ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 480, № 5, с. 523–527

МАТЕМАТИКА

УДК 519.854.2

ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ И ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ *NP*-ТРУДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

 А. А. Лазарев[1,2,3,4,*], Д. И. Архипов[1,]**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 06.02.2018 г.

Поступило 09.02.2018 г.

Предложен метод нахождения приближённого решения *NP*-трудных задач теории расписаний. Для задачи минимизации максимального временнóго смещения показано, как с помощью метрики, введённой на пространстве примеров задачи, можно использовать полиномиально разрешимые области для нахождения приближённого решения с гарантированной абсолютной погрешностью. Приведена теоретическая и экспериментальная оценка метода, а также сравнительный анализ с *ED*-эвристикой. Предложена численная характеристика полиномиальной неразрешимости задачи – верхняя оценка на гарантированную абсолютную погрешность для каждого класса эквивалентности пространства примеров.

DOI: 10.7868/S0869565218050031

Одним из ключевых вопросов теории алгоритмов является принадлежность задач к различным классам сложности. Для задач, принадлежащих к классу сложности P, оптимальное решение может быть найдено за полиномиальное число операций от количества переменных. В предположении, что $P \neq NP$, для задач класса NP за полиномиальное время может быть найдено только приближённое решение. Важным является построение приближённых алгоритмов с гарантированной погрешностью. Эффективность применения всех известных алгоритмов к задаче является свойством задачи и характеризует степень её трудности и исследованности. На данный момент не существует метода, позволяющего численно измерить эту характеристику.

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

[2] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва

[3] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

[4] Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

*E-mail: jobmath@mail.ru

**E-mail: miptrafter@gmail.com

В данной работе предложен метод нахождения приближённого решения NP-трудных задач теории расписаний. На примере классической NP-трудной в сильном смысле задачи минимизации максимального временнóго смещения обслуживания требований на одном приборе показано, как с помощью метрики, введённой на пространстве примеров задачи, можно использовать полиномиально разрешимые области для нахождения приближённого решения с гарантированной абсолютной погрешностью. Приведена теоретическая и экспериментальная оценка данного метода, а также сравнительный анализ с ED-эвристикой, часто используемой при решении задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$.

Также для рассматриваемой задачи предложена численная характеристика полиномиальной разрешимости задачи – верхняя оценка абсолютной погрешности целевой функции для каждого класса эквивалентности пространства примеров. Показано, что для произвольного примера, принадлежащего $3n$-мерной евклидовой единичной сфере, может быть найдено решение с гарантированной погрешностью не более $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Стоит отметить, что нахождение и использование новых полиномиально разрешимых множеств примеров повысит эффективность предложенного метода. Если для некоторого примера расстояние по метрике до новой полиномиально разрешимой области будет меньше, чем до любой из ранее использованных в методе, то и гарантированная погрешность решения для него уменьшится. Использование эвристических алгоритмов совместно с метрическим подходом также позволяет сократить значение гарантированной погрешности. Предложенный метод является универсальным и может быть применён для нахождения приближённых решений широкого спектра задач, поэтому в дальнейших исследованиях авторы планируют улучшить значение полученной верхней оценки гарантированной погрешности, дополнить метод с помощью использования в нём эвристических алгоритмов, получить значения численной оценки полиномиальной разрешимости других задач теории расписаний.

Рассматривается классическая задача теории расписаний $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Необходимо обслужить требования множества $N = \{1, 2, ..., n\}$ на одном приборе без прерываний. Одновременное обслуживание нескольких требований запрещено. Для обслуживания требования $j \in N$ необходимо p_j времени, начиная с момента времени, не меньшего чем момент поступления r_j. Задача состоит в том, чтобы обслужить требования множества N в некотором порядке (расписании) π так, чтобы значение максимального временнóго смещения было минимальным, т.е.

$$\min_{\pi} L_{\max}(\pi) = \min_{\pi} \max_{j \in N} C_j(\pi) - d_j,$$

где $C_j(\pi)$ и d_j – момент окончания обслуживания при расписании π и директивный срок требования j соответственно.

1. МЕРА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ

Будем рассматривать примеры задачи как точки в $3n$-мерном пространстве $\{\mathrm{r}_i, d_i, p_i\}_{i=1}^{n}$. Рассмотрим метрику ρ, введённую на пространстве примеров задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ в работе [1].

Т е о р е м а 1. *Функция $\rho(A, B)$ удовлетворяет аксиомам метрики в пространстве примеров задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$, где*

$$\rho(A,B) = \rho_r(A,B) + \rho_d(A,B) + \rho_p(A,B),$$

$$\rho_r(A,B) = \max_{j\in N}\{r_j^A - r_j^B\} - \min_{j\in N}\{r_j^A - r_j^B\},$$

$$\rho_d(A,B) = \max_{j\in N}\{d_j^A - d_j^B\} - \min_{j\in N}\{d_j^A - d_j^B\},$$

$$\rho_p(A,B) = \sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

Наиболее важным свойством метрики $\rho(A, B)$ является следующая теорема, доказанная в [1].

Т е о р е м а 2. *Пусть A – пример задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$, для которого оптимально расписание π^*. Тогда для любого примера B значение целевой функции, полученное при расписании π^*, отличается от оптимального не более чем на $\rho(A, B)$.*

Таким образом, если известно оптимальное расписание для примера B, то при обслуживании требований примера A в той же последовательности будет получено расписание с погрешностью, не превышающей $\rho(A, B)$. Следовательно, нахождение ближайшего по метрике полиномиально разрешимого примера B для заданного примера A позволит найти расписание, приближённое к оптимальному с минимальной гарантированной абсолютной погрешностью относительно данной разрешимой области.

Введём понятие меры полиномиальной неразрешимости примера A относительно множества примеров X.

О п р е д е л е н и е 1. М е р о й п о л и н о м и а л ь н о й н е р а з р е ш и м о с т и $\rho^X(A)$ примера A относительно множества X будем называть расстояние по метрике от примера A до области X, т.е.

$$\rho^X(A) = \min_{B \in X} \rho(A, B).$$

Таким образом, из теоремы 2 следует, что если X – некоторая область, то для любого примера A может быть построено расписание, приближённое к оптимальному с погрешностью, не превышающей $\rho^X(A)$ за число операций $H_1 + H_2$, где H_1 – трудоёмкость нахождения меры неразрешимости $\rho^X(A)$, а H_2 – трудоёмкость построения оптимального расписания для примеров области X. Следовательно, если X – полиномиально разрешимое множество примеров и трудоёмкость нахождения меры неразрешимости $\rho^X(A)$ полиномиальна, то количество операций, требуемое для нахождения приближённого решения, будет тоже полиномиально.

В данной работе будут рассмотрены следующие области полиномиально разрешимых примеров:

R) $r_j = \text{const}$ [2];

D) $d_j = \text{const}$;

P) $p_j = \text{const}$ [3];

V) $p_j = p$ или $p_j = 2p$ [4];

H) $d_j - p_j - A \le r_j \le d_j - A, A = \text{const}$ [5];

RD) $r_1 \le ... \le r_n,\ d_1 \le ... \le d_n$;

L) $d_1 \le ... \le d_n,\ d_1 - p_1 - r_1 \ge ... \ge d_n - p_n - r_n$ [1];

LA) $d_1 \le ... \le d_n,\ d_1 - \alpha p_1 - \beta r_1 \ge ... \ge d_n - \alpha p_n - \beta r_n$, $\alpha = \text{const},\ \beta = \text{const},\ \alpha \in [0,1],\ \beta \in [0, +\infty)$ [7].

Разрешимые множества R и D симметричны. В первом случае при оптимальном расписании требования обслуживаются в порядке неубывания директивных сроков, во втором – в порядке неубывания моментов поступления. Оптимальное расписание для примеров множества RD является очевидным, требования обслуживаются по неубыванию моментов поступления. Если для нескольких требований моменты поступления равны, они обслуживаются в порядке неубывания сроков.

Следующая теорема доказывает, что некоторые рассматриваемые области полностью принадлежат другим.

Т е о р е м а 3. *Для рассматриваемых областей верно следующее:*

1. *Для множеств примеров R, D и RD выполнено* $\{R \cup D\} \subset RD$;

2. *Все примеры множества P принадлежат множеству V, т.е. $P \subset V$.*

Таким образом, в дальнейшем мы можем рассматривать только области V, H, RD, L и LA.

Необходимо для произвольной точки (примера) A, принадлежащей $3n$-мерному пространству примеров, выписать в явном виде или предложить полиномиальный алгоритм нахождения ближайшей точки $B \in X$ и значения $\rho(A, B)$ для каждой рассматриваемой области X. В этом случае мы будем говорить, что построена мера полиномиальной неразрешимости для области X.

Для множеств примеров H и L в работе [1] были построены следующие меры неразрешимости:

$$\rho^H(A) = \max_{i,j \in N}\{d_j - r_j - p_j - d_i + r_i\},$$

$$\rho^L(A) = \\ = \max_{i,j \in N} \min\{d_j - d_i, (d_j - p_j - r_j) - (d_i - p_i - r_i)\}.$$

В данной работе были построены новые меры неразрешимости относительно областей P, V, RD и LA.

Л е м м а 1. *Пусть требования примера A пронумерованы по неубыванию продолжительностей обслуживания. Тогда мера неразрешимости примера A относительно области P*

$$\rho^P(A) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |\, p_{n-i+1} - p_i \,|\,.$$

Трудоёмкость нахождения примера $B \in P$, на котором достигается значение меры неразрешимости, не превосходит $O(n \log_2 n)$ операций.

Л е м м а 2. *Мера полиномиальной неразрешимости произвольного примера A относительно области V может быть найдена алгоритмически за $O(n^3)$ операций.*

Л е м м а 3. *Мера неразрешимости примера A относительно области RD имеет вид*

$$\rho(A) = \min_{R, D \ge 0} R + D,$$

где для любой пары требований $i, j \in N$ выполнено

$$\begin{aligned} &|\, r_i - r_j \,| \le R; \\ &|\, d_i - d_j \,| \le D. \end{aligned} \tag{1}$$

Трудоёмкость нахождения примера $B \in RD$, на котором достигается значение меры неразрешимости, не превосходит $O(n \log_2 n)$ операций.

Рассмотрим множество примеров LA. Будем говорить, что пример B наследует у примера A времена обслуживания, если для любого $i \in N$ выполнено $p_i^A = p_i^B$. Мерой неразрешимости примера A относительно области X с учётом наследования продолжительностей обслуживания будем называть минимальное расстояние по метрике до примера из множества X, продолжительности обслуживания требований которого совпадают с продолжительностями обслуживания требований примера A:

$$\rho_p^X(A) = \min_{B \in X | \rho_p(A,B) = 0} \rho(A, B).$$

Из данного определения следует неравенство $\rho_p^X(A) \ge \rho^X(A)$.

Л е м м а 4. *Для любого примера A значение меры неразрешимости с учётом наследования продолжительностей обслуживания $\rho_p^{LA}(A)$ может быть вычислено за $O(n^8)$ операций. Трудоёмкость нахождения примера $B \in LA$, на котором достигается значение меры неразрешимости, с учётом наследования продолжительностей обслуживания не превосходит $O(n^8)$ операций, где n – количество требований.*

Из теоремы 2 и лемм 1–4 получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 4. *Для любого примера A может быть построено расписание, приближённое к оптимальному, с гарантированной абсолютной погрешностью*

$$\varepsilon(A) = \min\{\rho^H(A),\ \rho^L(A),\ \rho^V(A),\ \rho^{RD}(A),\ \rho_p^{LA}(A)\}.$$

Трудоёмкость построения расписания не превосходит $O(n^8)$ операций.

Данная теорема показывает, что за $O(n^8)$ операций для заданной точки A может быть найдена ближайшая точка B, принадлежащая объединению множеств примеров $H \cup L \cup V \cup RD$ и множества примеров $\{C \in LA \mid \forall j \in N\colon p_j^C = p_j^A\}$.

2. ОЦЕНКА МЕРЫ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ПРИМЕРОВ НА ЕДИНИЧНОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ

Будем называть примеры A и kA, $k > 0$, эквивалентными, если для любого $j \in N$ выполнено $kp_j^A = p_j^{kA}$, $kr_j^A = r_j^{kA}$, $kd_j^A = d_j^{kA}$. Для эквивалентных примеров верна следующая

Л е м м а 5. *Пусть есть два эквивалентных примера A и kA. Расписания π^A и π^{kA} задают оптимальные последовательности обслуживания требований для примеров A и kA соответственно. Тогда $\pi^A = \pi^{kA}$ и для любого расписания π выполнено*

$$kL_{\max}^A(\pi) = L_{\max}^{kA}(\pi).$$

Для любого произвольного примера A может быть найдено расписание с погрешностью, не превышающей $\varepsilon(A)$. Следовательно, то же самое расписание, применённое к примеру kA, будет гарантировать погрешность, не превышающую $k\varepsilon(A)$. Это позволяет разбить всё пространство примеров задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ на классы эквивалентности – множества примеров, параметры которых могут быть получены путём домножения параметров любого элемента класса на некоторое неотрицательное число.

Будем рассматривать примеры (точки) на единичной евклидовой сфере в $3n$-мерном пространстве, т.е. те, для которых выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j^2 = 1.$$

Оценка сверху значения $\varepsilon(A)$ для всего множества задач, принадлежащего единичной евклидовой сфере, позволяет оценить погрешность для каждого класса эквивалентности и говорить о полиномиальной разрешимости задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$, т.е. о том, какую погрешность могут гарантировать известные полиномиальные методы решения задачи для произвольного примера.

Т е о р е м а 5. *Для каждого примера A, принадлежащего $3n$-мерной единичной евклидовой сфере, верны неравенства*

$$\varepsilon(A) < 1.$$

Если параметры $r_j, p_j, d_j \geq 0$ для всех $j \in N$, то

$$\varepsilon(A) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим алгоритм Шраге [8], с помощью которого для любого примера A с неотрицательными параметрами требований множества N может быть построено решение, приближённое к оптимальному за $O(n\log n)$ операций с гарантированной погрешностью $e^{ED}(A) = \max_{j \in N} p_j$. Это позволяет получить следующее усиление теоремы 5.

Т е о р е м а 6. *Для каждого примера A, принадлежащего $3n$-мерной единичной евклидовой сфере, такого, что параметры r_j, p_j, d_j для всех $j \in N$ неотрицательны, верно неравенство*

$$\min\{e^{ED}(A), \varepsilon(A)\} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для численной оценки предложенного метода нахождения значения гарантированной погрешности было поставлено две серии численных экспериментов. Параметры примеров генерировались по схеме, предложенной в работе [6]:

$n = 10, 20, \ldots, 100$;

$p_j \in [0,50]$ – первая серия, $p_j \in [-25, 25]$ – вторая серия;

$r_j \in [R_{\min}, R_{\max}]$, $R_{\min} = P_{\min} \cdot \{0{,}5; 2; 0{,}5n; 2n\}$, $R_{\max} = P_{\max} \cdot \{0{,}5; 2; 0{,}5n; 2n\}$;

$d_j \in [D_{\min}, D_{\max}]$, $D_{\min} = P_{\min} \cdot \{0{,}5; 2; 0{,}5n; 2n\}$, $D_{\max} = P_{\max} \cdot \{0{,}5; 2; 0{,}5n; 2n\}$.

Для каждого набора параметров было сгенерировано 1000 примеров, итого 160 000 примеров для каждой серии.

Для каждого примера A выбирался пример kA, принадлежащий тому же классу эквивалентности и лежащий на $3n$-мерной единичной евклидовой сфере. Затем для примера kA вычислялось

Таблица 1. Первая серия, $p_j \in [0, 50]$

Погрешность	Количество примеров при наименьшей погрешности, %	Максимальное значение	Среднее значение
$\rho^L(A)$	0,09	0,74	0,14
$\rho^H(A)$	0,10	0,85	0,24
$\rho^V(A)$	0,31	2,25	0,30
$\rho^{RD}(A)$	1,89	0,50	0,06
$\rho_p^{LA}(A)$	92,99	0,40	0,02
$\varepsilon(A)$	95,38	0,18	0,01
$e^{ED}(A)$	4,62	0,62	0,04

Таблица 2. Вторая серия, $p_j \in [-25, 25]$

Погрешность	Количество примеров при наименьшей погрешности, %	Максимальное значение	Среднее значение
$\rho^L(A)$	0,05	1,36	0,28
$\rho^H(A)$	0	1,58	0,54
$\rho^V(A)$	0	7,50	0,79
$\rho^{RD}(A)$	1,37	0,77	0,12
$\rho_p^{LA}(A)$	86,36	0,78	0,03
$\varepsilon(A)$	87,77	0,26	0,02
$e^{ED}(A)$	12,23	0,54	0,04

значение меры полиномиальной неразрешимости $\rho^H(A)$, $\rho^L(A)$, $\rho^V(A)$, $\rho^{RD}(A)$ и $\rho_p^{LA}(A)$. Полученные значения гарантированных погрешностей были сравнены со значением погрешности $e^{ED}(A)$, гарантируемой ED-эвристикой (алгоритм Шраге) [8]. Для каждой из областей и ED-эвристики вёлся подсчёт количества примеров, для которых она обеспечивала наименьшее гарантированное значение погрешности.

Результаты численных экспериментов представлены в табл. 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17–19–01665).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М.: МФТИ, 2008. 222 с.
2. *Jackson J.R.* Scheduling a Production Line to Minimize Maximum Tardiness. Los Angeles, CA: University of California // Manag. Sci. Res. Project. Res. Reprt. 1955. № 43.
3. *Simons B.B.* A Fast Algorithm for Single Processor Scheduling. In: 19th Annual Symp. on Foundations of Computer Science. Ann Arbor (Mich.). 1978. P. 246–252.
4. *Vakhania N.* A Binary Search Algorithm for a Special Case of Minimizing the Lateness on a Single Machine // Int. J. App. Math. & Inf. I.3. 2009. V. 3. P. 45–50.
5. *Hoogeven J.A.* Minimizing Maximum Promptness and Maximum Lateness on a Single Machine // Math. Oper. Res. 1996. V. 21. P. 100–114.
6. *Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P.* Complexity of Machine Scheduling Problems // Ann. Discret. Math. 1977. V. 1. P. 343–362.
7. *Лазарев А.А., Архипов Д.И.* Минимизация максимального временного смещения для одного прибора // АиТ. 2016. № 4. С. 134–152.
8. *Schrage L.* Obtaining Optimal Solutions to Resource Constrained Network Scheduling Problems. Unpublished manuscript 1971.