

Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем

Д. А. ФЕДОСЕЕВ

*Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН*

А. Т. ФОМЕНКО

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: fomenko@mech.math.msu.su*

УДК 514.853

Ключевые слова: гамильтонова система, слоение Лиувилля, некомпактная перестройка, атом, многообразие Бертрана.

Аннотация

В теории интегрируемых гамильтоновых систем важное место занимает изучение слоений Лиувилля и перестроек их слоёв. В случае компактных слоёв и особенностей задача их описания решена, однако некомпактный случай пока практически не изучен. Настоящая работа посвящена постановке задачи описания некомпактных перестроек и демонстрации примеров систем, в которых такие перестройки возникают.

Abstract

D. A. Fedoseev, A. T. Fomenko, Noncompact bifurcations of integrable dynamic systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 217–243.

In the theory of integrable Hamiltonian systems, an important role is played by the study of Liouville foliations and bifurcations of their leaves. In the compact case, the problem is solved, but the noncompact case remains mostly unknown. The main goal of this article is to formulate the noncompact problem and to present a set of examples of Hamiltonian systems, giving rise to noncompact bifurcations and Liouville leaves.

1. Введение

Гамильтоновы динамические системы часто встречаются в классической и квантовой механике, а потому являются объектом большого количества исследований. Крайне интересна задача топологической классификации интегрируемых систем. Используемый в настоящей работе подход был заложен А. Т. Фоменко в работах [14, 15, 17], а затем продолжен А. Т. Фоменко и Х. Цишангом (см., например, [20]). Ими был построен некоторый топологический инвариант (так называемая *меченая молекула*), являющийся полным инвариантом

лиувиллевой эквивалентности таких систем. Ключевую роль в построении теории классификации компактных бифуркаций сыграла теорема А. Т. Фоменко о том, что сепаратрисная окружность высекает нетривиальный цикл на близком компактном торе Лиувилля (см. [19, теорема 3.3]).

Однако подавляющее большинство результатов в этой области было получено в предположении компактности слоёв лиувиллева слоения. В частности, ключевая теорема А. Т. Фоменко, упомянутая выше, существенно использует компактность слоёв Лиувилля. Более того, некоторые из важных для теории классификации объектов (например, расслоение Зейферта) определены с существенным использованием компактности. Тем не менее во всё большем количестве задач механики возникают системы с некомпактными слоями слоения Лиувилля и, как следствие, некомпактными перестройками (см., например, [3, 10, 13] и раздел 4 настоящей работы). Один из наиболее классических примеров системы с некомпактными бифуркациями — задача Кеплера.

Эти обстоятельства особенно побуждают к разработке теории лиувиллевой классификации гамильтоновых систем с некомпактными особенностями. Возникают новые эффекты, такие как перестройки компактных слоёв в некомпактные (например, торов в цилиндры) и перестройки некомпактных слоёв между собой (например, двух цилиндров в четыре цилиндра). Кроме того, в отличие от компактного случая, некомпактные перестройки могут происходить над так называемыми *некритическими бифуркационными кривыми*, т. е. без падения ранга отображения момента. Всё это вещи совершенно новые, не возникающие в ранее исследованных и классифицированных системах с компактным слоением.

Цель настоящей работы — изложить примеры механических задач, доставляющих естественные примеры таких систем, и сформулировать задачу обобщения известных классификационных методов на системы с некомпактными особенностями.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существуют и описаны механические системы с некомпактными бифуркациями следующих типов.*

1. Перестройка «тор—цилиндр».
2. Перестройка «цилиндр—цилиндр».
3. Перестройка «два цилиндра — четыре цилиндра».
4. Перестройка «два тора — четыре цилиндра».
5. Перестройки «несколько цилиндров — несколько прямых».

Авторы выражают глубокую благодарность О. А. Загрядскому, Е. А. Кудрявцевой и Д. В. Новикову за полезные обсуждения задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (грант НШ 581.2014.1).

2. Необходимые предварительные сведения и определения

Напомним некоторые основные понятия и теоремы теории интегрируемых динамических систем. Подробно эта теория изложена, например, в [19].

2.1. Гамильтоновы системы и теорема Лиувилля

Определим прежде всего понятие *симплектического многообразия* следующим образом.

Определение 1. Дифференциальная 2-форма ω называется *симплектической*, если она замкнута, т. е. $d\omega = 0$, и невырождена.

Симплектическим многообразием называется пара (M, ω) , где M — гладкое многообразие, а ω — симплектическая форма на нём. Симплектическую форму иначе называют симплектической структурой. Заметим, что не всякое многообразие может быть симплектическим. Например, всякое симплектическое многообразие обязательно чётномерно и ориентируемо.

Перечислим несколько стандартных (но важных) примеров симплектических многообразий.

Пример 1.

1. Двумерные ориентируемые поверхности. В компактном случае — сферы с ручками. В качестве симплектической формы можно рассмотреть форму площади.
2. Линейное симплектическое пространство \mathbb{R}^{2n} . Симплектическая структура здесь выбирается стандартной, не зависящей от точки:

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

3. Кокасательное расслоение к гладкому многообразию M . Здесь симплектической структурой выступает форма ω , определяемая как $\omega = d\alpha$, где α — так называемая *1-форма действия*, устроенная следующим образом:

$$\alpha(\xi) = p(\pi_*(\xi))$$

для произвольного ξ — касательного вектора к кокасательному расслоению в точке (x, p) ; здесь $\pi_*: T(T^*M) \rightarrow TM$ обозначает естественную проекцию, порождённую проекцией $\pi: T^*M \rightarrow M$.

Следующее необходимое понятие — *косой градиент*. Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии (M, ω) . Определим для неё вектор кососимметричного градиента $\text{sgrad } H$ из тождества

$$\omega(v, \text{sgrad } H) = v(H),$$

где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ обозначает производную H вдоль v . В локальных координатах x^1, \dots, x^{2n} получим выражение

$$(\text{sgrad } H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j},$$

где ω^{ij} — компоненты матрицы, обратной к матрице формы ω .

Определение 2. Векторные поля вида $\text{sgrad } H$ называются *гамильтоновыми векторными полями*. Функция H называется *гамильтонианом векторного поля* $\text{sgrad } H$.

Одно из важнейших свойств гамильтоновых векторных полей — сохранение симплектической структуры.

Теперь определим *скобку Пуассона*. Рассмотрим пространство гладких функций на многообразии M . Для двух произвольных гладких функций f, g положим по определению

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = \text{sgrad } f(g).$$

Ясно, что в локальных координатах скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Легко проверяется, что скобка Пуассона обладает следующим набором свойств:

- 1) билинейность над полем вещественных чисел;
- 2) кососимметричность;
- 3) тождество Якоби;
- 4) правило Лейбница;
- 5) оператор sgrad осуществляет гомоморфизм алгебры Ли гладких функций на многообразии в алгебру Ли векторных полей;
- 6) функция f является первым интегралом гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad } H$ тогда и только тогда, когда $\{f, H\} = 0$.

Гладкое многообразие называется *пуассоновым*, если на нём задана скобка Пуассона, т. е. операция

$$\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

задающая на пространстве гладких функций структуру алгебры Ли и удовлетворяющая правилу Лейбница. Если скобка Пуассона невырожденная, пуассоново многообразие является симплектическим.

Динамическая система называется гамильтоновой, если для некоторой гладкой функции H (гамильтониана системы) она может быть записана в виде $v = \text{sgrad } H$. Перейдём теперь к понятию интегрируемости динамических систем. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие, $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система с гладким гамильтонианом H .

Определение 3. Гамильтонова система v называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n , таких что

- 1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ;
- 2) f_1, \dots, f_n функционально независимы на M , т. е. почти всюду на M их градиенты линейно независимы;
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ;
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны, т. е. естественный параметр на их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой.

Определение 4. Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоёв (которые заполняют почти всё M) и особых слоёв (заполняющих множество меры нуль). Рассмотрим совместную регулярную поверхность уровня функций f_1, \dots, f_n :

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ .

Теорема 2 (Лиувиль). Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда

- 1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$;
- 2) если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля;
- 3) слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т. е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n ;
- 4) в окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
 - а) s_1, \dots, s_n — координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
 - б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$;
 - в) переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n ;
 - г) в переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т. е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задаёт условно периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

2.2. Отображение момента и бифуркационная диаграмма

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие, $v = \text{sgrad } H$ — интегрируемая гамильтонова система на нём с интегралами f_1, \dots, f_n . Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

действующее по правилу $\mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, иными словами, переводящее точку многообразия в значение набора интегралов в этой точке. Такое отображение называется *отображением момента*.

Рассмотрим точку $x \in M$. Если ранг $d\mathcal{F}(x)$ меньше n , такую точку называют *критической* (или *особой*) *точкой отображения момента* \mathcal{F} . Её образ в \mathbb{R}^n называют *критическим значением*. Образ множества критических точек называют *бифуркационной диаграммой* и обозначают Σ . Она имеет меру нуль в \mathbb{R}^n . Важно отметить, что отображение момента и бифуркационная диаграмма имеют непосредственную связь со слоением Лиувилля. А именно, следует иметь в виду следующие три соображения.

Во-первых, слой лиувиллева слоения — связная компонента прообраза точки при отображении момента. Обычно предполагают, что все слои компактны. Основная цель настоящей работы — продемонстрировать, почему изучение некомпактных слоений (и некомпактных перестроек, см. ниже) — важная и естественная задача.

Во-вторых, сама бифуркационная диаграмма — это образ особых слоёв слоения Лиувилля.

Наконец, в-третьих, над каждой камерой слоение локально тривиально. В частности, прообразы всех точек камеры диффеоморфны несвязному объединению одного и того же числа слоёв Лиувилля.

Бифуркационная диаграмма важна потому, что позволяет следить перестройками слоёв Лиувилля при изменении значений первых интегралов. В самом деле, рассмотрим кривую γ в пространстве \mathbb{R}^n , соединяющую точки a и b в соседних камерах и пересекающую бифуркационную диаграмму Σ в точке c . Над точкой a «висит» некоторое количество слоёв слоения Лиувилля; аналогично некоторое (возможно, другое) число слоёв висит над точкой b . При движении вдоль кривой γ слои гладко меняются в M^{2n} и над точкой c могут подвергнуться некоторой топологической перестройке. В дальнейшем мы будем также использовать понятие *некритической бифуркационной кривой*. Это кривая, не принадлежащая бифуркационной диаграмме (т. е. не состоящая из критических точек), но в прообразе точек которой лиувиллевы слои подвергаются некоторой перестройке. В случае компактных слоёв такие кривые не возникают, но в случае некомпактных особенностей могут возникнуть, что следует из примеров, приведённых в разделе 4. Различные виды бифуркаций изучаются, например, в [6, 8, 22, 23].

В связи с этим введём понятие *пополненной бифуркационной диаграммы*. Точку $y \in \mathbb{R}^n$ назовём *бифуркационной* для отображения момента $\mathcal{F}: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, если не существует окрестности U точки y в \mathbb{R}^n , такой что

прообразы любых двух точек $y_1, y_2 \in U - \mathcal{F}^{-1}(y_1)$ и $\mathcal{F}^{-1}(y_2)$ — гомеоморфны. Объединение бифуркационной диаграммы и множества бифуркационных точек назовём *пополненной бифуркационной диаграммой*.

2.3. Понятие атома

Напомним, что гладкая функция $f(x)$ на многообразии X^n называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырожденные, т. е. в каждой критической точке второй дифференциал d^2f невырожденный.

Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 называются *послойно эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$$\lambda: X^2 \rightarrow Y^2,$$

переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g . Также говорят, что пара (X^2, f) послойно эквивалентна (Y^2, g) .

Теперь мы можем определить понятие *2-атома*. Неформально его можно понимать как топологический тип особенности функции Морса.

Определение 5. *Атомом* называется окрестность P^2 критического слоя, заданная неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоённая на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности. При этом если критическое значение c — локальный минимум или локальный максимум, атом называется *атомом A* ; если критическое значение c седловое, то и соответствующий атом называется *седловым*.

Иначе на понятие атома можно взглянуть следующим образом. Возьмём вместо функции f её критический уровень $K = \{f = c\}$. 2-атомом называется пара (P^2, K) , где P^2 — ориентированная связная компактная двумерная поверхность с краем, а K — связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия:

- 1) либо K состоит из одной точки, либо все вершины графа K имеют степень 4;
- 2) каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$, и множество этих колец можно разбить на два класса — положительные кольца и отрицательные кольца — так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо.

Атомы рассматриваются с точностью до естественной эквивалентности: два 2-атома считаются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, переводящий поверхность в поверхность, граф в граф.

Введём ещё один тип атомов. В качестве поверхности P рассмотрим кольцо, а графом K объявим любую его осевую окружность. Отметим теперь на некоторых рёбрах графа K произвольное число внутренних точек, объявим их новыми вершинами графа K и обозначим звёздочками. Конструкция такого вида называется *атомом со звёздочками*.

Теперь перейдём к понятию 3-атома, тесно связанному с гамильтоновыми системами. Рассмотрим топологически устойчивую интегрируемую систему с интегралом f на 3-изоэнергетической поверхности Q и возьмём особый слой L слоения Лиувилля. Рассмотрим его инвариантную окрестность $U(L)$. В качестве $U(L)$ естественно взять (как и в случае 2-атомов) связную компоненту множества $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, содержащую особый слой L (здесь $c = f(L)$ — критическое значение интеграла f). Такое $U(L)$ является трёхмерным многообразием с естественной структурой слоения Лиувилля.

Будем говорить, что два таких 3-многообразия со структурой лиувиллева слоения лиувиллево эквивалентны, если

- 1) существует диффеоморфизм между ними, сохраняющий структуру слоения Лиувилля (послойный диффеоморфизм);
- 2) этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию 3-многообразий и ориентацию на критических окружностях, которая задаётся гамильтоновым потоком.

Класс лиувиллевой эквивалентности трёхмерного многообразия $U(L)$ называется *3-атомом*. Число критических окружностей в 3-атоме называется его *сложностью*.

Напомним определение *расслоения Зейферта*.

Определение 6. Компактное ориентируемое трёхмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоёв окрестность, послойно гомеоморфную расслоённому полноторию. Многообразие Зейферта с заданной на нём структурой слоёв называется *расслоением Зейферта*.

Ключевую роль в этой теории играет следующая теорема, принадлежащая А. Т. Фоменко [19, теорема 3.3].

Теорема 3 (А. Т. Фоменко).

1. Трёхмерное многообразие $U(L)$ является многообразием Зейферта, особые слои которого (если существуют) имеют один и тот же тип $(2, 1)$.
2. Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла f с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.
3. Если особых слоёв у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times S^1$, где $P(L)$ — двумерная ориентируемая поверхность с краем.
4. В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на каком-то слое слоения Лиувилля. В частности, интеграл f постоянен на слоях расслоения Зейферта.

Рассмотрим 3-атом $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта на нём. Обозначим через $\pi: U(L) \rightarrow P^2$ его проекцию на двумерную базу P^2 с графом K ;

в качестве K берётся образ $\pi(L)$ особого слоя L . Отметим на базе P^2 звёздочками те точки, в которые проецируются особые слои расслоения Зейферта. Таким образом (канонически введя ориентацию на P) получим некоторый 2-атом (P^2, K) . Имеет место важная теорема.

Теорема 4.

1. База расслоения Зейферта на 3-атоме $U(L)$ имеет естественную структуру 2-атома, описанную выше.
2. Проекция $\pi: (U(L), L) \rightarrow (P^2, K)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами.

Эта теорема позволяет свести задачу классификации 3-атомов к классификации 2-атомов, устроенных существенно проще. Ниже будет пояснено, почему это обстоятельство играет важную роль в задаче классификации интегрируемых систем.

Отметим, что перечисленные теоремы сформулированы и доказаны лишь для *компактных* атомов. Например, теорема 3 основана на том, что сепаратрисная окружность высекает нетривиальный цикл на близком компактном слое Лиувилля. Во многих задачах механики ситуация устроена именно таким образом. Но, как будет продемонстрировано ниже, существуют задачи, требующие работы с некомпактными объектами, что побуждает к развитию теории на некомпактный случай.

3. Задача классификации гамильтоновых систем

При изучении гладких динамических систем возникает естественная задача некоторым образом их классифицировать. Для этого на динамических системах вводятся различные типы эквивалентности. Обычно рассматривают следующие типы.

1. *Топологическая сопряжённость.* Говорят, что системы v_1 и v_2 на гладких многообразиях Q_1 и Q_2 топологически (гладко) сопряжены, если существует гомеоморфизм (соответственно диффеоморфизм) $\tau: Q_1 \rightarrow Q_2$, переводящий поток σ_1^t в поток σ_2^t . С точки зрения дифференциальных уравнений сопряжённые системы представляют одно и то же уравнение, записанное в разных координатах. Это самый сильный вид эквивалентности.
2. *Траекторная эквивалентность.* Говорят, что две системы топологически (гладко) траекторно эквивалентны, если существует гомеоморфизм (соответственно диффеоморфизм) $\xi: Q_1 \rightarrow Q_2$, переводящий ориентированные траектории одной системы в ориентированные траектории другой системы. При этом сохранение параметра на траекториях не требуется.
3. *Лиувиллева эквивалентность.* Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии M^4 и обозначим

дополнительный первый интеграл через f . Фиксировав значение гамильтониана, получим изоэнергетическую 3-поверхность $Q^3 = \{H = h\}$. Говорят, что две интегрируемые гамильтоновы системы v_1, v_2 на многообразиях M_1^4, M_2^4 (соответственно на Q_1^3 и Q_2^3) лиувиллево эквивалентны, если существует диффеоморфизм M_1^4 на M_2^4 (соответственно Q_1^3 на Q_2^3), переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы.

4. *Грубая лиувиллева эквивалентность.* Две интегрируемые гамильтоновы системы называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т. е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Последние два определения могут быть, конечно, даны и для многомерных интегрируемых систем.

Задача грубой лиувиллевой эквивалентности сводится к задаче описания и классификации перестроек лиувиллевых слоёв. В самом деле, рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на M^4 и отображение момента $\mathcal{F}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Пусть Σ — бифуркационная диаграмма и $y \in \mathbb{R}^2$ — произвольная регулярная точка в образе отображения момента. Если её полный прообраз компактен, он состоит из некоторого числа торов Лиувилля. При перемещении точки y по плоскости торы как-то двигаются внутри M^4 . В тот момент, когда она пересекает бифуркационную диаграмму, торы подвергаются некоторой нетривиальной перестройке. Как эти перестройки можно описать? Рассмотрим кривую $y(t)$, описывающую движение регулярной точки из одной камеры в соседнюю (с пересечением дуги бифуркационной диаграммы в точке $y^* = y(t^*)$). Будем считать, что дуге, на которой лежит y^* , отвечают только невырожденные критические точки, в которых ранг отображения момента падает ровно на единицу. Оказывается, что все такие перестройки торов Лиувилля описываются в точности 3-атомами. А значит, между множеством 3-атомов и множеством типов перестроек существует биекция.

Чтобы понять, почему информации о перестройках достаточно для грубой лиувиллевой классификации, воспользуемся понятием молекулы. Рассмотрим интеграл f на компактной изоэнергетической поверхности Q и все особые слои L_i слоения Лиувилля (иными словами, связанные компоненты особых уровней функции f). Если мы разрежем Q вдоль регулярных слоёв f , Q разобьётся на трёхмерные куски $U(L_i)$, каждый из которых содержит ровно один особый слой L_i . Каждый такой кусок является 3-атомом. Молекулой будет граф, вершинами которого являются эти 3-атомы, а рёбра соответствуют торам Лиувилля, по которым были сделаны разрезы. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5 (А. Т. Фоменко). Пусть (v, Q) и (v', Q') — две интегрируемые системы и W, W' — отвечающие им молекулы. Тогда системы v и v' грубо лиувиллево эквивалентны (с учётом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W и W' совпадают.

Таким образом, грубая лиувиллева классификация свелась к описанию перестроек через 3-атомы, а в силу упомянутой выше теоремы — через 2-атомы. Но в описанных конструкциях использовались следующие важные соображения. Во-первых, всё полагалось компактным. В самом деле, мы полагали изоэнергетическую поверхность Q^3 компактной, а слоями лиувиллева слоения были торы. Это соображение чрезвычайно важно, в частности, для доказательства теоремы, позволяющей свести изучение 3-атомов к 2-атомам. Разумеется, существует большое количество гамильтоновых систем, в том числе и интегрируемых, не все слои лиувиллева слоения которых компактны. Существующий аппарат классификации для них не работает. Поэтому возникает задача описания некомпактных перестроек слоёв Лиувилля. Второй существенный момент — предположение о падении ранга отображения момента на единицу на бифуркационной кривой. Ранее именно такая ситуация имела место в реальных системах, возникающих из механических задач. Однако недавно в ходе изучения так называемой обобщённой задачи Бертрана были получены системы, в которых перестройка слоёв Лиувилля возникает вовсе без падения ранга отображения момента. Это кардинально новый эффект, также требующий разработки новых подходов к описанию перестроек. Примеры систем, в которых реализуются эти случаи, будут приведены далее.

Подробное изложение теории классификации интегрируемых гамильтоновых систем можно найти, например, в [9, 16, 18, 19].

Итак, сформулируем задачу, которая представляется естественным продолжением и обобщением существующих результатов в области классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

1. Общая задача — построить теорию классификации (грубой лиувиллевой, лиувиллевой, траекторной, с точностью до сопряжённости) интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными особенностями.
2. Описать некомпактные перестройки слоения Лиувилля
 - 2) в случае, когда перестройка происходит в точках падения ранга отображения момента;
 - 2) в случае, когда ранг отображения момента не меняется.

Важным первым шагом в решении второй задачи будет доказательство аналога теоремы 3 А. Т. Фоменко. Это требует новых подходов, в частности введения новых объектов, подобных расслоению Зейферта, но не использующих компактность слоёв. Результатом может стать теорема, позволяющая свести изучение 3-атомов к 2-атомам и в некомпактном случае, что является важнейшим шагом на пути к классификации особенностей и, как следствие, систем.

Следует упомянуть ещё один вид гамильтоновых систем: системы с неполными полями. Как было сказано выше, определение полной интегрируемости (и, как следствие, теорема Лиувилля) требует полноты полей $\text{sgrad } f_i$ первых интегралов. Однако существует большое количество механических систем, обладающих достаточным числом дополнительных первых интегралов, для которых

условие полноты полей не выполнено. Один пример такой системы — некоторые случаи систем на многообразиях Бертрана — подробно описан в следующем разделе.

Исследованием геометрических свойств гамильтоновых систем с неполными потоками занимались, например, К. Р. Алёшкин, Т. А. Лепский, Е. А. Кудрявцева, Д. В. Новиков (см., например, [1, 5]). В частности, К. Р. Алёшкиным было показано, что если неполно поле только одного интеграла, понятие слоения Лиувилля остаётся осмысленным и все неособые слои имеют вид $T^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$. В частности, именно в таких системах возникают случаи некомпактных слоёв (цилиндров, наборов цилиндров) и, как следствие, некомпактных перестроек. Один пример таких систем рассматривается в следующем разделе.

4. Примеры задач и систем с некомпактными особенностями

В этом разделе мы приведём некоторые примеры гамильтоновых систем, возникающих в механике, в которых встречаются некомпактные слои Лиувилля и некомпактные особенности.

4.1. Системы Бертрана

Первый из предлагаемых примеров возник из так называемой *обобщённой задачи Бертрана*. Оригинальная задача была поставлена и решена Ж. Бертраном в 1873 году и звучала следующим образом: найти закон силы притяжения, если она зависит только от расстояния и заставляет свою точку приложения описывать замкнутую кривую, каковы бы ни были начальные условия, если только начальная скорость точки меньше некоторого предела. В дальнейшем задача обобщалась и уточнялась. На сегодняшний день наиболее общую постановку задачи Бертрана можно описать (достаточно неформально) следующим образом. Обобщённая задача Бертрана — это задача поиска пар «риманово многообразии вращения — гладкий центральный потенциал» с условием, что все траектории с начальными условиями из некоторого «толстого» множества замкнуты.

Под многообразием вращения здесь понимается риманово многообразие $S \equiv (a, b) \times S^1$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, с римановой метрикой в естественных «полярных» координатах $(r, \varphi \bmod 2\pi)$, записывающейся в виде $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, где $f(r)$ — гладкая положительная на (a, b) функция. Условие на замкнутость траекторий с заданными свойствами начальных условий (и, возможно, требования существования траекторий определённого вида, например, замкнутых некруговых) следует рассматривать как условие на искомым потенциал. В качестве примера приведём определение локально замыкающего потенциала.

Определение 7 (локально замыкающий потенциал). Гладкий центральный потенциал $V = V(r)$ называется *локально замыкающим*, если выполнены следующие условия:

- (\exists)^{loc} существует сильно устойчивая круговая орбита $\{r_0\} \times S^1$ в S ;
 (\forall)^{loc} для всякой сильно устойчивой круговой орбиты $\{r_0\} \times S^1$ в S существует $\varepsilon > 0$, такое что всякая неособая ограниченная орбита, целиком лежащая в кольце $[r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \times S^1$ и имеющая уровень кинетического момента в интервале $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$, является замкнутой, где K_0 — значение кинетического момента на соответствующей круговой траектории.

Решение обобщённой задачи Бертрана для замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих потенциалов (см. [4]) привело к следующему определению *многообразий Бертрана*, т. е. римановых многообразий вращения, на которых существует хотя бы один центральный потенциал указанных типов.

Определение 8 (римановы многообразия Бертрана). *Римановым многообразием Бертрана* называется 2-мерное многообразие $S_{c,t} \approx I_{c,t} \times S^1$, $I_{c,t} \subset (-\infty, 0)$, с координатами $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$, оснащённое римановой метрикой

$$ds_{\mu,c,t}^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})},$$

где $c, t, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, — параметры многообразия. Многообразию Бертрана состоит из $k_{c,t} \in \{1, 2\}$ связных компонент. Компонента, соответствующая $k = 1$, называется основной, а соответствующая $k = 2$ — дополнительной. Дополнительное многообразие существует только при $t < 0$. Многообразия Бертрана образуют трёхпараметрическое семейство.

В упомянутой выше работе [4] было показано, что многообразия из определения 8 полностью исчерпывают множество многообразий вращения без экваторов (т. е. таких точек r_0 , что $f'(r_0) = 0$), допускающих существование центральных потенциалов указанных типов. Более того, в [7] доказано, что определение 8 исчерпывает также и множество многообразий вращения, допускающих существование *устойчиво замыкающих потенциалов*, а в случае *вполне замыкающих потенциалов* список многообразий Бертрана следует расширить только хорошо известными *многообразиями Таннери* (многообразиями вращения, все геодезические на которых замкнуты, см. [21]). При этом в последних двух случаях условие отсутствия экваторов уже не накладывается. Мы не будем давать здесь строгих определений названных объектов; все они содержатся в [4, 7].

Отметим, что обобщённую задачу Бертрана можно ставить и на *псевдоримановых* многообразиях вращения. Этим вопросом занимался О. А. Загрядский. Он доказал, что в этом случае бертрановские многообразия без экваторов имеют метрику с теми же коэффициентами, что и метрика $ds_{\mu,c,t}^2$, причём параметры (c, t) принадлежат множеству

$$\{c < 0, t = 0\} \cup \{t > 0\} \cup \{t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0\},$$

а область изменения переменной θ , вообще говоря, отличается от риманова случая (см., например, [3]).

В упомянутых работах было также показано, что искомым потенциалом на этих многообразиях может быть не более двух. Более точно, их ровно два на многообразиях с метрикой $ds_{\mu,c,0}^2$, в этом случае они имеют вид *обобщённого гравитационного потенциала*

$$V_1(\theta) = A|\theta| + B \quad (A < 0, B \in \mathbb{R})$$

и *обобщённого осцилляторного потенциала*

$$V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B \quad (A > 0, B \in \mathbb{R}),$$

а для метрик с ненулевым значением параметра t потенциал ровно один и имеет вид обобщённого осцилляторного потенциала V_2 с ограничением на константы $A(\theta^4 + t) > 0, B \in \mathbb{R}$. Такие потенциалы на соответствующих многообразиях будем называть *потенциалами Бертрана*.

В дальнейшем под многообразиями Бертрана будем понимать многообразия вращения с метрикой $ds_{\mu,c,t}^2$.

Рассмотрим следующую динамическую систему: движение точки по многообразию Бертрана S в поле гладкого бертрановского потенциала. Эта система является гамильтоновой с известным из механики гамильтонианом

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r)$$

и стандартной скобкой Пуассона. В качестве дополнительного первого интеграла, находящегося в инволюции с гамильтонианом, можно взять импульс p_φ . Заметим, что хотя гамильтониан и дополнительный интеграл функционально независимы и находятся в инволюции, такая гамильтонова система не всегда интегрируема по Лиувиллю. Дело в том, что определение интегрируемости требует полноты потоков $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } p_\varphi$, а первый из них может быть неполным для некоторых многообразий и потенциалов Бертрана. Подробный анализ этого вопроса дан в [3, утверждения 4 и 5]. Тем не менее, поскольку в рассматриваемых системах неполно не более одного потока, из теоремы Алёшкина (см. [1, теорема 1]) следует, что совместные поверхности уровня первых интегралов в данном случае по-прежнему имеют вид торов или цилиндров и понятие слоения Лиувилля имеет смысл.

Рассмотрение бифуркационных диаграмм бертрановских систем доставляет примеры некомпактных перестроек и перестроек без падения ранга отображения момента. А именно, имеют место следующие теоремы.

Риманов случай

Теорема 6 (Д. А. Федосеев [13]; осцилляторный потенциал). *Для натуральных механических систем, описывающих движения в поле осцилляторного*

потенциала $V(r) = A/\theta^2$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,d} = I_{k,c,d} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$, справедливы следующие утверждения об отображении момента, пополненной бифуркационной диаграмме и слоях слоения Лиувилля:

- 1) в случае сфер и конусов ($\{d = 0, c \geq 0\}$) бифуркационная диаграмма совпадает с пополненной бифуркационной диаграммой и состоит из двух симметричных дуг, каждая из которых запараметризована параметром $\theta \in (-\infty, 0)$, примыкающих к точке $(0, 0)$ на плоскости (K, E) ; прообраз любой точки диаграммы является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы; прообразом каждой её внутренней точки является один компактный слой слоения Лиувилля;
- 2) в случае полубесконечных поверхностей и плоскости Лобачевского ($\{d > 0\} \cup \{d = 0, c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух пар симметричных дуг: пары «сплошных», каждая из которых запараметризована параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt{(-c + \sqrt{c^2 + 4d})/2})$, прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1, и пары «пунктирных», прообраз которых пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы; прообразом каждой её внутренней точки, лежащей выше прямой, содержащей пунктирные дуги, является один некомпактный слой слоения Лиувилля, а прообразом любой точки ниже этой прямой — один компактный слой;
- 3) в случае пар полубесконечных поверхностей ($\{d < 0, c \leq -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля для основного многообразия устроены так же, как и в случае полубесконечных поверхностей, а для дополнительного многообразия бифуркационная диаграмма состоит из трёх пар симметричных дуг; «сплошные» дуги запараметризованы параметром $\theta \in (-\sqrt{(-c - \sqrt{c^2 + 4d})/2}, 0)$; прообраз любой их точки является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; прообраз «пунктирных» дуг пуст; образ отображения момента — область, ограниченная бифуркационными кривыми и включающая в себя точку $(0, 0)$; в прообразе точек внутри криволинейных треугольников, образованных сплошными дугами и продолжением пунктирных дуг, содержится по одному компактному слою слоения Лиувилля, в прообразе прочих точек находится один некомпактный слой;
- 4) в случае грушевидных поверхностей ($\{d < 0, c > -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично предыдущему случаю, однако сплошные дуги пополненной бифуркационной диаграммы параметризованы параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt[4]{-d})$ для основной поверхности и $\theta \in (-\sqrt[4]{-d}, 0)$ для дополнительной поверхности и устроены следующим образом: их верхние

концы, соответствующие значению параметра $\theta \rightarrow -\sqrt[4]{-d}$, устремляются к бесконечности по обеим координатам, горизонтальные пунктирные дуги отсутствуют.

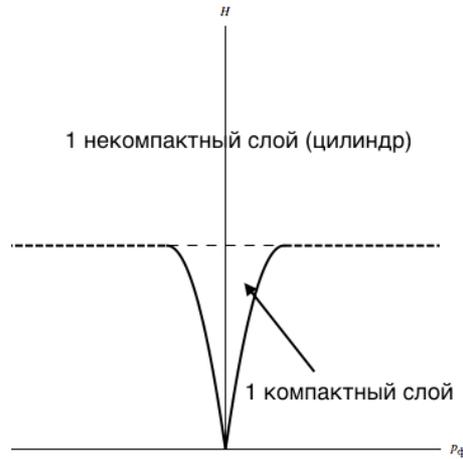


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для случая полубесконечной поверхности

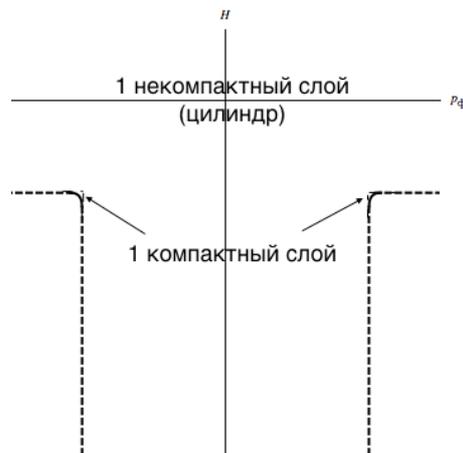


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для случая дополнительной полубесконечной поверхности

Теорема 7 (Д. А. Федосеев; гравитационный потенциал). Для натуральных динамических систем движения в поле гравитационного потенциала

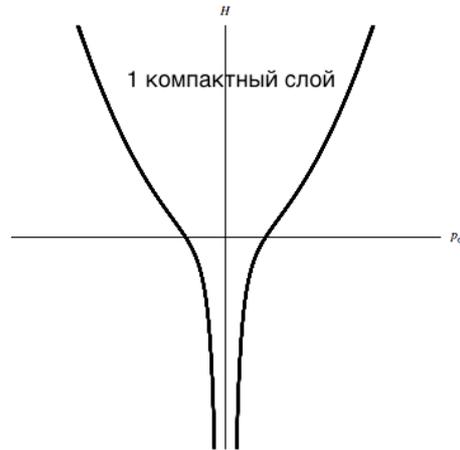


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для случая сферы с гравитационным потенциалом

$V(r) = -A|\theta(r)|$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,0} = I_{k,c,0} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,0}^2$ справедливы следующие утверждения об отображении момента и пополненной бифуркационной диаграмме:

- 1) в случае конусов ($\{c = 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг и «пунктирной прямой» $\{E = 0\}$ и запараметризована параметром $r \in (0, +\infty)$, причём каждая из дуг имеет в качестве асимптот прямые $\{K = 0\}$ и $\{E = 0\}$ на плоскости (K, E) ; прообраз любой точки диаграммы является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы; прообраз любой внутренней точки, лежащей ниже прямой $\{E = 0\}$, является компактным слоем слоения Лиувилля, а прообраз точек выше и на этой прямой — некомпактным слоем;
- 2) в случае проколотых полусфер и их «рациональных накрытий» ($\{c > 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой и состоит из двух симметричных дуг, каждая из которых запараметризована параметром $r \in (0, \pi/2)$, причём прямая $\{K = 0\}$ является их асимптотой; прообраз любой точки диаграммы является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы; прообраз любой внутренней точки является компактным слоем слоения Лиувилля;
- 3) в случае проколотых плоскостей Лобачевского и их «рациональных накрытий» ($\{c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично случаю конусов.

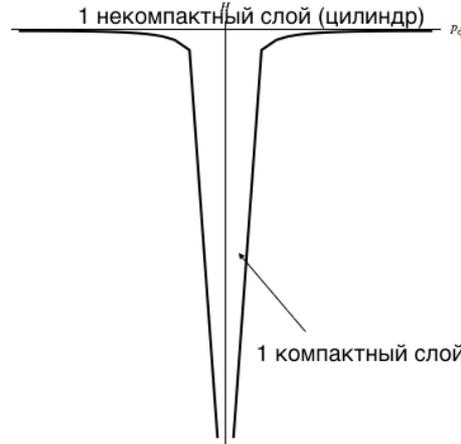


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для случая плоскости Лобачевского с гравитационным потенциалом

Псевдориманов случай

Теорема 8 (О. А. Загрядский [3, утверждения 6–9]). Для натуральных динамических систем движения в поле центрального гладкого потенциала по многообразиям Бертрана S с псевдоримановой метрикой вращения справедливы следующие утверждения об отображении момента и бифуркационной диаграмме:

- 1) в случае многообразия из семейства $(\{t = 0, c < 0\})$ и потенциала $V = A\theta$, $A < 0$, бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных дуг, начинающихся из точек

$$A_{1,2} := \left(\pm \sqrt{\frac{-A}{\mu^2 \sqrt{-c}}}, A\sqrt{-c} \right)$$

и монотонно устремляющихся к $-\infty$ при стремлении $p_\varphi \rightarrow +\infty$, при этом точки $A_{1,2}$ не принадлежат бифуркационной диаграмме; в прообразе каждой точки этих кривых лежит одна окружность. Образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы и отрезком, соединяющим точки A_1 и A_2 , не принадлежащим образу. Образ отображения момента разбивается кривыми

$$\left\{ (p_\varphi, H) \mid H = \frac{c\mu^2 p_\varphi^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 p_\varphi^2} \right\}$$

и

$$\left\{ (p_\varphi, H) \mid H = A\sqrt{-c}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2 \sqrt{-c}}} < |p_\varphi| < \infty \right\}$$

на четыре области: неограниченную снизу I_B , ограниченную I_1 , неограниченную справа и снизу I_2 и неограниченную справа и сверху I_3 . В прообразе каждой точки области I_B лежит один тор; в прообразе каждой точки областей I_1 и I_2 лежит цилиндр; в прообразе точек области I_3 лежит пара цилиндров;

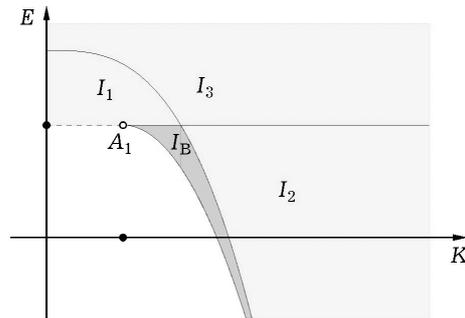


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для псевдориманова многообразия Бертрана, случай 1)

2) в случае многообразия из семейства $(\{t = 0\})$ и потенциала $V = A\theta^{-2}$, $A > 0$, бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных дуг, начинающихся из точек

$$A_{1,2} := \left(\pm \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c}, \frac{A}{-c} \right)$$

и монотонно устремляющихся к $-\infty$ при стремлении $p_\varphi \rightarrow +\infty$ при $c < 0$ и к $+\infty$ в противном случае, при этом точки $A_{1,2}$ не принадлежат бифуркационной диаграмме; в прообразе каждой точки этих кривых лежит одна

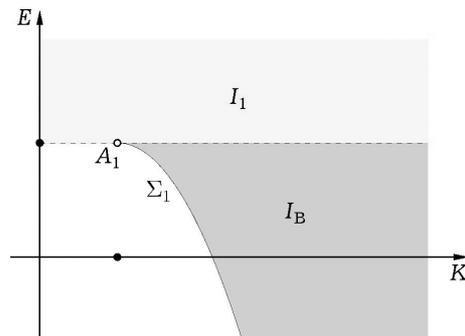


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для псевдориманова многообразия Бертрана, случай 2)

окружность. Образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы и отрезком, соединяющим точки A_1 и A_2 , не принадлежащим образу. В прообразе точек образа отображения момента, расположенных ниже прямой, содержащей точки A_1, A_2 , содержится один тор, в прообразе прочих точек — один цилиндр;

- 3) в случае многообразия из семейства $(\{t > 0\})$ и потенциала $V = A\theta^{-2}$, $A < 0$, бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных дуг, соединяющих пары точек

$$A_1^\pm := \left(\pm \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_2^4 + t}}, \frac{A}{\theta_2} \right) \quad \text{и} \quad A_2^\pm := \left(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t} \right)$$

соответственно; в прообразе каждой точки этих кривых лежит одна окружность. Образ отображения момента — область, ограниченная этими дугами, отрезком, соединяющим точки A_1^\pm , и лучами $(-\infty, A_2^\pm)$. В прообразе точек, лежащих в криволинейных треугольниках, образованных дугами бифуркационной диаграммы, горизонтальной прямой l_1 , содержащей точки A_1^\pm , и вертикальными прямыми l_2^\pm , содержащими точки A_2^\pm , находится один тор. В прообразе прочих точек находится один цилиндр;

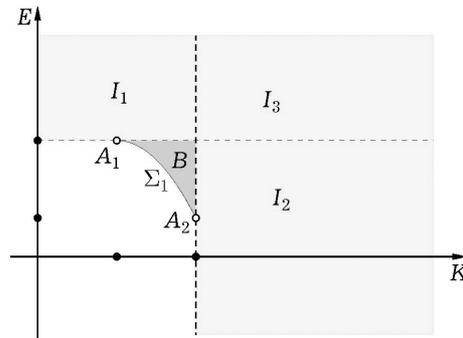


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма для псевдориманова многообразия Бертрана, случай 3)

- 4) в случае многообразия из семейства $(\{t < 0, c^2 + 4t > 0, c < 0\})$ и потенциала $V = A\theta^{-2}$, $A < 0$, бифуркационная диаграмма устроена аналогично случаю 1) с той разницей, что лучи горизонтальной прямой, разделяющие области, заменяются на дуги

$$\left\{ (p_\varphi, H) \mid H = -\frac{\mu^2 p_\varphi^2}{2} \sqrt{c^2 + 4t}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4 + t}} < |p_\varphi| < \infty \right\}$$

исходящие из точек A_1, A_2 .

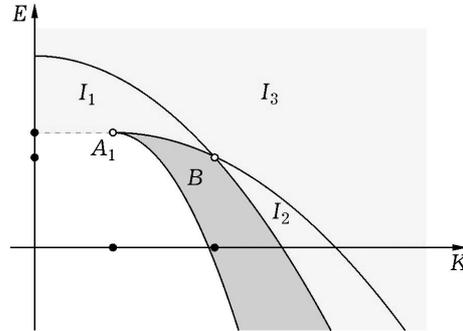


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма для псевдориманова многообразия Бертрана, случай 4)

Итак, из этих теорем хорошо видно, что некомпактные слои Лиувилля — как в неинтегрируемых (например, теорема 8, случай 1)), так и в интегрируемых (случай 2)) динамических системах — вещь естественная. Системы Бертрана хороши также тем, что на их примере очень наглядно видно, откуда некомпактные слои могут возникать и как могут быть устроены их перестройки. Опишем возникающие перестройки подробнее.

Прежде всего опишем, как устроен типичный (неособый) слой слоения Лиувилля динамической системы движения точки в центральном потенциальном поле по многообразию вращения. Рассмотрим некоторую траекторию, которой соответствует значение энергии $H = h$ и кинетического момента $p_\varphi = K$. Пусть траектория ограничена. Тогда существует отвечающее ей максимальное и минимальное значение координаты r ; обозначим их r_{\max} и r_{\min} соответственно. Следовательно, вся траектория лежит в «поясе» $[r_{\min}, r_{\max}] \times S^1$. Несложно убедиться, что все траектории, отличающиеся от выбранной поворотом на угол φ , имеют те же значения интегралов. Следовательно, ограниченные траектории с заданными значениями интегралов замечают некоторый пояс на многообразии S . Более того, легко заметить, что с точностью до знака значение импульса p_θ восстанавливается из системы уравнений $\{H = h, p_\varphi = K\}$ однозначно, поэтому каждой внутренней точке пояса соответствует ровно два значения p_θ . Отсюда имеем два экземпляра полученного пояса. С другой стороны, точкам на границе пояса соответствует значение $p_\theta = 0$. Следовательно, на границах все четыре координаты фазового пространства совпадают, поэтому пояса следует склеить по границам, получая тор. Это и есть тор Лиувилля.

Иначе эту конструкцию можно представить так. Рассмотрим на многообразии S ограниченную траекторию γ с минимальным и максимальным значением координаты r , r_{\min} и r_{\max} соответственно. Возьмём два экземпляра пояса $[r_{\min}, r_{\max}] \times S^1$ и, двигаясь вдоль траектории, будем рисовать на одном куски γ , отвечающие возрастанию координаты r по ходу движения, а на другом — убыванию. Склеив эти пояса по границам так, чтобы изображённые на них точ-

ки, принадлежащие траектории, совпали, получим тор Лиувилля с траекторией на нём.

При «шевелении» значений интегралов границы пояса, заметаемого траекторией, «ползают» по интервалу (a, b) . Малое шевеление пояса, целиком лежащего внутри многообразия, оставляет тор компактным. Однако рассмотрим ситуацию, когда при изменении значений интегралов одна из граничных окружностей пояса совпадает с одной из граничных окружностей многообразия S . В этот момент тор «разрывается», превращаясь в цилиндр. Заметим, что, хотя эта ситуация отвечает положению одного из экстремумов траектории вне интервала (a, b) , это не всегда означает неполноту потока $\text{sgrad } H$. При дальнейшем шевелении этой границы пояса цилиндр остаётся некомпактным. Далее, если же и вторая граничная окружность пояса «выходит за границы многообразия», цилиндр разрывается ещё раз, распадаясь на два цилиндра.

Как видно из данных выше теорем, перестройка «тор—цилиндр» или «цилиндр—два цилиндра» не обязательно сопровождается падением ранга отображения момента. На приведённых рисунках это соответствует пунктирным кривым в образе отображения момента. Более того, во всех предъявленных выше случаях перестройка между компактным и некомпактным слоем происходит без падения ранга отображения момента — через кривую *некритических бифуркационных значений*. Возникает естественный вопрос: существуют ли системы с некомпактными слоями слоения Лиувилля, в которых перестройкам соответствуют критические бифуркационные значения? Как показывает следующий пример, такие системы существуют; более того, они могут быть найдены среди вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем.

4.2. Интегрируемый случай Соколова на алгебре Ли $e(3)$

Приведённые ниже результаты получены Д. В. Новиковым и подробно изложены им в [10]. Приведём здесь лишь основные определения и теоремы.

Рассмотрим семейство скобок Пуассона—Ли на пространстве \mathbb{R}^6 следующего вида:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \kappa \epsilon_{ijk} S_k,$$

где S_i и R_i — компоненты трёхмерных векторов S и R , ϵ_{ijk} — знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$, а κ — произвольное действительное число. Различным знакам κ соответствуют различные алгебры Ли: $\text{so}(4)$ при положительных κ , $\text{so}(3, 1)$ при отрицательных и $e(3)$ при $\kappa = 0$. Функции Казимира этого семейства скобок имеют вид

$$f_1 = \kappa S^2 + R^2, \quad f_2 = \langle S, R \rangle.$$

На этом семействе алгебр Ли известны разнообразные интегрируемые случаи гамильтоновых систем вида $\dot{x}_i = \{x_i, H\}$, где H — гладкий гамильтониан. Интересующий нас *случай Соколова* был получен в [2, 11, 12] и отвечает следующему виду гамильтониана и дополнительного интеграла K :

$$H = -\frac{\kappa}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1R_2 - S_2R_1,$$

$$K = Q_3(\kappa S^2 - R^2) - \alpha Q_1^2 + \frac{\kappa}{\alpha}Q_2^2 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right),$$

где α — произвольный действительный параметр, $Q := S \times R$. Мы будем рассматривать эту систему на алгебре $e(3)$, т. е. при $\kappa = 0$.

Прежде всего следует заметить, что, как показано в [10], эта система интегрируема: дополнительные интегралы функционально независимы, находятся в инволюции и их потоки полны. Рассмотрим отображение момента для случая Соколова $H \times K$

$$\{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k),$$

заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Из результатов [10] вытекает следующая теорема.

Теорема 9 (Д. В. Новиков [10, теоремы 4, 5]). В интегрируемом случае Соколова бифуркационная диаграмма на плоскости (h, k) состоит из

1) луча

$$k = -h + \alpha g^2, \quad h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha},$$

в прообразе точек которого лежат две критические окружности;

2) параболы

$$k = -\alpha h^2 - h, \quad h \in \mathbb{R},$$

в прообразе точек которой лежат две критические прямые;

3) отрезка

$$k = \frac{1}{4\alpha}, \quad -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha},$$

при $h < -1/(4\alpha)$ в прообразе точек которого лежат четыре критические прямые, а при $h > -1/(4\alpha)$ — две критические окружности;

4) луча не критических бифуркаций

$$k = -h, \quad h \geq -\frac{1}{4\alpha}.$$

Перечисленные кривые 1)–4) делят плоскость (h, k) на пять областей: Ω_1 над параболой, лучом 1) и отрезком 3); Ω_2 под параболой; Ω_3 в криволинейном треугольнике, образованном параболой, отрезком 3) и лучом 4); Ω_4 между параболой и лучом 4) и Ω_5 между лучами 1) и 4) и отрезком 3). В прообразе точек этих областей лежат следующие слои Лиувилля:

- 1) пустое множество над точками Ω_1 ;
- 2) два цилиндра над точками Ω_2 ;
- 3) четыре цилиндра над точками областей Ω_3 и Ω_4 ;
- 4) два тора над точками Ω_5 .

Тем самым предъявлен пример интегрируемой гамильтоновой системы, в которой некомпактная перестройка — например, «четыре цилиндра — два цилиндра» — происходит при пересечении критической бифуркационной кривой. Отметим, что и в этом случае имеется некритическая бифуркационная кривая (луч 4)), порождающая здесь некомпактные перестройки «четыре цилиндра — два тора». Любопытно также, что и здесь перестройка вида «компактный слой — некомпактный слой» происходит в основном при пересечении некритической бифуркационной кривой (и при пересечении критической параболы лишь в одной точке — точке касания с некритическим лучом 4)).

5. Известные некомпактные перестройки

В заключение перечислим ряд возможных некомпактных перестроек (бифуркаций).

1. Перестройка «тор—цилиндр».
2. Перестройка «цилиндр—цилиндр».
3. Перестройки «несколько цилиндров — такое же количество прямых».
4. Перестройки «несколько торов — вдвое больше цилиндров».
5. Перестройки «несколько цилиндров — вдвое больше цилиндров».
6. Перестройки «цилиндр—плоскость».
7. Перестройки «тор — две плоскости».

Перестройки типов 2 и 5 являются естественными некомпактными аналогами перестроек торов между собой — один в один или один в несколько. Перестройка типа 3 — это некомпактный аналог исчезновения тора (атома А). Перестройки остальных типов («смешанные» бифуркации 1, 4 и 7, перестройка типа 6) компактных аналогов не имеют и являются совершенно новыми объектами для изучения.

На рисунках 9 и 10 изображена перестройка «тор—цилиндр». На первом рисунке — общий вид перестройки, на втором — трансверсальный срез торов. Здесь критическим является тор, на котором отмечена жирная точка — точка касания тора с пунктирной прямой, при пересечении которой тор разрывается, превращаясь в цилиндр («критический диаметр» тора). На первом рисунке критический тор имеет пунктирную окружность, ему не принадлежащую. Она отвечает отмеченной точке со второго рисунка, умноженной на окружность.

Сформулируем теперь точно теорему, анонсированную во введении, описывающую, какие из перечисленных выше типов бифуркаций встречаются в известных динамических системах.

Теорема 10. *В механических системах возникают некомпактные перестройки (бифуркации) следующих типов.*

Тип 1: перестройка «тор—цилиндр»; наблюдается в римановой бертрановской системе на полубесконечных поверхностях, перестройка происходит над некритической бифуркационной кривой.

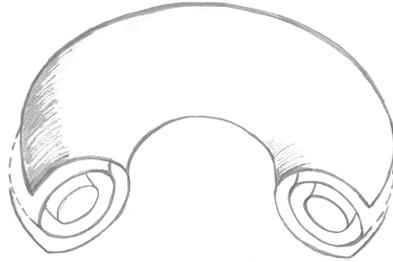


Рис. 9. Перестройка «тор—цилиндр»; общий вид

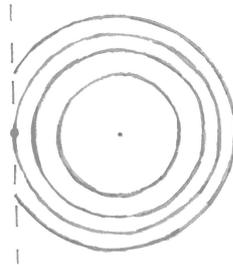


Рис. 10. Перестройка «тор—цилиндр»; трансверсальный срез

Тип 2: перестройка «цилиндр—цилиндр»; наблюдается в псевдоримановой бертрановской системе, перестройка происходит над некритической бифуркационной кривой.

Тип 3: перестройка «несколько цилиндров — такое же количество прямых»; наблюдается во всех перечисленных выше системах, перестройки могут происходить как над критическими, так и над некритическими бифуркационными кривыми.

Тип 4: перестройка «два тора — четыре цилиндра»; наблюдается в интегрируемом случае Соколова, перестройка происходит над некритической бифуркационной кривой.

Тип 5: перестройка «два цилиндра — четыре цилиндра»; наблюдается в интегрируемом случае Соколова на $e(3)$, перестройка происходит над критической бифуркационной кривой.

Доказательство теоремы конструктивно: выше, в разделе 4, приведены и разобраны указанные в теореме системы, что демонстрирует возникновение в них искомым некомпактных перестроек.

Заметим дополнительно, что перестройки типов 6 и 7 должны существовать из ряда соображений (например, из описания геометрии бифуркаций слоения Лиувилля гамильтоновых систем на многообразиях вращения, данного в разделе 4.1), но конкретных примеров таких систем пока найдено не было.

Литература

- [1] Алёшкин К. Р. Топология интегрируемых систем с неполными полями // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, № 9. — С. 49—64.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на $so(4)$ // Докл. РАН. — 2011. — Т. 381, № 5. — С. 614—615.
- [3] Загрядский О. А. Бертрановские системы и их фазовое пространство // Наука и образование. — 2014. — № 12.
- [4] Загрядский О. А., Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 8. — С. 39—78.
- [5] Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А. Топология слоений и теорема Лиувилля для интегрируемых систем с неполными потоками // Тр. сем. по векторному и тензорному анализу. — 2011. — Вып. 27. — С. 106—149.
- [6] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 9. — С. 3—96.
- [7] Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Механические системы с замкнутыми траекториями на многообразиях вращения // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 5. — С. 107—126.
- [8] Кудрявцева Е. А., Фоменко А. Т. Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. РАН, серия математика. — 2012. — Т. 446, № 6. — С. 615—617.
- [9] Нгуен Т. З., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трёхмерной сфере // УМН. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 91—111.
- [10] Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 5. — С. 127—160.
- [11] Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // ТМФ. — 2001. — Т. 129, № 1. — С. 31—37.

- [12] Соколов В. В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ // Докл. РАН. — 2004. — Т. 394, № 5. — С. 602—605.
- [13] Федосеев Д. А. Бифуркационные диаграммы натуральных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2015. — № 1. — С. 62—65.
- [14] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 5. — С. 1071—1075.
- [15] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 6. — С. 1276—1307.
- [16] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функци. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 4. — С. 38—51.
- [17] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. — 1989. — Т. 44, № 1. — С. 145—173.
- [18] Фоменко А. Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырёхмерных симплектических многообразиях // Функци. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 4. — С. 23—35.
- [19] Фоменко А. Т., Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. — Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
- [20] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трёхмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // ДАН СССР. — 1986. — Т. 294, № 2. — С. 283—287.
- [21] Besse A. Manifolds all of whose geodesics are closed. — Berlin: Springer. 1978.
- [22] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // Topol. Its Appl. — 2012. — Vol. 159. — P. 1964—1975.
- [23] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems // Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications / V. Z. Zgurovsky, V. A. Sadovnichiy, eds. — Berlin: Springer (2014). — (Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 211, pp. 3—21.
- [24] Gavrilov L. Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Henon—Heiles system // Physica D. — 1989. — Vol. 34. — P. 223—239

