r) t^{-1/2}$$

(при $t \rightarrow \infty$) согласно формуле (2) данной статьи и теореме 31 из [5]. Теперь подставим асимптотическое равенство (34) и формулу для $H_{x,y,0}(\infty)$, возникающую в соотношении (6), в равенства (29)–(31). После приведения подобных членов подставим соотношение (33) в полученные формулы. Опуская громоздкие выкладки, получаем, что

$$\begin{aligned} (H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0})(\lambda) &\sim \frac{\rho_1(x) + \rho_1(y-x) - \rho_1(y)}{4a\sqrt{\pi}\gamma_1\sqrt{\lambda}} \\ &+ \frac{a\sqrt{\pi}(\rho_1(y)\tilde{\gamma}_1(x) + \rho_1(y-x)\tilde{\gamma}_1(y) - \rho_1(x)\tilde{\gamma}_1(y) - \rho_1(y)\tilde{\gamma}_1(y-x))}{\rho_1^2(y)\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

для $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ и $\lambda \rightarrow 0+$. Это соотношение может быть переписано в следующем виде:

$$(H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0})(\lambda) \sim \frac{C_1(x, y)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow 0+, \quad (36)$$

если справедливо равенство $\tilde{\gamma}_1(r) = \pi r^2 \gamma_1^3$, $r \in \mathbb{Z}$. Последнее верно в силу определений γ_1 и $\tilde{\gamma}_1(r)$, поскольку $\gamma_1 = 1/\sqrt{-2\pi\phi''(0)}$ и

$$\tilde{\gamma}_1(r) = \frac{r^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} v^2 e^{\phi''(0)v^2/2} dv = \frac{r^2 \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2} du}{-4\pi\phi''(0)\sqrt{-\phi''(0)}} = \frac{r^2}{-2\phi''(0)\sqrt{-2\pi\phi''(0)}}.$$

Здесь мы учли, что замена переменной $u = v\sqrt{-\phi''(0)}$ сводит интегрирование к общеизвестному равенству $\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$. Отметим, что соотношение (36) имеет место также для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Однако в этом случае функция $C_1(x, y)$ принимает неотрицательные (не строго положительные) значения.

Если $C_1(x, y) > 0$, то применение тауберовой теоремы из [9, гл. 13, § 5, теорема 4] к соотношению (36) приводит к желаемому асимптотическому равенству (10). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 при $d = 1$ нам остается только проверить положительность функции $C_1(x, y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

Ввиду формулы (5) достаточно ограничиться рассмотрением случая $y > 0$. Тогда существуют три возможных расположения точек x , y и 0 , а именно, $x \geq y$, $0 \leq x < y$ и $x < 0$. Вначале рассмотрим случай $x \geq y$. Чтобы проверить положительность функции $C_1(x, y)$ для таких точек x и y , найдем ее оценку снизу. С этой целью заметим, что $\rho_1(x) + \rho_1(y-x) - \rho_1(y) \geq 0$

по формуле для значения $H_{y,x,0}(\infty)$, возникающей в соотношении (6), и очевидному неравенству $H_{y,x,0}(\infty) \leq 1$. Ясно, что $C_1(0, y) \geq 0$, и поэтому $\rho_1^2(y) - 4a^2\pi^2y^2\gamma_1^4 \geq 0$. Объединяя эти неравенства, мы видим, что при $x \geq y$

$$\begin{aligned} C_1(x, y) &= \frac{(\rho_1(x) + \rho_1(y - x) - \rho_1(y))(\rho_1^2(y) - 4a^2\pi^2y^2\gamma_1^4)}{4a\pi\rho_1^2(y)\gamma_1} \\ &\quad + \frac{2\rho_1(y - x)a\pi y^2\gamma_1^3}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi\gamma_1^3y(x - y)}{\rho_1(y)} \\ &\geq \frac{2\rho_1(y - x)a\pi y^2\gamma_1^3}{\rho_1^2(y)} + \frac{2a\pi\gamma_1^3y(x - y)}{\rho_1(y)} > 0. \end{aligned}$$

Прежде чем перейти к случаю $0 \leq x < y$, выведем еще одно полезное соотношение. Напомним, что $\tau_{y,0} \geq \tau_{y,0}^-$ п. н., так как $\tau_{y,0} = \tau_{y,0}^- + \tau$ п. н. Поскольку величина τ распределена по экспоненциальному закону, то $\mathbb{P}(\tau_{y,0} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_{y,0}^- < \infty)$. Поэтому $\mathbb{P}(t < \tau_{y,0} < \infty) \geq \mathbb{P}(t < \tau_{y,0}^- < \infty)$ и тем самым $H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) \geq H_{x,y,0}^-(\infty) - H_{x,y,0}^-(t)$. Из леммы 3 и свойства монотонности преобразования Лапласа следует, что

$$(H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0})(\lambda) \geq \sum_{r \in \mathbb{Z}, r \notin \{x, y, 0\}} \frac{a(x, r)}{a} (H_{r,y,0}(\infty) - H_{r,y,0})(\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (37)$$

Теперь обратимся к случаю $0 \leq x < y$. Проверим положительность функции $C_1(x, y)$ последовательно для $x = y - 1, x = y - 2, \dots, x = 0$. Если $x = y - 1$, то существует точка $r > y$ такая, что $a(y - 1, r) > 0$, так как иначе случайное блуждание является простым. Следовательно, в силу соотношения (36) и установленного выше неравенства $C_1(r, y) > 0, 0 < y < r$, в правой части равенства (37) найдется слагаемое порядка $1/\sqrt{\lambda}$. Тогда из асимптотического равенства (36) вытекает, что левая часть представления (37) также имеет порядок $1/\sqrt{\lambda}$, $\lambda \rightarrow 0+$, и тем самым неравенство $C_1(y - 1, y) > 0$ при $y > 0$ доказано. Напомним, что рассматриваемое случайное блуждание неразложимо, т. е. наибольший общий делитель всех значений $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таких, что $a(r) > 0$, равняется 1 (см. [2, гл. 13, § 3]). Это означает, что при $x = y - 2$ существует точка $r > y$ или $r = y - 1$ такая, что $a(y - 2, r) > 0$. Поскольку для указанных значений r мы уже установили положительность функции $C_1(r, y)$, ввиду соотношения (36) делаем вывод, что левая часть равенства (37) имеет порядок роста $1/\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому заключаем, что $C_1(y - 2, y) > 0$ при $y > 0$. Последовательно рассматривая случаи $x = y - 3, x = y - 4, \dots, x = 0$, мы доказываем в соответствии с описанной схемой, что $C_1(x, y) > 0$ для всех значений $x \in [0, y), x \in \mathbb{Z}$.

Случай $x < 0 < y$ разбирается тоже с помощью косвенных методов, поскольку непосредственная оценка функции $C_1(x, y)$ для таких значений x

и y вызывает трудности. Мы последовательно рассматриваем ситуации $x = -1, x = -2, \dots$. Вначале предположим, что для случайного блуждания S существуют хотя бы три точки $r_1 > 0, r_2 > 0$ и $r_3 > 0$ такие, что $a(r_1) > 0, a(r_2) > 0$ и $a(r_3) > 0$. Если $x = -1$, то в правой части равенства (37) найдется по крайней мере одно слагаемое с индексом r , где $r > 0, r \neq y$ и $a(-1, r) > 0$. Аналогично предыдущим рассуждениям заключаем, что левая часть соотношения (37) имеет порядок роста $1/\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \rightarrow 0+$ и тем самым $C_1(-1, y) > 0$. Если $x = -2$, то в правой части равенства (37) найдется по крайней мере одно слагаемое с индексом $r = -1$ или $r > 0$ такое, что $r \neq y$ и $a(-2, r) > 0$. Поскольку для таких значений r положительность функции $C_1(r, y)$ установлена выше, в силу формул (36) и (37) приходим к выводу, что $C_1(-2, y) > 0$. Положительность функции $C_1(x, y)$ при $x = -3, x = -4, \dots$ проверяется аналогично.

Продолжим разбирать случай $x < 0 < y$, предполагая теперь, что найдутся ровно две точки $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ такие, что $a(r_1) > 0$ и $a(r_2) > 0$. Пусть $x = -1$. Если существует точка $r > 0, r \neq y$, такая, что $a(-1, r) > 0$ (т. е. $r_1 = r+1$ или $r_2 = r+1$), то с учетом соотношений (36) и (37), а также в силу установленного неравенства $C_1(r, y) > 0$ получаем искомую оценку $C_1(-1, y) > 0$. В противном случае имеем $r_1 = 1$ и $r_2 = y+1$. Если $y > 1$, то $a(-2, y-1) = a(y+1) > 0$ и, как следствие, $C_1(-2, y) > 0$ ввиду формул (36), (37) и доказанного ранее неравенства $C_1(y-1, y) > 0$. Поэтому если $r_1 = 1, r_2 = y+1$ и $y > 1$, то выводим оценку $C_1(-1, y) > 0$ с помощью соотношений (36) и (37), а также равенства $a(-1, -2) = a(1) > 0$ и только что проверенного неравенства $C_1(-2, y) > 0$. Однако для случая $r_1 = 1, r_2 = y+1$ и $y = 1$ предыдущие аргументы не годятся, и мы вынуждены обратиться к следующим известным фактам, относящимся к вложенной марковской цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Для этой вложенной цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ определим марковский момент $T := \min\{n > 0 : S_n \geq -1\}$. Согласно [1, теоремы 15.1 и 15.2] справедливо асимптотическое равенство

$$\mathbb{P}(T < \infty \mid S(0) = -1) = 1, \quad \mathbb{P}(T > n \mid S(0) = -1) \sim \frac{c}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (38)$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Для краткости будем писать $\mathbb{P}_{-1}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid S(0) = -1)$. Поскольку предполагается, что $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$, случайный процесс $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ может совершать скачки величины 1 или 2. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{-1}(T = n, S_n = -1) \\ = \mathbb{P}_{-1}(T = n, S_{n-1} = -2, S_n = -1) \\ + \mathbb{P}_{-1}(T = n, S_{n-1} = -3, S_n = -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -2, S_n = -1) \\
&\quad + \mathbb{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -3, S_n = -1) \\
&= \frac{a(-2, -1)}{a} \mathbb{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -2) \\
&\quad + \frac{a(-3, -1)}{a} \mathbb{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -3) \\
&\geq \frac{\min\{a(1), a(2)\}}{a} \mathbb{P}_{-1}(T = n). \tag{39}
\end{aligned}$$

Вернемся к оценке функции $H_{-1,1,0}(\infty) - H_{-1,1,0}(t) = \mathbb{P}_{-1}(t < \tau_{1,0} < \infty)$ снизу при $t \rightarrow \infty$. Обозначим через $N = \{N(t), t \geq 0\}$ пуассоновский процесс, построенный с помощью случайной последовательности $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, т. е. N — пуассоновский процесс интенсивности a . Рассматривая все возможные скачки случайного блуждания S , учитывая соотношение (39) и вспоминая явную конструкцию марковской цепи S , выводим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{-1}(t < \tau_{1,0} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(\tau_{1,0} = \tau^{(n)}, t < \tau_{1,0} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(S_k \neq 0, S_k \neq 1, 0 < k < n, S_n = 1, t < \tau^{(n)} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(S_k \leq -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1, S_n = 1, N(t) < n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(S_k \leq -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1, S_n = 1) \mathbb{P}(N(t) < n) \\
&\geq \frac{a(-1, 1)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(S_k < -1, 0 < k < n-1, S_{n-1} = -1) \mathbb{P}(N(t) < n) \\
&= \frac{a(2)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(T = n-1, S_{n-1} = -1) \mathbb{P}(N(t) < n) \\
&\geq \frac{a(2) \min\{a(1), a(2)\}}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(T = n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-at}(at)^k}{k!} \\
&= \frac{a(2) \min\{a(1), a(2)\}}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(T \geq k) \frac{e^{-at}(at)^k}{k!}. \tag{40}
\end{aligned}$$

Таким образом, поиск оценки снизу для $\mathbb{P}_{-1}(t < \tau_{1,0} < \infty)$ сводится к нахождению оценки снизу для последнего ряда. Несложно проверить, что

$(N(t) - at)/\sqrt{at} \xrightarrow{Law} \xi$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, когда $t \rightarrow \infty$. Тем самым для каждого $b > 0$ имеем

$$\mathbb{P}\left(N(t) \in (at - b\sqrt{at}, at + b\sqrt{at})\right) \rightarrow \mathbb{P}(\xi \in (-b, b)) > 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому ввиду формулы (38) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{-1}(T \geq k) \frac{e^{-at}(at)^k}{k!} \\ & \geq \mathbb{P}\left(T \geq [at + b\sqrt{at}]\right) \mathbb{P}\left(N(t) \in (at - b\sqrt{at}, at + b\sqrt{at})\right) \\ & \sim \frac{c}{\sqrt{at}} \mathbb{P}(\xi \in (-b, b)), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (41)$$

Объединяя соотношения (36), (40) и (41), а также учитывая свойство монотонности преобразования Лапласа, заключаем, что $C_1(-1, 1) > 0$.

В результате мы показали, что $C_1(-1, y) > 0$ для любого $y > 0$. Перейдем к рассмотрению стартовой точки $x = -2$. Напомним, что по предположению существуют ровно две точки $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ такие, что $a(r_1) > 0$ и $a(r_2) > 0$. Если найдется число $r > 0$, $r \neq y$, или $r = -1$ такое, что $a(-2, r) > 0$ (т. е. $r_1 = r + 2$ или $r_2 = r + 2$), то благодаря соотношениям (36) и (37), а также установленному неравенству $C_1(r, y) > 0$ приходим к искомой оценке $C_1(-2, y) > 0$. В противном случае имеем $r_1 = 2$ и $r_2 = y + 2$. В частности, $a(-4, -2) > 0$ и $a(-4, y - 2) > 0$. Поскольку рассматриваемое случайное блуждание неразложимо, можно утверждать, что $y - 2 \neq 0$. Как следствие, справедливо неравенство $C_1(-4, y) > 0$ в силу формул (36), (37) и ранее установленной оценки $C_1(y - 2, y) > 0$ при $y > 0$ и $y \neq 2$. В свою очередь, $C_1(-2, y) > 0$ ввиду соотношений (36), (37) и доказанного выше неравенства $C_1(-4, y) > 0$. Следовательно, положительность функции $C_1(x, y)$ для значений $x = -2$ и $y > 0$ показана. Для значений $x = -3, x = -4, \dots$ проверка положительности функции $C_1(x, y)$ при $y > 0$ осуществляется аналогично случаю $x = -2$. Таким образом, теорема 1 при $d = 1$ доказана.

4.2. Случай $d = 2$. Как и в предыдущем разделе, найдем предельное значение $H_{x,y,0}(\infty)$ при $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$, с помощью формулы $H_{x,y,0}(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$. Вначале для функции $\check{H}_{0,r}(\lambda)$, $r \in \mathbb{Z}^2$, выпишем асимптотическое равенство

$$\check{H}_{0,r}(\lambda) = 1 + \frac{\rho_2(r)}{a \gamma_2 \ln \lambda} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow 0+, \quad (42)$$

которое с учетом формулы (18) получается в результате применения тауберовой теоремы из [9, гл. 13, §5, теорема 4] к соотношению (23). Подставляя (42) в представление (27) и принимая во внимание однородность

функции $H_{x,y}$, находим величину $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \check{H}_{x,y,0}(\lambda)$. Тем самым значение $H_{x,y,0}(\infty)$ установлено. Однако для завершения доказательства соотношения (6) при $d = 2$ остается показать, что $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$. Аналогично разделу 4.1 из равенств (19) и (26) вытекают эквивалентности

$$\begin{aligned} H_{x,y,0}(\infty) = 0 &\Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 1, \\ H_{x,y,0}(\infty) = 1 &\Leftrightarrow H_{x,0,y}(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому для проверки соотношения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$, достаточно убедиться в справедливости неравенства $H_{x,y,0}(\infty) > 0$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$. Последнее имеет место, если, например, соотношение (11) выполнено с $C_2(x, y) > 0$ при всех $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$. Таким образом, начальная задача проверки утверждения $H_{x,y,0}(\infty) \in (0, 1)$ сводится к доказательству соотношения (11) и демонстрации положительности функции $C_2(\cdot, \cdot)$. Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству этих двух утверждений.

Доказательство (11) основано на формулах (29)–(31), в которых функции $G_\lambda(0, 0)$ и $G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, r)$ заменяются их асимптотическими выражениями при $\lambda \rightarrow 0+$ для $r = x$, $r = y$ и $r = y - x$. Благодаря тауберовой теореме из [9, гл. 13, § 5, теорема 2] асимптотическое поведение функции $G_\lambda(0, 0)$ при $d = 2$ следует из соотношения (1), а именно,

$$G_\lambda(0, 0) = -\gamma_2 \ln \lambda + o(\ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow 0+. \quad (43)$$

Используя ту же самую тауберову теорему и равенство (35), верное для всех $d \in \mathbb{N}$, заключаем, что

$$\begin{aligned} G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, r) \\ = a^{-1} \rho_2(r) + \tilde{\gamma}_2(r) \lambda \ln \lambda + o(\lambda \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow 0+, \quad r \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (44)$$

В самом деле, в силу приведенного выше соотношения (2) имеем

$$a^{-1} \rho_2(r) = \int_0^\infty (p(t; 0, 0) - p(t; 0, r)) dt < \infty,$$

а с помощью этого же соотношения (2) и теоремы 31 из [5] выводим, что

$$\int_t^\infty (p(u; 0, 0) - p(u; 0, r)) du \sim \tilde{\gamma}_2(r)/t \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Теперь подставим выражение (44) и значение $H_{x,y,0}(\infty)$, задаваемое формулой (6), в равенства (29)–(31). После приведения подобных членов подставляем разложение (43) в полученные формулы. Опуская стандартные вычисления, делаем вывод, что при $\lambda \rightarrow 0+$

$$(\widehat{H_{x,y,0}(\infty)} - H_{x,y,0})(\lambda) \sim \frac{\rho_2(x) + \rho_2(y - x) - \rho_2(y)}{-4 a \gamma_2 \lambda \ln \lambda}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^2, \quad y \neq 0.$$

Если $C_2(x, y) > 0$, то применение тауберовой теоремы из [9, гл. 13, § 5, теорема 4]) к последнему асимптотическому равенству приводит к формуле (11). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 при $d = 2$ нам осталось только проверить положительность функции $C_2(x, y)$ для всех значений $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся методом от противного. Предположим, что существуют точки x и y такие, что $x \in \mathbb{Z}^2$, $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $C_2(x, y) = 0$. Тогда из определения функции $C_2(x, y)$ вытекает, что

$$\rho_2(x) + \rho_2(y - x) - \rho_2(y) = 0. \quad (45)$$

В силу (6) последнее равенство эквивалентно соотношению $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) = 1$. Следовательно, формулы (19) и (26) влекут тождества $H_{y,\mathbf{0},x}(t) = 0$ и $H_{y,x,\mathbf{0}}(t) = H_{y,x}(t)$ при $t \geq 0$. Поэтому ввиду соотношения (23) получаем, что $C_2(y, x) > 0$ и $C_2(y, x) = \rho_2(y - x)/(a\gamma_2)$. С учетом определения функции $C_2(y, x)$ последнее равенство может быть переписано в виде $\rho_2(y) - \rho_2(x) = 3\rho_2(y - x)$. Это соотношение в сочетании с предположением (45) приводит к противоречию. Тем самым установлено, что $C_2(x, y) > 0$ для всех значений $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq \mathbf{0}$. Доказательство теоремы 1 при $d = 2$ завершено.

4.3. Случай $d \geq 3$. В этом разделе мы предполагаем, что $d \geq 3$. Из формул (24), (25) и (27) выводим соотношения

$$\check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda) = \frac{G_\lambda(x, y)G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda(x, \mathbf{0})G_\lambda(\mathbf{0}, y)}{G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y)}, \quad x \neq y, \quad (46)$$

$$\check{H}_{\mathbf{0},y,\mathbf{0}}(\lambda) = \frac{G_\lambda(\mathbf{0}, y)}{(G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y))(\lambda + a)}, \quad (47)$$

$$\check{H}_{y,y,\mathbf{0}}(\lambda) = 1 - \frac{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{(G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda^2(\mathbf{0}, y))(\lambda + a)}. \quad (48)$$

Отсюда с учетом тождества

$$H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad y \neq \mathbf{0},$$

находим предельное значение $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty)$. Чтобы доказать полностью утверждения (7)–(9), нам остается проверить, что $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \in (0, 1)$. Очевидно, в силу соотношений (20), (21) и (26) имеют место неравенства $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) \leq H_{x,y}(\infty) < 1$. Для проверки неравенства $H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) > 0$ достаточно установить асимптотическое равенство (12) и показать, что функция $C_d(x, y)$ строго положительна. Остальная часть раздела посвящена доказательству этих двух утверждений.

Предлагаемый подход к выводу соотношения (12) состоит в следующем. В силу (1) функции распределения, преобразованиями Лапласа которых являются соответственно $G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $G_\lambda(\mathbf{0}, x)$, $G_\lambda(\mathbf{0}, y)$, $G_\lambda(x, y)$ и $(\lambda + a)^{-1}$, имеют хвосты, эквивалентные постоянным (последняя из них равна нулю), умноженным на одну и ту же функцию $t^{1-d/2}$. Поэтому благодаря лемме 6 из [6], а также формулам (46)–(48) можно утверждать, что функция распределения $H_{x,y,\mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq \mathbf{0}$, тоже имеет хвост, эквивалентный постоянной, умноженной на $t^{1-d/2}$. Более того, эту постоянную легко вычислить с помощью соотношений (20) и (22) из [6]. Тем самым асимптотическое равенство (12) установлено.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 при $d \geq 3$ нам остается только проверить положительность функции $C_d(x, y)$ для всех значений $x, y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \neq y$ (легко видеть, что функции $C_d(\mathbf{0}, y)$ и $C_d(y, y)$ всегда положительны при $d \geq 3$). Основная идея этого шага та же самая, что и при доказательстве положительности функции $C_2(\cdot, \cdot)$ в разделе 4.2. А именно, предположим противное, т. е. что для некоторых $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}, y\}$ и $y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ верно равенство $C_d(x, y) = 0$. Оно эквивалентно следующему соотношению:

$$G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0}, x) = G_0(x, y) - G_0(\mathbf{0}, y). \quad (49)$$

Заметим, что формула для $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty)$, возникающая в утверждении (7), позволяет записать

$$H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) = \frac{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})(G_0(x, y) - G_0(\mathbf{0}, y)) + G_0(\mathbf{0}, y)(G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0}, x))}{G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0^2(\mathbf{0}, x)}.$$

Объединяя формулу (49) и последнее равенство, видим, что

$$\begin{aligned} H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) &= \frac{(G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0(\mathbf{0}, x))(G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, y))}{G_0^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_0^2(\mathbf{0}, x)} \\ &= \frac{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, y)}{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, x)} = \frac{G_0(x, y) + G_0(\mathbf{0}, x)}{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, x)}. \end{aligned}$$

Однако в силу формулы (26) имеем $H_{y,x,\mathbf{0}}(\infty) \leq H_{y,x}(\infty)$, с учетом соотношения (21) отсюда заключаем, что

$$\frac{G_0(x, y) + G_0(\mathbf{0}, x)}{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + G_0(\mathbf{0}, x)} \leq \frac{G_0(x, y)}{G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})} \Leftrightarrow G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \leq G_0(x, y).$$

Полученное противоречие завершает доказательство асимптотического равенства (12) и тем самым доказательство теоремы 1.

§5. Доказательство теоремы 2

Прежде всего отметим, что в силу однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно установить теорему 2 при $z = 0$. Напомним, что для простого случайного блуждания по решетке $\mathbb{Z}$ переходные интенсивности имеют вид: $a(r, r+1) = a(r, r-1) = a/2$ и $a(r, r+k) = 0$ для всех значений $r \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k| > 1$. В соответствии с определениями функции $\phi(\theta)$ и постоянной γ_1 имеем $\phi(\theta) = a(\cos \theta - 1)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, и $\gamma_1 = 1/\sqrt{2a\pi}$. Следовательно, лемма 4 и равенство (4) влекут тождество $\rho_1(r) = |r|$, $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Повторим, что формула для предельного значения $H_{x,y,0}(\infty)$ в утверждении (6) верна также и для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Поэтому заключаем, что

$$\begin{aligned} H_{x,y,0}(\infty) &= 0 && \text{при } y < 0 < x \text{ и } x < 0 < y, \\ H_{x,y,0}(\infty) &= x/y && \text{при } 0 < x < y \text{ и } y < x < 0, \\ H_{x,y,0}(\infty) &= 1 && \text{при } 0 < y < x \text{ и } x < y < 0, \\ H_{0,y,0}(\infty) &= 1/(2|y|), && H_{y,y,0}(\infty) = 1 - 1/(2|y|). \end{aligned}$$

Таким образом, при всех значениях $y < 0 < x$ и $x < 0 < y$ справедливо тождество $H_{x,y,0}(\cdot) \equiv 0$, т. е. соотношение (17) доказано. Для $0 < y < x$ и $x < y < 0$ благодаря формуле (26) приходим к выводу, что $H_{x,y,0}(\infty) = 1 = H_{x,y}(\infty)$ и $H_{x,0,y}(\infty) = 0$. Это равносильно соотношениям $H_{x,0,y}(\cdot) \equiv 0$ и $H_{x,y,0}(\cdot) \equiv H_{x,y}(\cdot)$. Поскольку асимптотическое поведение функции $H_{x,y}(\infty) - H_{x,y}(t)$ найдено в лемме 1, формула (13) также доказана. Более того, формула (36) верна для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, и поэтому, применяя тауберову теорему из [9, гл. 13, § 5, теорема 4], мы устанавливаем асимптотическое поведение функции $H_{y,y,0}(\infty) - H_{y,y,0}(t)$ при $t \rightarrow \infty$, причем постоянной в асимптотике является $C_1(y, y) = 1/(2\sqrt{a\pi}) > 0$. В итоге соотношение (14) доказано. Нам осталось только проверить гипотезы (15) и (16), т. е. исследовать асимптотические свойства функции $H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t)$, когда $x \in [0, y)$, $x \in \mathbb{Z}$.

С этой целью напомним широко известный результат (задача о разорении игрока) для вложенной марковской цепи $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. А именно, справедливо неравенство

$$\mathbb{P}(0 < S_k < y, 0 < k \leq n \mid S(0) = x) \leq (1 - \varepsilon_0)^n$$

для некоторого числа $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и каждого значения $x \in [0, y]$, $x \in \mathbb{Z}$ (см., например, [12, гл. 1, § 9]). Основываясь на этом результате, выводим

$$\begin{aligned} &H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(t < \tau_{y,0} < \infty, N(t) = n \mid S(0) = x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(0 < S_k < y, 0 < k \leq n, N(t) = n \mid S(0) = x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(0 < S_k < y, 0 < k \leq n \mid S(0) = x) \mathbb{P}(N(t) = n \mid S(0) = x) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varepsilon_0)^n \frac{(at)^n e^{-at}}{n!} = e^{-a\varepsilon_0 t}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что соотношения (15) и (16) верны для некоторого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Теорема 2 полностью доказана.

§6. Доказательство теоремы 3

С учетом однородности функции $H_{x,y,z}$ достаточно доказать теорему 3 при $z = \mathbf{0}$. Поскольку $\tau_{y,\mathbf{0}} = \tau_{y,\mathbf{0}}^- + \tau$ п. н., имеем

$$H_{x,y,\mathbf{0}}(t) = H_{x,y,\mathbf{0}}^- * G(t), \quad t \geq 0. \quad (50)$$

Это соотношение сразу влечет равенство

$$H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) = H_{x,y,\mathbf{0}}^-(\infty), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \quad y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Если случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}$ простое и $0 \leq x < y$ или $y < x \leq 0$, то оценка функции $H_{x,y,0}^-(\infty) - H_{x,y,0}^-(t)$ при $t \rightarrow \infty$ вытекает из теоремы 2 и неравенства $H_{x,y,0}(\infty) - H_{x,y,0}(t) \geq H_{x,y,0}^-(\infty) - H_{x,y,0}^-(t)$, использовавшегося при доказательстве теоремы 1 для $d = 1$. Кроме того, в силу установленного тождества $H_{x,y,0}^-(\infty) = H_{x,y,0}(\infty)$ и соотношения (17) для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ мы можем утверждать, что $H_{x,y,0}^-(t) \equiv 0$, когда $x < 0 < y$ или $y < 0 < x$. Таким образом, для этих случаев теорема 3 доказана.

Если же рассматривается случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ в случаях, когда $0 \leq x < y$, $y < x \leq 0$, $x < 0 < y$ или $y < 0 < x$, то оказывается полезным снова обратиться к §3 статьи [6] и, в частности, к лемме 6. С помощью теорем 1 и 2, равенства $\check{H}_{x,y,\mathbf{0}}^-(\lambda) = \check{H}_{x,y,\mathbf{0}}(\lambda)/\check{G}(\lambda)$, вытекающего из тождества (50), а также благодаря формулам (20) и (22) из [6, лемма 6] приходим к заключению, что

$$H_{x,y,\mathbf{0}}^-(\infty) - H_{x,y,\mathbf{0}}^-(t) \sim H_{x,y,\mathbf{0}}(\infty) - H_{x,y,\mathbf{0}}(t)$$

при $t \rightarrow \infty$ для указанных значений d , x и y . Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Автор признателен своему научному руководителю доценту Е. Б. Яровой за постоянное внимание и профессору В. А. Ватутину за ценные замечания, а также профессорам В. И. Лотову и В. А. Топчию за полезные обсуждения.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за замечания и советы, способствовавшие улучшению изложения результатов. Так, по совету рецензента существенно упрощены доказательства теоремы 1 при $d \geq 3$ и леммы 4. Отметим, что им же был предложен еще один способ доказательства теоремы 1 при $d \geq 3$, основанный на формуле (20) из [6] и теореме 3 из [14, гл. 4, § 4].

Список литературы

1. Афанасьев В. И. *Случайные блуждания и ветвящиеся процессы* / Лекционные курсы НОЦ. М.: МИАН, 2007. Вып. 6.
2. Боровков А. А. *Теория вероятностей*. 5-е изд. / Учебное пособие. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
3. Булинская Е. Вл. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке // *ТВП*. 2010. Т. 55, № 1. С. 142–148.
4. Булинский А. В., Ширяев А. Н. *Теория случайных процессов*. М.: Физматлит, 2005.
5. Ватутин В. А. *Ветвящиеся процессы Беллмана — Харриса* / Лекц. курсы НОЦ. М.: МИАН, 2009. Вып. 12.
6. Ватутин В. А., Топчий В. А. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления // *Матем. тр.* 2011. Т. 14, № 2. С. 28–72.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов*. М.: Наука, 1973. Т. 2.
8. Зубков А. М. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения // *Матем. сб.* 1979. Т. 109(151), № 4(8). С. 491–532.
9. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. М.: Мир, 1984. Т. 2.
10. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. М.: Физматлит, 2001. Т. 2.
11. Чжун К. Л. *Однородные цепи Маркова*. М.: Мир, 1964.
12. Ширяев А. Н. *Вероятность*. М.: МЦНМО, 2004. Т. 1.
13. Яровая Е. Б. *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2007.

14. Athreya K. B. and Ney P. E. *Branching Processes*. New York: Springer, 1972. Bd 196.
15. Brémaud P. *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte-Carlo Simulation, and Queues*. New York: Springer-Verlag, 1999.
16. Bulinskaya E. Vl. Catalytic branching random walk on three-dimensional lattice // *Theory Stoch. Process.* 2010. V. 16, N 2. P. 23–32.
17. Bulinskaya E. Vl. Limit distributions arising in branching random walks on integer lattices // *Lithuanian Math. J.* 2011. V. 51, N 3. P. 310–321.
18. Karlin S. and Taylor H. M. *A Second Course in Stochastic Processes*. New York; London: Academic Press, 1981.
19. Lawler G. F. *Intersections of Random Walks*. Boston: Birkhäuser, 1996.
20. Lawler G. F. and Limic V. *Random Walk: A Modern Introduction*. New York: Cambridge University Press, 2010.
21. Syski R. *Passage Times for Markov Chains*. Amsterdam: IOS Press, 1992.
22. Vatutin V. A., Topchii V. A., and Yarovaya E. B. Catalytic branching random walk and queueing systems with a random number of independent servers // *Theory Probab. Math. Statist.* 2004. N 69. P. 1–15.

Булинская Екатерина Владимировна

Московский гос. университет,
Ленинские горы, 1,
Москва, 119991 РОССИЯ.
E-mail: bulinskaya@yandex.ru

Статья поступила

1 декабря 2011 г.