МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Пиманов Владимир Олегович

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУКТУР В ТРУБАХ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Н.В. Никитин

Москва – 2018

Оглавление

Введение

Изучение закономерностей движения жидкостей и газов в трубах имеет большое значение как с практической, так и с теоретической точки зрения. Известно, что при небольших скоростях течения жидкость в трубах движется ламинарным образом. Такое движение хорошо организовано — жидкие частицы могут быть объединены в слои, смещающиеся друг относительно друга без перемешивания. При достаточно больших скоростях течения, ламинарный режим сменяется турбулентным, характеризующимся наличием беспорядочных пульсаций скорости, давления, и других характеристик. Кроме того, при переходе к турбулентности многие свойства потока, такие как величина трение на стенке или форма среднего профиля скорости, качественно меняются. Как было установлено Осборном Рейнольдсом в работе 1883 года [1], характер течение определяет безразмерная комбинация параметров, называемая ныне числом Рейнольдса. Если число Рейнольдса $Re = UR/\nu$, вычисленное по максимальной скорости течения U, радиусу трубы R и кинематической вязкости ν, ниже критического значения, близкого к 2000, жидкость движется ламинарным образом. При бо́льших Re движение, как правило, оказывается турбулентным.

Уже Рейнольдсом было замечено, что турбулентность первоначально проявляется перемежающимся образом, когда участки возмущенного и спокойного движения следуют вдоль трубы друг за другом, практически не меняя своей протяженности. На тот момент причина пространственной локализации турбулентности установлена не была. Подробное экспериментальное исследование локализованных турбулентных структур в трубах было выполнено в [2]. Установлено, что в разных условиях могут возникать структуры заметно разных типов. Структуры первого типа — турбулентные порывы (*turbulent puffs*) — появляются при сильной возмущенности потока на входе в трубу в диапазоне $2000 < \mathrm{Re} < 2700$. Порывы сносятся вниз по потоку со скоростью, близкой к средней скорости течения, практически не меняя свою протяженность. Для порыва характерны размытость передней границы, на которой скорость на оси трубы плавно уменьшается от ламинарного значения на 30 – 40%, и резкость задней границы, на которой происходит возвращение к ламинарному течению. В последующей работе [3] установлено, что при $\mathrm{Re} < 2100$ турбулентные порывы подвержены спонтанному исчезновению, а при $\mathrm{Re} > 2300$ возможно деление порыва на два следующих друг за другом. Введено понятие *равновесного порыва*, характеристики которого не меняются по мере его продвижения вдоль трубы. Согласно [3] это наблюдается при $2100 < \mathrm{Re} < 2300$.

Локализованные турбулентные структуры другого типа — турбулентные пробки (*turbulent slugs*) появляются при бо́льших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 3200$ только когда возмущенность потока на входе недостаточна для непосредственного возникновения турбулентности. Тогда возможен переход через турбулентные пробки — локализованные образования, расширяющиеся по мере сноса вниз по течению. Продвигаясь по трубе, пробки нагоняют друг друга (передняя граница пробки перемещается быстрее задней), сливаясь в конечном итоге в единую турбулентную область.

В последние годы выполнен ряд подробных экспериментальных и численных исследований характеристик и свойств турбулентных порывов [4–10]. Установлено, что турбулентный порыв является нестабильным образованием, склонным либо к исчезновению, либо к делению. С каждой из двух конкурирующих тенденций связано характерное время: среднее время жизни порыва до его исчезновения и среднее время до его разделения. Первое увеличивается с ростом Re, второе уменьшается. Согласно точке зрения [10], значение $\mathrm{Re}^* = 2040$, при котором происходит смена доминирования тенденций, является точкой статистического фазового перехода и может быть принята в качестве минимального критического числа Рейнольдса в круглой трубе. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ турбулентный порыв скорее погибнет, чем успеет разделиться, так что возникновение развитого турбулентного течения невозможно. Наоборот, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ порыв скорее успеет произвести потомство прежде, чем погибнет, что приводит к развитию незатухающего турбулентного движения.

Турбулентный порыв представляет собой интересный гидродинамический объект, который в некотором отношении может рассматриваться как структурная единица турбулентности. Можно сформулировать ряд вопросов, касающихся поведения порыва. До конца не понятен механизм, обуславливающий пространственную локализацию и самоподдержание порыва, неясны причины, побуждающие его к делению или затуханию, неизвестны факторы, определяющие его протяженность и скорость перемещения вдоль трубы.

В последние годы акцент в изучении механизма самоподдержания турбулентности в пристенных течениях смещается от лабораторного эксперимента в сторону эксперимента вычислительного, основанного на численном решении уравнений Навье–Стокса. Турбулентные порывы впервые были рассчитаны в [4], где было показано, что пространственная локализация является внутренним свойством решений уравнений Навье–Стокса при переходных числах Рейнольдса, а не является следствием специальных начальных условий. Попытка объяснения механизма самоподдержания турбулентного порыва была предпринята в [11]. В системе отсчета связанной с порывом, пульсации в осевой части трубы сносятся вниз по потоку. Их нелинейное взаимодействие порождает медленно меняющиеся полосчатые структуры, концентрирующиеся в пристенной области трубы, где относительная скорость течения отрицательна. Из-за этого полосчатые структуры отстают от порыва. В хвостовой части порыва в областях расположения полос замедления образуются интенсивные сдвиговые слои с точкой перегиба в профиле скорости, где в силу неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца порождаются мелкомасштабные пульсации, попадающие в приосевую область трубы и сносящиеся вниз по потоку. Так, согласно [11], выглядит цикл самопроизводства турбулентных пульсаций внутри порыва и цикл самоподдержания самой этой структуры.

Идеализированная схема, предложенная в [11], выглядит вполне правдоподобно, однако, на наш взгляд, сделанные выводы в должной мере не подкреплены фактическими данными. Реальная динамика порыва сложнее и неопределеннее. Ее изучение осложнено в первую очередь стохастичностью процесса, когда отдельные его фазы следуют друг за другом случайным образом. В этих условиях определенная ясность может быть получена из анализа более простых структур, аппроксимирующих порыв, недавно найденных в [12, 13]. Это предельные решения, возникающие на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Такие решения, наследуя ряд качественных характеристик турбулентного порыва, оказываются периодическими по времени в системе отсчета, перемещающейся вдоль трубы с постоянной скоростью. Мы будем называть такие структуры *модельными порывами*. Простота поведения позволяет провести исчерпывающее исследование свойств модельного порыва, которые, как мы полагаем, проясняют определенные детали поведения турбулентного порыва.

Продолжение модельного порыва по числу Рейнольдса позволяет получить новые условно периодические решения уравнений Навье-Стокса (периодические в подходящей подвижной системе отчета), имеющие пространственно-локализованную структуру [13]. Кроме того, в настоящее время известно достаточно большое число решений, имеющих вид трехмерной бегущей волны (периодичных вдоль потока и стационарных в подходящей подвижной системе отсчета) [14]. Такие решения также допускаю детальное исследование и могут быть использованы для установления универсальности выделенных при исследовании модельного порыва закономерностей.

Характерной особенностью модельного порыва является наличие вытянутых вдоль потока областей, скорость жидкости внутри которых существенно выше или ниже среднего значения — полос повышенной и пониженной скорости. Такие полосы являются неотъемлемым элементом всех сценариев поддержания пристенной турбулентности [15–17], что дает основания полагать, что полученные при изучении модельного порыва результаты могут быть полезными для понимания динамики не только турбулентного порыва, но и более общего класса пристенных турбулентных течений.

Цель диссертационной работы состоит в выявлении механизмов, ответственных за возникновение и поддержание турбулентных порывов. С этой целью поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Проведено численное исследование модельного порыва — условно периодического решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе, имеющего пространственно-локализованную структуру. Воспроизводя ряд качественных особенностей турбулентного порыва, модельный порыв имеет более простое временное поведение, что позволяет выполнить его детальное исследование.

2. Методом продолжения по параметру рассчитаны другие условно периодические решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе, также имеющие пространственно локализованную структуру. Их анализ позволил оценить универсальность найденных при исследовании модельного порыва закономерностей.

3. Рассчитаны и исследованы трехмерные решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе и геометрии течения в плоском канале, имеющие вид бегущей волны. Анализ таких решений также позволил оценить универсальность найденных при изучении модельного порыва закономерностей.

Метод исследования и достоверность результатов. В работе движение жидкости воспроизводится и исследуется численно, путем решения полных трехмерных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Возможность адекватного описания турбулентных порывов численными решениями уравнений Навье-Стокса впервые показана в [4]. Применяемый нами численный метод совмещает конечно-разностную аппроксимацию второго порядка точности по пространственным переменным и полунеявный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности интегрирования по времени [18, 19] (детали в параграфе 1.2). Метод используется в лаборатории Общей аэродинамики института механики МГУ и других лабораториях в разных частях света уже более 20 лет и хорошо себя зарекомендовал. Код программы, реализующей метод, написан Н.В. Никитиным и отлажен в процессе решения большого числа задач. Расчеты выполнены с привлечением ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ. Качество программной реализации численного метода и его адекватность целям работы подтверждают результаты моделирования турбулентного течения в трубе при переходных числах Рейнольдса, приведенные в параграфе 1.4. Турбулентность в расчетах принимает форму порывов, характеристики которых совпадают с представленными в литературе данными.

Основным объектом исследования в работе выступает модельный порыв. Решение, соответствующее модельному порыву, является предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Решение на сепаратрисе неустойчиво и не может быть получено в эксперименте, но может быть найдено численно. Процедура нахождения решения на сепаратрисе приведена в параграфе 2.1. В согласии с [13] решение на сепаратрисе выходит на условно периодический режим и имеет пространственно-локализованную структуру. Характеристики модельного порыва, полученные на нескольких расчетных сетках, согласуются друг с другом и с характеристиками, приведенными в работах [13, 20]. Совпадение результатов подтверждает, что полученное численно решение аппроксимирует соответствующее ему решение уравнений Навье–Стокса и не зависит от выбора численного метода и параметров расчета. В [13] применен полностью спектральный метод [21] и спектрально-конечно-разностный метод [22]. В нашей работе применен конечно-разностный метод [18]. В [20] модельный порыв воспроизведен спектрально-конечно-разностным методом [22], авторы также сообщают о совпадении результатов с [13].

Оценить степень универсальности полученных при исследовании модельного порыва результатов позволяет анализ других решений уравнений Навье-Стокса, имеющих простое временное поведение. Можно надеяться, что общие для многих решений особенности движения могут иметь место в турбулентном течении. В работе реализован метод Ньютона-Крылова [23, 24] для поиска условно периодических решений (см. параграф 4.1). Этот метод позволяет уточнять уже найденные решения и продолжать их по параметру. Продолжение модельного порыва по числу Рейнольдса позволило получить новые условно периодические решения уравнений Навье-Стокса, также, как и модельный порыв, имеющие пространственно-локализованную структуру (детали в параграфе 4.2). Сравнение результатов, полученных на нескольких расчетных сетках, с результатами [13] позволяет сделать выводы о соответствии найденных численных решений решениям уравнений Навье–Стокса. Также, применение метода поиска решения на сепаратрисе и метода Ньютона-Крылова позволило найти три семейства решений в виде бегущих волн (см. параграф 4.4, 4.5). Одно семейство решений относится к течению в круглой трубе и два — к течению в плоском канале. Основные закономерности, выделенные при изучении модельного порыва, оказываются справедливы для всех исследованных решений, что в некоторой степени подтверждает универсальность этих закономерностей.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Определены основные элементы механизма поддержания колебаний в модельном порыве — условно периодическом решении уравнений Навье-Стокса с пространственно-локализованной структурой. Поле скорости решения может быть представлено в виде суперпозиции средней и пульсационной составляющих. Характерной особенностью среднего течения является наличие вытянутых вдоль потока полос повышенной и пониженной скорости. Пульсации возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения в областях между соседними полосами на фоне резкого изменения скорости вдоль угловой координаты. Нелинейное взаимодействие пульсаций приводит к формированию продольных вихрей, поддерживающих существование полос.

2. Обнаружен нелинейный механизм поддержания продольных вихрей, вызывающих полосчатое искажение в распределении продольной скорости. Существование продольных вихрей поддерживается нелинейным взаимодействием пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности. Пульсации продольной завихренности образуются за счет сжатия и растяжения существующих в среднем течении вихревых трубок пульсациями продольной скорости, что обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз между этими пульсациями.

3. Определены основные элементы механизма поддержания колебаний в условно-периодических решениях уравнений Навье-Стокса с пространственно локализованной структурой, полученных продолжением по параметру решения, соответствующего модельному порыву. Также механизм поддержания колебаний определен в нескольких семействах решений, имеющих вид бегущей волны, описывающих течения в круглой трубе и в плоском канале. Во всех исследованных решениях механизм поддержания колебаний аналогичен найденному при исследовании модельного порыва, что в некоторой степени подтверждает универсальность этого механизма.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Неустойчивость полосчатых структур является неотъемлемым элементом всех сценариев поддержания колебаний в пристенных турбулентных течениях, что дает основания полагать, что полученные в работе представления о механизме поддержания колебаний в модельных течениях могут быть обобщены на этот класс течений. Понимание механизмов поддержания колебаний имеет первостепенное значения для предсказания характеристик пристенных турбулентных течений и разработки эффективных методов управления ими.

Личный вклад автора. Научному руководителю, Н.В. Никитину, принадлежит идея исследования, реализация численного метода для прямого интегрирования уравнений движения жидкости, а также руководство работой и ценные советы в процессе её выполнения. Автору диссертации принадлежат численные эксперименты и анализ полученных результатов, а также реализация метода поиска решения на сепаратрисе и метода Ньютона-Крылова для нахождения условно периодических решений уравнений Навье-Стокса. Основная работа по подготовке текста диссертации и иллюстративного материала также принадлежит диссертанту.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы представлены на 22 научных конференциях:

- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (2014, 2015, 2016, 2017 годы);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 годы);
- Конференция «Ломоносовские чтения» (НИИ механики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014, 2016, 2017, 2018 годы);
- Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2014, 2016 годы);
- Школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2014, 2016 годы);
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015 год) — пленарный доклад;
- 7th International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics (Париж, 2015 год);
- 15th European Turbulence Conference (Делфт, Нидерланды, 2015 год);

- 18th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (Пермь, 2016 год);
- Международная конференция «Турбулентность, динамика атмосферы и климата» (Москва, 2018 год).

Также результаты работы представлены на 5 научных семинарах:

- Семинар НИИ механики МГУ по механике сплошных сред под руководством А.Г. Куликовского, В.П. Карликова и О.Э. Мельника;
- Семинар кафедры газовой и волновой динамики Мехмата МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством Р.И. Нигматулина;
- Семинар «Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности» на базе научно-образовательного центра «Суперкомпьютерные технологии» под руководством В.А. Садовничего;
- Астрофизический семинар отдела теоретической физики ФИАН имени П.Н. Лебедева под руководством А.В. Гуревича;
- Семинар лаборатории общей аэродинамики НИИ механики МГУ под руководством Н.В. Никитина.

По материалам диссертации опубликовано 22 научные работы, в том числе 3 статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus:

1. Pimanov V. O. Maintenance of Oscillations in Three-Dimensional Traveling Waves in Plane Poiseuille Flows // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, Iss. 4. — Pp. 91–96. — SJR 2016: 0.108.
2. Никитин Н. В., Пиманов В. О. О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — No 1. — С. 68—76. — Перевод: Nikitin N. V., Pimanov V. O. Sustainment of Oscillations in Localized Turbulent Structures in Pipes // Fluid Dynamics. — 2018. — Vol. 53, Iss. 1. — Pp. 65–73. — Impact Factor 2017: 0.608.

3. Никитин Н. В., Пиманов В. О. Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2015. — No 5. — С. 64—75. — Перевод: Nikitin N. V., Pimanov V. O. Numerical study of localized turbulent structures in a pipe // Fluid Dynamics. — 2015. — Vol. 50, Iss. 5. — Pp. 655–664. — Impact Factor 2017: 0.608.

Статья в журнале, входящем в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки РФ:

4. Никитин Н. В., Пиманов В. О. Локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2015. — Т. 157, кн. 3. — С. 111—116. — Импакт-фактор РИНЦ 2017: 0,248.

Три статьи в сборниках трудов:

5. Пиманов В. О. Некоторые детали механизма самоподдержания турбулентности в пристенных течениях // Труды конференции-конкурса молодых ученых 10-12 октября 2016 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2017. — С. 46—53.

6. Пиманов В. О. О механизме самоподдержания локализованных турбулентных структур в трубах // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 12–14 октября 2015 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 44—51.

7. Пиманов В. О. Пространственно-локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 13–17 октября 2014 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 42—50.

и 15 тезисов докладов.

Работа отмечена наградами:

- Диплом 2-ой степени конференции–конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ 2014 года;
- Диплом 1-ой степени за лучшую работу аспиранта и диплом 3-ей степени конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ 2015 года;

- Диплом 1-ой степени за лучшую работу аспиранта и диплом 3-ей степени конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ 2016 года;
- Вторая премия конкурса молодых научных сотрудников МГУ им. М.В. Ломоносова 2015 года;
- Грамота за лучший доклад на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» 2015, 2017 и 2018 годов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В первой главе приведены постановка задачи и численный метод ее решения. Во второй главе описана процедура получения модельного порыва и его основные свойства. В третьей главе дано описание механизма образования продольных вихрей. Четвертая глава посвящена отличным от модельного порыва решениям уравнений Навье-Стокса, исследованным в работе. Общий объем диссертации — 124 страницы. Список литературы содержит 92 пункта.

Глава 1. Конечно-разностный метод расчета течений в круглой трубе

В работе движение жидкости моделируется численными решениями полных трехмерных уравнений Навье-Стокса. Все динамически существенные масштабы разрешаются явно, что освобождает от необходимости подбора замыкающих соотношений и эмпирических констант. Прямое численное моделирование зарекомендовало себя эффективным методом изучения пристенных турбулентных течений. Подробный численный анализ ряда пристенных течений показал, что численные решения уравнений Навье-Стокс с высокой точностью воспроизводят наблюдаемые в экспериментах особенности движения. Существенным достоинством численных методов при изучении механизмов турбулентности является то, что расчет дает полную информацию о течении. Изучаемые в работе переходные режимы течения наблюдаются при небольших значениях числа Рейнольдса (около 2000) и сегодня доступны для прямого численного моделирования даже на персональном компьютере.

Первые расчеты трехмерных турбулентных течений выполнены для течения в плоском канале в 70-х годах методом крупномасштабных вихрей (Large Eddy Simulation) [25–28]. В этих расчетах удалось воспроизвести некоторые качественные особенности турбулентных течений. Расчеты Кима, Мойна и Мозера 1987 года, выполненные при меньших числах Рейнольдса без использования моделей подсеточной турбулентности, показали не только качественное, но и количественное согласие с экспериментальными данными [29]. Эта работа положила начало широкому применению прямого численного моделирования при изучении характеристик турбулентных течений. Несколько позже были выполнены расчеты трехмерных турбулентных течений в круглых трубах [30–33], результаты которых также согласуются с результатами экспериментов. Расчеты в [29] выполнены при $\mathrm{Re}_\tau \approx 180$. В настоящее время расчеты проводятся при $\mathrm{Re}_\tau \approx 5000$ и больших [34, 35]. Для течений в технических устройствах характерны значительно большие значения числа Рейнольдса, и для прямого численного моделирования эти течения в настоящее время в большинстве случаев недоступны, однако с развитием вычислительной техники ситуация может измениться.

Значительный вклад в развитие численных методов решения задач гидродинамики внесли также отечественные математики и механики. В работах О.А. Ладыженской разрабатывались вопросы разрешимости стационарных и нестационарных краевых задач для уравнений Навье-Стокса [36]. В.И. Юдовичем дано обоснование методов линеаризации для решения задач гидродинамической устойчивости [37]. Метод Галеркина для решения задач линейной устойчивости и расчета нелинейных режимов течения получил свое развитие в работах Г.И. Петрова [38]. Исследованию задач устойчивости различных течений жидкости посвящены работы В.Я. Шкадова [39, 40], Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого [41], М.А. Гольдштика и В.Н. Штерна [42]. Некоторые принципы построения вычислительных алгоритмов предложены К.И. Бабенко [43]. Работы С.Я. Герценштейна посвящены исследованию конвективных течений [44,45]. Моделирование процессов тепло и массообмена посвящены работы В.М. Пасконова, В.И. Полежаева, Л.А. Чудова [46, 47]. О.М. Белоцерковским предложена серия методов моделирования движения газа и жидкости и, в частности, турбулентных движений жидкости [48]. Н.В. Никитиным в НИИ механики МГУ [18, 32, 33, 49] и в группе под руководством Б.Л. Рождественского в ИПМ им. Келдыша [30, 50–52] разработаны методы прямого численного моделирования движений жидкости в круглых трубах, плоских каналах и некоторых других геометриях, а также выполнены соответствующие расчеты.

Наиболее эффективные вычислительные алгоритмы разработаны для решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в областях простой геометрической формы, в частности, в геометрии плоского канала и геометрии круглой трубы. В типичной постановке по продольной и поперечной координатам на решение накладывается условие периодичности. В круглой трубе период в поперечном направлении составляет 2π, в плоском канале этот период может быть произвольным и является дополнительным параметром задачи. Такая постановка хорошо зарекомендовала себя при исследовании развитых турбулентных течений. Условия периодичности снимают необходимость установки входных и выходных условий (в плоском канале, также, условий в поперечном направлении) и исключает влияние конкретных входных и выходных условий на режим течения. В то же время, увеличивая период, можно минимизировать влияние условия периодичности на характеристики потока. Характеристики развитых турбулентных течений, полученные в такой постановке, с большой точностью совпадают с экспериментальными данными [29, 33, 53]. Расчеты пространственно-неоднородных турбулентных течений (турбулентных порывов) также проводятся с условием периодичности в продольном направлении и дают результаты, согласующиеся с экспериментальными данными [4,54,55]. Для адекватного воспроизведения локализованных турбулентных структур необходимо выбирать длину периода достаточно большой, чтобы пространственная неоднородность течения могла проявить себя. Подход, при котором в продольном направлении устанавливается условие периодичности, называется временным. Альтернативный ему пространственный подход, при котором вместо условия периодичности в продольном направлении ставятся условия во входном и выходном сечениях, примененный для моделирования движения жидкости в круглой трубе в [56], требует значительно больших вычислительных ресурсов, но позволяет воспроизводить эволюцию возмущений, попадающих в поток во входном сечении, при их продвижении вниз по потоку. Согласно [56], при пространственном походе к моделированию течения в трубах в области, где режим течения устанавливается, характеристики течения согласуются с характеристиками, полученными при временном подходе.

Общепринятым подходом при построении дискретной системы уравнений является представление решения в виде суммы рядов Фурье. При этом по продольной и поперечной координатам решение представляется суммой тригонометрических функций, а в нормальном к стенке направлении могут быть использованы полиномы Чебышева либо другие ряды [21, 57]. Дискретизация уравнений выполняется методом Галеркина. При этом основная сложность алгоритма оказывается связана с вычислением нелинейных слагаемых, что требует свертки рядов. Наиболее эффективные алгоритмы, позволяющие вычислить свертку рядов, основаны на применении быстрого преобразования Фурье [58]. Альтернативным подходом является конечно-разностная дискретизация уравнений [18]. Конечно-разностные методы уступают спектральным при моделировании предтурбулентных режимов течения, для которых свойственны достаточно гладкие поля скорости и отсутствие мелкомасштабной составляющей движения [59], однако в развитых турбулентных течениях число гармоник Фурье и число точек в сетке, необходимые для того, чтобы достаточно точно приблизить поле скорости, оказываются сравнимы, и конечно-разностные методы не уступают спектральным в эффективности [60]. К преимуществам конечно-разностных методов можно отнести то, что они достаточно просты в реализации, сравнительно легко адаптируются к изменению геометрии расчетной области и граничных условий. Также распространены методы, в которых в продольном и поперечном направлении решения представляются в виде суммы тригонометрических рядов, а в нормальном к стенке направлении дискретизация выполняется конечно-разностным методом [49].

В настоящей работе движение жидкости описывается решениями уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Уравнения решаются в цилиндрической расчетной области с условием периодичности вдоль потока. Дискретизация уравнений выполнена конечно-разностным методом, разрабатываемым Н.В. Никитиным [18]. Этот метод применялся для решения большого числа задач и хорошо себя зарекомендовал [61–64].

1.1. Постановка задачи

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе круглого сечения. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — поле скорости, p — давление, ρ и ν — постоянные плотность жидкости и кинематический коэффициент вязкости, t — время.

Задача решается в цилиндрической системе координат (x, r, θ). На стенках трубы, имеющей радиус R, ставится условие прилипания:

$$\mathbf{v}\big|_{r=R} = 0. \tag{1.3}$$

В продольном направлении на поле скорости накладывается условие периодичности с периодом L_x:

$$\mathbf{v}\big|_{x+L_x} = \mathbf{v}\big|_x. \tag{1.4}$$

Давление в этом случае имеет вид:

$$p = -D_p(t)x + q, \qquad q\big|_{x+L_x} = q\big|_x,$$

где D_p — внешний градиент давления, вызывающий движение жидкости.

Значение D_p определяется из условия постоянства расходной скорости U_m, которая, в свою очередь, определяется начальным условием:

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0.$$

Задача решается в безразмерных переменных. В качестве основных единиц измерения выступают радиус трубы R, максимальная скорость течения Пуазейля $U = 2U_m$ и плотность жидкость ρ. Безразмерным параметром системы является число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{RU}{\nu}.$$

Задача поставлена традиционным образом для прямого расчета развитых турбулентных течений в трубах и каналах. В такой постановке удается воспроизводить характеристики течения, устанавливающегося на большом удалении от входа в трубу, решая уравнения движения в ограниченной расчетной области. Условие периодичности вдоль трубы освобождает от необходимости устанавливать условия на входе и выходе из трубы. В тоже время, увеличивая длину периода L_x, можно минимизировать влияние этого условия на поток. Для того, чтобы иметь возможность воспроизвести в расчете локализованные турбулентные структуры, необходимо выбирать протяженность расчетной области L_x достаточно большой, не менее 40 диаметров трубы.

1.2. Численный алгоритм

Задача решается конечно-разностным методом, наиболее полно описанным в [18]. Численный метод формулируется относительно уравнения движения (1.1), преобразованного к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \Pi - \nu \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega}, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ — вектор завихренности, $\Pi = p/\rho + \mathbf{v}^2/2$ — полное кинематическое давление. Эквивалентность уравнений (1.1) и (1.5) следует из несжимаемости жидкости и векторных тождеств:

$$-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} - \nabla\frac{\mathbf{v}^2}{2},$$

$$\nabla^2\mathbf{v} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Дискретизация по направлениям x, r, θ проводится независимым образом. По координатам x и θ сетка однородна. Расстояние между соседними узлами в направлениях x и θ равно $h_x = L_x/N_x$ и $h_\theta = 2\pi/N_\theta$, где N_x и N_θ — количество ячеек в соответствующих направлениях. В нормальном к стенке направлении вводится растяжение сетки, что позволяет сгустить сетку вблизи стенки, где наблюдаются наибольшие градиенты скорости. Во всех расчетах параметр растяжения выбран таким образом, что высота ячеек вблизи стенки в 4 раза меньше, чем в центре трубы. Число ячеек в радиальном направлении равно N_r. При дискретизации различные скалярные величины отнесены к различным точкам сетки. Давление p относится к центру ячеек. Компоненты вектора скорости v_i относятся к центрам граней, нормальных к направлению i. Компоненты вектора завихренности ω_i относятся к центрам ребер, параллельных направлению i. При таком подходе говорят, что неизвестные определены на смещенных или разнесенных сетках.

Дискретная система уравнений обладает рядом важных консервативных свойств. В частности, дивергенция поля завихренности в расчете тождественно равна нулю. Дискретный аналог ротора градиента давления тождественно равен нулю, что гарантирует, что давление не оказывает влияния на эволюцию поля завихренности напрямую. Дискретный аналог дивергенции вязкого слагаемого в уравнении Навье-Стокса тождественно равна нулю, что гарантирует, что это слагаемое не производит массы.

При моделировании турбулентных течений важно аккуратно воспроизводить изменение кинетической энергии системы. Описывающее его уравнение возникает в результате скалярного умножения на $\mathbf{v}$ уравнений движения с последующим суммированием по всей расчетной области. Важным свойством системы является то, что градиент периодической составляющей давления q и нелинейные слагаемые не производят кинетической энергии, а лишь перераспределяют ее внутри объема жидкости. Это свойство выражается тождествами:

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla q \; d\tau = \int_V \nabla(\mathbf{v}q) \; d\tau = \int_\Sigma q v_n \; d\sigma = 0,$$

$$\int_V \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \; d\tau = \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla)\frac{\mathbf{v}^2}{2} \; d\tau = \int_V \nabla(\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}^2}{2})d\tau = \int_\Sigma \frac{\mathbf{v}^2}{2} v_n d\sigma = 0,$$

где V — расчетная область, Σ — её граница, $d\tau$ и $d\sigma$ — малые элементы объема и границы, v_n — нормальная составляющая скорости на границе. Справедливость тождеств следует из условия несжимаемости и условий прилипания на твердой стенке (1.3) и периодичности вдоль потока (1.4). Строго выполняется дискретный аналог уравнения изменения кинетической энергии E, записанного в виде:

$$\frac{dE}{dt} = U_m V D_p - \nu \int_V \boldsymbol{\omega}^2 d\tau,$$

$$E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 d\tau.$$

Здесь V обозначает также объем области, по которой выполняется интегрирование. Изменение кинетической энергии происходит за счет внешнего градиента давления D_p и вязкой диссипации.

Для определения давления решается уравнение Пуассона, возникающее в результате применения оператора дивергенции к уравнению движения (1.5) с учетом того, что жидкость несжимаемая. Уравнение для определения давления имеет вид:

$$\nabla^2 \Pi = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}, \tag{1.6}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \tag{1.7}$$

Правая часть уравнения (1.6) определяется полем скорости $\mathbf{v}$, которое в данном случае считается известным. Условие на твердой стенке возникает в результате проектирования уравнения (1.5) на направление нормали n и имеет вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \tilde{v}_n, \tag{1.8}$$

где $\tilde{v}_n$ — нормальная к стенке составляющая вектора $\tilde{\mathbf{v}}$, определенного в (1.7). В процессе решения задачи сперва ищется периодическая вдоль потока составляющая движения, также как и Π, удовлетворяющая (1.6) и (1.8). Затем внешний градиент давления D_p определяется из условия постоянства средней скорости.

Простая геометрия расчетной области позволяет применять прямые методы решения возникающей в результате дискретизации уравнения (1.6) линейной системы. Метод решения задачи для давления основан на применении быстрого преобразования Фурье в направлениях x и θ, в которых решение меняется периодическим образом и сетка имеет постоянный шаг. В радиальном направлении система решается методом прогонки. Общая сложность решения задачи для давления составляет $O(N_x N_r N_\theta \log N_x N_\theta)$. Решение задачи для давления составляет основную вычислительную сложность используемого метода.

Дискретная система уравнений при достаточно высоком пространственном разрешении оказывается жесткой и требует неявных методов интегрирования по времени. Наиболее эффективными методами интегрирования по времени при моделировании турбулентных потоков являются полунеявные методы, в которых только часть оператора Навье-Стокса разрешается неявно. В работе применяется полунеявный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности, описанный в [19], в котором неявно разрешается вязкое слагаемое (линейное). Именно с этим слагаемым связана основная жесткость системы. На каждом шаге по времени метод дает два приближения к решению, с третьим и с четвертым порядками точности, что позволяет, контролируя разность между двумя приближениями, автоматически выбирать шаг интегрирования по времени.

1.3. Реализация численного алгоритма

Пакет программ, реализующих описанный в предыдущем параграфе численный метод, написан на языке программирования fortran77 Н.В. Никитиным. Численный метод используется как в лаборатории общей аэродинамики института механики МГУ, так и в других местах в разных частях света уже более 20 лет и хорошо себя зарекомендовал. Программный код отлажен в процессе решения большого числа задач. В частности, с его помощью получены результаты, приведенные в работе [18], демонстрирующие согласие характеристик турбулентных потоков, полученных численно и в экспериментах. Адекватность численного метода и качество его программной реализации подтверждают также результаты расчетов течения жидкости в трубе при переходных Re, приведенные в следующем параграфе. В соответствии с результатами эксперимента, в расчетах турбулентность принимает форму локализованных структур, характеристики которых совпадают с характеристиками турбулентного порыва.

Помимо последовательного варианта программы реализован параллельный, позволяющий выполнять расчеты на кластерных вычислительных системах с распределенной памятью. Для коммуникации между процессами, запущенными на различных узлах вычислительной системы, использован интерфейс передачи сообщений MPI («Message Passing Interface»). Значительная часть расчетов выполнена на суперкомпьютерах «Чебышев» и «Ломоносов» суперкомпьютерного комплекса МГУ.

Значительная часть кода, необходимого при анализе полученных результатов и управлении численными экспериментами, в том числе реализующая метод поиска решения на сепаратрисе (см. параграф 2.1) и метод поиска условно периодических траекторий (см. параграф 4.1), была написана на высокоуровневом языке python автором диссертации. Применение указанных методов сводится к последовательному обращению к программе расчета движения жидкости с правильно сформированными начальными данными.

1.4. Методические расчеты

В параграфе приведены результаты расчетов движения жидкости в круглой трубе в диапазоне $1670 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2800$, полученные при $L_x = 200R$ с пространственным разрешением $2048 \times 64 \times 128$ ячеек в продольном, радиальном и угловом направлении соответственно. Расчеты на более грубой сетке $1024 \times 32 \times 64$ во всех рассмотренных случаях дают результаты совпадающие качественно и близкие количественно.

Стартуя с начальных данных в виде некоторого трехмерного возмущения течения Пуазейля, уравнения Навье–Стокса интегрируются до выхода решения на тот или иной режим. Установление решения, отвечающего турбулентному течению, происходит в том случае, когда амплитуда начального возмущения достаточно велика, в противном случае возмущения затухают со временем, и решение в конечном итоге возвращается к ламинарному течению Пуазейля. Турбулентный режим за пределами диапазона переходных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \geqslant 3000$ имеет вид статистически стационарного процесса и не зависит от кон-

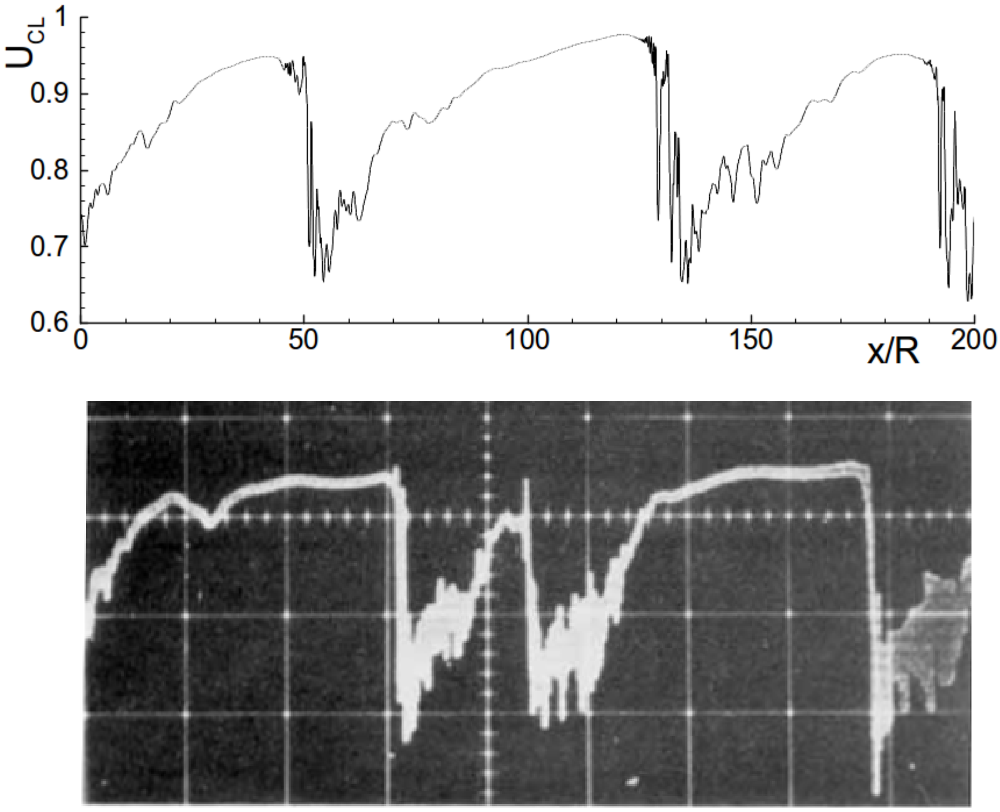

Рис. 1.1. Сравнение результатов численного расчета и эксперимента. Изображен график скорости на оси трубы. Верхний график построен по результатам численного моделирования, выполнено Н.В. Никитиным применяемым в работе методом. Нижний график получен в эксперименте [2].

кретного вида начальных условий, при которых он был получен. Течение при этом однородно в продольном направлении, его статистические характеристики согласуются с имеющимися экспериментальными данными. При $\mathrm{Re} \leqslant 2600$ в распределении скорости вдоль трубы появляется неоднородность, которая при $\mathrm{Re} \lesssim 2200$ приобретает форму двигающейся вдоль трубы цепочки из нескольких пространственно-локализованных структур, разделенных участками ламинарного течения. Конкретное число получающихся в решении турбулентных структур зависит от начальных условий. Кроме того, как было отмечено выше, это число может меняться в процессе эволюции в результате исчезновения или деления отдельных структур. Получаемые в расчетах пространственно-локализованные турбулентные структуры хорошо согласуются с наблюдаемыми в экспериментах турбулентными порывами, что позволяет нам пользоваться этим их наименованием (смотри Рисунок 1.1). Отметим, что турбулентные порывы формируются и на некотором отрезке времени существуют в расчетах и при Re $<$ 2000. Однако, в этом случае не только число порывов в пределах расчетной области, но и время их существования является случайной величиной и зависит от конкретных начальных условий. Представленная на фиг. 1.2 визуализация рассчитанных течений в диапазоне $1680 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2800$ демонстрирует изменение локализованных структур при уменьшении числа Рейнольдса.

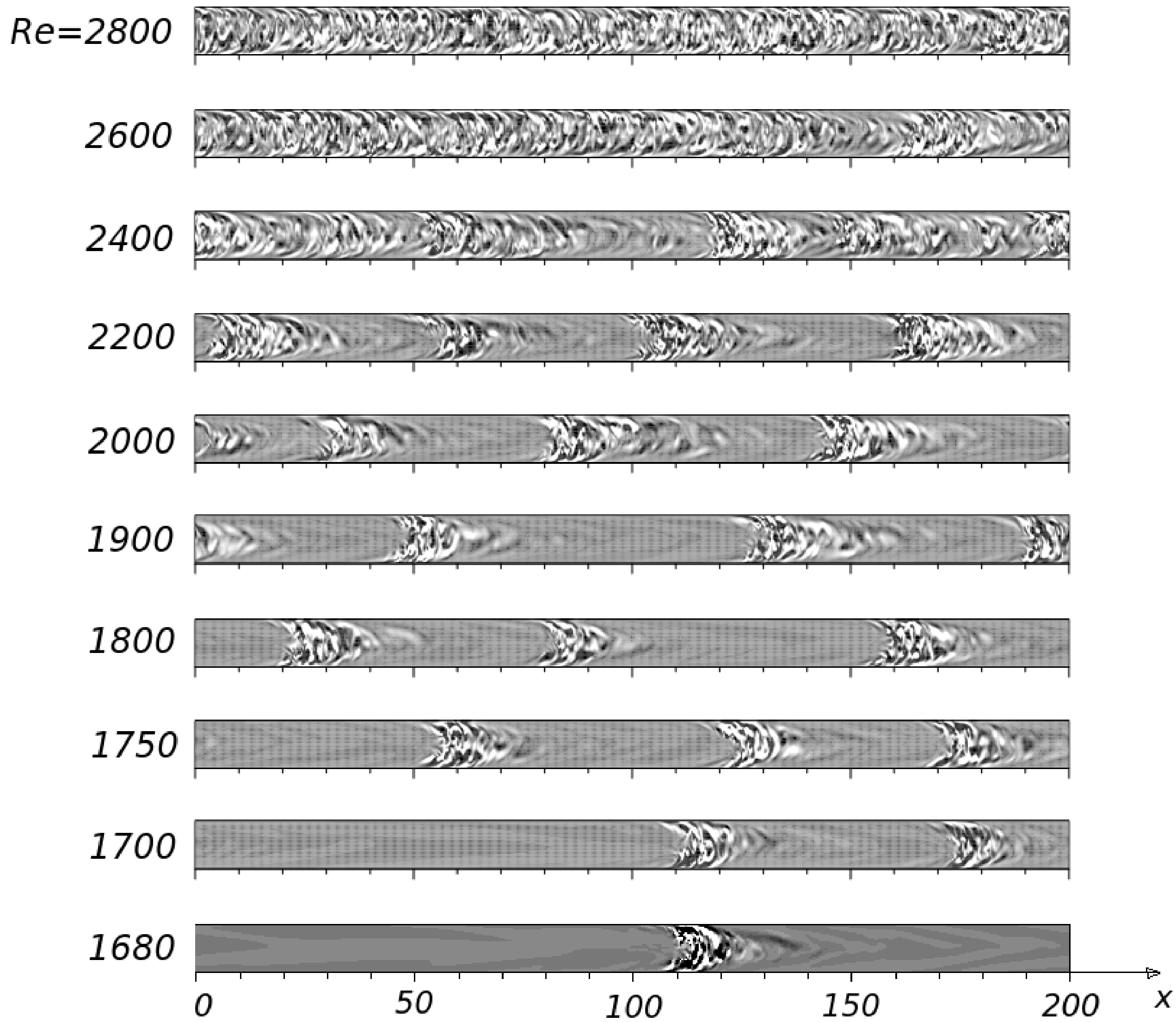

Рис. 1.2. Перемежаемый характер турбулентности в трубе в диапазоне переходных чисел Рейнольдса.

Глава 2. Исследование модельного порыва

В прямых трубах круглого сечения, как и в некоторых других сдвиговых течениях, переход к турбулентности может происходить без потери ламинарным течением линейной устойчивости. В частности, в приведенной в парагафе 1.1 постановке ламинарное течение (течение Пуазейля в круглой трубе) линейно устойчиво при всех числах Рейнольдса [65]. Для выхода на турбулентный режим течения необходимо внести в поток возмущения достаточно большой амплитуды, в то время как малые возмущения ламинарного течения затухают. В таких условиях существуют возмущения некоторой критической амплитуды, отделяющие возмущения, вызывающие переход к турбулентности, от затухающих. В фазовом пространстве соответствующие критическим возмущениям решения принадлежат сепаратрисе, разделяющей области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Принадлежащее в первый момент времени сепаратрисе решение остается на сепаратрисе. Хотя решение, эволюционирующее на сепаратрисе, неустойчиво и не может наблюдаться в эксперименте, оно может быть получено численно. Замечено, что решение на сепаратрисе сохраняет некоторое характерные черты турбулентного течения, но при этом имеет более простую форму и динамику.

Метод поиска решения на сепаратрисе предложен в работе [12]. Первые расчеты решения на сепаратрисе в круглой трубе выполнены в расчетной области небольшой протяженности (с условием периодичности вдоль потока) [66]. В расчетах [67,68], выполненных в протяженной расчетной области, обнаружено, что при переходных числах Рейнольдса решение на сепаратрисе в круглой трубе имеет пространственно локализованную структуру. При этом, если турбулентность существует в форме пространственно локализованных порывов до $\mathrm{Re} \approx 2700$, то решение на сепаратрисе имеет пространственно локализованную структуру по крайней мере до $\mathrm{Re} = 6000$. С ростом числа Рейнольдса амплитуда отклонения от ламинарного течения и протяженность области локализации в решении на сепаратрисе снижаются [68], что дает основание полагать, что решение на сепаратрисе сохраняет локализованную структуру и при больших числах Рейнольдса (хотя расчеты при больших Re не проводились). Как отмечено в [13, 68], решение на сепаратрисе в круглой трубе воспроизводит ряд характерных особенностей турбулентного порыва, и при небольших значениях числа Рейнольдса их характеристики оказываются близки друг к другу. Структуры, напоминающие локализованное решение на сепаратрисе, наблюдались в экспериментах [69] и в численных расчетах [70] при затухании турбулентного течения.

В работе [13] обнаружено, что при наложении на решение, описывающее течение в круглой трубе, дополнительных условий симметрии при переходном значении числа Рейнольдса решение, эволюционирующее на сепаратрисе, приближается к условно периодическому решению. Предельное решение сохраняет пространственно локализованную структуру, но в сопутствующей системе отсчета оказывается периодическим по времени. Помимо пространственной локализации предельное решение воспроизводит некоторые другие характерные особенности турбулентного порыва (см. параграф 2.2). Мы будем называть это решение *модельным порывом*. Простота поведения модельного порыва позволяет выполнить его подробное исследование, что может помочь прояснить свойства турбулентного порыва.

В главе представлен метод получения модельного порыва, описаны его основные характеристики и внутренняя структура; даны оценки достоверности полученных результатов. Детальное описание внутренней структуры модельного порыва выполнено автором диссертации и является новым научным результатом. Основные результаты, приведенные в этом параграфе, опубликованы в работах автора диссертации [71–74].

2.1. Расчет модельного порыва

Следуя [13], решение поставленной в параграфе 1.1 задачи ищется с дополнительными ограничениями диаметральной симметричности и π-периодичности в угловом направлении:

$$(v_x, v_r, v_\theta)(x, r, -\theta, t) = (v_x, v_r, -v_\theta)(x, r, \theta, t), \quad (2.1)$$

$$(v_x, v_r, v_\theta)(x, r, \theta + \pi, t) = (v_x, v_r, v_\theta)(x, r, \theta, t). \quad (2.2)$$

Здесь (x, r, θ) — цилиндрические координаты, (v_x, v_r, v_θ) — продольная, радиальная и угловая компоненты вектора скорости. Наложение ограничений (2.1), (2.2) упрощает поведение решения в пространстве, делает его более определенным. Условие (2.1) ограничивает возможность смещения турбулентных структур в угловом направлении. Турбулентные порывы, рассчитанные при $Re = 2000$ с учетом и без учета условий (2.1), (2.2) изображены на Рисунке 2.1 (представлены области пониженной и повышенной на 0.1 скорости относительно течения Пуазейля). В обоих случаях порыв имеет центральное ядро с пониженной скоростью и систему вытянутых вдоль стенки трубы, чередующихся в угловом направлении полос замедления и ускорения. На симметричном порыве полосы гораздо более структурированы. Их угловое положение не меняется в процессе эволюции: угловые области $\theta = k\pi/2$, k от 0 до 3, где в силу (2.1), (2.2) угловая компонента скорости тождественно равна нулю, заняты полосами ускорения, промежуточные области $\theta = \pi/4 + k\pi/2$ — полосами замедления. На порыве без условий симметрии наблюдаются значительные по амплитуде случайные по пространственному расположению флуктуации, разрывающие сплошность полосчатых структур. На симметричном порыве тоже заметна флуктуирующая компонента, которая в этом случае выглядит гораздо более регулярной. Отметим, что несмотря на заметную пространственную регулярность, временно́е поведение симметричного порыва остается хаотичным.

Предельное решение на сепаратрисе получено при $\mathrm{Re} = 2200$. Условие (2.2) при (2.1) порождает условие отражения относительно сечения $\theta = \pi/2$, аналогичное условию отражения относительно сечения $\theta = 0$:

$$(v_x, v_r, v_\theta)(x, r, \pi/2 + \theta, t) = (v_x, v_r, -v_\theta)(x, r, \pi/2 - \theta, t). \quad (2.3)$$

С учетом (2.1), (2.3) расчет проводился для четверти объема трубы $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Исходное решение найдено при $L_x = 80$ на сетке, содержащей $512 \times 32 \times 32$ ячеек в продольном, радиальном и угловом направлениях.

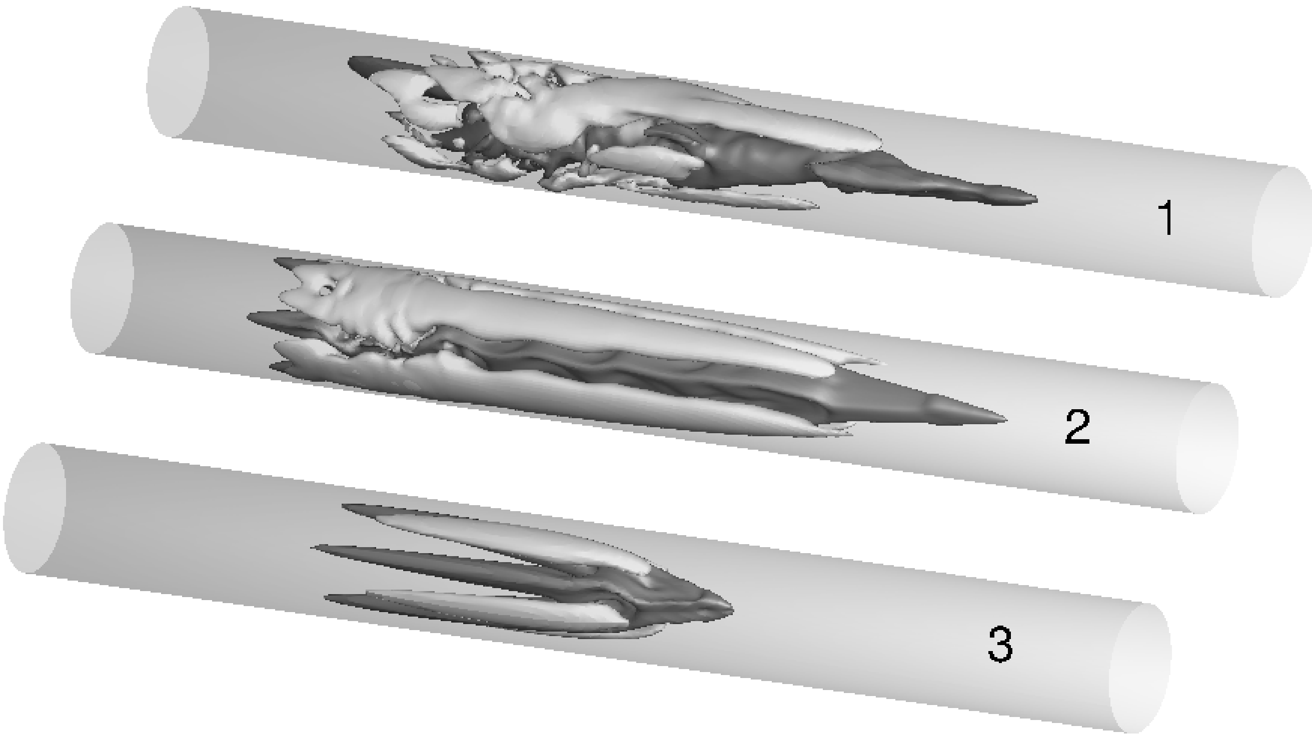

Рис. 2.1. Визуализация численных расчетов турбулентных порывов: 1 — Re = 2000; 2 — Re = 2000 с учетом (2.1), (2.2); 3 — решение на сепаратрисе, Re = 2200. Темным и светлым тоном выделены поверхности скорости -0.1 и $+0.1$ относительно скорости течения Пуазейля. Поток направлен слева направо.

Предварительно найденное турбулентное решение $\mathbf{v}_{turb}(\mathbf{x}, t)$ используется в итерационной процедуре отыскания предельного решения на сепаратрисе. Задача решается с начальным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_{Pois}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{v}_{turb}(\mathbf{x}, t = t_0) - \mathbf{v}_{Pois}(\mathbf{x})). \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{v}_{Pois} = (1 - r^2, 0, 0)$ — течение Пуазейля, t_0 — некоторый фиксированный момент времени, $\alpha \in [0, 1]$ — скалярный параметр. Значение $\alpha = 0$ соответствует нулевому возмущению, и решением при $t > 0$ остается течение Пуазейля. Выбирая $\alpha = 1$, уже в начальный момент времени реализуется турбулентный режим, который сохраняется при $t > 0$. При промежуточных значениях α происходит стремление решения либо к одному, либо к другому режиму. Применяя метод деления отрезка пополам, мы постепенно отыскиваем то значение α, при котором решение эволюционирует на сепаратрисе, разделяющей области притя-

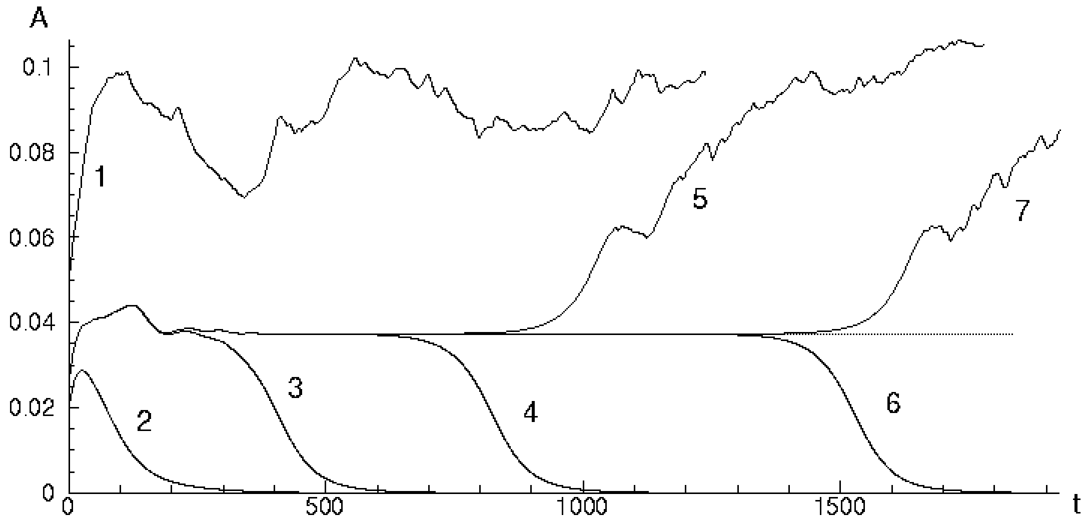

Рис. 2.2. Итерационный процесс построения решения на сепаратрисе. 1–7 — эволюция среднеквадратичной амплитуды возмущений $A(t)$ при уточнении значения α.

жения двух режимов течения. Суть метода состоит в том, что если при текущем значении α возмущения затухают, то на следующей итерации α увеличивается; если развивается турбулентный режим течения — α уменьшается. На Рисунке 2.2 представлены графики $A(t)$ – среднеквадратичного по всему объему отклонения поля скорости от течения Пуазейля для нескольких значений α, демонстрирующие сходимость итерационного процесса. При уточнении значения α продлевается длительность балансирования решения на сепаратрисе.

С каждой новой итерацией решение проводит на сепаратрисе в среднем на 30 единиц времени больше. В расчетах для представления действительных числе использованы 64-битные числа с плавающей запятой. Это позволило найти около 50 приближений к решению на сепаратрисе. Соответственно, решение удалось удержать на сепаратрисе в течении приблизительно 1500 единиц времени. Из них ориентировочно первые 500 единиц происходит перестройка решения, после чего режим течения устанавливается. В согласии с результатами [13], решение на сепаратрисе при $\mathrm{Re} = 2200$ постепенно выходит на условно периодический режим. Это решение описывает локализованной в пространстве структуры, которая сносится вниз по потоку с постоянной скоростью. В подвижной системе отсчета поле скорости в каждой точке испытывает периодические колебания. Для скорости сноса и периода колебаний получены значения $c = 0.69$ и

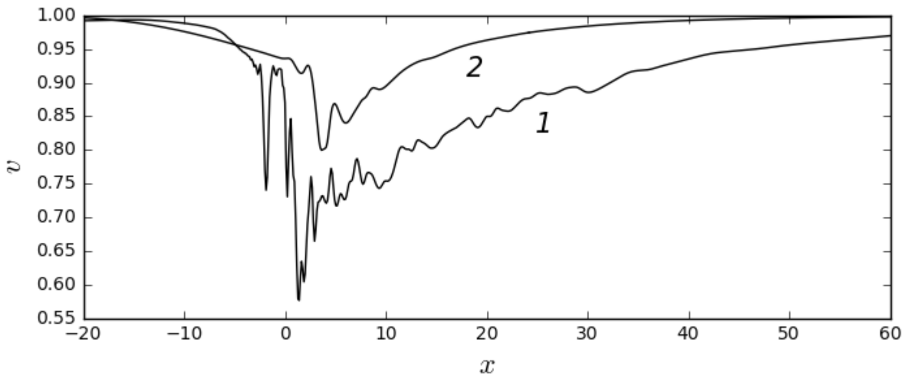

Рис. 2.3. Сравнение скорости на оси трубы в турбулентном (1) и модельном (2) порывах.

$T = 60$ (в [13] сообщается о $c = 0.76$ и $T = 60$). Во всех выполненных расчетах режим течения, устанавливающийся на сепаратрисе, не зависит от исходного турбулентного поля скорости $\mathbf{v}_{turb}$.

Сравнение предельного решения на сепаратрисе с турбулентным порывом, представленное на Рисунке 2.1, показывает качественное согласие этих решений. Во всех структурах имеются протяженные области ускоренного и замедленного движения, концентрирующиеся в пристенной области трубы. Сохраняется и основная качественная особенность порыва — медленное понижение осевой скорости на его передней границе и более резкое восстановление скорости на задней границе (смотри Рисунок 2.3). Мы будем называть предельное решение на сепаратрисе *модельным порывом*.

Для того, чтобы установить влияние условия периодичности вдоль трубы на предельное решение, решение было найдено в расчетной области вдвое большей протяженности, при $L_x = 160$ (число узлов сетки в продольном направлении также удвоено). Также при исходном значении $L_x = 80$ решение было получено на более подробной сетке, содержащей $1024 \times 64 \times 64$ ячеек (в сравнении с исходной сеткой в каждом направлении число ячеек удвоено). Результаты, полученные на трех сетках, качественно совпадают и количественно близки. Для сравнения, на Рисунке 2.5 представлены некоторые интегральные характеристики модельного порыва, полученные на различных сетках (подробное описание изображенных величин приведено в следующем параграфе). Полученные результаты подтверждают достаточность расчетной сетки и длины расчетной области для адекватного воспроизведения модельного порыва, а также то, что его пространственная локализация не связана с условием периодичности вдоль трубы. Характеристики полученного модельного порыва согласуются с результатами работы [13]. Это подтверждает, что найденное решение является решением математической задачи и не зависит от численного метода, которым оно было найдено. В работе [13] решение получено двумя методами — полностью спектральным [21] и спектрально-конечно-разностным [22]. Мы применяем конечно-разностный метод [18]. Также, модельный порыв был воспроизведен в работе [20] спектрально-конечно-разностным методом [22]; авторами также сообщается о совпадении результатов с [13].

2.2. Основные свойства модельного порыва

При $\mathrm{Re} = 2200$ модельный порыв имеет длину около $40R$ и перемещается вдоль трубы со скоростью $c = 0.69U$. В подвижной системе отсчета он является периодическим по времени с периодом $T = 60R/U$. Характерным свойством модельного порыва является наличие вытянутых вдоль потока областей с повышенным и пониженным значением продольной компоненты скорости, чередующихся в угловом направлении (смотри Рисунок 2.1). Полосы повышенной скорости целиком расположены около стенки трубы, полосы замедления соединяются в единое целое в приосевой области вблизи переднего фронта. Наличие вытянутых вдоль потока полос ускоренного и замедленного движения — характерное свойство любого пристенного турбулентного течения. Однако, в отличие от реальной турбулентности, где полосы случайно блуждают во времени и в пространстве, в рассматриваемом решении полосы сохраняют свое положение и форму, лишь слегка искажаясь периодическими колебаниями.

Для удобства перейдем в подвижную систему координат, перемещающуюся вдоль трубы со скоростью сноса локализованной структуры. В подвижной системе решение представляется в виде суперпозиции стационарной составляющей $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{v}}^t$ и колебательной $\mathbf{v}_n(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v} - \mathbf{V}$. Стационарную составляющую, в свою очередь, представим в виде суперпозиции осесимметричной $\mathbf{V}_{2D}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{V}}^\theta$ и трехмерной $\mathbf{V}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{2D}$ составляющих. Распределения продольной компоненты осесимметричной составляющей скорости вдоль трубы $V_{x,2D}(x)$ для нескольких расстояний от оси трубы представлены на Рисунке

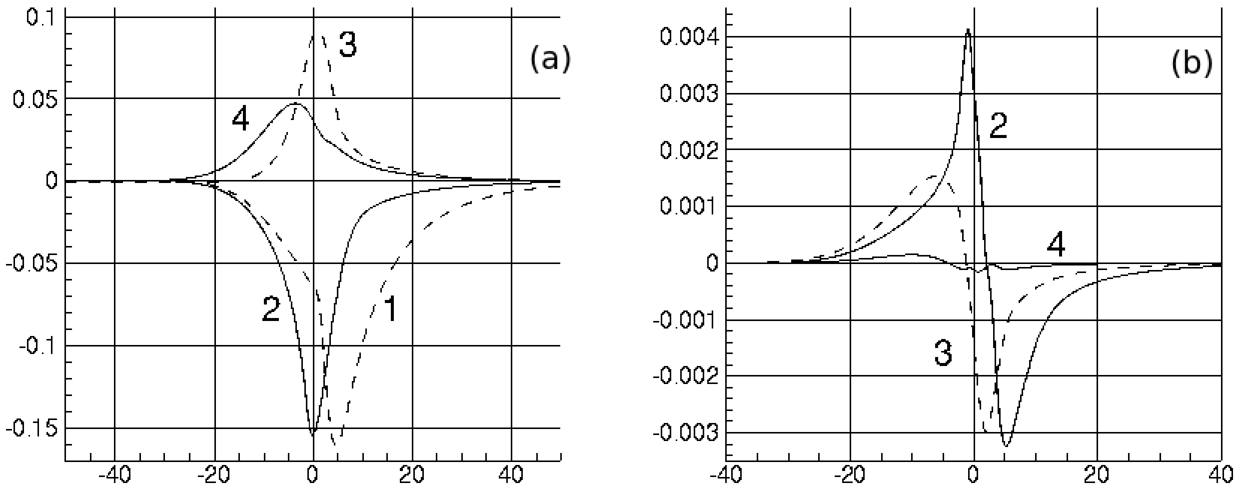

Рис. 2.4. Распределения вдоль трубы продольной (a) и радиальной (b) компоненты осесимметричной составляющей скорости $\mathbf{V}_{2D}$ для нескольких расстояний от оси трубы: 1–4 – r = 0, 0.4, 0.7, 0.9

2.4(a) (даны отклонения от течения Пуазейля). Начало системы отсчета $x = 0$ помещено в сечение, в котором среднее отклонение скорости от течения Пуазейля максимально. Голова структуры, где начинает проявляться отклонение осевой скорости, располагается на расстоянии $x \approx 45$. Хвостовая часть структуры на сепаратрисе очерчена не так четко, как в турбулентных порывах, где восстановление скорости происходит на отрезке длиной в $3 - 5$ радиусов трубы. Падение скорости в приосевой области трубы компенсируется ускорением у стенки. Поведение радиальной компоненты $V_{r,2D}$, показанное на Рисунке 2.4(b), соответствует изменению осевой скорости — в зоне замедления на оси происходит растекание жидкости к стенкам, $V_{r,2D} > 0$, в передней части происходит обратный процесс и $V_{r,2D} < 0$.

На Рисунке 2.5 приведены распределения по x среднеквадратичных по сечению трубы амплитуд трех составляющих движения: стационарной осесимметричной (отклонение от течения Пуазейля) A_{2D}, стационарной трехмерной A_{3D} и колебательной A_n. Распределение $A_{2D}(x)$ соответствует Рисунку 2.4. Отклонение от течения Пуазейля заметно на значительном отрезке от $x = -30$ до $x = 40$. Максимум A_{2D} составляет 8.4%. Величина A_{3D} характеризует интенсивность полосчатых структур. Как видно на Рисунке 2.1, полосчатые структуры появляются на некотором расстоянии вверх по потоку от головы поры-

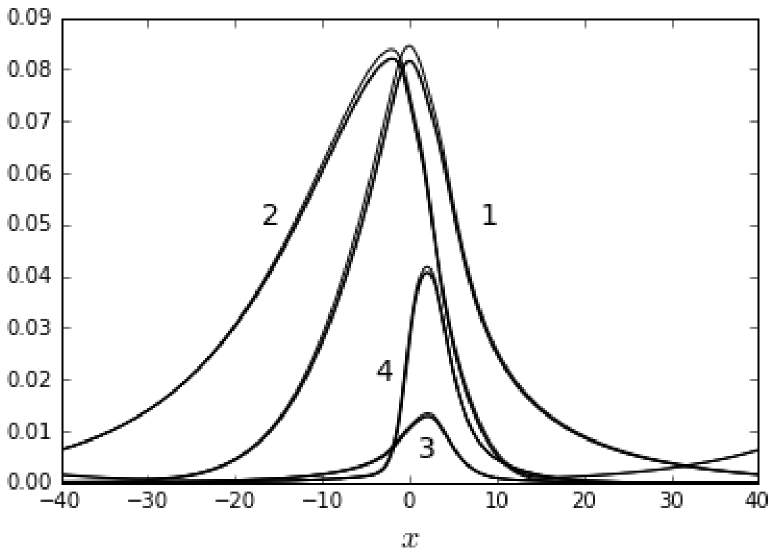

Рис. 2.5. Распределения вдоль трубы среднеквадратичных по сечению амплитуд трех составляющих движения: 1 – $\mathbf{V}_{2D}$ (отклонение от течения Пуазейля); 2, 3 – продольная и поперечные компоненты скорости $\mathbf{V}_{3D}$; 4 – $\mathbf{v}_n$. Представлены результаты, полученные на трех расчетных сетках, параметры которых приведены в параграфе 2.1.

ва и сохраняются на значительном расстоянии позади него. В соответствии с этим $A_{3D}(x)$ имеет выраженную асимметрию относительно точки $x = -2$, где эта величина достигает максимума. Интенсивность полос быстро падает вниз по потоку и сохраняется на значительном расстоянии в верхней части потока. В отличие от стационарных полосчатых структур, колебательная составляющая движения сосредоточена на сравнительно непротяженном отрезке трубы от $x = -5$ до $x = 15$ с максимальной амплитудой в 4% при $x = 2.5$.

В трехмерную стационарную составляющую движения $\mathbf{V}_{3D}$ попадают полосы повышенной и пониженной скорости. Поле $V_{x,3D}$ в нескольких сечениях трубы изображено на Рисунке 2.6. В каждом сечении трубы полосы пониженной скорости ($V_{x,3D} < 0$) проходят через центр расчетной области, при $\theta = \pi/4$. Полосы повышенной скорости ($V_{x,3D} > 0$) попадают на границы расчетной области в угловом направлении, находящиеся при $\theta = 0, \pi/2$. Среднее поле скорости оказывается симметрично относительно плоскости, проходящей через центр расчетной области при $\theta = \pi/4$, так как поле скорости решения на сепаратрисе $\mathbf{v} = (v_x, v_r, v_\theta)$ имеет дополнительную симметрию отражения относительно

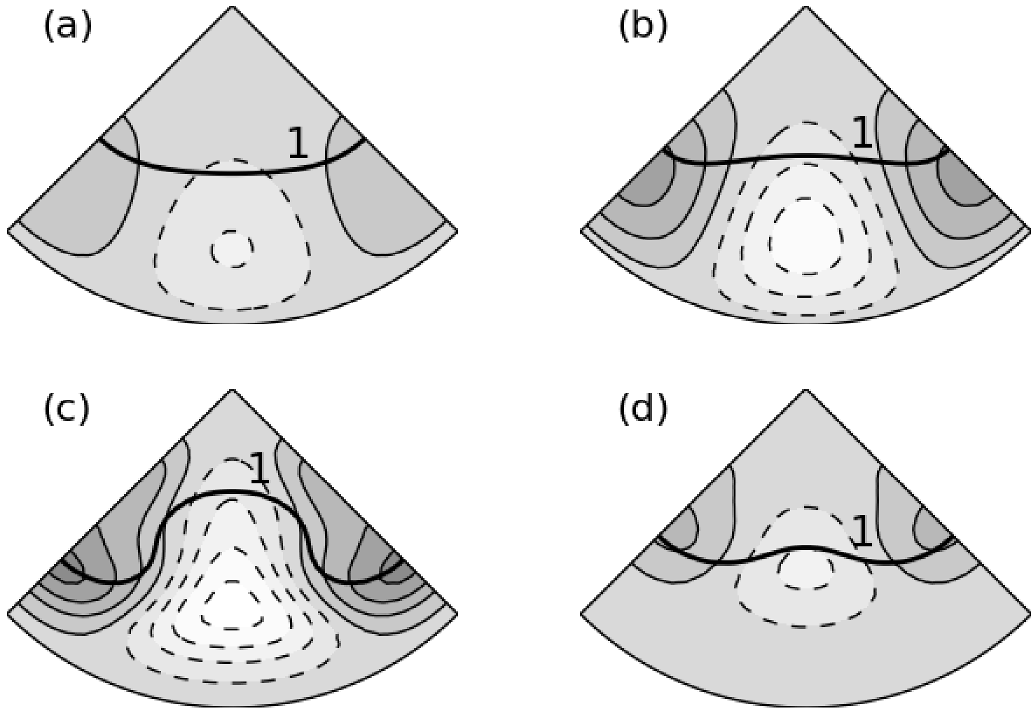

Рис. 2.6. Значение $V_{x,3D}$ в нескольких сечениях трубы: (a)–(d) — $x = -20, -10, 0, 5$. Изолинии построены с шагом ≈ 0.04. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные значения. На линии 1 относительная скорость жидкости равна нулю ($V_x = c$).

указанной плоскости со сдвигом на половину периода по времени:

$$(v_x, v_r, v_\theta)(x, r, \pi/4 + \theta, t) = (v_x, v_r, -v_\theta)(x, r, \pi/4 - \theta, t + T/2). \tag{2.5}$$

Распределения среднеквадратичной амплитуды пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_n$ в нескольких сечениях трубы приведены на Рисунке 2.7. Пульсации имеют существенную амплитуду между полосами повышенной и пониженной скорости, а также между полосой ускорения и осью трубы. Пульсационная составляющая движения $\mathbf{v}_n$ по форме напоминает бегущую волну. Её фазовая скорость близка к $0.77U$, что на $0.08U$ выше скорости перемещения порыва. Длина бегущей волны несколько меняется по мере продвижения вниз по потоку. Её можно оценить в $5R$.

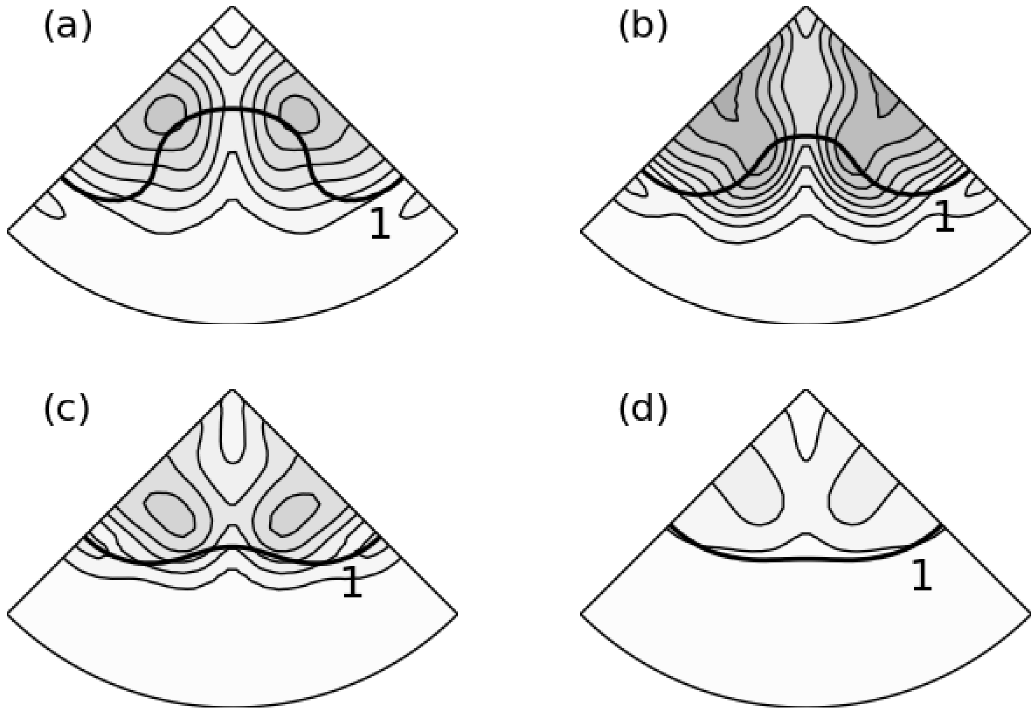

Рис. 2.7. Изолинии среднеквадратичной амплитуды колебаний в нескольких сечениях трубы: (a)–(d) — x = 0, 2.5, 5, 7.5. Изолинии построены с шагом ≈ 0.01. В пристенной области амплитуда колебаний близка к нулю. На линии 1 относительная скорость жидкости равна нулю ($V_x = c$).

2.3. Механизм поддержания полос повышенной и пониженной скорости

Все описанные составляющие движения находятся в динамическом взаимодействии друг с другом. Как видно на Рисунке 2.5 наиболее локализованной вдоль трубы оказывается колебательная составляющая. Доминирующая мода колебательной составляющей пропорциональна $e^{2\pi it/T}$ во времени и $e^{2i\theta}$ в угловом направлении. Нелинейное взаимодействие колебательных мод порождает колебания на высших частотах, а также дает вклад в стационарную составляющую движения. В стационарной составляющей кроме осесимметричной части доминирует мода, пропорциональная $e^{4i\theta}$, обладающая $\pi/2$-периодичностью в угловом направлении. Именно такой периодичности по углу соответствуют четыре пары полосчатых структур, наблюдающихся при решении задачи с условиями (2.1), (2.2).

Отметим, что непосредственный вклад колебаний в образование полос не велик. Основной механизм роста полос это так называемый лифтап («lift-up») эффект, связанный с появлением движения в перпендикулярной к основному потоку плоскости. Частицы жидкости, перемещающиеся от стенки в сторону оси трубы, приносят дефект скорости и образуют полосу замедления, а частицы, двигающиеся в противоположном направлении — от оси к стенке, образуют полосу ускорения. Основная роль колебательной составляющей в этом механизме состоит именно в порождении стационарного движения в поперечной плоскости, распределение среднеквадратичной амплитуды которого $A_{\perp}(x)$ также представлено на Рисунке 2.5 кривой 3. Как видно, область сосредоточения поперечного движения практически совпадает с областью существования колебаний. Некоторое уклонение $A_{\perp}(x)$ вверх по потоку объясняется конвективным переносом этого движения (поперечное движение в основном возникает в периферийной части сечения трубы, где скорость потока в выбранной системе отсчета отрицательна).

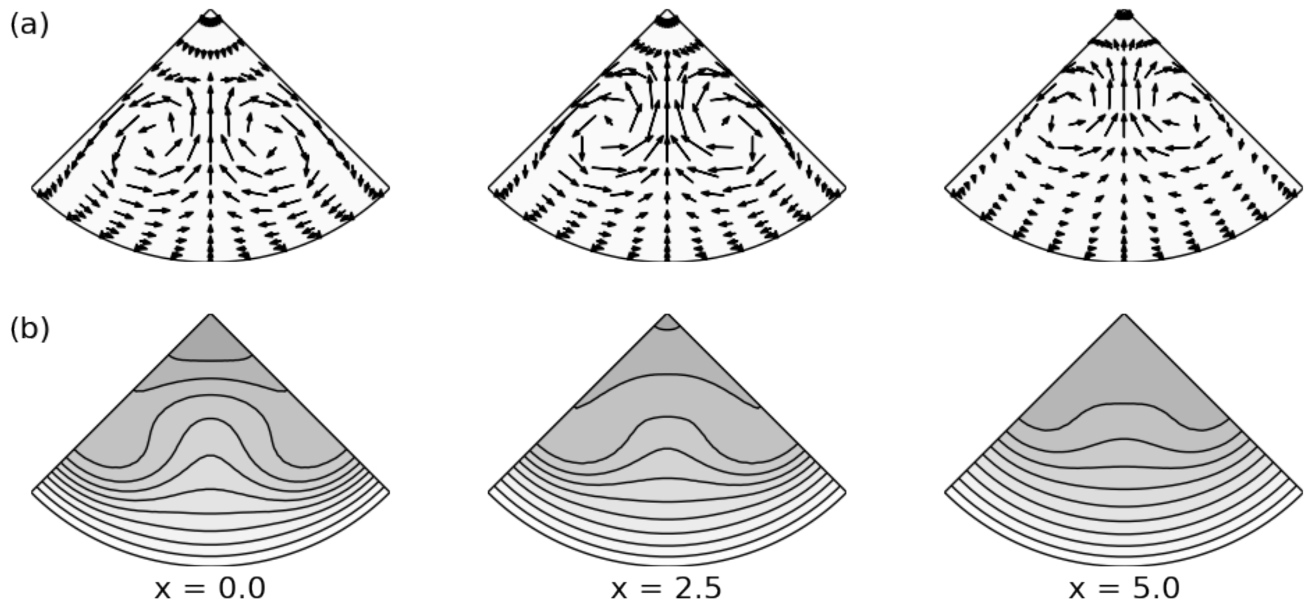

Рис. 2.8. Среднее поле скорости $\mathbf{V}$: ряд (a) — поперечная компонента, ряд (b) — изолинии продольной компоненты, построенные с шагом ≈ 0.09. На стенке скорость жидкости равна нулю. Изображено три сечения трубы, $x = 0, 2.5, 5$.

На Рисунке 2.8 приведены поперечная (V_r, V_θ) и продольная V_x компоненты стационарного течения в области, где пульсации имеют существенную амплитуду. Стационарное поперечное течение соответствует существованию в потоке стационарных продольных вихрей, поддерживающих существование по-

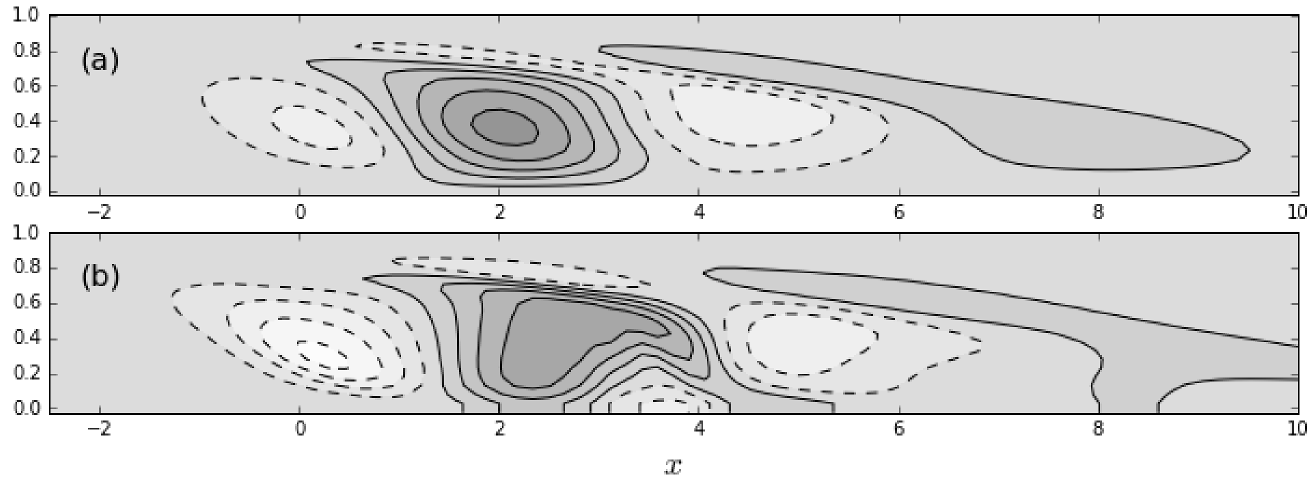

Рис. 2.9. Сравнение мгновенного поля продольной скорости пульсаций, возникающих в рамках линеаризованных уравнений, $\mathbf{v}_1'$ (a) и пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_n$ (b) в сечении $\theta = 0$. Сплошные изолинии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

лос. Там, где стационарное поперечное движение направлено от стенки к оси трубы, находятся полосы замедления. Там, где поперечное движение направлено к стенки — полосы ускорения.

Формирующиеся в области небольшой протяженности полосчатые структуры переносятся в переднюю и заднюю часть порыва за счет конвекции. На Рисунке 2.6 на линии 1 средняя продольная скорости V_x в системе отсчета, связанной с порывом, равна нулю. В приосевой области, ограниченной этой линией, скорость положительна, а в периферийной — отрицательна. Видно, что полосчатые структуры во всех сечениях (кроме переднего, x = 5) располагаются в области отрицательной относительной скорости. Среднее течение с отрицательной скоростью переносит полосчатые структуры в заднюю часть порыва, где они формируют картину, похожую на вытянутые щупальца медузы (смотри Рисунок 2.1). При $x > 5$ полосчатые структуры концентрируются в приосевой части трубы и конвектируются вперед положительной скоростью относительного движения, благодаря чему в передней части порыва A_{3D} сохраняет заметную величину, несмотря на отсутствие поперечного движения.

2.4. Механизм возбуждения пульсаций

Полосчатые структуры достигают максимальной амплитуды в области $x \in [-5, 0]$, где создаются условия для возникновения колебаний. Наиболее вероятный механизм генерации колебаний — механизм потери устойчивости стационарной составляющей течения. Для проверки этой гипотезы стационарное течение $\mathbf{V}$ было исследовано на устойчивость к малым возмущениям $\mathbf{v}'$. Предположение малости $\mathbf{v}'$ позволяет линеаризовать уравнения. Линеаризованные относительно $\mathbf{v}'$ уравнения Навье-Стокса в подвижной системе координат, связанной с порывом, имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{V} - \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{v}'. \tag{2.6}$$

Здесь p' – пульсационная составляющая давления. Расход $\mathbf{v}'$ равен нулю. Другие уравнения в постановке задачи линейные и для $\mathbf{v}'$ имеют тот же вид, что и для $\mathbf{v}$. Задача решается с дополнительными условия симметрии (2.1), (2.2), которым удовлетворяет поле скорости модельного порыва. Подчеркнем, что поле скорости $\mathbf{V}$ является существенно трехмерным и все три его компоненты V_x, V_r и V_θ отличны от нуля. Хотя значения V_r и V_θ на порядок ниже значения V_x, в главе 3 будет показано, что их учет необходим для адекватного описания механизма поддержания продольных вихрей. Исследование на устойчивость такого поля скорости $\mathbf{V}$ выполнено численно.

Линеаризованные относительно возмущений уравнения с некоторыми случайными начальными условиями интегрировались по времени до выхода решения на режим экспоненциального изменения. Обнаружено, что действительно поле скорости $\mathbf{V}$ неустойчиво к малым возмущениям. Растущее возмущение $\mathbf{v}'_1 \sim e^{(\lambda + i\omega)t}$ имеет инкремент нарастания $\lambda = 0.012$ и частоту $\omega = 0.116$, близкую к частоте колебаний $2\pi/60 = 0.105$ в решении на сепаратрисе. Что более существенно, поле скорости растущего решения $\mathbf{v}'_1$ качественно повторяет основные особенности поля скорости пульсационной составляющей движения модельного порыва $\mathbf{v}_n$. В качестве подтверждения на Рисунке 2.9 представлены мгновенные поля скорости $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}_n$ в продольном сечении $\theta = 0$. Моменты времени подобраны так, что фазы решений совпадают. Также на Рисунке 2.10 для сравнения представлены амплитуды $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}_n$ в нескольких сечениях трубы.

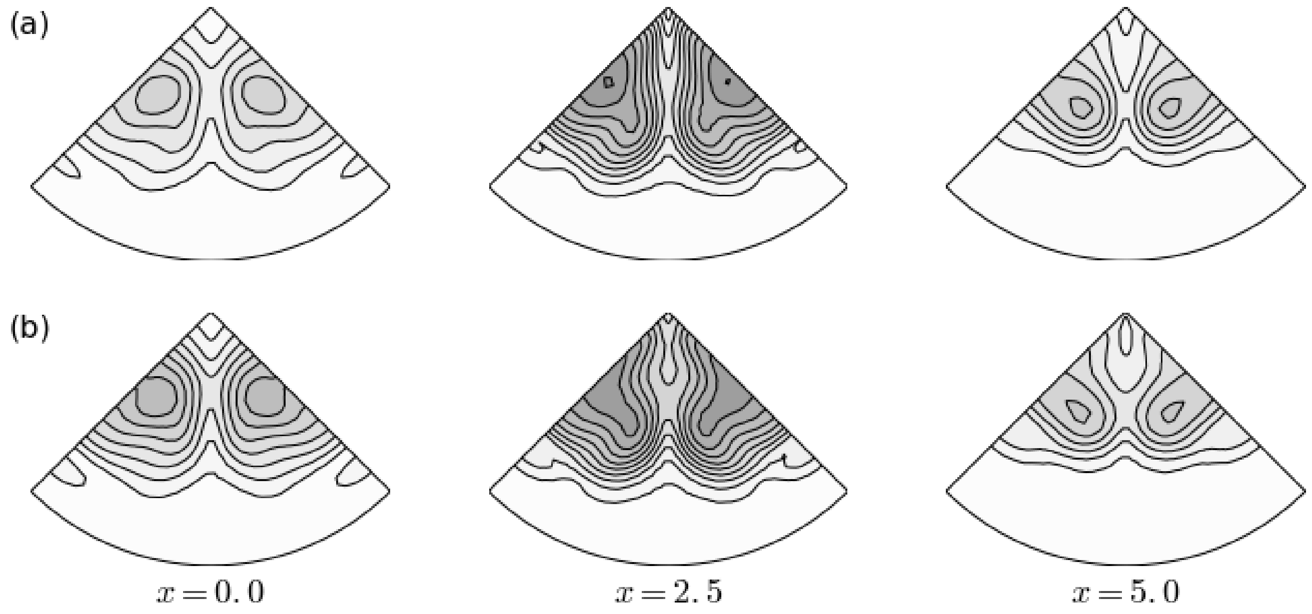

Рис. 2.10. Сравнение амплитуды пульсаций, возникающих в рамках линеаризованных уравнений, $\mathbf{v}_1'$ (ряд (a)) и пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_n$ (ряд (b)) в нескольких сечения трубы, $x = 0, 2.5, 5$. Вблизи стенки амплитуда пульсаций близка к нулю.

Нет сомнений, что колебания возникают в результате линейной неустойчивости стационарной составляющей движения. Решение линейной задачи обладает дополнительной симметрией отражения относительно плоскости $\theta = \pi/4$, выражаемой формулой:

$$(-v_x, -v_r, v_\theta)(x, r, \pi/4 + \theta, t) = (v_x, v_r, v_\theta)(x, r, \pi/4 - \theta, t). \tag{2.7}$$

В целом, поле $\mathbf{v}_1'$ имеет более простую форму, чем $\mathbf{v}_n$. В частности, $\mathbf{v}_1'$ меняется во времени по гармоническому закону. Простота формы $\mathbf{v}_1'$ делает его предпочтительным объектом при исследовании механизмов влияния пульсаций на среднее течение.

В реальном течении пульсационная составляющая движения имеет конечную амплитуду и нелинейными слагаемыми в уравнении, описывающем эволюцию пульсаций, уже нельзя пренебрегать. По-видимому, роль нелинейных слагаемых сводится к тому, что они несколько меняют форму пульсаций так, что рост амплитуды пульсационной составляющей движения прекращается. При этом, именно линейные слагаемые определяют форму пульсаций и ответственны за передачу энергии в пульсационную составляющую движения.

Отметим, что точки максимального роста колебаний находятся на линии, соответствующей нулевой относительной скорости (линия 1 на Рисунке 2.7). По этой причине область порождения колебаний остается неподвижной относительно порыва. Интересно, что в этой же области ($x = 0,\ r \approx 0.4$) происходит смена знака радиальной компоненты осесимметричной составляющей скорости (смотри Рисунок 2.4(b)). При $x < 0$ радиальная скорость положительна, поэтому колебания, возникшие в задней части порыва, относятся в сторону стенки трубы, где относительная скорость отрицательна, и продолжают двигаться вверх по течению. Наоборот, при $x > 0$ радиальная скорость направлена к оси трубы. Туда же, в область положительной скорости, сносятся и колебания, обнаруживающиеся в передней части порыва.

Отметим также, что неустойчивость полосчатых структур является неотъемлемой составляющей всех сценариев самоподдержания турбулентности в пристенных течениях. В некоторых работах предполагается, что неустойчивость возникает в пристенных областях полос замедленного движения, где в локальном профиле скорости $V_x(r)$ на фоне наибольшего градиента появляется точка перегиба — источник неустойчивости в механизме типа Кельвина–Гельмгольца. В частности, именно такой механизм предлагается в качестве механизма возникновения колебаний в турбулентном порыве в [11]. В рассматриваемом нами решении на сепаратрисе это определенно не так. Как видно на Рисунке 2.7 в сечении $x = 0$, соответствующем максимальной скорости роста колебаний, амплитуда колебаний минимальна как раз в области полосы замедления ($\theta = \pi/4$). Наибольшие колебания развиваются наоборот вблизи полос ускорения, а если быть более точным, в промежуточных областях между полосами. В этих областях стационарная составляющая скорости течения претерпевает наибольшее изменение и имеет точки перегиба, но не как функция радиальной переменной, а как функция угла.

2.5. Влияние продольной неоднородности стационарной составляющей движения на форму пульсаций

Замечено, что в модельном порыве область наибольшей интенсивности пульсаций совпадает с областью резкого падения скорости на его заднем фронте (смотри Рисунок 2.3, 2.5). Аналогичная особенность отмечена в турбулентном порыве [75]. Чтобы оценить роль продольной неоднородности среднего течения в процессе формирования пульсаций, в работе выполнен анализ устойчивости однородных вдоль трубы полей скорости $\mathbf{U}_i = \mathbf{V}\big|_{x=x_i}$, повторяющих среднее поле скорости модельного порыва $\mathbf{V}$ в сечениях трубы $x = x_i$. Значения x_i, при которых было выполнено исследование поля скорости $\mathbf{U}_i$, принадлежат интервалу $(-8, 4)$, где пульсационная составляющая движения получает энергию от среднего течения и имеет существенную амплитуду. Поля скорости $\mathbf{U}_i$ имеют полосчатую структуру и воспроизводят неоднородность среднего поля скорости по координатам r и θ, но теряют неоднородность среднего течения по координате x. Сравнение характеристик устойчивости полей скорости $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}_i$ позволяет делать выводы о роли продольной неоднородности в процессе формирования пульсаций.

Собственные решения линейной задачи устойчивости однородного вдоль трубы поля скорости имеют вид $\mathbf{v}' = \mathrm{Real}\left(\hat{\mathbf{v}}(r,\theta,t)e^{i\alpha x}\right)$, где функция $\hat{\mathbf{v}}$ имеет комплексные значения, функция $\mathrm{Real}(z)$ имеет значение действительной части комплексного числа z. Постановка задачи линейной устойчивости однородного вдоль трубы поля скорости формулируется относительно $\hat{\mathbf{v}}$ и является двумерной (пропадает зависимость от x). Задача имеет дополнительный параметр $\alpha > 0$, характеризующий волновое число возмущения, устойчивость к которому анализируется. В этой постановке уравнения движения в системе координат, перемещающейся вдоль трубы со скоростью c, и уравнение неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} = i\alpha c\hat{\mathbf{v}} - (\mathbf{U}_i \cdot \hat{\nabla})\hat{\mathbf{v}} - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\mathbf{U}_i - \hat{\nabla}\hat{p} + \nu\hat{\nabla}^2\hat{\mathbf{v}}, \tag{2.8}$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0, \tag{2.9}$$

где функция $\hat{p} = \hat{p}(r,\theta,t)$ имеет комплексные значения, $p' = \mathrm{Real}\left(\hat{p}e^{i\alpha x}\right)$ — пульсационная составляющая давления, оператор $\hat{\nabla}$ имеет вид:

$$\hat{\nabla} = \left(i\alpha, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\theta}\right).$$

На стенках трубы ставится условие прилипания. На решение накладываются дополнительные условия симметрии (2.1), (2.2), при которых найден модельный порыва. Условие периодичности вдоль потока (1.4) снимается.

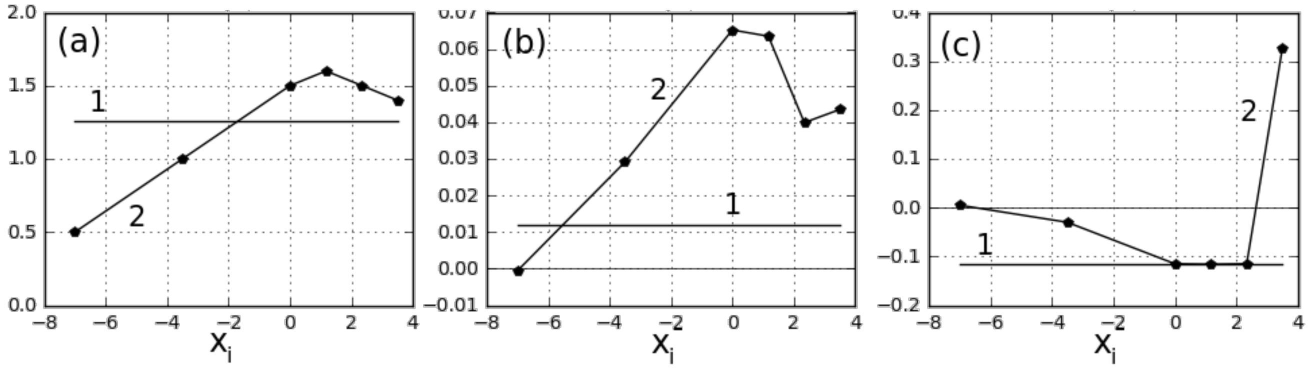

Рис. 2.11. Значение волнового числа α (a), инкремента нарастания λ (b) и угловой частоты ω (в системе отсчета порыва) (c) для наиболее быстро растущего возмущения поля скорости модельного порыва $\mathbf{V}$ (линия 1) и однородных вдоль потока полей скорости $\mathbf{U}_i$, повторяющих $\mathbf{V}$ в сечении $x = x_i$ (точки на линии 2).

На устойчивость исследованы поля скорости $\mathbf{U}_i = \mathbf{V}\big|_{x=x_i}$ для $x_i = -7.1, -3.5, 0, 1.2, 2.3, 3.5$. Для каждого исследованного $\mathbf{U}_i$ среди собственных решений линейной задачи устойчивости с различными значениями волнового числа $\alpha > 0$ найдено наиболее быстро растущее (медленно затухающее). Наиболее быстро растущее (медленно затухающее) собственное решение линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{U}_i$ при фиксированном значении α получено интегрированием уравнений (2.8), (2.9) со случайными начальными данными до выхода на экспоненциальный режим роста, $||\hat{\mathbf{v}}|| \sim e^{(\lambda+i\omega)t}$.

На Рисунке 2.11 приведены полученные значения волнового числа α, инкремента нарастания λ и угловой частоты ω для наиболее быстро растущих (медленно затухающих) возмущений поля скорости $\mathbf{U}_i$, как функции x_i (точки на линии 2). Также на рисунке (линией 1) приведены характеристики наиболее быстро растущего возмущения стационарной составляющей поля скорости модельного порыва $\mathbf{V}$ (значение длины волны приблизительное). Угловая частота приведена в системе отсчета, перемещающейся со скоростью порыва.

Поля скорости $\mathbf{U}_i$ при $x_i \in (-4, 4)$ оказываются неустойчивыми, причем скорость роста наиболее быстро растущего возмущения оказывается выше скорости роста возмущений стационарной составляющей движения модельного порыва $\mathbf{V}$. Наибольшей скоростью роста обладают возмущения полей скорости $\mathbf{U}_i$ при $x_i \in (0, 2)$. Следствием этого факта может быть то, что именно

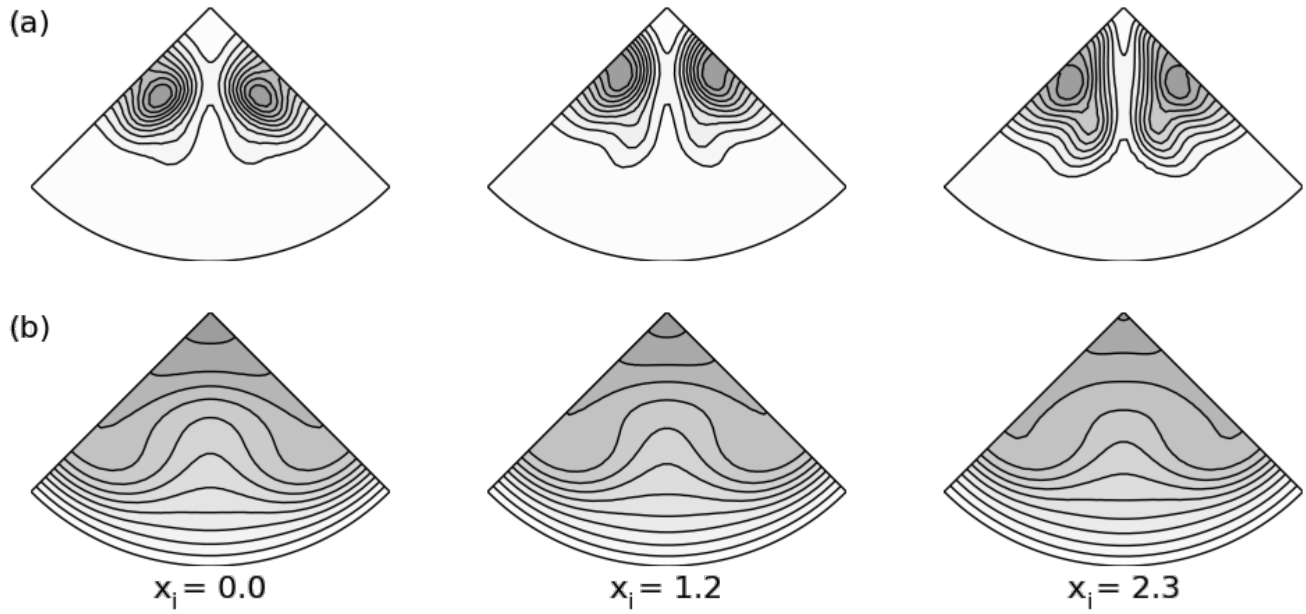

Рис. 2.12. Изолинии амплитуды колебаний для наиболее быстро растущего возмущения однородного вдоль трубы поля скорости $\mathbf{U}_i$ (a) и изолинии продольной компоненты поля скорости $\mathbf{U}_i$ (b), $x_i = 0, 1.2, 2.3$.

при $x \in (0, 2)$ пульсационная составляющая движения $\mathbf{v}_n$ достигает наибольшей амплитуды (смотри Рисунок 2.5). Наиболее быстро растущие возмущения полей скорости $\mathbf{U}_i$ при $x_i \in (0, 3)$ повторяют форму пульсационной составляющей движения модельного порыва. В частности, их волновые числа и угловые частоты близки к соответствующим значениям как для наиболее быстро растущих возмущений поля скорости $\mathbf{V}$, так и для пульсационной составляющей движения модельного порыва $\mathbf{v}_n$. Распределения по сечению трубы амплитуды колебаний для наиболее быстро растущих возмущений полей скорости $\mathbf{U}_i$ при $x_i \in (0, 3)$, приведенные на Рисунке 2.12, повторяют распределение амплитуды колебаний в модельном порыве (смотри Рисунок 2.7).

Если при $x_i \in (0, 3)$ наиболее быстро растущее возмущения полей скорости $\mathbf{U}_i$ повторяют качественные особенности пульсационной составляющей движения модельного порыва, то уже при $x_i = 3.5$ наиболее быстрорастущим оказывается возмущение принципиально другой формы. С этим, в частности, связано резкое отличие значения угловой частоты ω, полученного при $x_i = 3.5$, от значений, полученных при меньших x_i (смотри Рисунок 2.11).

Среди исследованных однородных вдоль трубы полей скорости, имеющих полосчатую структур, найдены неустойчивые, для которых наиболее быстрорастущие возмущения воспроизводят как качественные, так и количественные характеристики пульсационной составляющей движения модельного порыва и имеют даже большую скорость роста, чем наиболее быстрорастущие возмущение средней составляющей движения модельного порыва. Таким образом, может быть сделан вывод, что продольная неоднородность стационарной составляющей движения не является необходимым условием для возникновения пульсаций. Образование пульсаций связано с неоднородностью стационарной составляющей движения в поперечной плоскости.

2.6. Взаимодействие между компонентами движения модельного порыва

В предыдущих параграфах были выделены компоненты движения модельного порыва и основные механизмы взаимодействия между ними. Компоненты движения находятся в динамическом равновесии, поддерживая существование друг друга и, следовательно, самого порыва. Более строго обосновать полученные результаты позволяет анализ баланса кинетической энергии в системе. Вклад каждой из компонент движения в производство кинетической энергии других компонент движения может быть вычислен на основе уравнений движения, и, в зависимости от его величины, могут быть сделаны выводы о положительном или отрицательном влиянии одних компонент движения на другие.

Ниже приведен вывод уравнений баланса кинетической энергии для каждой компоненты движения. Осреднение уравнения Навье-Стокса по времени в системе отсчета, связанной с порывом, дает уравнение баланса импульса стационарной составляющей движения $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{v}}^t$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} - \overline{(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^t - \nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{V}. \qquad (2.10)$$

Здесь c — скорость перемещения порыва, P — стационарная составляющая давления, $\mathbf{v}_n$ — пульсационная составляющая скорости, черта над выражением с индексом t обозначает осреднение по времени. Формально производная по времени от стационарной составляющей движения равна нулю, однако слагаемое $\partial\mathbf{V}/\partial t$ сохранено в записи уравнения (2.10) для удобства восприятия. В сравнении с уравнением Навье-Стокса в (2.10) возникает новое слагаемое $-\overline{(\mathbf{v}_n,\nabla)\mathbf{v}_n}^t$, выражающее влияние пульсационной составляющей движения на среднее течение.

Последующее осреднение (2.10) по угловой координате дает уравнения баланса импульса двумерной компоненты движения $\mathbf{V}_{2D} = \overline{\mathbf{V}}^{\theta}$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{2D}}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{V}_{2D}}{\partial x} - (\mathbf{V}_{2D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{2D} - \overline{(\mathbf{V}_{3D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{3D}}^{\theta} - \overline{(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^{t,\theta} - \\ - \nabla P_{2D} + \nu\nabla^2\mathbf{V}_{2D}. \quad (2.11)$$

Здесь $P_{2D} = \overline{P}^{\theta}$ — двумерная составляющая давления, $\mathbf{V}_{3D} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{2D}$ — трехмерная составляющая скорости, черта над выражением с индексом θ — осреднение по угловой переменной. Вычитание (2.11) из (2.10) дает уравнение баланса импульса трехмерной составляющей движения $\mathbf{V}_{3D}$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{3D}}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{V}_{3D}}{\partial x} - (\mathbf{V}_{3D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{3D} - (\mathbf{V}_{3D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{2D} - (\mathbf{V}_{2D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{3D} + \\ + \overline{(\mathbf{V}_{3D}\cdot\nabla)\mathbf{V}_{3D}}^{\theta} - \overline{(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^{t} + \overline{(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^{t,\theta} - \nabla P_{3D} + \nu\nabla^2\mathbf{V}_{3D}. \quad (2.12)$$

Здесь $P_{3D} = P - P_{2D}$ — трехмерная составляющая давления. Проецирование уравнения (2.12) на ось x дает уравнение, описывающее баланс импульса составляющей движения $\mathbf{V}_S = (V_{x,3D}, 0, 0)$, ассоциированной с полосами повышенной и пониженной скорости. Проецирование уравнения (2.12) на поперечное сечение трубы дает уравнение баланса импульса составляющей движения $\mathbf{V}_V = (0, V_{r,3D}, V_{\theta,3D})$, ассоциированной с продольными вихрями.

Вычитание (2.10) из (1.1) дает уравнение эволюции пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_n$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial x} - (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n + \overline{(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^{t} - (\mathbf{V}_{2D}\cdot\nabla)\mathbf{v}_n - (\mathbf{V}_S\cdot\nabla)\mathbf{v}_n - (\mathbf{V}_V\cdot\nabla)\mathbf{v}_n - \\ - (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{V}_{2D} - (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{V}_S - (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{V}_V - \nabla p_n + \nu\nabla^2\mathbf{v}_n. \quad (2.13)$$

Здесь $p_n = p - P$ — пульсационная составляющая давления, среднее поле скорости представлено в виде суммы компонент движения $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{2D} + \mathbf{V}_S + \mathbf{V}_V$, которые оказывают влияние на пульсационную составляющую движения через соответствующие нелинейные слагаемые. Осреднение по времени (2.13), умноженного на $\mathbf{v}_n$, дает уравнение изменения кинетической энергии пульсационной составляющей движения $e_n = \overline{\mathbf{v}_n^2/2}^{t}$:

$$\frac{\partial e_n}{\partial t} = D_n^{2D} + D_n^{S} + D_n^{V} - \overline{\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n}^{t} - \overline{\mathbf{v}_n\cdot\nabla p_n}^{t} + \nu\overline{\mathbf{v}_n\cdot\nabla^2\mathbf{v}_n}^{t}, \quad (2.14)$$

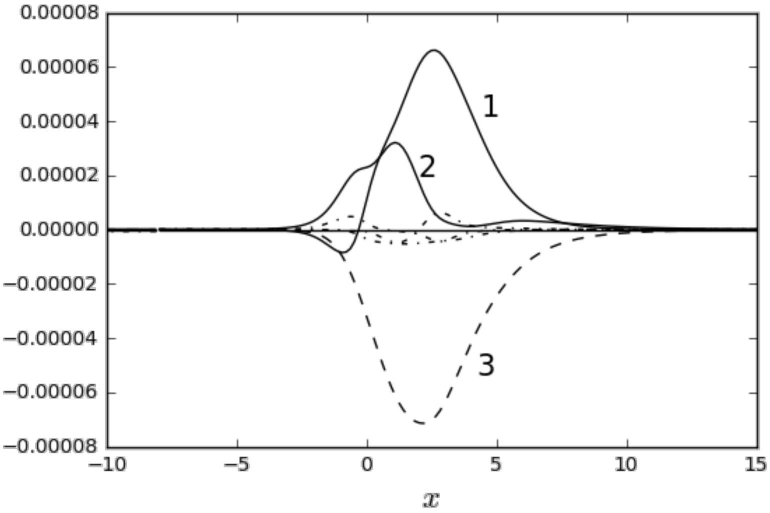

Рис. 2.13. Вклад в производство кинетической энергии пульсационной составляющей движения со стороны: 1 — $\mathbf{V}_S$; 2 — $\mathbf{V}_{2D}$; 3 — вязких слагаемых. Другие слагаемые существенного вклада не дают.

где слагаемые D_n^{2D}, D_n^S и D_n^V выражают генерацию e_n, обусловленную нелинейным взаимодействием $\mathbf{v}_n$ с компонентами движения $\mathbf{V}_{2D}$, $\mathbf{V}_S$ и $\mathbf{V}_V$, соответственно. Значения D_n^{2D}, D_n^S, D_n^V вычисляются по формулам:

$$D_n^{2D} = c\frac{\partial e_n}{\partial x} - (\mathbf{V}_{2D} \cdot \nabla)e_n - \overline{\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)}^t \mathbf{V}_{2D},$$

$$D_n^S = -(\mathbf{V}_S \cdot \nabla)e_n - \overline{\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)}^t \mathbf{V}_S,$$

$$D_n^V = -(\mathbf{V}_V \cdot \nabla)e_n - \overline{\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)}^t \mathbf{V}_V.$$

На Рисунке 2.13 приведены графики усреднённых по сечению трубы слагаемых из правой части уравнения (2.14). Наибольший вклад в генерацию кинетической энергии пульсаций e_n дает слагаемое D_n^S (кривая 1), что согласуется с представлениями о возникновении пульсаций вследствие линейной неустойчивости полосчатого движения. Хотя и не определяющий, но существенный положительный вклад дает слагаемое D_n^{2D} (кривая 2). Так как течение e_n не меняется во времен, сумма всех слагаемых в правой части уравнения (2.14) равна нулю. Положительный вклад в генерацию e_n со стороны D_n^S и D_n^{2D} компенсируется вязким слагаемым (кривая 3). Влияние других слагаемых оказывается незначительным.

Аналогично, осреднение по θ уравнения (2.12), умноженного на поле скорости $\mathbf{V}_V$, ассоциированного с продольными вихрями, дает уравнение баланса

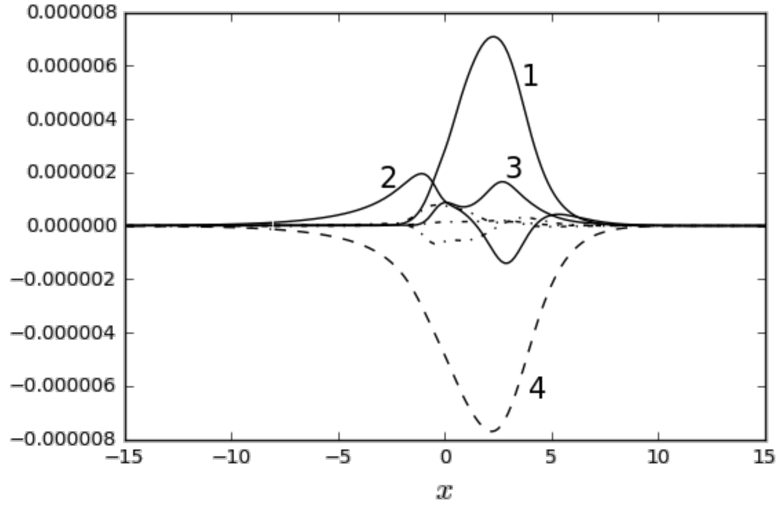

Рис. 2.14. Вклад в производство кинетической энергии движения $\mathbf{V}_V$, ассоциированного с продольными вихрями, со стороны: 1 — $\mathbf{v}_n$; 2 — $\mathbf{V}_{2D}$; 3 — градиента давления; 4 — вязких слагаемых. Другие слагаемые существенного вклада не дают.

кинетической энергии $E_V = \overline{\mathbf{V}_V^2/2}^{\theta}$:

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = D_V^{2D} + D_V^{2D,S} + D_V^S + D_V^n - \overline{\mathbf{V}_V(\mathbf{V}_V \cdot \nabla)\mathbf{V}_V}^{\theta} - \overline{\mathbf{V}_V \nabla P_{3D}}^{\theta} + \nu \overline{\mathbf{V}_V \nabla^2 \mathbf{V}_V}^{\theta}, \tag{2.15}$$

где слагаемые D_V^{2D}, $D_V^{2D,S}$, D_V^S, D_V^n описывают влияние на поле скорости $\mathbf{v}_n$ компонент движения $\mathbf{V}_{2D}$, $\mathbf{V}_S$, $\mathbf{V}_n$, обусловленное нелинейным взаимодействие между ними. Значения D_V^{2D}, $D_V^{2D,S}$, D_V^S, D_V^n вычисляются по формулам:

$$D_V^{2D} = c\frac{\partial E_V}{\partial x} - (\mathbf{V}_{2D} \cdot \nabla)E_V - \overline{\mathbf{V}_V(\mathbf{V}_V \cdot \nabla)}^{\theta}\mathbf{V}_{2D},$$

$$D_V^{2D,S} = -\overline{\mathbf{V}_V(\mathbf{V}_S \cdot \nabla)}^{\theta}\mathbf{V}_{2D},$$

$$D_V^S = -\overline{\mathbf{V}_V(\mathbf{V}_S \cdot \nabla)\mathbf{V}_V}^{\theta},$$

$$D_V^n = -\overline{\mathbf{V}_V(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n}^{t,\theta}.$$

Графики усредненных по сечению трубы слагаемых правой части уравнения (2.15) приведены на Рисунке 2.14. В соответствии с общими представлениями, наибольший вклад в производство продольных вихрей дает пульсационная составляющая движения. Её вклад в образование кинетической энергии E_V выражает слагаемое D_V^n (линия 1). Также существенный положительный вклад дает градиент давления, однако его интегральный вклад ниже почти в 5 раз

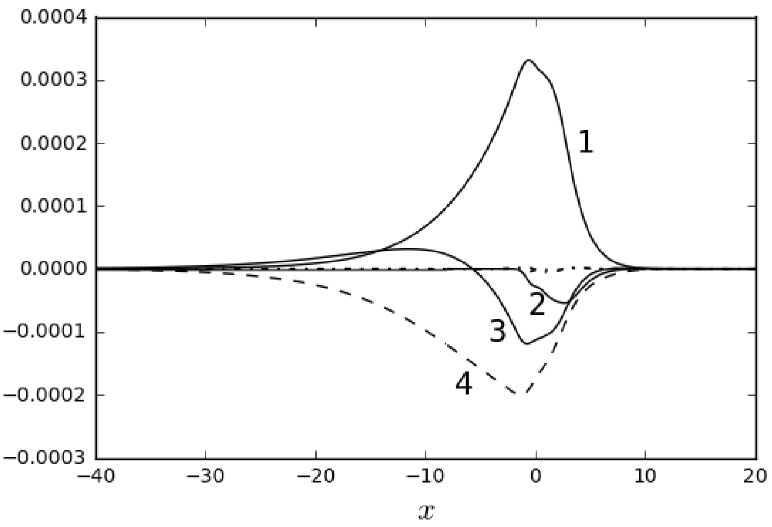

Рис. 2.15. Вклад в кинетическую энергию движения $\mathbf{V}_S$, ассоциированного с полосами, со стороны: 1 — $\mathbf{V}_V$ и $\mathbf{V}_{2D}$; 2 — $\mathbf{v}_n$; 3 — $\mathbf{V}_{2D}$; 4 — вязких слагаемых. Другие слагаемые существенного вклада не дают.

(линия 3). Слагаемое, выражающее вклад градиента давления в производство E_V, отлично от нуля, так как поле скорости $\mathbf{V}_V$ не соленоидальное. Также можно отметить влияние $\mathbf{V}_{2D}$, выраженное слагаемым D_V^{2D} (линия 2). При $x > 0$ оно отрицательно, а при $x < 0$ — положительно. Такое поведение соответствует тому, что продольная завихренность, формирующейся при положительных x, сносится вверх по течению вместе с основным потоком вблизи стенки за счет конвекции. Производство кинетической энергии E_V перечисленными слагаемыми компенсируется вязким слагаемым (линия 4). Другие слагаемые в уравнении (2.15) существенного влияния не оказывают.

Осреднение по переменной θ уравнения (2.12), умноженного на поле скорости $\mathbf{V}_S$, ассоциированное с полосами, дает уравнение баланса кинетической энергии $E_S = \overline{\mathbf{V}_S^2/2}^\theta$:

$$\frac{\partial E_S}{\partial t} = D_S^{2D} + D_S^{2D,V} + D_S^V + D_S^n - \overline{\mathbf{V}_S(\mathbf{V}_S \cdot \nabla)\mathbf{V}_S}^\theta - \overline{\mathbf{V}_S \nabla P_{3D}}^\theta + \nu \overline{\mathbf{V}_S \nabla^2 \mathbf{V}_S}^\theta. \quad (2.16)$$

Слагаемые D_S^{2D}, $D_S^{2D,V}$, D_S^V, D_S^n вычисляются по формулам:

$$D_S^{2D} = c\frac{\partial E_S}{\partial x} - (\mathbf{V}_{2D} \cdot \nabla)E_S - \overline{\mathbf{V}_S(\mathbf{V}_S \cdot \nabla)}^\theta \mathbf{V}_{2D},$$

$$D_S^{2D,V} = -\overline{\mathbf{V}_S(\mathbf{V}_V \cdot \nabla)}^\theta \mathbf{V}_{2D},$$

$$D_S^V = -\overline{\mathbf{V}_S(\mathbf{V}_V \cdot \nabla)\mathbf{V}_S}^\theta,$$

$$D_S^n = -\overline{\mathbf{V}_S(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n}^{t,\theta}.$$

Графики усредненных по сечению трубы слагаемых правой части уравнения (2.16) приведены на Рисунке 2.15. В этом случае наибольший вклад дает слагаемое $D_S^{2D,V}$ (линия 1). Оно выражает совместное влияние на $\mathbf{V}_S$ со стороны компонент движения $\mathbf{V}_{2D}$ и $\mathbf{V}_V$ и в скалярных переменных имеет вид:

$$D_S^{2D,V} = -V_{x,S}V_{r,V}\frac{\partial V_{x,2D}}{\partial r}.$$

Доминирующая роль этого слагаемого согласуется с представлением о том, что продольные вихри формируются за счет «лифт-ап» эффекта. Нормальной к стенке трехмерная компонента скорости $V_{r,V} = V_{r,3D}$ перераспределяет продольный импульс двумерного основного течения $V_{x,2D}$, образуя тем самым трехмерную составляющую продольной скорости $V_{x,3D} = V_{x,S}$. Пульсации оказывают небольшое отрицательное влияние на формирование полос (линия 2). Двумерное течение оказывает отрицательное влияние вблизи нуля, в то время, как в задней части порыва, при $x \sim -10$, его влияние оказывается положительным (линия 3). По-видимому, это связанно с конвективным переносом полос, формирующихся в передней части порыва, в его заднюю часть вблизи стенки, осуществляемое основным течением $\mathbf{V}_{2D}$. Получаемая составляющей движения $\mathbf{V}_S$ энергия компенсируется вязким слагаемым (линия 4). Другие слагаемые существенного влияния не оказывают.

Данные о производстве кинетической энергии двумерной компоненты движения в параграфе не приведены. За поддержание двумерного течения ответственен внешний перепад давления. Производимая внешним перепадом давления кинетическая энергия компенсируется вязкими слагаемыми.

Полученные в этом параграфе результаты подтверждают существующие представления о взаимодействии между компонентами движения модельного порыва. Также эти результаты показывают, что основной вклад в подержание продольных вихрей дает пульсационная составляющая движения. В работе найден механизм поддержания продольных вихрей. Ввиду важности этого механизма, его описание дается в отдельной главе (следующей). Описание механизма поддержания продольны вихрей в модельном порыве дано в параграфе 3.4.

2.7. Выводы по главе

В главе представлены результаты численного исследования модельного порыва. Соответствующее модельному порыву решение уравнений Навье-Стокса является предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Предельное решение на сепаратрисе описывает локализованную в пространстве структуру, перемещающуюся вниз по потоку с постоянной скоростью. В сопутствующей системе отсчета при наложенных условиях симметрии оно оказывается периодическим по времени. Модельный порыв воспроизводит некоторые характерные особенности турбулентного порыва, а простота временного поведения позволяет выполнить его подробное исследование. Мы полагаем, что исследование модельного порыва может помочь приблизиться к пониманию турбулентного порыва.

При изучении модельного порыва установлены его основные характеристики, такие как скорость перемещения вдоль трубы и период изменения во времени. Составлено представление о его внутренней структуре и выделены основные элементы цикла поддержания колебаний. Осреднение по времени в сопутствующей системе отсчета позволило разделить поле скорости модельного порыва на среднюю и пульсационную составляющие. Характерной особенностью среднего течения является наличие вытянутых вдоль потока полос повышенной и пониженной скорости, чередуются в угловом направлении. Показано, что пульсационная составляющая движения возникает в результате линейной неустойчивости среднего течения. Пульсации возникают в областях между соседними полосами повышенной и пониженной скорости, где распределение средней продольной скорости имеет точки перегиба, если рассматривать его как функцию угловой переменной. Вероятным механизмом образования пульсаций является неустойчивость струйного течения с точками перегиба. Изменение среднего течения вдоль оси x существенного влияния на формирование пульсаций не оказывает. Показано, что полосы образуются за счет так называемого «лифт-ап» эффекта. В течении существуют стационарные продольные вихри, перемещающие жидкость в нормальной к основному потоку плоскости.

Там, где медленная жидкость перемещается от стенки в основной поток, образуются полосы пониженной скорости. Между полосами пониженной скорости, где жидкость перемещается ближе к стенке, формируются полосы повышенной скорости. Формируясь в области небольшой протяженности, полосы вытягиваются вверх по потоку за счет конвекции. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что поддержание стационарных продольных вихрей связано с наличием пульсаций. Такое представление подтверждается в следующей главе, посвященной механизму образования продольных вихрей.

Согласованность результатов, полученных на нескольких расчетных сетках, между собой и с результатами других авторов позволяет сделать вывод о том, что полученное предельное решение на сепаратрисе является решением уравнений Навье-Стокса и не зависит от выбора численного метода, которым оно было получено, и параметров расчета.

Глава 3. Механизм поддержания продольных вихрей

При исследовании модельного порыва определены основные элементы цикла его самоподдержания. Полученные результаты согласуются с существующими представлениями о механизме поддержания организованных структур в пристенных турбулентных течениях [15–17, 76, 77]. Основным элементом организованных структур являются полосы повышенно и пониженной скорости, наблюдающиеся в буферном слое [78, 79]. Полосы в турбулентном течении перемещаются вдоль стенки и имеют ограниченное время жизни, но они достаточно хорошо различимы на фоне мелкомасштабных турбулентных пульсаций. Образование пульсаций в потоке связывают с неустойчивостью сдвиговых слоев, присутствующих в полосчатом течении. В работе [80] сделан вывод о том, что производство турбулентных пульсаций в пристенных течениях практически полностью обусловлено периодически повторяющимся взрывообразным развитием неустойчивости на полосах пониженной скорости («bursting phenomena»). Считается, что существование полос поддерживают продольные вихри за счет «лифт-ап» эффекта. Детали механизма регенерации пристенных структур и, в первую очередь, механизмы образования продольных вихрей в настоящее время не установлены. Результаты исследования модельного порыва могут расширить существующие представления о механизме регенерации пристенных структур.

В этой главе описан механизм поддержания стационарных продольных вихрей, найденный при изучении модельного порыва. Также в главе описано решение уравнений Навье-Стокса, имеющее вид трехмерной бегущей волны, и механизм поддержания продольных вихрей в этом решении. Решение, имеющее вид бегущей волны, периодично вдоль потока и стационарно в сопутствующей системе отсчета. Оно является предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, найденного в непротяженной расчетной области. Имея более простую форму и поведение во времени, это решение воспроизводит механизм поддержания колебаний, аналогичный механизму поддержания колебаний в модельном порыве. Описание механизма поддержания продольных вихрей на примере решения в виде бегущей волны имеет более простой вид и позволяет более строго продемонстрировать особенности движения, обеспечивающие работу этого механизма.

Основные результаты, представленные в главе, описаны в статьях автора диссертации [81–83].

3.1. Решение в виде бегущей волны

Модельному порыву соответствует предельное решение на сепаратрисе, найденное в протяженной расчетной области с дополнительными условиями симметрии (2.1), (2.2). Пульсационная составляющая движения в этом решении имеет форму бегущей волны длиной около 5 радиусов трубы R. В согласии с [13], предельное решение на сепаратрисе, найденное при тех же условиях, что и модельный порыв, и дополнительном условием $5R$-периодичности вдоль трубы, имеет более простую динамику, а именно, имеет вид бегущей волны, поле скорости которой стационарно в подходящей подвижной системе отсчета. Решение, имеющее вид бегущей волны, повторяет особенности бегущей волны, наблюдаемой в модельном порыве, и воспроизводит общий с модельным порывом механизм поддержания колебаний. Фазовая скорость найденной бегущей волны $c_{\mathrm{tw}} = 0.77$ («tw» — «traveling wave») и близка к фазовой скорости бегущей волны в модельном порыве. Метод поиска решения на сепаратрисе описан в параграфе 2.1.

Как при исследовании модельного порыва, разделим поле скорости бегущей волны $\mathbf{v}_{\mathrm{tw}}$ на среднюю $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}} = \overline{\mathbf{v}_{\mathrm{tw}}}^{x}$ и пульсационную $\mathbf{v}_{\mathrm{n,tw}} = \mathbf{v}_{\mathrm{tw}} - \mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$ составляющие. В модельном порыве осреднение выполняется по времени в сопутствующей системе отсчета, в которой бегущая волна перемещается вниз по потоку. В случае решения, имеющего вид бегущей волны, такое осреднение эквивалентно осреднению вдоль трубы, обозначенному горизонтальной чертой с индексом x. Среднее поле скорости бегущей волны зависят только от r и θ и является удобным объектом для исследования.

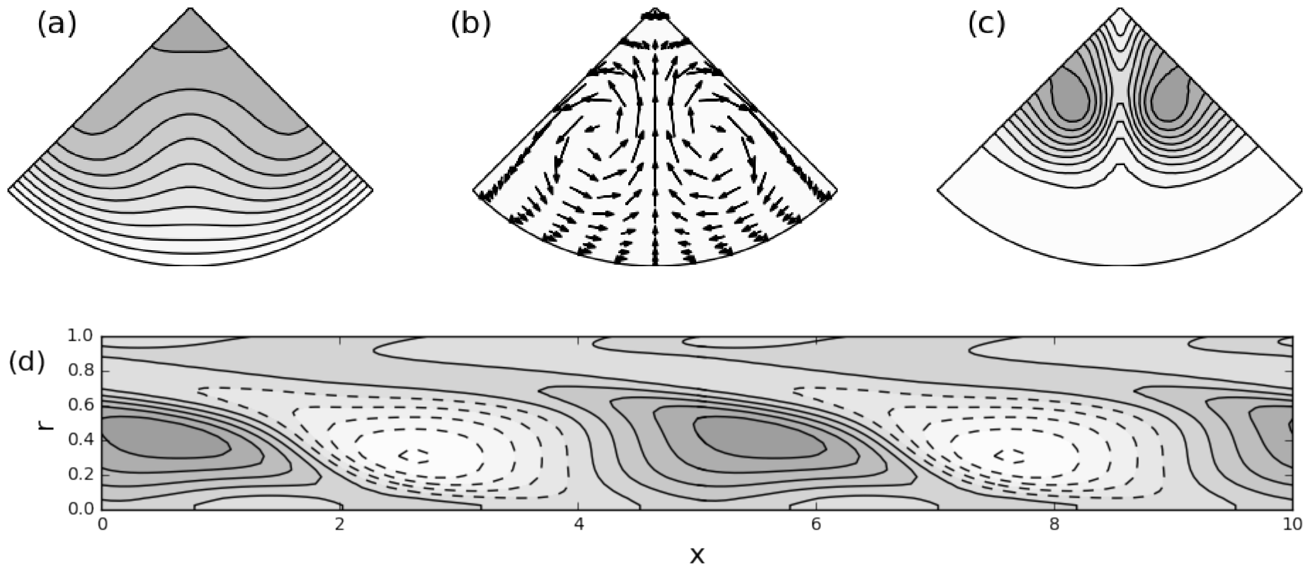

Рис. 3.1. Поле скорости решения, имеющего вид бегущей волны: (a) — изолинии продольной компоненты $\mathbf{V}_{\rm tw}$, (b) — векторное поле поперечной компоненты $\mathbf{V}_{\rm tw}$, (c) — линии уровня амплитуды пульсаций $\mathbf{v}_{\rm n,tw}$, (d) — изолинии продольной компоненты $\mathbf{v}_{\rm n,tw}$ в сечении $\theta = 0$. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

Продольная и поперечная компоненты среднего поля скорости $\mathbf{V}_{\rm tw}$ изображены на Рисунке 3.1(a,b). Распределение средней скорости в бегущей волне близко к распределение средней скорости в модельном порыве в области, где пульсации имеют существенную амплитуду (смотри Рисунок 2.8). На границах расчетной области, где быстрая жидкость проникает ближе к стенке, расположены полосы повышенной скорости; в центре расчетной области, где медленная жидкости находится на большем удалении от стенки — полоса пониженной скорости. Распределение поперечной скорости соответствует наличию стационарных продольных вихрей, поддерживающих существование полос. Пульсационная составляющая движения бегущей волны $\mathbf{v}_{\rm n,tw}$ также повторяет форму пульсаций, существующих в модельном порыве в области, где эти пульсации имеют существенную амплитуду. На Рисунке 3.1(c) представлена амплитуда пульсаций в бегущей волне (амплитуда пульсаций в модельном порыве представлена на Рисунке 2.7). Пульсации сосредоточены между полосами повышенной и пониженной скорости, а также между полосой повышенной скорости и осью трубы. Рисунок 3.1(d) позволяет сравнить мгновенное поле скорости пульсационной составляющей движения бегущей волны $\mathbf{v}_{\rm n,tw}$ и модельного порыва $\mathbf{v}_n$ (смот-

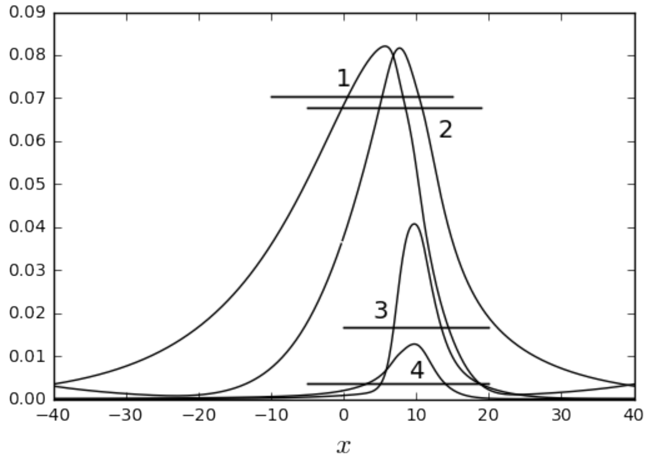

Рис. 3.2. Средние по сечению трубы амплитуды компонент движения бегущей волны (не зависят от x) и модельного порыва (функции x): 1 — $\mathbf{V}_S$; 2 — $\mathbf{V}_{2D}$ (отклонение от течения Пуазейля); 3 — $\mathbf{v}_n$; 4 — $\mathbf{V}_V$.

ри Рисунок 2.9). На рисунках изображена продольная компонента скорости в продольном сечении трубы $\theta = 0$, в котором пульсации имеют существенную амплитуду.

Найденная бегущая волна повторяет качественные особенности модельного порыва, но количественно наблюдаются существенные отличия. Для сравнения на Рисунке 3.2 приведены средние по сечению трубы амплитуды компонент движения бегущей волны и модельного порыва. Для бегущей волны приведенные величины не зависят от продольной координаты. Графики для модельного порыва повторяют графики, приведенные на Рисунке 2.5. По аналогии с модельным порывом, среднее течение $\mathbf{V}_{\rm tw}$ представлено в виде суммы двумерной $\mathbf{V}_{\rm 2D,tw} = \overline{\mathbf{V}_{\rm tw}}^{\theta}$ и трехмерной $\mathbf{V}_{\rm 3D,tw} = \mathbf{V}_{\rm tw} - \mathbf{V}_{\rm 2D,tw}$ составляющих. Трехмерная составляющая движения разложена на продольную $\mathbf{V}_{\rm S,tw}$ и поперечную $\mathbf{V}_{\rm V,tw}$ компоненты, ассоциированные с полосами и продольными вихрями, соответственно. Соотношения между интенсивностью различных компонент движения в бегущей волне сохраняется, но абсолютные значения оказываются значительно ниже. Наибольшее отличие наблюдается в интенсивности среднего поперечного движения $\mathbf{V}_{\rm V}$. В бегущей волне значение амплитуды этого движения почти в четыре раза ниже наибольшего значения, достигаемого в модельном порыве. Столь существенную разницу можно объяснить исходя из представлений о том, что решение на сепаратрисе является равновесным, и интенсивность про-

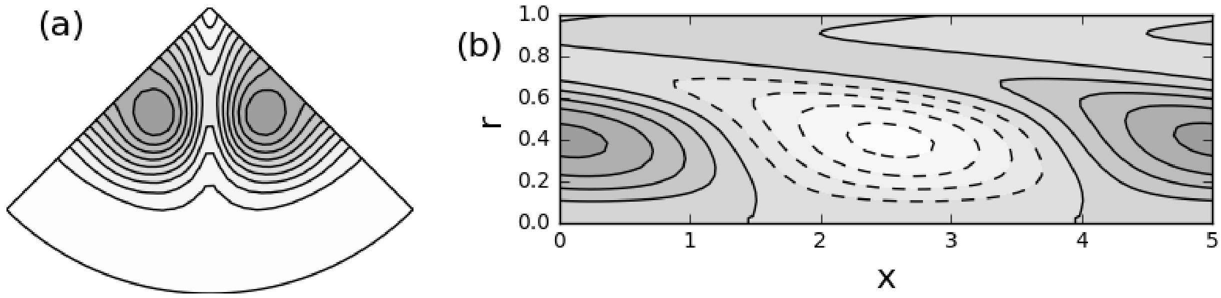

Рис. 3.3. Наиболее быстро растущее собственное решение линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$: (a) — линии уровня амплитуды колебаний; (b) — изолинии продольной компоненты скорости в сечении $\theta = 0$. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

дольных вихрей определяется необходимостью поддержания полос. В бегущей волне продольные вихри и полосы существует во всем течении. В модельном порыве протяженность продольных вихрей оказывается значительно ниже протяженности полос, соответственно для поддержания полос вихри в этом случае должны иметь большую интенсивность.

Также, как в модельном порыве, пульсационная составляющая движения бегущей волны $\mathbf{v}_{\mathrm{n,tw}}$ возникает в результате линейной неустойчивости среднего течения $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$. Наиболее быстрорастущее собственное решение линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$ повторяет форму пульсационной составляющей движения и её фазовую скорость. Соответствующий инкремент нарастания $\lambda = 0.0085R/U$. Для сравнения с пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n,tw}}$, поле скорости которой представлено на Рисунке 3.1(c,d), на Рисунке 3.3(a,b) приведены амплитуда колебаний наиболее быстро растущего решения линейной задачи устойчивости и его мгновенное поле скорости в продольном сечении трубы. Также, как для модельного порыва, для бегущей волны полученные в рамках линеаризованных уравнений пульсации имеют дополнительную симметрию отражения относительно сечения $\theta = \pi/4$, выражаемую уравнением (2.7). Пульсации достигают своего максимума между полосами повышенной и пониженной скорости. В этой области находится точка перегиба, если рассматривать среднее течение как функцию переменной θ. Вероятным механизмом образования пульсаций является механизм типа Кельвина-Гельмгольца.

Получено решение уравнений Навье-Стокса в виде бегущей волны, описаны его основные свойства. Это решение воспроизводит основные элементы цикла поддержания модельного порыва, но имеет более простую форму. Поле скорости бегущей волны стационарно в сопутствующей системе отсчета. Осреднение вдоль трубы позволяет разделить его на среднюю и пульсационную составляющие. Показано, что пульсационная составляющая движения возникает в результате линейной неустойчивости среднего течения. Неустойчивость связана с наличием в среднем течении полос повышенной и пониженной скорости. Существование полос поддерживают стационарные продольные вихри. В следующих двух главах представлен механизм поддержания продольных вихрей, замыкающий цикл поддержания колебаний в этом решении.

3.2. Механизм поддержания продольных вихрей на примере решения в виде бегущей волны

Принято считать, что продольные вихри, ответственные за образование полос в пристенных турбулентных течениях, возникают в результате некоторого нелинейного взаимодействия пульсаций, однако детали такого взаимодействия не были установлены. Прояснить процесс формирования продольных вихрей в рассматриваемых модельных течениях позволяет анализ уравнения, описывающего эволюцию продольной завихренности, полученного применением оператора ротора к уравнению Навье-Стокса (1.1):

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega_x = c_f \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega_x + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) v_x. \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_r, \omega_\theta) = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — вектор завихренности, c_f — скорость перемещения системы отсчета. Уравнение для средней составляющей продольной завихренности получается после осреднения (3.1) вдоль трубы и для решения в виде бегущей волны имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\Omega_x - \nu \nabla^2 \Omega_x = -\overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\omega'_x}^x + \overline{(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) v'_x}^x. \tag{3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_r, \Omega_\theta) = \overline{\boldsymbol{\omega}}^x$ и $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_r, \omega'_\theta) = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}$ — средняя и пульсационная составляющие вектора завихренности. Слагаемые в правой части уравнения (3.2) отвечают за генерацию Ω_x, обусловленную нелинейным взаимодействием пульсаций. Второе и третье слагаемые в левой части уравнения отвечают за конвекцию существующей Ω_x и вязкие эффекты. Так как среднее течение во времени не меняется, источниковые слагаемые в правой части уравнения (3.2) компенсируются конвективным и вязким слагаемыми в левой его части.

В скалярных переменных уравнение (3.2) имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} - \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega_x}{\partial r} \right) =$$
$$- \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^x - \overline{v'_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r}}^x - \overline{\frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta}}^x + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^x + \overline{\omega'_r \frac{\partial v'_x}{\partial r}}^x + \overline{\frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta}}^x . \quad (3.3)$$

Для выявления определяющих механизмов генерации средней продольной завихренности удобнее рассмотреть уравнение эволюции квадрата Ω_x, получающееся домножением всех членов (3.3) на $2\Omega_x$. Положительный или отрицательный знак у полученных таким образом выражений в правой части уравнения показывает соответственно их положительный или отрицательный вклад в изменение Ω_x^2, а, следовательно, и в интенсивность поперечного движения. Распределение Ω_x^2 по сечению трубы представлено на Рисунке 3.4(a). В большей части трубы средняя продольная завихренность близка к нулю. Области концентрации Ω_x находятся между полосами повышенной и пониженной скорости и соответствуют стационарным продольным вихрям (смотри Рисунок 3.1(b)).

Анализ уравнения (3.3) показал, что два слагаемых в правой части этого уравнения вносят определяющий вклад в производство средней продольной завихренности. Эти слагаемые имеют вид:

$$- \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^x + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^x . \quad (3.4)$$

Слагаемые (3.4) описывают нелинейное взаимодействие пульсаций продольной скорости v'_x и пульсаций продольной завихренности ω'_x. Между собой выделенные слагаемые равны в силу периодичности решения вдоль трубы. Слагаемые (3.4), умноженные на $2\Omega_x$, представлены на Рисунке 3.4(b), на Рисунке 3.4(c) приведена сумма других слагаемых в правой части (3.2), также умноженная на $2\Omega_x$. Вклад слагаемых (3.4) определяет форму поля Ω_x^2 и более чем на порядок превосходит суммарный вклад других источниковых членов. Таким образом, нет сомнения в том, что стационарные продольные вихри возникают за счет действия выделенной пары слагаемых.

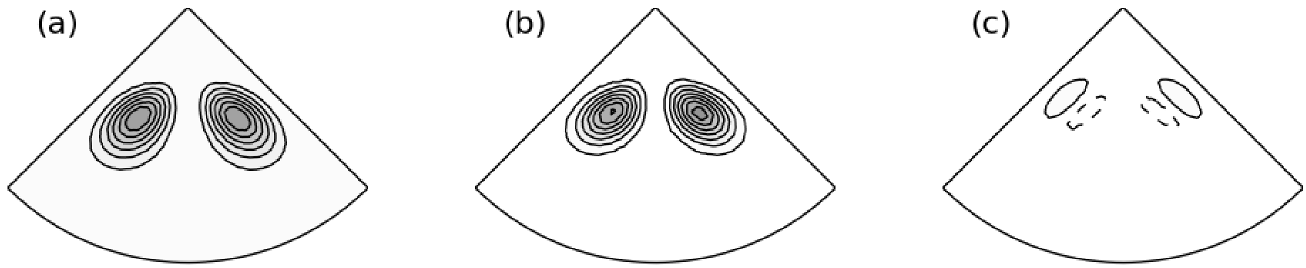

Рис. 3.4. Распределение по сечению трубы Ω_x^2 (a) и вклад в генерацию Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.4) (b) и другим слагаемым в правой части (3.2) (c). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для (b) и (c). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

Отметим, что пульсации, соответствующие старшей собственной функции линейной задачи об устойчивости среднего стационарного течения, также демонстрируют приведенный выше механизм образования стационарных продольных вихрей. Важно, что это наблюдается только в том случае, когда при анализе устойчивости учитываются как продольная, так и поперечная составляющие среднего течения. Принято считать, что поперечное движение, определяя угловую неоднородность в распределении продольной скорости среднего течения, не может существенным образом влиять на свойства его устойчивости вследствие незначительности своей амплитуды. Поэтому при исследовании линейной устойчивости подобных течений, например, полосчатых структур в турбулентных потоках, наличие поперечного движения обычно не принимается во внимание. В нашем случае пренебрежение поперечным движением приводит к тому, что стационарное течение оказывается линейно устойчивым. Что еще более важно, наименее затухающее возмущение не воспроизводит при этом описанный механизм формирования продольных вихрей. Это связанно с тем, что форма пульсаций продольной завихренности ω_x' качественно меняется, хотя пульсации продольной скорости v_x' сохраняют свою форму практически неизменной. Тем самым нарушается согласованность v_x' и ω_x', необходимая для обеспечения нужного вклада выражения (3.4) в производство продольной завихренности.

Анализ старшей собственной функции линейной задачи устойчивости позволяет в наиболее строгом виде продемонстрировать ряд важных свойств най-

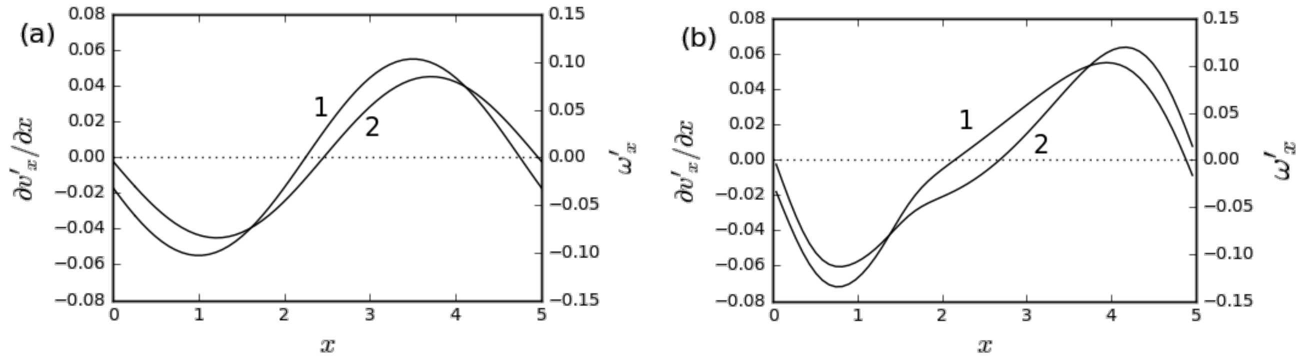

Рис. 3.5. Значение $\partial v'_x/\partial x$ (кривая 1) и ω'_x (кривая 2) на прямой, проходящей через область, занятую положительным вихрем, при $r = 0.5, \theta = \pi/8$: (a) — для пульсаций, полученных в линейном приближении; (b) — для пульсационной составляющей движения бегущей волны.

денного механизма образования продольных вихрей. Так как среднее поле скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$ однородно вдоль трубы, возникающие на нем собственные возмущения меняются вдоль трубы по гармоническом закону. При фиксированных значениях r и θ пусть $v'_x = a\sin(\alpha x + \varphi)$, $\omega'_x = b\sin(\alpha x + \psi)$, тогда слагаемые (3.4) будут иметь следующее значение:

$$-v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} = -\alpha ab\sin(\alpha x + \varphi)\cos(\alpha x + \psi),$$

$$\omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} = \alpha ab\cos(\alpha x + \varphi)\sin(\alpha x + \psi),$$

$$-v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + \omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} = \alpha ab\sin(\psi - \varphi). \tag{3.5}$$

Интересно отметить, что сумма (3.5) не зависит от x, что, в частности, позволяет в последних трех выражениях упустить знак осреднения вдоль трубы. Эффективность производства Ω_x определяется разностью фаз $\psi - \varphi$. В области положительного вихря, при $a, b > 0$, наибольшее значение как первого, так и второго слагаемого достигается при $\psi - \varphi = \pi/2$. В этом случае $\partial\omega'_x/\partial x$ и v'_x положительно коррелированы, в то время как $\partial v'_x/\partial x$ и ω'_x — отрицательно. В области отрицательного вихря ситуация меняется на противоположную. Расчет соответствующих коэффициентов корреляции показывает, что они близки к ± 1 в соответствующих областях. В качестве подтверждения на Рисунке 3.5(a) представлены значения $\partial v'_x/\partial x$ и ω'_x на прямой, проходящей через область, занятую положительным вихрем, $r = 0.5, \theta = \pi/8$. Фазы выделенных компонент движения практически совпадают. Указанное свойство сохраняется для пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n,tw}}$, для которой аналогичные величины изображены на Рисунке 3.5(b). Объяснить наблюдаемую согласованность фаз позволяет механизм образования пульсаций продольной завихренности, представленный в следующем параграфе.

3.3. Механизм поддержания пульсаций продольной завихренности на примере решения в виде бегущей волны

Объяснить согласованность фаз между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности, обеспечивающую поддержание продольных вихрей, позволяет анализ уравнения эволюции ω'_x, полученного вычитанием (3.2) из (3.1):

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} - c_f \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\omega'_x - \nu\nabla^2\omega'_x = -(\mathbf{v}'\cdot\nabla)\Omega_x + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)v'_x + \\ + (\boldsymbol{\omega}'\cdot\nabla)V_x - (\mathbf{v}'\cdot\nabla)\omega'_x + (\boldsymbol{\omega}'\cdot\nabla)v'_x + \overline{(\mathbf{v}'\cdot\nabla)\omega'_x}^{x} - \overline{(\boldsymbol{\omega}'\cdot\nabla)v'_x}^{x}. \quad (3.6)$$

В скалярных переменных уравнение (3.6) имеет вид:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} + (V_x - c_f)\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + V_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} - \nu\nabla^2\omega'_x = \\ - v'_r\frac{\partial \Omega_x}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} + \Omega_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \Omega_r\frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\Omega_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \omega'_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial V_x}{\partial \theta} - \\ - v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - v'_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} + \omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \omega'_r\frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \\ + \overline{v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^{x} + \overline{v'_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r}}^{x} + \overline{\frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta}}^{x} - \overline{\omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x}}^{x} - \overline{\omega'_r\frac{\partial v'_x}{\partial r}}^{x} - \overline{\frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta}}^{x}. \quad (3.7)$$

Работать удобнее с уравнением, описывающим изменение среднего квадрата пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^{x}$, получаемым умножением (3.7) на $2\omega'_x$ с последующим осреднением вдоль трубы. Слагаемые в этом уравнении не зависят от времени и продольной координаты. Сумма слагаемых в правой части уравнения компенсируется вязкими и конвективными членами в левой части. Как и в предыдущем случае, в правой части уравнения удается выделить слагаемые, ответственные за возникновение пульсаций ω'_x.

Распределение $\overline{\omega'_x\omega'_x}^{x}$ по сечению трубы изображено на Рисунке 3.6(a). Основные пульсации ω'_x наблюдаются в центре расчетной области около оси тру-

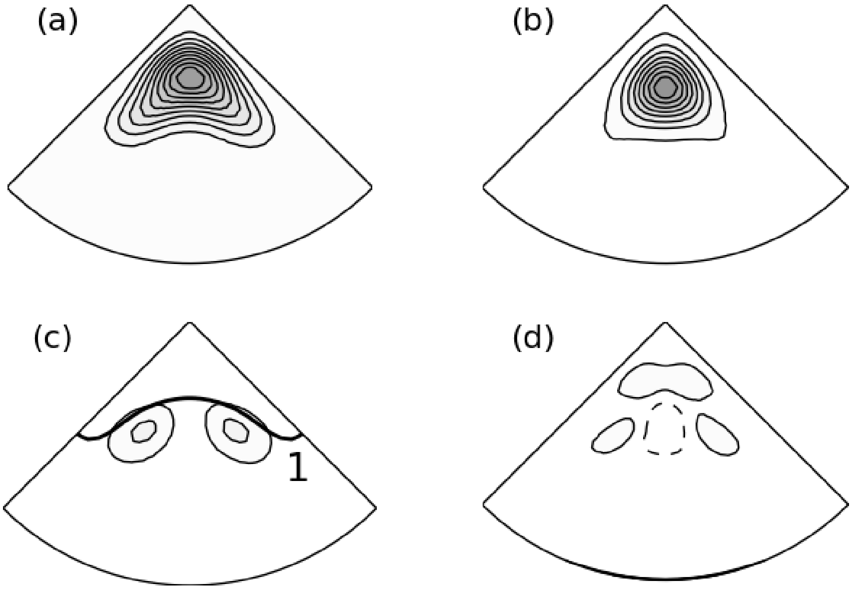

Рис. 3.6. Распределение по сечению трубы среднего квадрата пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^x$ (a), вклад в производство $\overline{\omega'_x\omega'_x}^x$ со стороны слагаемых, соответствующих (3.8) (b), (3.9) (c) и сумме остальных слагаемых в правой части (3.7) (d). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для (b)–(d). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные, кривая 1 — критический слой ($V_x = c_{\mathrm{tw}}$).

бы. На месте расположения продольных вихрей также присутствуют пульсации ω'_x, но меньшей интенсивности. В остальной части трубы амплитуда пульсаций близка к нулю. Обнаружено, что за генерацию пульсаций ω'_x в центральной части трубы и на месте продольных вихрей отвечают два разных механизма. Первый дает пульсации большей амплитуды, однако, за возникновение стационарных продольных вихрей ответственны пульсации, производимые вторым механизмом, так как именно они оказываются согласованными с пульсациями v'_x нужным образом.

Первый механизм формирования ω'_x связан с наличием нормальных к стенке вихрей в пульсационной составляющей движения. Цепочка нормальных к стенке вихрей, чередующихся по знаку, двигается вниз по полосе пониженной скорости. Этим вихрям соответствуют области повышенной амплитуды пульсаций радиальной завихренности ω'_r. На Рисунке 3.7 приведено значение ω'_r в сечении $r = 0.5$, нормальном к выделенной компоненте завихренности. Приведенные на 3.7(a) значения посчитаны по пульсациям, полученным в рамках линеаризованных уравнений. Аналогичные значения для пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{n,tw}$ представлены на Рисунке 3.7(b). Амплитуда ω'_x оказывается на порядок ниже амплитуды ω'_r, амплитуда ω'_θ в центральной части трубы равна нулю в силу симметрии. Таким образом, в центральной части трубы поле завихренности представлено в первую очередь радиальной компонентой и соответствует нормальным к стенке вихрям.

Пульсации продольной завихренности ω'_x возникают вследствие поворота нормальных к стенке вихрей, происходящего в присутствии градиента продольной скорости $\partial V_x/\partial r$ между полосой замедления и осью трубы. Кроме того, наличие радиального градиента $\partial V_x/\partial r$ связано с наличием угловой завихренности $\Omega_\theta = \partial V_r/\partial x - \partial V_x/\partial r$. Радиальная пульсационная завихренность $\omega'_r = \partial v'_x/r\partial\theta - \partial v'_\theta/\partial x$ за счет первого из слагаемых поворачивает стационарные угловые вихри так, что те также приобретают пульсационную продольную составляющую. В уравнении (3.6) за описанный механизм отвечают слагаемые:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = \omega'_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\Omega_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + ... \tag{3.8}$$

Несмотря на то, что выделенные в (3.8) слагаемые имеют противоположные знаки и в значительной степени компенсируют друг друга при сложении, их вклад в производство ω'_x значителен (смотри Рисунок 3.6(b)). Они определяют форму пульсаций ω'_x в области между полосой замедления и осью трубы, где пульсации ω'_x достигают наибольшего значения. Эти пульсации, однако, практически не участвуют в образовании стационарной составляющей продольной завихренности. Это объясняется тем, что колебания ω'_x, рождающиеся в результате описанного механизма, близки по фазе к колебаниям v'_x, так что каждое из слагаемых в выражении (3.4) при осреднении дает близкое к нулю значение.

Второй механизм образования пульсаций продольной завихренности ω'_x связан с перераспределением уже существующей стационарной продольной завихренности Ω_x за счет пульсационной составляющей продольной скорости v'_x (эффект сжатия/растяжения вихревых трубок). В уравнении (3.6) за описываемый механизм отвечает слагаемое

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = \Omega_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + ... \tag{3.9}$$

Выделенное в (3.9) слагаемое стремится произвести пульсации ω'_x, пропорциональные $\partial v'_x/\partial x$, причем коэффициентом пропорциональности выступает сред-

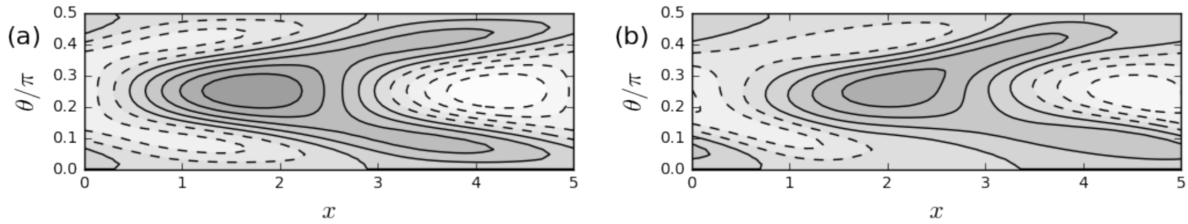

Рис. 3.7. Линии уровня нормальной к стенке компоненты завихренности ω_r' в сечении $r = 0.5$ для пульсаций, полученных в рамках линейного приближения (a) и для пульсационной составляющей движения бегущей волны (b). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

няя продольная завихренность. Соответственно, механизм включается в областях концентрации Ω_x. В области расположения положительного вихря производимые пульсации ω_x' положительно пропорциональны пульсациям $\partial v_x'/\partial x$, а в области расположения отрицательного вихря — отрицательно пропорциональны. Таким образом обеспечивается максимально возможная эффективность производства средней продольной завихренности нужного знака посредством второго из слагаемых (3.4). Пульсации $-v_x'$ и $\partial\omega_x'/\partial x$ отказываются также согласованы нужным образом, и первое слагаемое (3.4) оказывается равно второму.

На Рисунке 3.6(c) приведен вклад выделенного в (3.9) слагаемого в производство $\overline{\omega_x'\omega_x'}^x$. Это слагаемое определяет форму пульсаций в области существования продольных вихрей — между полосами повышенной и пониженной скорости. Суммарный вклад других слагаемых в правой части (3.6), не попавших на Рисунки 3.6(b,c), изображен на Рисунке 3.6(d). Эти слагаемые также поддерживают существование колебаний в области расположения продольных вихрей, но их влияние оказывается значительно ниже влияния выделенного в (3.9) слагаемого. В точке, где Ω_x достигает максимума, приведенная на Рисунке (d) величина оказывается в три раза ниже приведенной на Рисунке (c). Стоит также учитывать, что пульсации, генерируемые слагаемыми, которым соответствует Рисунок (d), не обязательно согласованы по фазе с пульсациями продольной скорости нужным для поддержания продольных вихрей образом, так что роль слагаемых (d) в поддержании продольных вихрей может оказаться еще ниже.

Отметим, что выполнено необходимое условие для образования пульсаций ω_x' слагаемым (3.9). Продольные вихри образуются вблизи критического слоя, в котором средняя скорость жидкости совпадает с фазовой скоростью бегущей волны $c_{\mathrm{tw}} = 0.77$. Критическому слою соответствует кривая 1 на Рисунке 3.6(c). По этой причине в системе отчета бегущей волны в области образования продольных вихрей все конвективные слагаемые в правой части (3.7) близки к нулю. В отсутствии конвекции производимые слагаемым (3.9) пульсации ω_x' сохраняют согласованность фаз с пульсациями $\partial v_x'/\partial x$, что необходимо для дальнейшего роста амплитуды пульсаций ω_x' и формирования стационарных продольных вихрей.

Таким образом, продольные вихри образуются в области возбуждения пульсаций, между полосами повышенной и пониженной скорости, так как именно в этой области средняя скорость жидкости совпадает с фазовой скоростью пульсаций и пульсации имеют наибольшую амплитуду. Пульсации продольной скорости сжимая и растягивая существующие в потоке вихревые трубки формируют пульсации продольной завихренности, согласованные с пульсациями продольной скорости таким образом, что их нелинейное взаимодействие поддерживает продольны вихри. Образуясь между соседними полосами повышенной и пониженной скорости, продольные вихри оказываются расположены наиболее удачным образом для поддержания существования этих полос.

Описанный механизм генерации пульсаций продольной завихренности объясняет необходимость учета поперечного движения при исследовании устойчивости стационарного течения. Пренебрежение связанной с поперечным движением Ω_x делает невозможным генерацию ω_x' в форме, необходимой для сохранения поперечного движения, а следовательно и всего процесса самоподдержания пульсаций.

3.4. Механизм поддержания продольных вихрей и пульсаций продольной завихренности в модельном порыве

В работе выделен механизм поддержания продольных вихрей в модельном порыве. Это механизм аналогичен механизму, поддерживающему продольные вихри в решении, имеющем вид бегущей волны. При изучении решения, имеющего вид бегущей волны, разделение на среднюю и пульсационную составляющие движения выполняется осреднением вдоль трубы. При изучении модельного порыва осреднение выполняется по времени в сопутствующей системе отсчета. Пусть $\mathbf{V}_{\text{mp}} = (V_x, V_r, V_\theta) = \overline{\mathbf{v}_{\text{mp}}}^t$ и $\mathbf{v}'_{\text{mp}} = (v'_x, v'_r, v'_\theta) = (\mathbf{v}_{\text{mp}} - \mathbf{V}_{\text{mp}})$ — средняя и пульсационная составляющие поля скорости модельного порыва $\mathbf{v}_{\text{mp}} = (v_x, v_r, v_\theta)$, а $\boldsymbol{\Omega}_{\text{mp}} = (\Omega_x, \Omega_r, \Omega_\theta) = \operatorname{rot} \mathbf{V}_{\text{mp}}$ и $\boldsymbol{\omega}'_{\text{mp}} = (\omega'_x, \omega'_r, \omega'_\theta) = \operatorname{rot} \mathbf{v}'_{\text{mp}}$ — средняя и пульсационная составляющие поля завихренности $\boldsymbol{\omega}_{\text{mp}} = (\omega_x, \omega_r, \omega_\theta) = \operatorname{rot} \mathbf{v}_{\text{mp}}$ («mp» — «model puff»).

Так же, как в бегущей волне, в модельном порыве существуют стационарные продольные вихри, поддерживающие существование полос, но в этом случае они имеют ограниченную протяженность (смотри Рисунок 2.8). Установить механизм образования стационарных продольных вихрей в модельном порыве позволяет анализ уравнения баланса стационарной продольной завихренности, полученного осреднением по времени в системе отсчета порыва уравнения эволюции продольной завихренности (3.1):

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} - c_{\text{mp}} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\Omega_x - \nu \nabla^2 \Omega_x = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) V_x - \overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\omega'_x}^t + \overline{(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) v'_x}^t. \quad (3.10)$$

Здесь c_{mp} — скорость перемещения модельного порыва. В правой части (3.10) собраны слагаемые–источники Ω_x. Первое из них описывает образование Ω_x за счет сжатия, растяжения и поворота существующих в среднем течении вихрей. Второе и третье описывают нелинейное взаимодействие пульсаций. Так как Ω_x во времени не меняется, производство Ω_x слагаемыми из правой части уравнения компенсируется конвективным и вязким слагаемыми в левой его части.

В скалярных переменных уравнение (3.10) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + (V_x - c_{\text{mp}}) \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} - \nu \nabla^2 \Omega_x = \Omega_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \Omega_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \\ + \frac{\Omega_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} - \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^t - \overline{v'_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r}}^t - \overline{\frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta}}^t + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^t + \overline{\omega'_r \frac{\partial v'_x}{\partial r}}^t + \overline{\frac{\omega'_\theta}{r} \frac{\partial v'_x}{\partial \theta}}^t. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Работать удобнее с уравнением баланса квадрата стационарной продольной завихренности Ω_x^2, полученным скалярным умножением (3.10) на $2\Omega_x$. Положительное или отрицательное значение источниковых членов в этом уравнении говорит о положительном или отрицательном их влиянии на образование Ω_x.

Анализ уравнения (3.10) позволил установить механизм поддержания стационарных продольных вихрей, аналогичный выделенному при изучении бегу-

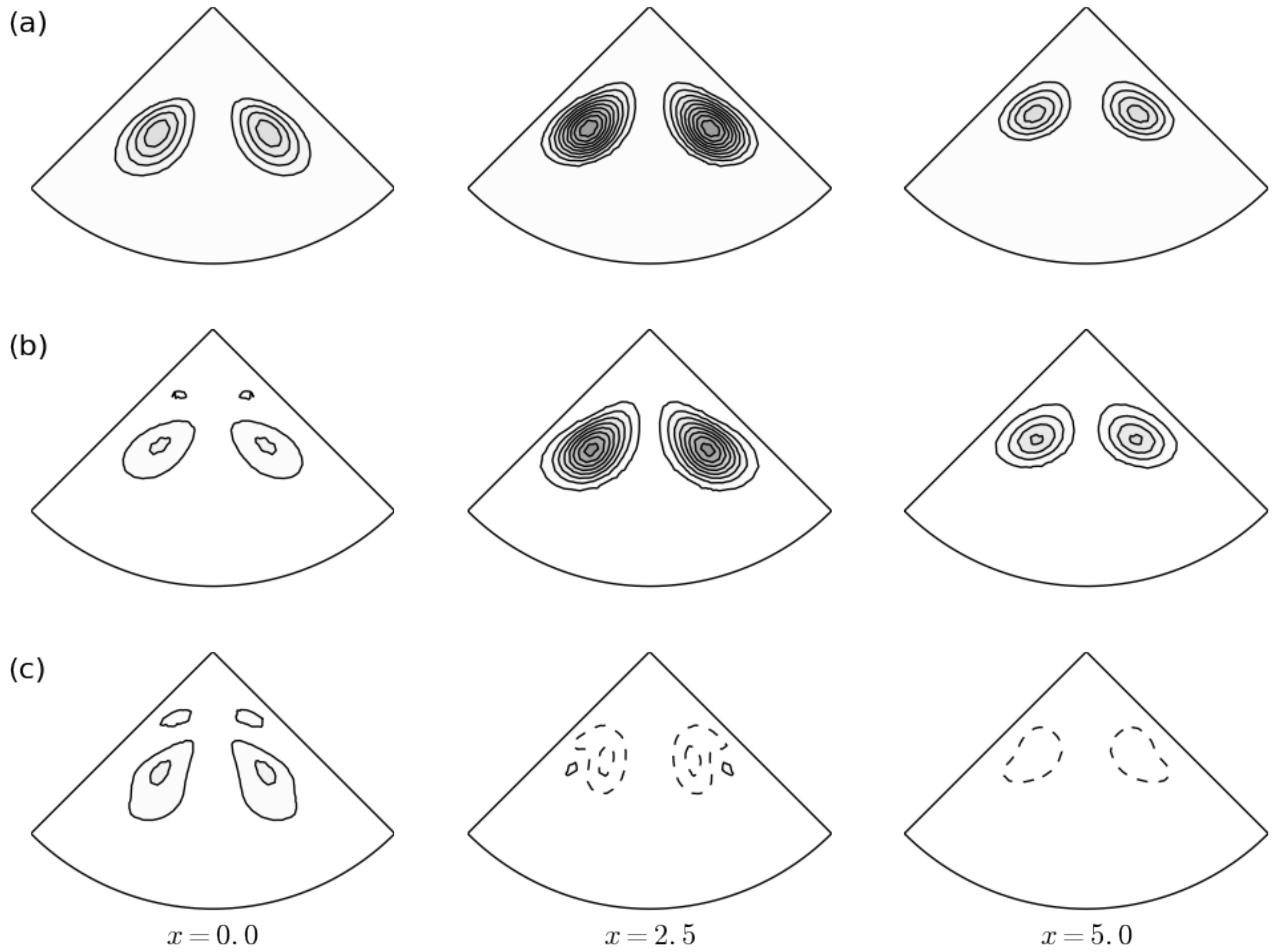

Рис. 3.8. В нескольких сечения трубы приведены значения Ω_x^2 (ряд (a)) и вклада в образование Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.12) (ряд (b)) и другим слагаемым в правой части уравнения (3.10) (ряд (c)). Представлено три сечения из области существования продольных вихрей, $x = 0, 2.5, 5$. Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для каждого ряда и между рядами (b) и (c). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

щей волны. За поддержание стационарных продольных вихрей отвечают слагаемые

$$-\overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^t + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^t . \tag{3.12}$$

На Рисунке 3.8 в ряду (a) приведено значение Ω_x^2 в трех сечениях трубы из области, где продольные вихри имеют существенную амплитуду. Распределение стационарной продольной завихренности соответствует наличию стационарных продольных вихрей. На Рисунке 3.8 в рядах (b) и (c) в тех же сечения приведены значение слагаемых (3.12), умноженных на $2\Omega_x$, и значение других слагаемых в правой части уравнения (3.10), также умноженных на $2\Omega_x$. Вклад слагаемых (3.12) в генерацию Ω_x^2 значительно превосходит вклад других источниковых членов и определяют форму поля стационарной продольной завихренности.

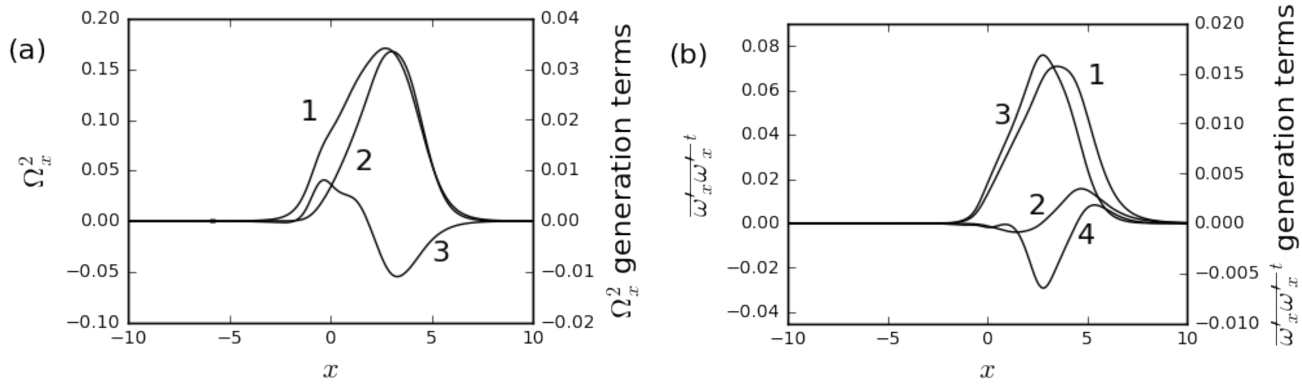

Рис. 3.9. На прямой, проходящей через область, занятую продольным вихрем, при $r = 0.5, \theta = \pi/8$, приведены: (a) — квадрат стационарной продольной завихренности (кривая 1), вклад в его производство со стороны (3.12) (кривая 2) и других слагаемых в правой части уравнения (3.10) (кривая 3); (b) — средний квадрат пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega_x'\omega_x'}^t$ (кривая 1) и вклад в его производство со стороны (3.15) (кривая 2), (3.16) (кривая 3) и других слагаемых в правой части уравнения (3.13) (кривая 4).

На Рисунке 3.9(a) приведено значение Ω_x^2 (кривая 1) и ответственных за его генерацию слагаемых на прямой, проходящей через область, занятую продольным вихрем, при $r = 0.5, \theta = \pi/8$. Из этих графиков также видно, что хотя существует небольшой участок вблизи $x = 0$, на котором слагаемые (3.12) (кривая 2) уступают другим источниковым слагаемым (кривая 3), именно эти слагаемые дают подавляющий вклад в образование стационарной продольной завихренности. Таким образом, нет сомнения, что за генерацию стационарных продольных вихрей ответственны слагаемые (3.12).

В модельном порыве, слагаемые (3.12) имеют близкие значения (смотри Рисунок 3.10), так как поле скорости модельного порыва в области существования продольных вихрей близко к полю скорости бегущей волны. В модельном порыве сохраняется отмеченная в предыдущем параграфе согласованность фаз между пульсациями продольной скорости v_x' и пульсациями продольной завихренности ω_x', однако форма пульсационной составляющей движения оказывается несколько более сложной. Согласованность фаз объясняется механизмом образования пульсаций продольной завихренности ω'_x, выделенным в модельном порыве, который также аналогичен механизму, найденному в бегущей волне.

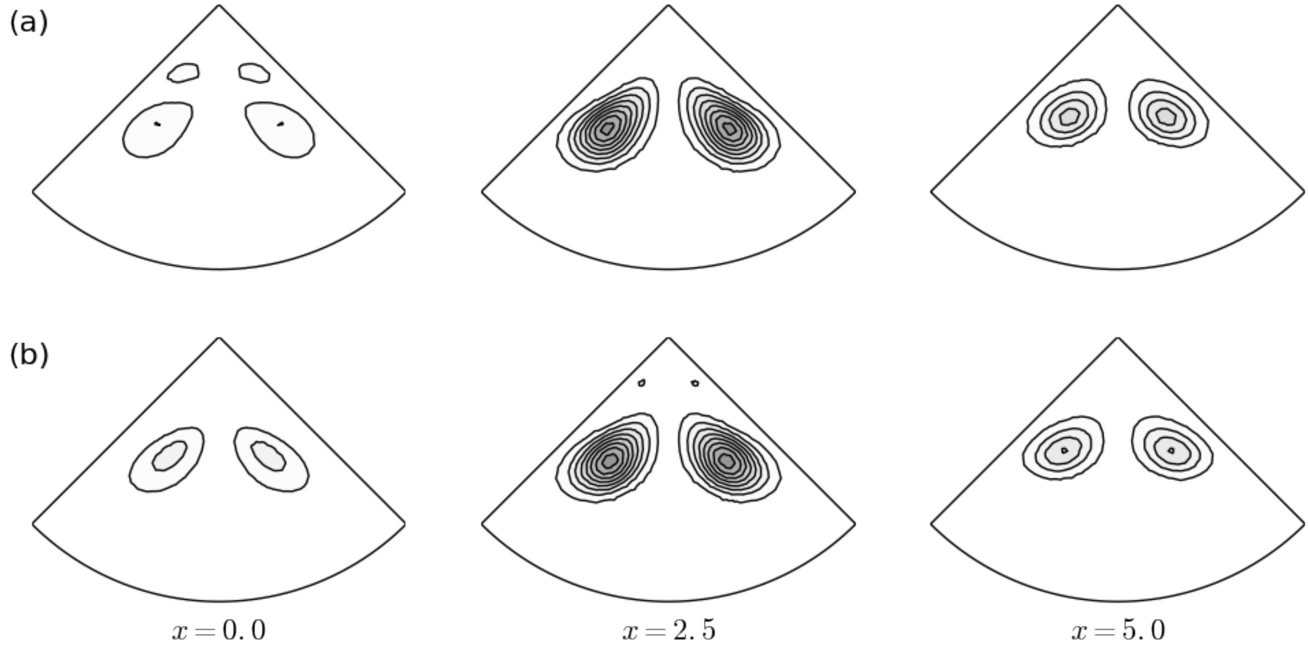

Рис. 3.10. Значение первого (ряд (a)) и второго (ряд (b)) слагаемых (3.12) в сечениях трубы $x = 0, 2.5, 5$.

Выделить механизм образования пульсаций продольной завихренности ω'_x позволяет анализ уравнения, полученного вычитанием (3.10) из (3.1), описывающего эволюцию ω'_x:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} - c_{\mathrm{tw}} \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega'_x - \nu \nabla^2 \omega'_x = -(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\Omega_x + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) v'_x + \\ + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) V_x - (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\omega'_x + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) v'_x + \overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\omega'_x}^t - \overline{(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) v'_x}^t. \quad (3.13)$$

Это уравнение записано в системе отсчета, перемещающейся со скоростью c_{tw} бегущей волны, соответствующей пульсационной составляющей движения (осреднение по времени выполняется в системе отсчета порыва). Из анализа пульсационной составляющей движения значение c_{tw} выбрано равным $0.77U$. В скалярных переменных уравнение (3.13) имеет вид:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} + (V_x - c_{\text{tw}})\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + V_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} - \nu\nabla^2\omega'_x = -v'_x\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - v'_r\frac{\partial \Omega_x}{\partial r} -$$
$$- \frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} + \Omega_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \Omega_r\frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\Omega_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \omega'_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + \omega'_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial V_x}{\partial \theta} -$$
$$- v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - v'_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} + \omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \omega'_r\frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} +$$
$$+ \overline{v'_x\frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^t + \overline{v'_r\frac{\partial \omega'_x}{\partial r}}^t + \overline{\frac{v'_\theta}{r}\frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta}}^t - \overline{\omega'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x}}^t - \overline{\omega'_r\frac{\partial v'_x}{\partial r}}^t - \overline{\frac{\omega'_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta}}^t . \quad (3.14)$$

Работать удобнее с уравнением баланса пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$, полученным скалярным умножением (3.14) на $2\omega'_x$ с последующим осреднением по времени. Анализ этого уравнения позволил выделить две группы слагаемых, ответственных за образование пульсаций продольной завихренности, имеющих вид:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = \omega'_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\Omega_\theta}{r}\frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \quad (3.15)$$

$$+ \Omega_x\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \ldots \quad (3.16)$$

На Рисунке 3.11 в нескольких сечениях трубы приведены амплитуда пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$ (ряд (a)) и вклада в её поддержание со стороны слагаемых (3.15) (ряд (b)), слагаемых (3.16) (ряд (c)) и слагаемых в правой части уравнения (3.14), не вошедших в (3.15) и (3.16), (ряд (d)). (Для того, чтобы вычислить вклад слагаемых уравнения (3.14) в генерацию $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$, их значение умножено на $2\omega'_x$ с последующим осреднением по времени.) Слагаемые (3.15) отвечают за поворот нормальных к стенке вихрей, присутствующих в пульсационной составляющей движения. Приобретая продольную составляющую, эти вихри обеспечивают формирование значительных по амплитуде пульсаций ω'_x в области между полосой замедления и осью трубы. Однако на месте продольных вихрей эти слагаемые на ω'_x существенного влияния не оказывают. Кроме того, пульсации ω'_x, создаваемые слагаемыми (3.15), согласованны с пульсациями v'_x таким образом, что не могут участвовать в поддержании Ω_x. За образование пульсаций ω'_x на месте продольных вихрей ответственно слагаемое (3.16). Это слагаемое создает пульсации ω'_x, согласованные с пульсациями v'_x так, что их нелинейное взаимодействие эффективно поддерживает существование продольных вихрей. Другие слагаемые в правой части уравнения (3.14) на

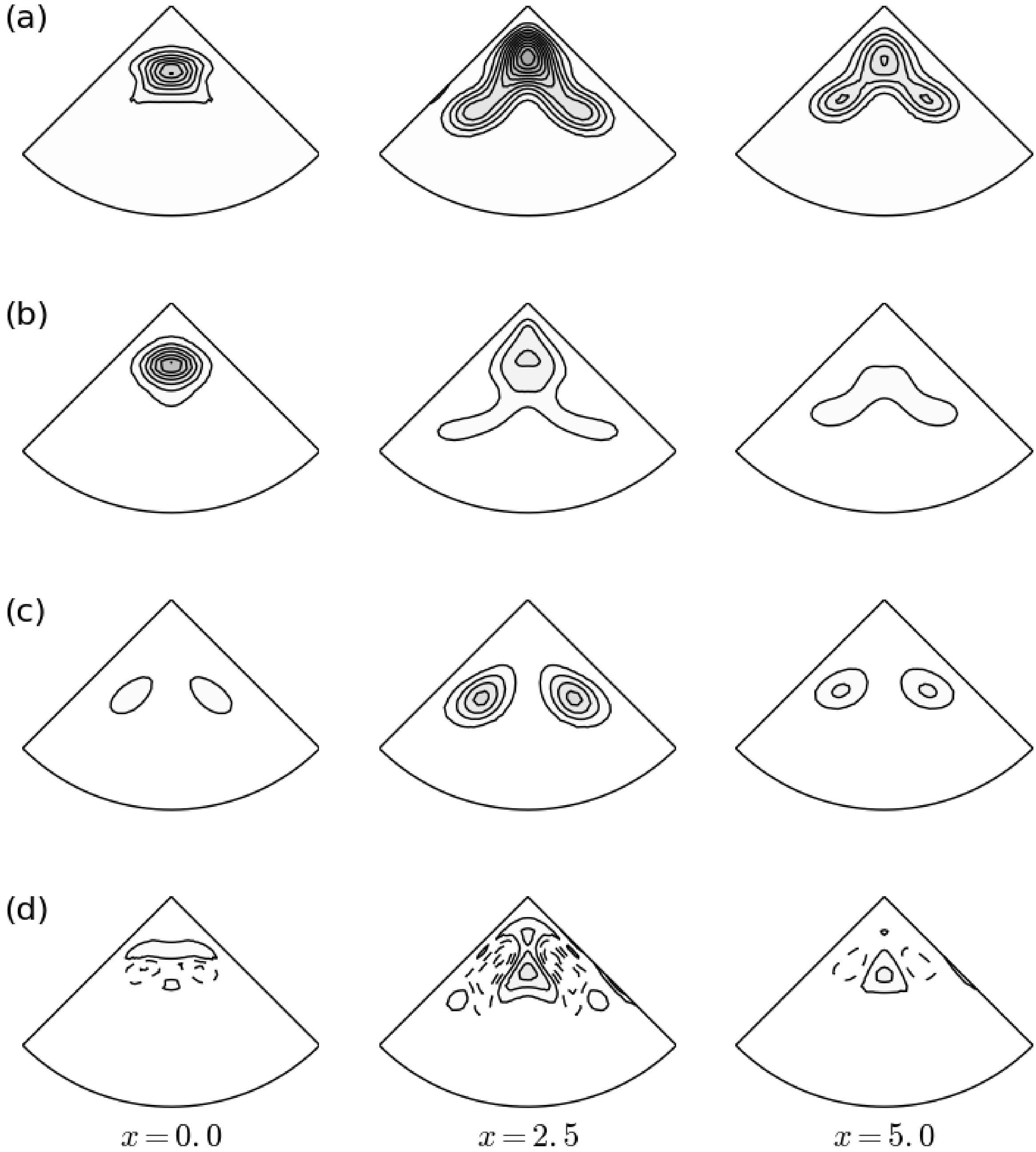

Рис. 3.11. В нескольких сечения трубы приведена интенсивность пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$ (ряд a) и вклад в генерацию $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$ со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.15) (ряд b), слагаемому (3.16) (ряд c) и другим слагаемым в правой части (3.13) (ряд d). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим внутри каждого ряда и между рядами (b)–(d). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

месте продольных вихрей существенного влияния на ω'_x не оказывают.

На Рисунке 3.9 приведена интенсивность пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^t$ (кривая 1) и вклад в её поддержание со стороны различных слагаемых уравнения (3.14) на прямой, проходящей через область, занятую продольным вихрем, $r = 0.5, \theta = \pi/8$. Как только что обсуждалось, подавляющий вклад в генерацию $\overline{\omega'_x \omega'_x}^t$ дает слагаемое (3.16) (кривая 3). Это слагаемое определяет интенсивность пульсаций ω'_x в области, занятой продольными вихрями. Другие слагаемые в правой части уравнения (кривые 2, 4) имеют значительно меньшее влияние. Таким образом может быть сделан вывод о том, что за образование пульсаций ω'_x, участвующих в поддержании стационарных продольных вихрей, ответственно слагаемое (3.16). Это слагаемое отвечает за сжатие и растяжение существующих в стационарном течении вихревых нитей и обеспечивает необходимую для поддержания стационарных продольных вихрей согласованность фаз между ω'_x и v'_x (смотри детали в предыдущем параграфе).

Выделен механизм поддержания стационарных продольных вихрей в модельном порыве. Выделенный механизм аналогичен механизму поддержания продольных вихрей в решении, имеющем вид бегущей волны. Сжимая и растягивая существующие вихревые нити, соответствующие стационарным продольным вихрям, пульсации продольной скорости формируют пульсации продольной завихренности, согласованные с пульсациями продольной скорости таким образом, что их нелинейное взаимодействие поддерживает существование продольных вихрей.

3.5. Выводы по главе

В предыдущей главе представлены результаты численного исследования модельного порыва, в котором было составлено представление о его внутренней структуре и механизме поддержания колебаний. В подвижной системе отсчета в модельном порыве выделяются стационарные полосы повышенной и пониженной скорости, вытянутые вдоль стенки трубы. Полосы образуются под действием стационарных продольных вихрей, которые формируются в результате нелинейного взаимодействия нестационарных пульсаций, возникающих из-за неустойчивости полосчатого движения. В настоящей главе представлены определяющие элементы нелинейного механизма образования продольных вихрей. Таким образом, определены все элементы цикла самоподдержания колебаний внутри модельного порыва.

Установлено, что пульсации продольной скорости формируют пульсации продольной завихренности сжимая и растягивая существующие вихревые нити, соответствующие стационарным продольным вихрям. Возникающие пульсации продольной скорости и пульсации продольной завихренности оказываются согласованными таким образом, что их нелинейное взаимодействие поддерживает продольные вихри. Таким образом продольные вихри формируются на месте возникновения пульсаций, между полосами повышенной и пониженной скорости, оказываясь расположенными наиболее удачным образом для поддержания существования этих полос.

Пульсации возникают в результате линейной неустойчивости полосчатого течения и могут быть воспроизведены в рамках линеаризованных уравнений. Решения линейной задачи устойчивости также воспроизводят описанный выше механизм поддержания продольных вихрей, но только в том случае, когда в исследуемом на устойчивость течении учтено не только продольное, но и поперечное движение, соответствующее наличию продольных вихрей. Несмотря на небольшую амплитуду поперечного движения, его учет необходим для адекватного описания пульсаций продольной завихренности.

Также в главе приведены результаты исследования решения в виде бегущей волны. Это решение является предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, найденного в непротяженной расчетной области. Поле скорости этого решения напоминает поле скорости модельного порыва в области существенной амплитуды пульсаций. Оба решения воспроизводит общий механизм самоподдержания. Анализ решения в виде бегущей волны позволил в более простой и в тоже время строгой форме продемонстрировать особенности движения, обеспечивающие работу выделенного механизма поддержания продольных вихрей.

Указания на существенную роль слагаемых (3.12) в процессе поддержания продольных вихрей можно найти в работах [15,17]. Работ, в которых был бы описан механизм формирования пульсаций продольной завихренности, объясняющий существенное отличие слагаемого (3.12) от нуля, нам не известно. Выделенный механизм образования продольных вихрей имеет характер неустойчивости. Скорость роста пульсаций продольной завихренности пропорциональна интенсивности продольных вихрей, в то время, как скорость роста интенсивности продольных вихрей пропорциональна амплитуде пульсаций продольной завихренности. Представления о том, что продольные вихри могут возникать в результате неустойчивости неоднородного вдоль трубы поля скорости, развиваются в асимптотических моделях в [84, 85]. Неустойчивость такого рода называют неустойчивость Крейка–Лейбовича второго типа.

Глава 4. Универсальность полученных результатов

Анализ модельного порыва позволил выделить основные элементы механизма поддержания колебаний в этом решении. В настоящей главе поднимается вопрос об универсальности полученных результатов. В главе приведены результаты исследования механизма поддержания колебаний в нескольких инвариантных решениях уравнений Навье-Стокса, отличных от модельного порыва. Инвариантными мы называем решения, которые не меняются при переходе к новой системе отчета, отличающейся от исходной сдвигом во времени или в пространстве. В настоящее время известно достаточно большое число различных инвариантных решений уравнений Навье-Стокса [14]. Наиболее простым примером трехмерных инварианты решений являются бегущие волны. Их поле скорости периодично вдоль потока и стационарно в подходящей подвижной системе отсчета. Более сложным примером являются условно периодические решения, то есть решения, являющиеся периодическими по времени в подходящей подвижной системе отсчета. Частным случаем условно периодического решения является модельный порыв. Пользуясь простотой временного поведения таких решений, мы можем выполнить их детальное исследование.

В главе дано описание метода Ньютона-Крылова, позволяющего находить условно периодические решения уравнений Навье-Стокса. Как частный случай условно периодических решений, метод позволяет находить решения, имеющие вид бегущей волны. Также в главе дано описание метода продолжения по параметру, опирающегося на метод Ньютона-Крылова. Опираясь на модельный порыв методом продолжения по параметру в работе найдено семейство условно периодических решений уравнений Навье-Стокса с пространственно локализованной структурой. В соответствии с [13], среди найденных таким образом решений существуют решения, по ряду качественных характеристик оказывающиеся ближе к турбулентному порыву, чем модельный порыв. Также в работе было найдено несколько семейств решений уравнений Навье-Стокса, имеющих вид бегущей волны, описывающих движение жидкости в круглой трубе и в плоском канале. Описаны основные характеристик найденных решений и механизм поддержания колебаний в них. Во всех исследованных решениях основные элементы механизма поддержания колебаний оказываются такими же, как и в модельном порыве, что в некоторой степени говорит об универсальности этого механизма. Основные результаты, приведенные в главе, опубликованы в работах автора диссертации [82, 83, 86–90].

4.1. Метод Ньютона-Крылова для поиска условно периодических решений уравнений Навье-Стокса

Условно периодическим мы называем решение уравнений Навье-Стокса, являющееся периодическим по времени в подходящей подвижной системе отсчета. В работе реализован метод Ньютона-Крылова [23, 24, 91], позволяющий численно находить мгновенные поля скорости, соответствующие условно периодическим решениям. Мгновенное поле скорости $\mathbf{v}_\mathrm{p}(x, r, \theta)$ соответствует условно периодическому решению, если интегрирование уравнений движения с $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ в качестве начальных данных в течении времени T_p в системе отсчета, перемещающейся со скоростью c_p, дает поле скорости, совпадающее с $\mathbf{v}_\mathrm{p}$:

$$\varphi(\mathbf{v}_\mathrm{p}, T_\mathrm{p}, c_\mathrm{p}, \mathrm{Re}) = \mathbf{v}_\mathrm{p}. \tag{4.1}$$

В этом случае T_p — временной период решения, c_p — скорость перемещения решения вдоль трубы. Функция $\varphi(\mathbf{v}, t, c, \mathrm{Re})$ имеет значение поля скорости, полученного интегрированием уравнений движения с начальным полем скорости $\mathbf{v}$ в течении времени t в системе отсчета, перемещающейся со скоростью c, при числе Рейнольдса Re. Заметим, что при условии несжимаемости давление в каждый момент времени с точностью до аддитивной постоянной определяется по мгновенному полю скорости, что позволяет исключить давление из (4.1) и других уравнений.

Если $\mathbf{v}_1(x, r, \theta)$ — решение (4.1), то $\mathbf{v}_2(x, r, \theta) = \mathbf{v}_1(x + \Delta x, r, \theta)$ и $\mathbf{v}_3 = \varphi(\mathbf{v}_1, \Delta t, c, \mathrm{Re})$ при произвольных Δx и Δt также являются решениями (4.1), соответствующими одному условно периодическому решению уравнений Навье-Стокса. Для того, чтобы с каждым условно периодическим решением связать только одно поле скорости $\mathbf{v}_\mathrm{p}$, на решения уравнения (4.1) накладываются два дополнительных условия, фиксирующих положение решения во времени и в пространстве:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big|\big|\varphi(\mathbf{v}_\mathrm{p}, t, c, \mathrm{Re}) - \mathbf{v}_\mathrm{Pois}\big|\big|_{3\mathrm{D}}\Big|_{t=0} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big|\big|\mathbf{v}_\mathrm{p} - \mathbf{v}_\mathrm{Pois}\big|\big|_{2\mathrm{D}}\Big|_{x=0} = 0. \tag{4.3}$$

В условии (4.2) вычисляется среднее по объему трубы отклонение решения от течения Пуазейля $\mathbf{v}_\mathrm{Pois}$ в два близких к нулю момента времени и требуется, чтобы их разность была равна нулю. В (4.3) требуется равенство нулю разности средних отклонений решения от течения Пуазейля в двух близких к $x = 0$ поперечных сечениях трубы (в начальный момент времени). Значение c в (4.2) может быть произвольным и на результат не влияет.

Нелинейное уравнение (4.1) с двумя дополнительными условиями решается численно методом Ньютона. Метод Ньютона итерационный и на каждом шаге позволяет уточнить существующее приближение к решению. Для системы $F(x) = 0$ метод Ньютона формулируется следующим образом. Пусть x_m — приближение к решению на шаге m, x^* — точное решение. Разложение $F(x^*)$ в ряд около точки x_m имеет вид:

$$F(x^*) = F(x_m) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_m} \Delta x_m^* + O(\Delta x_m^{*2}), \tag{4.4}$$

где $\Delta x_m^* = x^* - x_m$. Пренебрегая нелинейными относительно Δx_m^* слагаемыми, учитывая, что $F(x^*) = 0$, получим линейную систему на поправку к решению:

$$J\Delta x_m = b, \tag{4.5}$$

где J — матрица Якоби:

$$J = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_m},$$

вектор $b = -F(x_m)$. Основной задачей при применении метода Ньютона является решение линейной системы (4.5). Новое приближение к решению вычисляется по формуле:

$$x_{m+1} = x_m + \Delta x_m. \tag{4.6}$$

Для решения линейной системы (4.5) применяется итерационный алгоритм, в котором приближение к решению находится в подпространствах Крылова $K_i = \mathrm{span}\{b, Jb, J^2b, ..., J^ib\}$, где $\mathrm{span}\{a_1, ..., a_i\}$ обозначает линейную оболочку векторов $a_1, ..., a_i$. Построение базиса в подпространстве K_{i+1} при условии, что базис в подпространстве K_i уже известен, требует одного умножение уже известного вектора J^ib на J ($K_0 = \mathrm{span}\{b\}$). Произведение матрицы Якоби J на вектор единичной длины e равно производной от функции F в соответствующем направлении:

$$Je = \frac{\partial F}{\partial x} e = \frac{\partial F}{\partial e}. \tag{4.7}$$

Таким образом, построение базиса в подпространствах Крылова сводится к вычислению производных по направлению от функции F. Значение производной функции F по направлению e приближается конечной разностью, которая может быть найдена численно:

$$\frac{\partial F}{\partial e} \approx \frac{F(x + \varepsilon e) - F(x)}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

В наших расчетах действительные числа представляются 64-битными числами с плавающей запятой. В этом случае значение ε рекомендуется выбирать близким к 10^{-7} [23]. Метод Ньютона, в котором приближения к решениям системы (4.5) находятся в подпространствах Крылова, называют также методом Ньютона-Крылова [91].

В работе для решения линейной системы (4.5) применяется метод минимизации невязки [92]. Этот метод также итерационный. На i-ом шаге выполнения метода в подпространстве Крылова K_i ищется приближение к решению x_i таким образом, что невязка $r_i = b - Ax_i$ имеет наименьшую длину. Критерием остановки итерационного процесса служит снижение длины невязки ниже заранее заданной величины, либо превышение заранее заданного числа итераций. При поиске условно периодических решений с небольшим числом неустойчивых направлений (менее 10), для уточнения решения на порядок требуется несколько десятков итераций метода минимизации невязки, причем число итераций практически не зависит от параметров расчетной сетки (при условии, что сетка достаточно подробна для адекватного воспроизведения решения) [24]. На каждой итерации метода минимизации невязки требуется однократно вычислить значение функции F в новой точке. В нашем случае вычисление функции F связано с численным интегрированием уравнений движения в течении времени T_p, что требует значительных вычислительных ресурсов. Сравнительно небольшое число обращений к функции F делает реализованный метод Ньютона-Крылова эффективным инструментом поиска условно периодических решений, имеющих небольшое число неустойчивых направлений.

Для построения подпространств Крылова необходимо, чтобы матрица J была квадратной. Если поле скорости задается N параметрами, то в матрице $N+2$ строки (система уравнений включает два дополнительных уравнения (4.2) и (4.3)). Соответственно, вместе с полем скорости в число неизвестных необходимо включить два параметра системы, например, временной период T_p и скорость перемещения решения c_p. Тогда свободным параметром остается только число Рейнольдса Re, значения T_p и c_p однозначно определяются в процессе продвижения по числу Рейнольдса.

Критерием остановки итерационного процесса метода Ньютона может служить снижение нормы невязки ниже заранее заданной величины, либо превышение заранее заданного числа итераций.

4.2. Продолжение модельного порыва по числу Рейнольдса

Основной сложностью при нахождении новых условно периодических решений оказывается подбор подходящего начального приближения к решению, с которым метод Ньютона сойдется. Однако если одно условно периодическое решение известно, оно может быть использовано в качестве начального приближения для решения с близкими значениями параметров. Найденное решение, в свою очередь, также может выступать в качестве начального приближения к новому решению при близком значении параметров. Таким образом, может быть построена цепочка решений, связывающая решения с существенно различным значением параметров. Такой метод нахождения новых решений называют методом продолжения по параметру [23,24]. Для построения приближения к новому решению при условии, что известно уже два или более решений при близких значениях параметров, в работе применялась линейная интерполяция. Такой подход позволяет существенно (приблизительно в 10 раз) увеличить допустимый шаг, с которым выполняется продвижение по параметру от уже из-

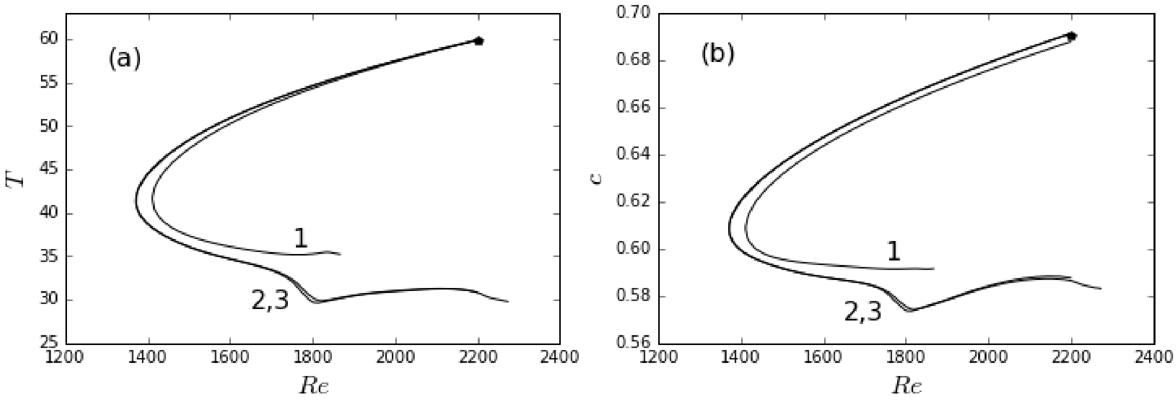

Рис. 4.1. Продолжение решения, соответствующего модельному порыву, по числу Рейнольдса: (a) зависимость временного периода T и (b) скорости перемещения порыва вдоль трубы c от числа Рейнольдса Re. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют решениям, полученным на различных расчетных сетках, описанных в параграфе 2.1. Черные точки соответствуют исходному решению, принадлежащему сепаратрисе.

вестных решений к новому.

Продолжив решение, соответствующее модельному порыву, по числу Рейнольдса, удалось получить новые условно периодические решения с пространственно локализованной структурой. На Рисунке 4.1 представлены значения T_p, c_p и Re для найденных таким образом решений. Как показывают расчеты, решения принадлежат однопараметрическому множеству, что согласуется с результатами [13]. Решения, принадлежащие различным кривым, найдены на различных расчетных сетках. Параметры сеток, на которых выполнены расчеты, приведены в параграфе 2.1. Черная точка на каждом из графиков соответствует исходному решению — модельному порыву. При $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^* \approx 1400$ обнаружена точка бифуркации, в которой порождаемое модельным порывом семейство решений рождается (в [13] сообщается о $\mathrm{Re}^* = 1430$). При меньших значениях числа Рейнольдса решений не существует. При больших значениях числа Рейнольдса существует две ветви решений, то есть при каждом значении Re существует два решения, каждое из которых принадлежит свой ветви. Для того, чтобы в точке бифуркации перейти с одной ветви решений на другую, Re было включено в число определяемых параметров, а продолжение решения было выполнено по T_p.

Ветвь, которой принадлежит исходное решение, называют нижней. Вто-

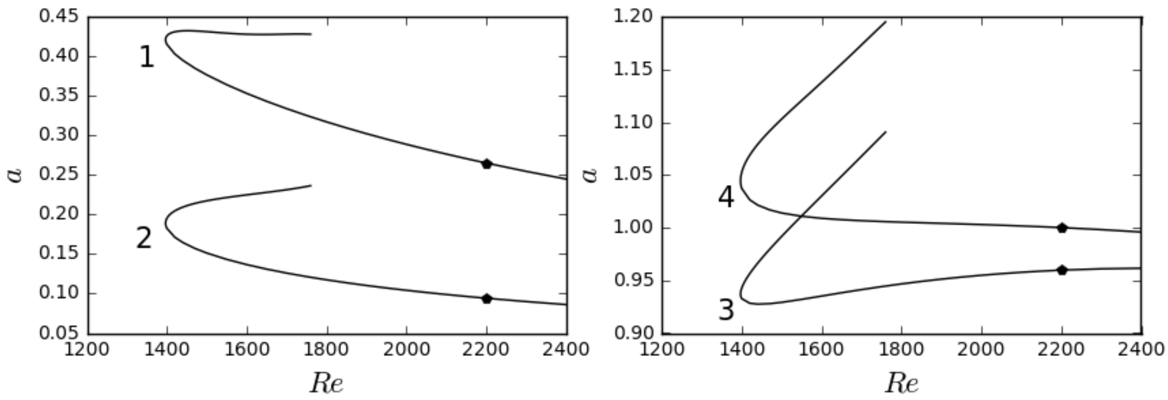

Рис. 4.2. Зависимость средней по объему трубы и по времени амплитуды различных компонент движения от Re: кривая 1 — $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$, кривые 2, 3 — поперечная и продольная компоненты $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$, 4 — $\mathbf{v}_{\mathrm{n}} + \mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$ — отклонение от осесимметричной составляющей движения. Черные точки соответствуют исходному решению, принадлежащему сепаратрисе. Все значения отнесены к амплитуде отклонения от осесимметричной составляющей движения в исходном решении.

рую ветвь называют, соответственно, верхней. Для верхней ветви характера большая интенсивность колебаний и вторичных течений. Значение амплитуды различных компонент движения найденных решений приведено на Рисунке 4.2. Кривая 1 соответствует пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$. Кривая 2 — поперечной компоненте $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$, ассоциированной с продольными вихрями. Кривая 3 — продольной компоненте $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$, ассоциированной с полосами повышенной и пониженной скорости. Кривая 4 — отклонению от осесимметричной составляющей движения $\mathbf{V}_{\mathrm{2D}}$, которая складывается из $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$ и $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$ (аналогичная характеристика может быть вычислена для турбулентного порыва). Строгое определение $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}}$ и $\mathbf{V}_{\mathrm{2D}}$ приведено в следующем параграфе. Амплитуда вычислена как корень из среднего по объему трубы и по времени квадрата модуля вектора скорости. Вычисленные таким образом значения отнесены к амплитуде отклонения от осесимметричной составляющей движения $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}} + \mathbf{v}_{\mathrm{n}}$ в исходном решении. Отметим, что так вычисленная амплитуда движения не зависит от протяженности расчетной области и является характеристикой именно порыва. Исходному решению (модельному порыву) соответствуют черные точки на кривых. Графики на Рисунке 4.2 подтверждают, что все перечисленные компоненты движения на верхней ветви имеют большую амплитуду, чем на нижней. Скорость перемещения порыва c_p и временной период T на верхней ветви, напротив, оказываются ниже, чем на нижней ветви, вследствие чего на Рисунке 4.1(a),(b) положение ветвей не соответствует их названиям.

Для того, чтобы адекватно воспроизвести решения с верхней ветви, необходимы более подробные расчетные сетки. Характеристики решений с верхней ветви, полученные на различных сетках, согласуются между собой до $\mathrm{Re} \approx 1700$ (смотри Рисунок 4.1). При больших Re между решениями, полученными на различных сетках, начинают проявляться некоторые качественные отличия. Для более подробного анализа верхней ветви выбрано решение с $\mathrm{Re} = 1700$. Мы полагаем, что используемые нами расчетные сетки позволяют адекватно воспроизвести это решение.

По амплитуде трехмерной составляющей движения, скорости перемещения вдоль трубы, дефекту скорости на оси трубы и некоторым другим характеристикам решения с верхней ветви оказываются ближе к турбулентному порыву, чем решения с нижней ветви. Это дает основания полагать, что и другие результаты, полученные при изучении решений с верхней ветви, также имеют большее отношение к турбулентному порыву. В решении, принадлежащем верхней ветви, $\mathrm{Re} = 1700$, скорость перемещения локализованной структуры вдоль трубы составляется $0.59U$. Скорость перемещения локализованной структуры в исходном решении, принадлежащем нижней ветви, (модельном порыве) составляет $0.69U$. Скорость перемещения турбулентного порыва приблизительно равна $0.5U$. Временной период решения, принадлежащего верхней ветви, $\mathrm{Re} = 1700$, составляет $34.4R/U$, что почти в два раза меньше, чем у модельного порыва ($59.6R/U$).

Отметим, что решения с верхней ветви в фазовом пространстве лежат внутри области притяжения турбулентного аттрактора, а не на сепаратрисе. Соответственно, решения с верхней ветви не могут быть найдены отслеживанием траектории на сепаратрисе и метод продолжения по параметру необходим для их нахождения. Отметим также, что в согласии с [13] решения с верхней ветви оказываются устойчивы в небольшом диапазоне чисел Рейнольдса вблизи точки бифуркации (при наложенных дополнительных условиях симметрии). Но выбранное для более подробного анализа решение с верхней ветви ($\mathrm{Re} = 1700$) уже неустойчиво.

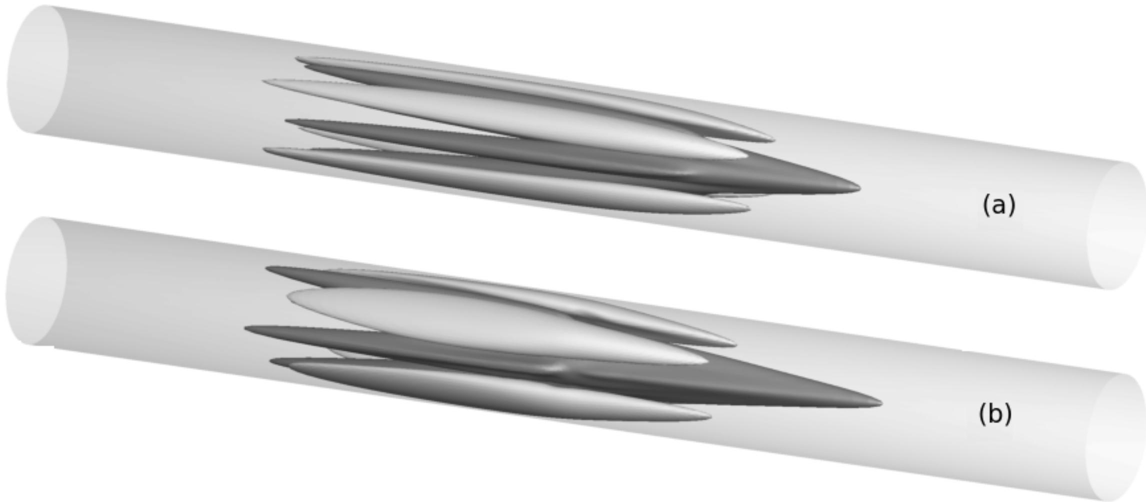

Рис. 4.3. Среднее поле скорости исходного решения (a) и решения, принадлежащего верхней ветви, Re = 1700, (b). Темным и светлым тоном приведены поверхности скорости -0.1 и $+0.1$ относительно скорости течения Пуазейля. Поток направлен слева направо.

4.3. Исследование верхней ветви порожденного модельным порывом семейства условно-периодических решений

Также, как при исследовании модельного порыва, поле скорости решения с верхней ветви $\mathbf{v}_{\mathrm{ub}}$, полученного при $\mathrm{Re} = 1700$, представляется в виде суммы средней $\mathbf{V}_{\mathrm{ub}} = \overline{\mathbf{v}_{\mathrm{ub}}}^{t}$ и пульсационной $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}} = \mathbf{v}_{\mathrm{ub}} - \mathbf{V}_{\mathrm{ub}}$ составляющих; осреднение выполняется по времени в сопутствующей системе отсчета («ub» — «up branch»). Среднее поле скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{ub}}$ представлено на Рисунке 4.3 (b). На Рисунке (a) для сравнения представлено среднее поле скорости исходного решения (модельного порыва). Качественно структура решения не меняется, среднее поле скорости в обоих случаях содержит полосы повышенной и пониженной скорости, вытянутые вдоль стенки. Полосы пониженной скорости объединяются в передней части порыва в приосевой области, формируя центральное ядро пониженной скорости. В случае решения с верхней ветви ядро пониженной скорости имеет большую протяженность, в то время как пристенные полосы оказываются короче. Суммарная длина структуры при этом практически не меняется.

На Рисунке 4.4 изображена средняя по сечению трубы амплитуда различных компонент движения. Как при исследовании модельного порыва, ста-

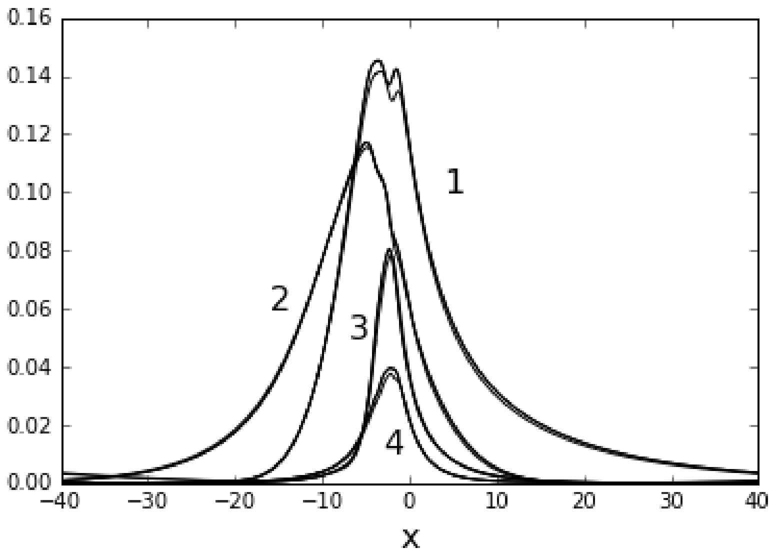

Рис. 4.4. Распределение вдоль трубы амплитуды компонент решения, принадлежащего верхней ветви, Re = 1700: кривая 1 — $\mathbf{V}_{\mathrm{2D,ub}}$ (отклонение от течения Пуазейля), кривые 2,4 — продольная и поперечная компоненты $\mathbf{V}_{\mathrm{3D,ub}}$, кривая 3 — амплитуда $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$. Представлены результаты, полученные на трех расчетных сетках, описанных в параграфе 2.1.

ционарная составляющая движения разделена на двумерную $\mathbf{V}_{\mathrm{2D,ub}} = \overline{\mathbf{V}_{\mathrm{ub}}}^{\theta}$ и трехмерную $\mathbf{V}_{\mathrm{3D,ub}} = \mathbf{V}_{\mathrm{ub}} - \mathbf{V}_{\mathrm{2D,ub}}$ составляющие. Продольная и поперечная компоненты трехмерной составляющей движения ассоциируются с полосами и продольными вихрями, соответственно. Качественно, распределение интенсивности различных компонент движения вдоль трубы в рассматриваемом решении, принадлежащем верхней ветви, и в модельном порыве совпадают (смотри Рисунок 2.5), но все компоненты движения в решении, принадлежащем верхней ветви, имеют большую амплитуду. Амплитуда полосчатого движения и пульсаций выше примерно в два раза. Интенсивность продольных вихрей выше почти в четыре раза. На Рисунке 4.4 представлены результаты, полученные на трех различных расчетных сетках. Параметры расчетных сеток приведены в параграфе 2.1. Результаты, полученные на различных сетках, совпадают качественно и близки количественно, что позволяет говорить об адекватности воспроизведения решения в расчетах.

На Рисунке 4.5(а) приведена продольная компонента стационарной составляющей движения $V_{\mathrm{x,ub}}$ в сечении трубы, где пульсации достигают максимума. В сравнении с исходным решением в решении, принадлежащем верхней

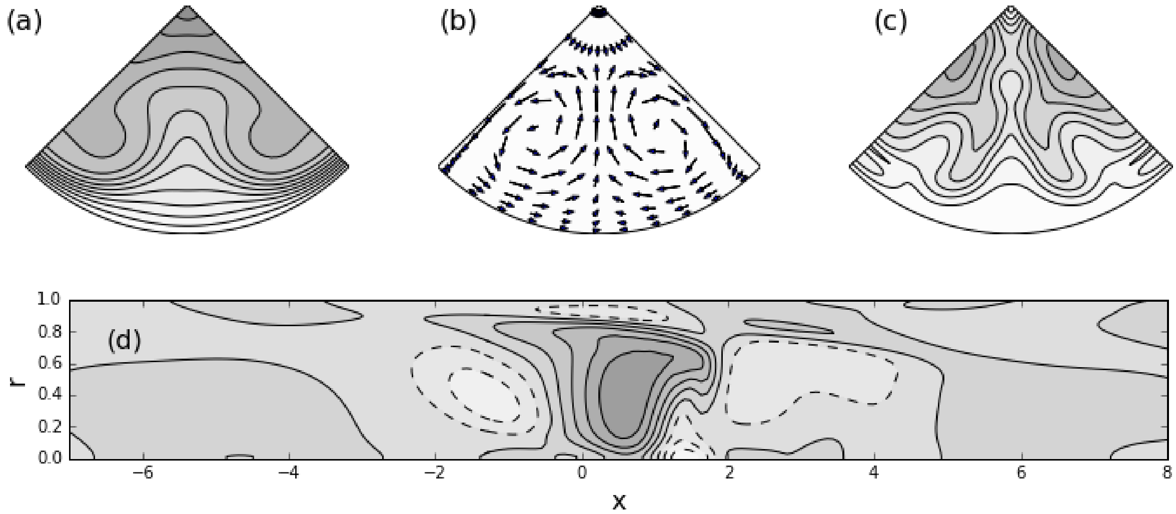

Рис. 4.5. Поле скорости решения, принадлежащего верхней ветви, $\mathrm{Re} = 1700$: в сечении, где пульсации достигают наибольшей амплитуды, приведены изолинии $V_{\mathrm{x,ub}}$ (a), векторное поле $(V_{\mathrm{r,ub}}, V_{\theta,\mathrm{ub}})$ (b), линии равного уровня амплитуды $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$ (c); в сечении $\theta = 0$ — изолинии продольной компоненты $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$ (d). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

ветви, между полосами повышенной и пониженной скорости существуют области, в которых продольная скорость с ростом r (при постоянных x и θ) падает не монотонно. Полосы формируются за счет «лифт-ап» эффекта. Векторное поле поперечной компоненты среднего течения $(V_{\mathrm{r,ub}}, V_{\theta,\mathrm{ub}})$, приведенное на Рисунке 4.5(b), соответствует наличию стационарных продольных вихрей между полосами повышенной и пониженной скорости, ответственных за поддержание существования этих полос. На Рисунке 4.5(c) приведена амплитуда пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$. Пульсации в решении, принадлежащем верхней ветви, имеют более сложную форму, чем в исходном решении, но они также оказываются сконцентрированы между полосой повышенной скорости и осью трубы и между соседними полосами повышенной и пониженной скорости. Форма пульсационной составляющей движения близка к бегущей волне, имеющей в системе отсчета порыва положительную фазовую скорость. Также, как и в модельном порыве, длину этой бегущей волны можно оценить в $5R$. Мгновенное поле скорости пульсационной составляющей движения в продольном сечении трубы $\theta = 0$ приведено на Рисунке 4.5(d).

Также, как в модельном порыве, в решении, принадлежащем верхней ветви, $\mathrm{Re} = 1700$, среднее поле скорости оказывается линейной неустойчиво. Наи-

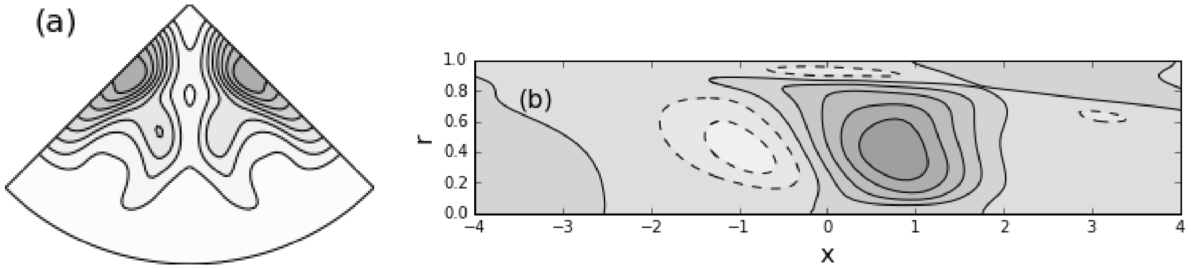

Рис. 4.6. Наиболее быстрорастущее решение линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{ub}}$: (a) — линии уровня амплитуды колебаний в поперечном сечении трубы, где амплитуда колебаний достигает максимума, (b) — мгновенное поле скорости в сечении $\theta = 0$. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

более быстрорастущее решение $\mathbf{v}'_{1,\mathrm{ub}}$ линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{ub}}$ воспроизводит форму пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$ и период её изменения во времени, что говорит о том, что пульсационная составляющая движения $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$ возникает в результате линейной неустойчивости среднего течения. Временной период и инкремент нарастания $\mathbf{v}'_{1,\mathrm{ub}}$ равны $31.8R/U$ и $0.012U/R$. Временной период $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$ равен $34.4R/U$. На Рисунке 4.6(a) в том же сечении, в котором пульсационная составляющая движения представлена на Рисунке 4.5(c), приведена средняя по времени амплитуда колебаний в решении $\mathbf{v}'_{1,\mathrm{ub}}$. Распределение амплитуды колебаний для решения линеаризованных и решения полных уравнений достаточно точно совпадают. В $\mathbf{v}'_{1,\mathrm{ub}}$ колебания также оказываются сконцентрированы между полосой повышенной скорости и осью трубы и между соседними полосами повышенной и пониженной скорости. Мгновенное поле продольной компоненты $\mathbf{v}'_{1,\mathrm{ub}}$, представленное в продольном сечении $\theta = 0$ на Рисунке 4.6(b), также демонстрирует согласие с мгновенным полем скорости $\mathbf{v}_{\mathrm{n,ub}}$, приведенным на Рисунке 4.5(d). В области расположения полосы повышенной скорости вдоль потока друг за другим следуют области повышенной и пониженной скорости. Суммарная протяженность одной области повышенной скорости и одной области пониженной скорости составляет приблизительно $5R$. Общая протяженность области, в которой пульсации имеют существенную амплитуду, равна примерно 5–$7R$. По форме пульсации близки к бегущей волне, что согласуется с тем, что они возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения, слабо меняющегося вдоль трубы. Отметим,

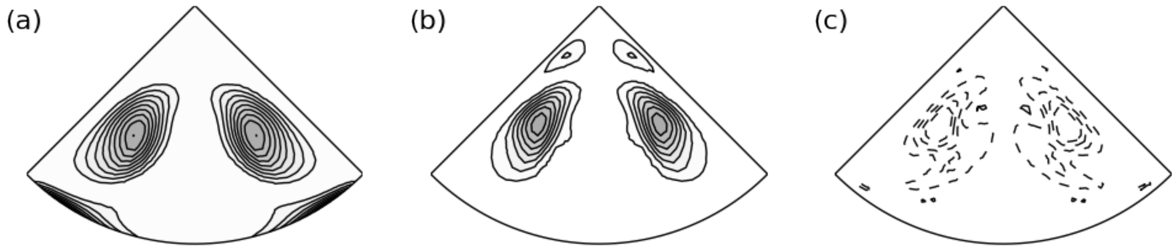

Рис. 4.7. Механизм поддержания стационарных продольных вихрей в условно периодическом решении, принадлежащем верхней ветви, Re = 1700: в сечении трубы, где пульсации достигают наибольшей амплитуды, приведены линии уровня Ω_x^2 (a), вклад в поддержание Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих (3.12) (b) и сумме других слагаемых в правой части (3.10) (c). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для (b) и (c). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

что поле скорости $(V_{\mathrm{x,ub}}, 0, 0)$ оказывается линейно устойчивым, соответствующий инкремент затухания равен $\lambda = -0.009U/R$.

Механизмы поддержания стационарных продольных вихрей в решении, принадлежащем верхней ветви, и в модельном порыве также согласуются. На Рисунке 4.7(a) приведено значение квадрата стационарной продольной завихренности $\Omega_{\mathrm{x,ub}}^2$ в сечении трубы, где пульсации достигают наибольшей амплитуды. Распределение $\Omega_{\mathrm{x,ub}}^2$ по сечению трубы соответствует наличию продольных вихрей, поддерживающих существование полос повышенной и пониженной скорости (смотри Рисунок 4.5). На Рисунках 4.7(b,c) приведены значения ответственных за производство $\Omega_{\mathrm{x,ub}}^2$ слагаемых, соответствующих (3.12) и сумме других слагаемых в правой части (3.11), в том же сечении трубы. Слагаемые (3.12) определяют форм поля стационарной продольной завихренности, вклад других слагаемых в правой части (3.11) оказывается отрицательным. Нет сомнения, что за образование стационарных продольных вихрей в уравнении (3.11) ответственны слагаемые (3.12).

Дополнительно, на Рисунке 4.8(a) приведены значения $\Omega_{\mathrm{x,ub}}^2$ и ответственных за производство $\Omega_{\mathrm{x,ub}}^2$ слагаемых на прямой $r = 0.6, \theta = \pi/10$, проходящей через область, занятую положительным вихрем. Картина течения в этом случае значительно сложнее, чем в модельном порыве (смотри Рисунок 3.9(a)). Тем не менее, графики на Рисунке 4.8(a) также подтверждают представление о том,

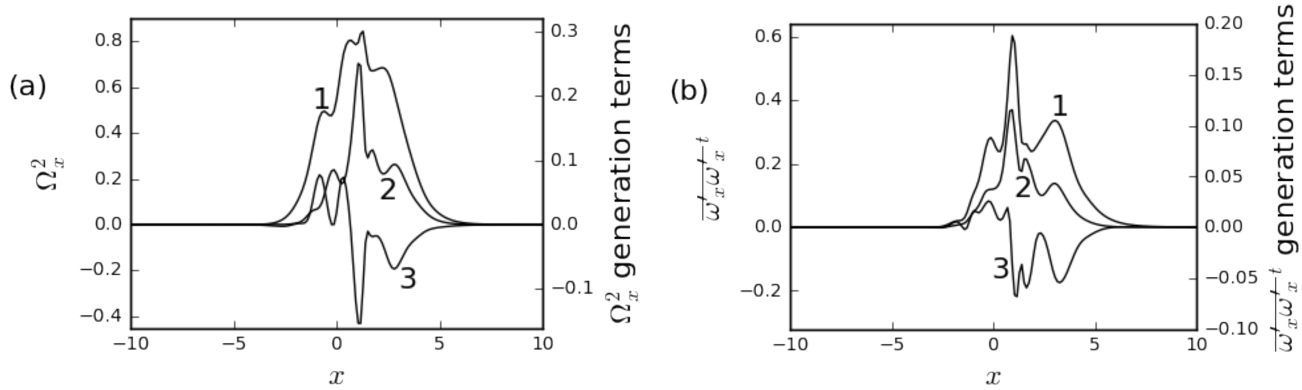

Рис. 4.8. Механизм поддержания продольных вихрей в условно периодическом решении с верхней ветви. Приведены значения различных величин на прямой $r = 0.6$, $\theta = \pi/10$, проходящей через область, занятую положительным вихрем: (a) — Ω_x^2 (кривая 1) и вклад в поддержание Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих (3.12) (кривая 2) и другим слагаемым в правой части (3.11) (кривая 3); (b) — $\overline{\omega_x'\omega_x'}^t$ (кривая 1) и вклад в её поддержание со стороны слагаемых, соответствующих (3.16) (кривая 2) и другим слагаемым в правой части уравнения (3.13) (кривая 3).

что за образование продольных вихрей ответственно слагаемое (3.12).

То, что слагаемые (3.12) не равны нулю, говорит о наличии корреляции между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности. Объяснить наличие корреляции позволяет механизм образования пульсаций продольной завихренности, который в решении с верхней ветви тот же, что и в модельном порыве. В уравнении (3.14) за образование пульсаций продольной завихренности $\omega'_{\mathrm{x,ub}}$ в области расположения продольных вихрей отвечает слагаемое (3.16). В качестве подтверждения на Рисунке 4.8(b) приведены значение $\overline{\omega'_{\mathrm{x,ub}}\omega'_{\mathrm{x,ub}}}^t$ и значения ответственных за производство $\overline{\omega'_{\mathrm{x,ub}}\omega'_{\mathrm{x,ub}}}^t$ слагаемых на прямой $r = 0.6$, $\theta = \pi/10$. Слагаемое, соответствующее (3.16), дает определяющий вклад в производство $\overline{\omega'_{\mathrm{x,ub}}\omega'_{\mathrm{x,ub}}}^t$ в то время, как другие слагаемые в правой части уравнения (3.14) имеют преимущественно отрицательное значение. Механизм образования пульсаций продольной завихренности, выраженный слагаемым (3.16), состоит в сжатии и растяжении вихревых трубок пульсациями продольной скорости. Детали механизмов образования стационарных продольных вихрей и пульсаций продольной завихренности приведены в параграфе 3.4.

Таким образом, продолжив модельный порыв по числу Рейнольдса, удалось достичь точки бифуркации, в которой рождаются две ветви решений, и перейти с нижней ветви на верхнюю. Двигаясь по верхней ветви решений в сторону увеличения числа Рейнольдса удалось получить новые условно периодические решения с пространственно-локализованной структурой, по ряду качественных характеристик оказывающихся ближе к турбулентному порыву, чем исходное решение. Были описаны основные характеристики решения с верхней ветви и механизм поддержания колебаний в нем. Все основные элементы цикла поддержания колебаний в решении, принадлежащем верхней ветви, и в модельном порыве совпадают. Периодичность решения по времени в сопутствующей системе отсчета позволяет разделить его поле скорости на среднюю и пульсационную составляющие осреднением по времени. Показано, что пульсационная составляющая движения возникает в результате линейной неустойчивости среднего течения. В среднем течении выделяются полосы повышенной и пониженной скорости, вытянутые вдоль потока. Пульсации оказываются сосредоточены между соседними полосами повышенной и пониженной скорости, где распределение средней продольной скорости имеет точки перегиба, если рассматривать его как функцию угловой координаты. Вероятно, механизм образования пульсаций является механизмом типа Кельвина–Гельмгольца. В потоке существуют стационарные продольные вихри, поддерживающие существование полос. Существование продольных вихрей, в свою очередь, поддерживается нелинейным взаимодействием пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности. В области расположения продольных вихрей пульсации продольной завихренности образуются за счет сжатия и растяжения существующих вихревых нитей пульсациями продольной скорости. Таким образом, формируется необходимая для поддержания продольных вихрей корреляция между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности.

4.4. Семейство трехмерных бегущих волн в течении Гагена-Пуазейля

Решение уравнений Навье-Стокса, соответствующее модельному порыву, является предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратри-

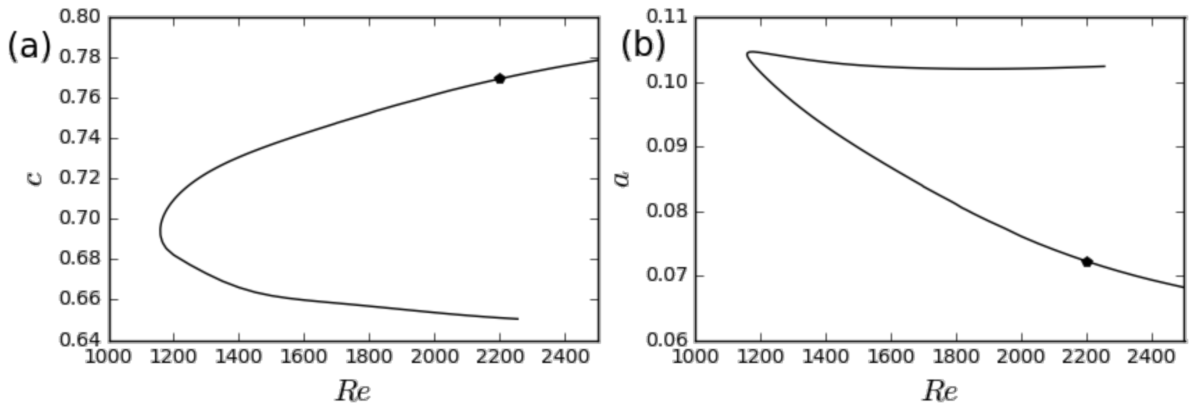

Рис. 4.9. Продолжение решения уравнений Навье-Стокса, имеющего вид бегущей волны, по числу Рейнольдса: (a) зависимость фазовой скорости и (b) амплитуды трехмерной составляющей движения от числа Рейнольдса. Точка соответствует исходному решению, найденному на сепаратрисе.

се, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующие ламинарному и турбулентному режимам течения. В согласии с [13], при дополнительном условии $5R$ периодичности вдоль потока предельное решение на сепаратрисе имеет еще более простое пространственно-временное поведение, а именно, имеет вид бегущей волны. Как показано в параграфе 3.1, это решение в более простой форме воспроизводит все основные элементы цикла поддержания колебаний, выделенные при изучении модельного порыва. Среднее поле скорости бегущей волны не зависит от продольной координаты, благодаря чему полосы повышенной и пониженной скорости и продольные вихри в бегущей волне имеют бесконечную протяженность, в то время как в модельном порыве их протяженность ограничена.

Продолжение по числу Рейнольдса решения, имеющего вид бегущей волны, найденного на сепаратрисе, позволило получить новые решения в виде бегущей волны. На Рисунок 4.9 приведены значения фазовой скорости c_{tw} и средней по объему трубы амплитуды трехмерной составляющей движения $\mathbf{V}_{\mathrm{3D}} = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}^{x,\theta}$. Как и условно периодические решения, порожденные модельным порывом, решения в виде бегущей волны принадлежат однопараметрическому множеству. Семейство решений, порожденное бегущей волной, найденной на сепаратрисе, возникает в результате бифуркации при $\mathrm{Re} \approx 1200$. При меньших числах Рейнольдса решений из этого семейства не существует. При больших

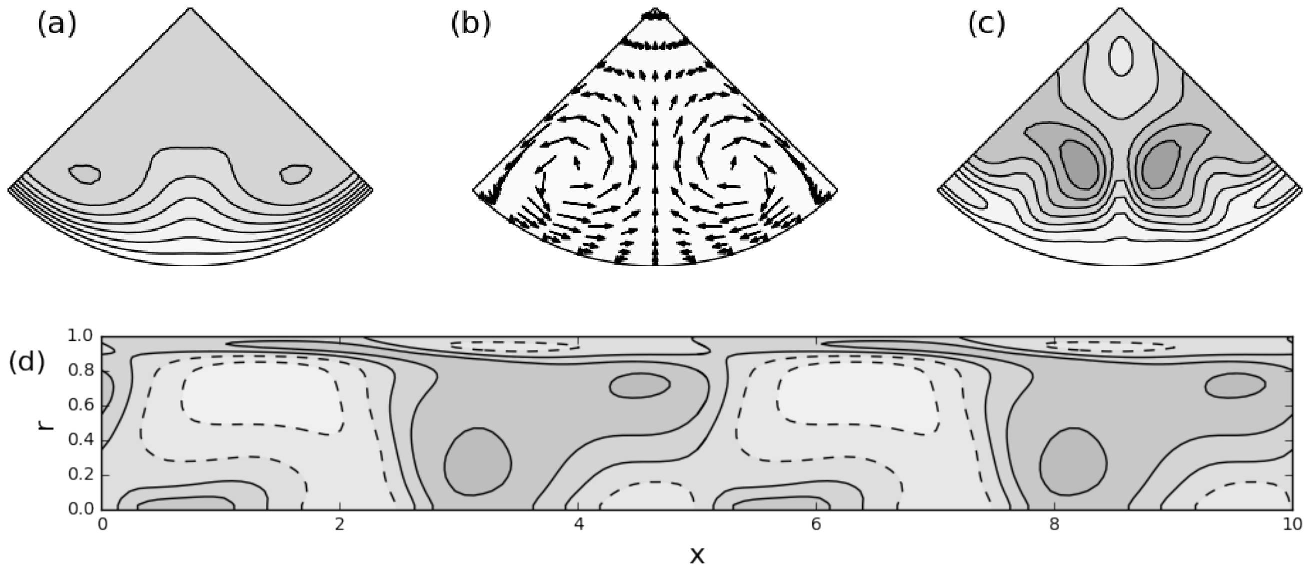

Рис. 4.10. Поле скорости решения, имеющего вид бегущей волны, принадлежащего верней ветви, Re $= 1700$: (a) — изолинии средней продольной скорости, (b) — средняя поперечная скорость, (c) — линии уровня амплитуды пульсаций, (d) — изолинии продольной компоненты пульсационной составляющей движения в сечении $\theta = 0$ (продольный период $L_x = 5$). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые – отрицательные.

числах Рейнольдса существует две ветви решений. В точке бифуркации производная по числу Рейнольдса от характеристик решения обращается в бесконечность, что не позволяет перейти с одной ветви решения на другую, продлевая решение по числу Рейнольдса. Для того, чтобы перейти с одной ветви решения на другу, вблизи от точки бифуркации продолжение решения было выполнено по фазовой скорости c_{tw}. Число Рейнольдса, при этом, было включено в число определяемых параметров. Ветвь, которой принадлежит исходное решение, найденное на сепаратрисе, принято называть нижней, так как для нее характерна меньшая интенсивность колебаний (смотри Рисунок 4.9(b)). Решения с верхней ветви по амплитуде колебаний оказываются ближе к турбулентному течения, что делает их привлекательными для исследования.

Исходная сетка, на которой были найдены решения, содержит $32 \times 32 \times 32$ ячеек в продольном, радиальном и угловом направлениях. Протяженность расчетной области составляет $L_x = 5R$. Для того, чтобы установить влияние расчетной сетки на результат, решения были пересчитаны на более подробной сетке, содержащей вдвое большее число ячеек в каждом направлении ($64 \times 64 \times 64$).

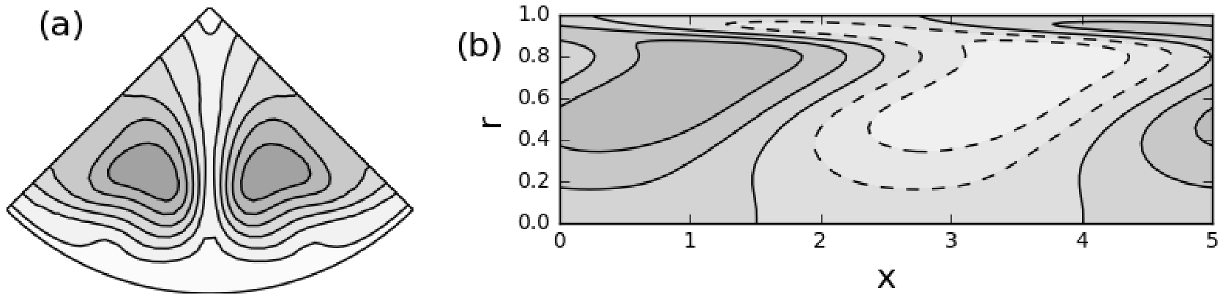

Рис. 4.11. Наиболее быстро растущее собственное решение линейной задачи устойчивости поля скорости $\mathbf{V}_{\text{tw,ub}}$: (a) — линии уровня амплитуды колебаний; (b) — изолинии продольной компоненты скорости в сечении $\theta = 0$. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

Разрешение расчетных сеток, на которых получены решения в виде бегущих волн, точно совпадает с разрешением сеток, на которых получен модельный порыв (см. параграф 2.1). Для адекватного воспроизведения решений с верхней ветви требуются более подробные расчетные сетки, чем для решений с нижней ветви. Расчеты, проведенные на двух расчетных сетках, показали, что до $\mathrm{Re} \approx 2000$ решение на верхней ветви воспроизводится адекватно. Также, как при исследовании верхней ветви семейства решений, порожденного модельным порывом, характеристики верхней ветви решений, имеющих вид бегущей волны, будут представлены на примере решения с $\mathrm{Re} = 1700$. Это решение оказывается устойчивым (при наложенных дополнительных условиях симметрии (2.1), (2.2), (1.4)). Его фазовая скорость равна $c_{\text{tw,ub}} = 0.66U$.

Также, как при анализе бегущей волны, найденной на сепаратрисе, выполненном в параграфе 3.1, разделим поле скорости выбранной для анализа бегущей волны $\mathbf{v}_{\text{tw,ub}}$ на среднюю $\mathbf{V}_{\text{tw,ub}} = \overline{\mathbf{v}_{\text{tw,ub}}}^x$ и пульсационную $\mathbf{v}'_{\text{tw,ub}} = \mathbf{v}_{\text{tw,ub}} - \mathbf{V}_{\text{tw,ub}}$ составляющие путем осреднения в продольном направлении, обозначенного чертой над выражением с индексом x. Для бегущей волны осреднение в продольном направлении эквивалентно осреднению по времени (при условии, что оно выполнено в системе отсчета, скорость перемещения которой не совпадает с фазовой скоростью волны). Среднее поле скорости зависит только от двух координат, r и θ, что делает его удобным объектом для исследования.

Также, как и в других исследованных решениях, среднее поле скорости включает полосы повышенной и пониженной скорости, вытянутые вдоль пото-

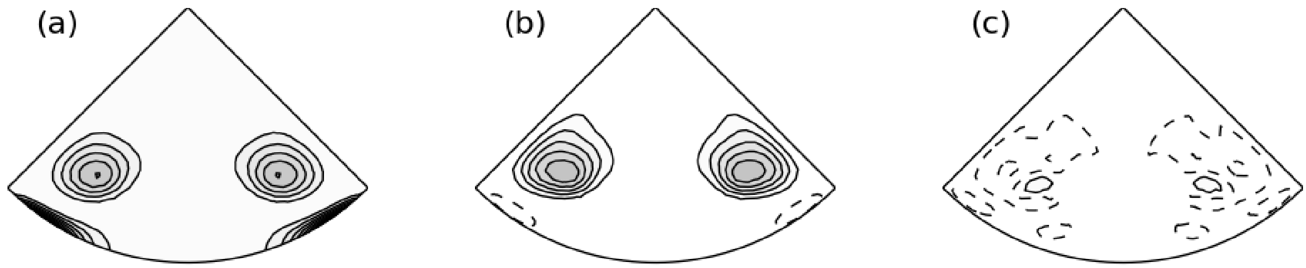

Рис. 4.12. Образование продольных вихрей в решении, имеющем вид бегущей волны, принадлежащем верхней ветви, Re = 1700: значение Ω_x^2 (a), вклад в генерацию Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.4) (b) и другим слагаемым в правой части (3.2) (c). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для (b) и (c). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

ка. Распределение средней продольной скорости приведено на Рисунке 4.10(a). В центральной части расчетной области, где медленная жидкость проникает ближе к центру трубы, находится полоса пониженной скорости. При большем и меньшем значении θ находятся полосы повышенной скорости. Отметим, что скорость жидкости в области расположения полос повышенной скорости оказывается даже выше, чем на оси трубы. Существование полос поддерживается слабым движением жидкости в нормальной к основному потоку плоскости. Распределение средней поперечной скорости, приведенное на Рисунке 4.10(b), соответствует наличию продольных вихрей, поддерживающих существование полос. Там, где медленная жидкость движется от стенки, находятся полосы пониженной скорости. Там, где жидкость движется ближе к стенке — полосы повышенной скорости.

Пульсации оказываются сосредоточены между полосами повышенной и пониженной скорости и, в несколько меньшей степени, в области расположения полос повышенной скорости (смотри Рисунок 4.10(c)). Отметим, что распределения средней скорости и пульсаций в этом случае значительно отличаются от аналогичных распределений для решения с верхней ветви семейства решений, порожденного модельным порывом (смотри Рисунок 4.5). В решении, порожденном модельным порывом, скорость на оси трубы оказывается выше, чем в полосах повышенной скорости, пульсации достигают максимума между полосами повышенной скорости и осью трубы, интенсивность пульсаций между полосами разных знаков оказывается значительно ниже. По-видимому, это объясняется наличием продольной неоднородность в пространственно-локализованном решении.

Мы полагаем, что механизм образования пульсаций в случае рассматриваемой бегущей волны также, как и в других случаях, является линейным. Хотя среднее поле скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{tw,ub}}$ оказывается линейно устойчивым, собственная функция, соответствующая наиболее медленно затухающему собственному решению, $\mathbf{v}'_1$ повторяет форму пульсационной составляющей движения и скорость ее перемещения вдоль трубы. Амплитуда колебаний $\mathbf{v}'_1$ приведена на Рисунке 4.11(a). Как и в пульсационной составляющей движения, колебания $\mathbf{v}'_1$ оказываются сосредоточены между полосами повышенной и пониженной скорости, а также, от части, в области расположения полос повышенной скорости. Распределения мгновенной продольной скорости, приведенные для пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}'_{\mathrm{tw,ub}}$ на Рисунке 4.10(d), а для $\mathbf{v}'_1$ на Рисунке 4.11(b), также согласуются друг с другом. Фазовая скорость $\mathbf{v}'_1$ равна $c_1 = 0.63$, декремент затухания $\lambda_1 = -0.0085$. Линейная устойчивость среднего течения не противоречит тому, что механизм передачи энергии в пульсационную составляющую движения является линейный. Амплитуда колебаний в рассматриваемом решении оказывается достаточно велика и достигает 0.15. Полосы повышенной и пониженной скорости в решении смещаются в боковом направлении с достаточно существенной амплитудой, в результате чего среднее течение недостаточно точно воспроизводит форму полос — угловые градиенты продольной скорости в среднем течении оказываются ниже, чем в неосредненном поле скорости $\mathbf{v}_{\mathrm{tw,ub}}$, и скорость роста возмущений на среднем поле скорости может оказаться ниже, чем на неосредненном.

Существование продольных вихрей, формирующих полосы повышенной и пониженной скорости, объясняется наличием пульсаций. Продольным вихрям, имеющим различные направления вращения, соответствуют области концентрации положительной и отрицательной средней продольной завихренности Ω_x. Как и в других исследованных решениях, в рассматриваемом решении в уравнении баланса средней продольной завихренности (3.3) за образование продольных вихрей ответственны слагаемые (3.4), описывающие нелинейное взаимодействие пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности.

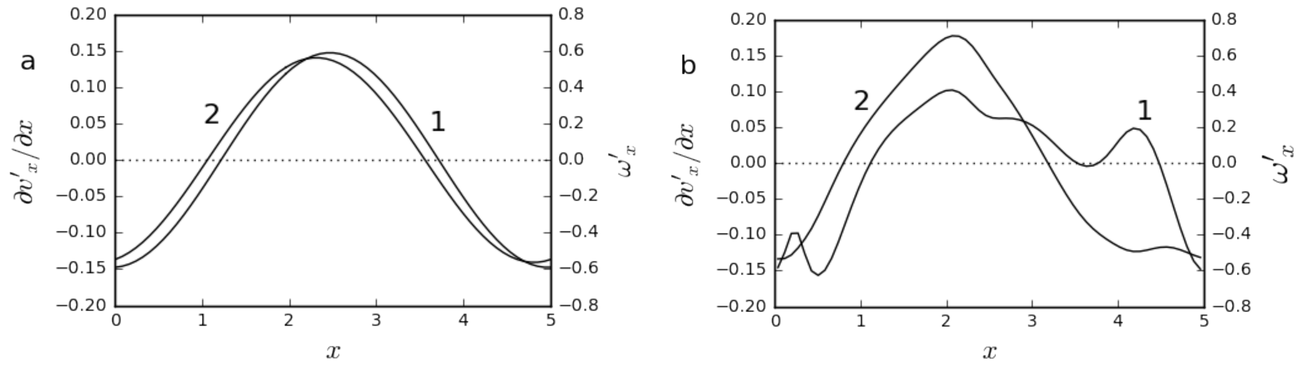

Рис. 4.13. Значения $\partial v'_x/\partial x$ (кривая 1) и ω'_x (кривая 2) на прямой, где Ω_x достигает максимума, $r = 0.75, \theta = \pi/10$: (a) — для пульсаций, полученных в линейном приближении; (b) — для пульсационной составляющей движения.

Работать удобнее с уравнением баланса квадрата средней продольной завихренности Ω_x^2, получаемым умножением уравнения (3.3) на $2\Omega_x$. Положительное значение источниковых членов в этом уравнении говорит об их положительном вкладе, а отрицательное значение — об отрицательном. Значение слагаемых (3.4), умноженных на $2\Omega_x$, приведено на Рисунке 4.12(b). Значение суммы других слагаемых в правой части (3.3), умноженных на $2\Omega_x$, приведено на Рисунке 4.12(c). Слагаемые (3.4) определяют форму поля Ω_x в области расположения продольных вихрей, другие источниковые слагаемые дают преимущественно отрицательный вклад в подержание продольной завихренности и по амплитуде значительно уступают выделенному слагаемому. Таким образом, нет сомнений, что и в этом случае за образование продольных вихрей отвечают слагаемые (3.4). Пульсации, полученные в рамках линеаризованных уравнений, $\mathbf{v}_1$ также воспроизводят описанный механизм образования продольных вихрей, но имеют более простую форму (их поле скорости меняется вдоль трубы по гармоническому закону), что делает их привлекательным объектом для анализа.

Между собой слагаемые (3.4) оказываются равны в силу периодичности поля скорости вдоль потока, поэтому мы ограничимся анализом второго из слагаемых. Отличие от нуля этого слагаемого говорит о наличие корреляции между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности, причем эта корреляция такова, что в области расположения положительного вихря ω'_x и $\partial v'_x/\partial x$ имеют положительную корреляцию, а в области расположения отрицательного вихря — отрицательную, что позволяет

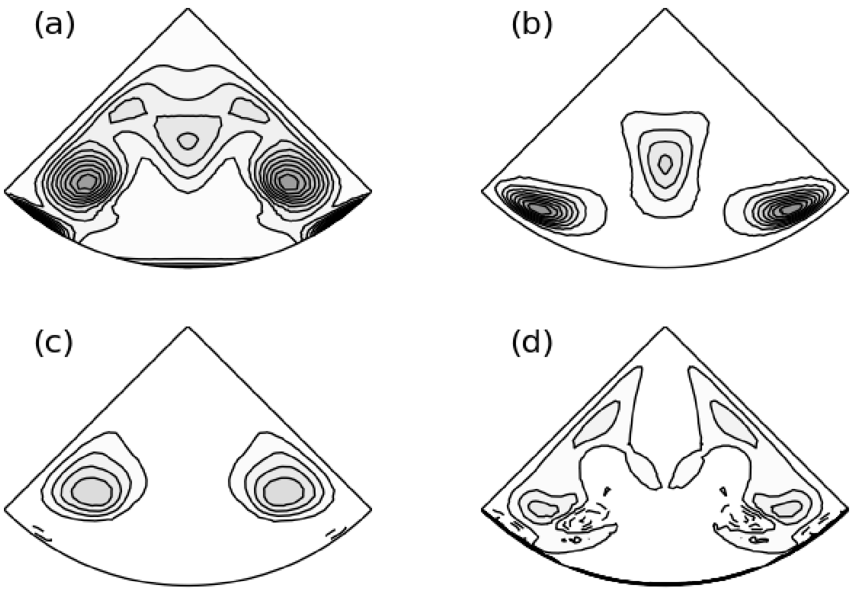

Рис. 4.14. Образование пульсаций продольной завихренности в решении, имеющем вид бегущей волны, принадлежащем верхней ветви, $\mathrm{Re} = 1700$: средний квадрат пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x \omega'_x}^x$ (a), вклад в производство $\overline{\omega'_x \omega'_x}^x$ слагаемых, соответствующих слагаемым (3.8) (b), слагаемому (3.9) (c) и сумме остальных слагаемых в правой части (3.7) (d). Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для (b) – (d). Сплошные линии — положительные значения, прерывистые — отрицательные.

поддерживать существование этих вихрей. Для того, чтобы продемонстрировать наличие корреляции, на Рисунке 4.13 приведено значение ω'_x и $\partial v'_x/\partial x$ на прямой, параллельной оси x, проходящей через центр положительного вихря, $r = 0.75, \theta = \pi/10$. На Рисунке 4.13(a) приведены значения для пульсаций, полученных в рамках линеаризованных уравнений, $\mathbf{v}'_1$. Кривые меняются вдоль потока по гармоническому закону и оказываются в фазе друг с другом, что обеспечивает наибольшую эффективность производства Ω_x. На Рисунке 4.13(b) приведены аналогичные значения для пульсационной составляющей движения $\mathbf{v}'_{\mathrm{tw,ub}}$. Хотя в сравнении с линейным случаем или со случаем аналогичного решения с нижней ветви (смотри Рисунок 3.5) графики имеют значительно более сложную форму, между ними также имеется существенная корреляция (кривые достигают наибольшего и наименьшего значения в близких точках). Наличие корреляции объясняет механизм образования пульсаций продольной завихренности ω'_x, общий во всех рассматриваемых решениях.

В уравнении (3.7) за образование пульсаций продольной завихренности ω'_x в области расположения продольных вихрей ответственно слагаемое (3.9), отписывающее эффект сжатия и растяжения существующих в потоке вихревых трубок, вызванного пульсациями продольной скорости. Для того, чтобы продемонстрировать вклад слагаемого (3.9) в образование ω'_x, обратимся к уравнению баланса среднего квадрата пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^x$, полученного умножением (3.7) на $2\omega'_x$ с последующим определением по x. Слагаемые в этом уравнении зависят только от r и θ, положительное значение источниковых членов в этом уравнении говорит об их содействии образованию ω'_x, а отрицательное — о противодействии. На Рисунке 4.14 приведено значение $\overline{\omega'_x\omega'_x}$ (a) и вклада в его образование со стороны слагаемых, соответствующих (3.8), (b), слагаемого, соответствующего (3.9), (c) и слагаемых, соответствующих сумме других слагаемых в правой части уравнения (3.7). Наибольший вклад в образование ω'_x дают слагаемые (3.8), отвечающие за поворот нормальных к стенке вихревых нитей на фоне нормального к стенке градиента скорости. Хотя эти слагаемые имеют существенное значение вблизи области расположения продольных вихрей, они не участвуют в поддержании продольных вихрей, так как пульсации, формируемые этими слагаемыми, согласованы с пульсациями продольной скорости таким образом, что их нелинейное взаимодействие близко к нулю (см. параграф 3.3). Образование пульсаций ω'_x в области расположения продольных вихрей связано со слагаемым (3.9). Именно это слагаемое обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности. Другие источниковые слагаемые в области расположения продольных вихрей имеют как положительное, так и отрицательное значение, и существенного влияния на образование ω'_x в интересующей нас области не оказывают.

Для верхней ветви решений, имеющих вид бегущей волны, механизм образования колебаний оказывается таким же, как и для других исследованных решений за тем исключением, что среднее поле скорости оказывается линейно устойчивым. Тем не менее, эта особенность решения не говорит о том, что механизм передачи энергии в пульсационную составляющую движения отличается от линейного.

4.5. Семейства трехмерных бегущих волн в плоском течении Пуазейля

В работе исследованы некоторые случаи движения жидкости в плоском канале. Постановка задачи о движении жидкости в плоском канале во многом аналогична постановке задачи о движении жидкости в круглой трубе. Решаются уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (1.1) и уравнение неразрывности (1.2) в прямоугольной системе координат; x, y, z — продольная, нормальная к стенке и поперечная координаты. Полуширина канала равна H. На стенках канала $y = 0$ и $y = 2H$ ставится условие прилипания. В направлениях x и z движение считается периодическим. Дополнительно на решение накладываются условия отражения относительно плоскостей $y = H$ и $z = 0$:

$$(v_x, v_y, v_z)(x, H + y, z) = (v_x, -v_y, v_z)(x, H - y, z), \tag{4.9}$$

$$(v_x, v_y, v_z)(x, y, z) = (v_x, v_y, -v_z)(x, y, -z). \tag{4.10}$$

Условие (4.9), эквивалентное условию проскальзывания на плоскости $y = H$, исключает влияние каждой из стенок на движение жидкости вблизи противоположной стенки. Условие (4.10) исключает смещение возникающих в потоке структур в направлении z и фиксирует их положение в пространстве. Расчетная область, таким образом, имеет форму параллелепипеда размера $L_x \times H \times L_z$, где L_x — период изменения решения в направлении x, L_z — половина периода изменения решения в направлении z. Жидкость приводится в движение продольным градиентом давления, определяемым из условия постоянства расходной скорости U_m. Задача решается численно конечно-разностным методом, аналогичным методу, описанному в параграфе 1.2. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = UH/\nu$ вводится через полуширину канала H, максимальную скорость в течении Пуазейля $U = 3/2U_m$ и кинематический коэффициент вязкости ν.

Условия (4.9) и (4.10) аналогичны условиям (2.1) и (2.2), примененным при исследовании движения жидкости в круглой трубе. Упрощая поведение решения, эти условия позволяют найти в плоском течении Пуазелйя решения, имеющие вид бегущей волны. Все рассматриваемые в этом параграфе решения получены при $L_x = 5H$. Обнаружено, что при $L_z = 1{,}2H$, $\mathrm{Re} = 2000$ вид бегущей волны имеет предельное состояние решения, эволюционирующего на

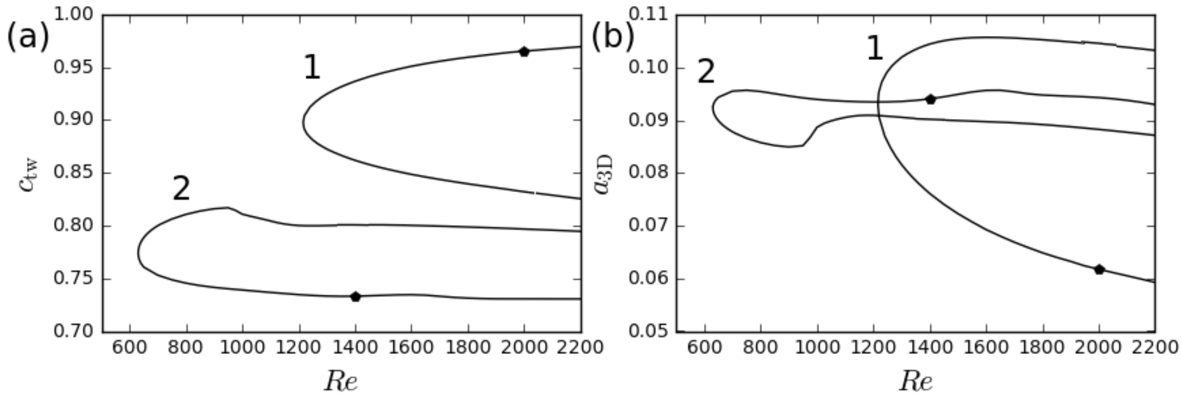

Рис. 4.15. Продолжение по числу Рейнольдса решения, найденного на сепаратрисе, (1) и устойчивого решения (2), имеющих вид бегущей волны: зависимость фазовой скорости c_{tw} (a) и амплитуды трехмерной составляющей движения $\mathbf{v}_{3\text{D}}$ (b) от числа Рейнольдса. Точки соответствуют исходным решениям, найденным отличным от продолжения по параметра методом.

сепаратрисе. Фазовая скорость бегущей волны равна $c_{\text{tw}} = 0.97U$. Алгоритм поиска решения на сепаратрисе описан в параграфе 2.1. Также обнаружено, что при $L_z = H$, $\text{Re} = 1400$ существует устойчивое решение в виде бегущей волны (при наложенных условиях симметрии). Это решение может быть получено прямым интегрированием уравнений движения по времени с некоторыми случайными начальными данными. Его фазовая скорость равна $c_{\text{tw}} = 0.73U$. Оба решения получены на расчетной сетке, содержащей $64 \times 40 \times 32$ ячеек. В нормальном к стенке направлении введено сгущение сетки таким образом, что высота ячейки вблизи стенки в 4 раза меньше, чем в центре канала.

Продолжение найденных бегущих волн по числу Рейнольдса позволило получить два семейства решений. В процессе продолжения по числу Рейнольдса поле скорости бегущей волны и ее фазовая скорость определяются однозначно — решения принадлежат однопараметрическому множеству (см. рис. 4.15). Обнаружено, что бегущая волна, найденная на сепаратрисе, и устойчивая бегущая волна порождают различные семейства решений. Эти семейства возникают в результате бифуркации при $\text{Re} \approx 1200$ и $\text{Re} \approx 630$ и имеют по две ветви — нижнюю и верхнюю. Для решений с нижней ветви в сравнении с решениями с верхней ветви характерна большая фазовая скорость и меньшая амплитуда колебаний. Фазовая скорость решений приведена на рис. 4.15(a), амплитуда трехмерной составляющей движения $\mathbf{v}_{3\text{D}} = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}^{x,z}$ — на рис. 4.15(b). Бегущая волна, найденная на сепаратрисе, принадлежит нижней ветви соответствующего семейства (точка на кривой 1), а устойчивая бегущая волна — верхней (точка на кривой 2). Для того, чтобы составить представление о нижней и верхней ветвях каждого семейства решений, выполним более подробный анализ четырех решений, которые мы будем именовать решениями А, Б, В, Г: бегущей волны, найденной на сепаратрисе, (А) и соответствующей ей бегущей волны с верхней ветви с тем же значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2000$ (Б); устойчивой бегущей волны (Г) и соответствующей ей бегущей волны с нижней ветви с тем же значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1400$ (В). Фазовая скорость бегущих волн Б и В составляет $c_{\mathrm{tw}} = 0.82U$ и $0.8U$, соответственно. Выбранные для анализа решения существенно отличаются друг от друга, но воспроизводят общие элементы цикла поддержания колебаний.

Разделим поле скорости бегущих волн $\mathbf{v}_{\mathrm{tw}}$ на среднюю $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}} = \overline{\mathbf{v}_{\mathrm{tw}}}^x$ и пульсационную $\mathbf{v}'_{\mathrm{tw}} = \mathbf{v}_{\mathrm{tw}} - \mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$ составляющие осреднением по продольной координате x. Во всех случаях средняя составляющая движения включает полосы повышенной и пониженной скорости. Распределение средней скорости приведено на рис. 4.16 в первом столбце. В центральной части расчетной области, где медленная жидкость проникает ближе к центру канала (верхней границе расчетной области), расположены полосы пониженной скорости. При больших и меньших значениях z на границах расчетной области расположены полосы повышенной скорости. Существование полос во всех решениях поддерживается слабым движением в нормальной к основному потоку плоскости. Распределение средней поперечной скорости, представленное на рис. 4.16 во втором столбце, соответствует наличию стационарных продольных вихрей, поддерживающих существование полос. Там, где медленная жидкость движется от стенки, находятся полосы пониженной скорости. Там, где жидкость движется ближе к стенке — полосы повышенной скорости. В решении А средняя поперечная скорость не превышает $0.005U$, в решениях Б и В — $0.04U$, в решении Г — $0.08U$. Интенсивность поперечного движения в различных решениях отличается почти в 20 раз.

Колебания во всех решениях оказываются сконцентрированы в областях, где градиент средней продольной скорости имеет наибольшее значение — между полосами повышенной и пониженно скорости. Амплитуда пульсаций приведе-

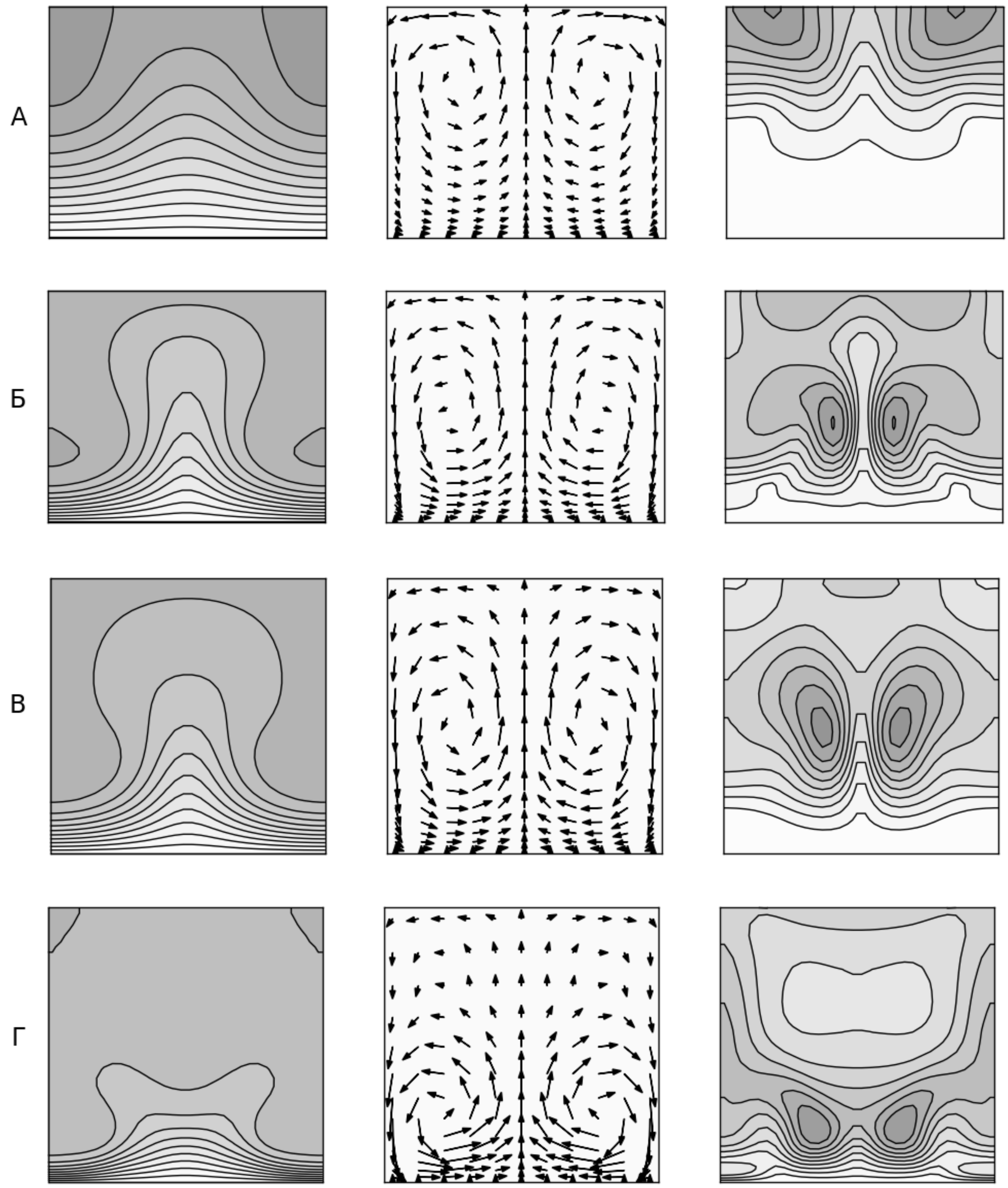

Рис. 4.16. Поле скорости нескольких бегущих волн: изолинии средней продольной скорости (столбец 1), векторное поле средней поперечно скорости (столбец 2) и линии равного уровня амплитуды колебаний (столбец 3) в сечении $x = 0$. Каждая строка соответствует одному решению. Твердая стенка внизу.

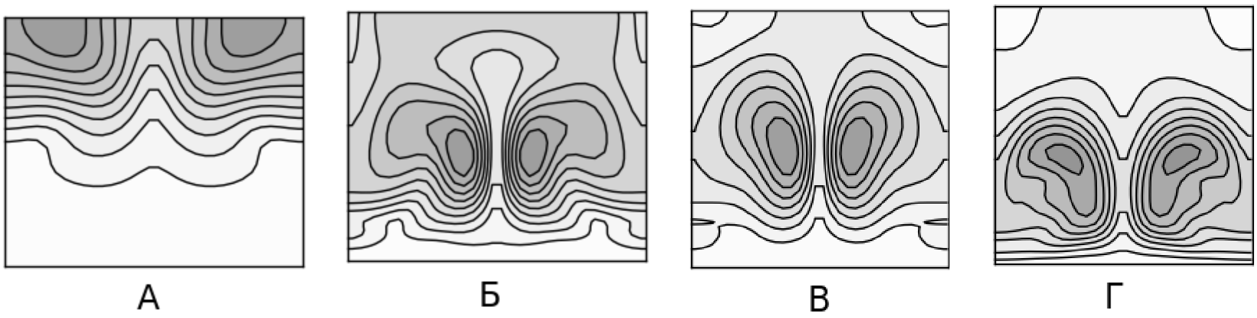

Рис. 4.17. Линии равного уровня амплитуды колебаний для собственных решений линейной задачи устойчивости среднего течения нескольких бегущих волн. Твердая стенка внизу.

на на рис. 4.16 в третьем столбце. В решении А, найденном на сепаратрисе, пульсации достигают максимума в центральной части канала, на наибольшем удалении от стенки. Максимальное значение амплитуды колебаний составляет $0.025U$. В других решениях пульсации достигают максимума ближе к твердой стенке, а максимальная амплитуда колебаний оказывается выше: $0.06U$ для решения Б, $0.083U$ для решения В и $0.15U$ для решения Г. Амплитуда колебаний в решении А отличается от амплитуды колебаний в решении Г почти в 10 раз.

Мы полагаем, что во всех случаях пульсации образуются в результате линейной неустойчивости полосчатого движения. Среднее поле скорости решения А оказывается линейно неустойчивым. Инкремент нарастания наиболее быстро растущего собственного решения равен $\lambda_1 = 0.0001U/H$. Собственная функция наиболее быстрорастущего решения с большой точностью повторяет форму пульсационной составляющей движения и ее фазовую скорость, что позволяет сделать вывод о том, что пульсации в решении возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения. Амплитуда колебаний для наиболее быстрорастущей собственной функции приведена на рис. 4.17(А), ее фазовая скорость равна $c_1 = 0.97U$.

Среднее поле скорости решения Б оказывается устойчивым к малым возмущениям (имеющим $5R$ периодичность вдоль трубы), однако и в этом случае наиболее медленно затухающее собственное решение повторяет форму пульсационной составляющей движения и имеет близкую фазовую скорость. Декремент затухания собственного решения равен $\lambda_1 = -0.0008U/R$, фазовая скорость $c_1 = 0.7U$, амплитуда колебаний для соответствующей собственной функции приведена на рис. 4.17(Б). Линейная устойчивость среднего течения не противоречит представлению о том, что механизм передачи энергии в пульсационную составляющую движения является линейным. Градиенты в среднем поле скорости несколько ниже, чем в неосредненном, соответственно, среднее поле скорости более устойчиво, чем неосредненное.

Среднее поле скорости решения В оказывается линейно неустойчивым и собственная функция, соответствующая наиболее быстрорастущему собственному решению, с большое точностью повторяет форму пульсационной составляющей движения и ее фазовую скорость. Инкремент нарастания наиболее быстрорастущего решения равен $\lambda_1 = 0.0059U/H$, его фазовая скорость $c_1 = 0.79U$, амплитуда колебаний приведена на рис. 4.17(В).

Поле скорости решения Г также оказывается линейно неустойчивым. В этом случае собственная функция, соответствующая наиболее быстрорастущему собственному решению, не так точно повторяет форму пульсационной составляющей движения, но воспроизводит ее основные черты. В частности, собственная функция соответствует синусоидальной неустойчивости (возмущения антисимметричны относительно плоскости $z = Z_{\max}/2$, проходящей через полосу пониженной скорости); пульсации оказываются сосредоточены между полосами повышенной и пониженной скорости; близки значения фазовых скоростей. Инкремент нарастания наиболее быстрорастущего собственного решения равен $\lambda_1 = 0.0081U/H$, его фазовая скорость равна $c_1 = 0.7U$, амплитуда колебаний приведена на рис. 4.17(Г). Значительные различия в форме пульсационной составляющей движения и собственной функции линейной задачи устойчивости, по-видимому, связаны с существенной ролью нелинейных слагаемых в эволюции пульсационной составляющей движения ввиду их большой амплитуды.

За образование стационарных продольных вихрей во всех исследованных решениях отвечает выделенный в главе 3 механизм. Продольным вихрям соответствуют области концентрации положительной и отрицательной средней продольной завихренности Ω_x. Для того, чтобы установить механизм образования продольных вихрей, обратимся к уравнению баланса средней продольной завихренности (3.2). В скалярных переменных в декартовой системе координат

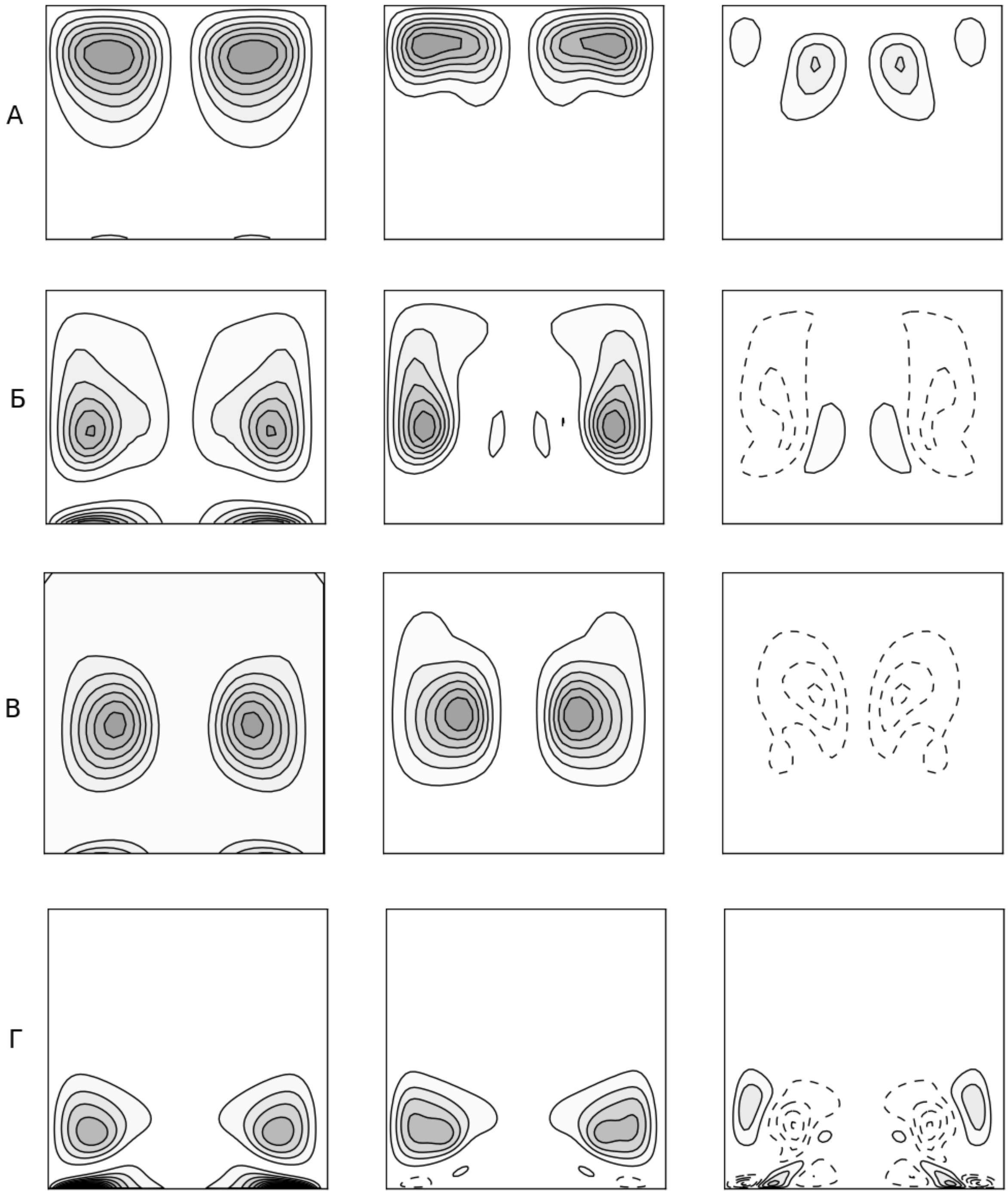

Рис. 4.18. Механизм образования продольных вихрей: распределение квадрата средней продольной завихренности Ω_x^2 (столбец 1), вклад в образование Ω_x^2 со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.4) (столбец 2) и сумме других слагаемых в правой части (3.3) (столбец 3). Каждая строка соответствует одному решению. Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим для второго и третьего рисунков в каждой строке. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые – отрицательные. Твердая стенка внизу.

это уравнение имеет вид:

$$
\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + V_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial z^2} \right) = \\
- \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^x - \overline{v'_y \frac{\partial \omega'_x}{\partial y}}^x - \overline{v'_z \frac{\partial \omega'_x}{\partial z}}^x + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^x + \overline{\omega'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}}^x + \overline{\omega'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z}}^x . \quad (4.11)
$$

Здесь V_y, V_z — нормальная к стенке и трансверсальноая компоненты средней скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$, (v'_x, v'_y, v'_z) и $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ — компоненты пульсационных составляющих скорости $\mathbf{v}'$ и завихренности $\boldsymbol{\omega}' = \operatorname{rot} \mathbf{v}'_{\mathrm{tw}}$. Второе, третье и четвертое слагаемые в левой части уравнения отвечают за конвекцию Ω_x в плоскости поперечного сечения и эффект вязкости. Слагаемые в правой части уравнения ответственны за производство средней продольной завихренности, обусловленное наличием пульсаций скорости. Обнаружено, что определяющий вклад в производство средней продольной завихренности вносят только два слагаемых:

$$
- \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^x + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^x . \quad (4.12)
$$

В силу продольной периодичности оба слагаемых тождественно равны друг другу. Для того, чтобы продемонстрировать роль выделенных слагаемых, обратимся к уравнению баланса квадрата средней продольной завихренности Ω_x^2, полученного умножением (4.11) на $2\Omega_x$. Положительное значение слагаемых в этом уравнении говорит об их положительном вкладе в производство Ω_x, а отрицательное значение — об отрицательном вкладе. Значение слагаемых (4.12), умноженных на $2\Omega_x$, приведено на рис. 4.18 во втором столбце, в третьем столбце приведено значение суммы других слагаемых в правой части (4.11), также умноженных на $2\Omega_x$. Во всех случаях выделенные слагаемые существенно превосходят другие источниковые слагаемые по величине и определяют форму поля средней продольной завихренности, квадрат которой приведен на том же рисунке в первом столбце. Значение других источниковых членов в решении А дает незначительной положительный вклад в производство Ω_x. В решении В они, напротив, дают незначительный отрицательный вклад. В решениях Б и Г другие слагаемые дают достаточно существенный как положительный, так и отрицательный вклады, но их суммарный эффект также близок к нулю.

Отличие от нуля слагаемых (4.12) говорит о наличии корреляции между пульсациями продольной скорости и пульсациями продольной завихренности.

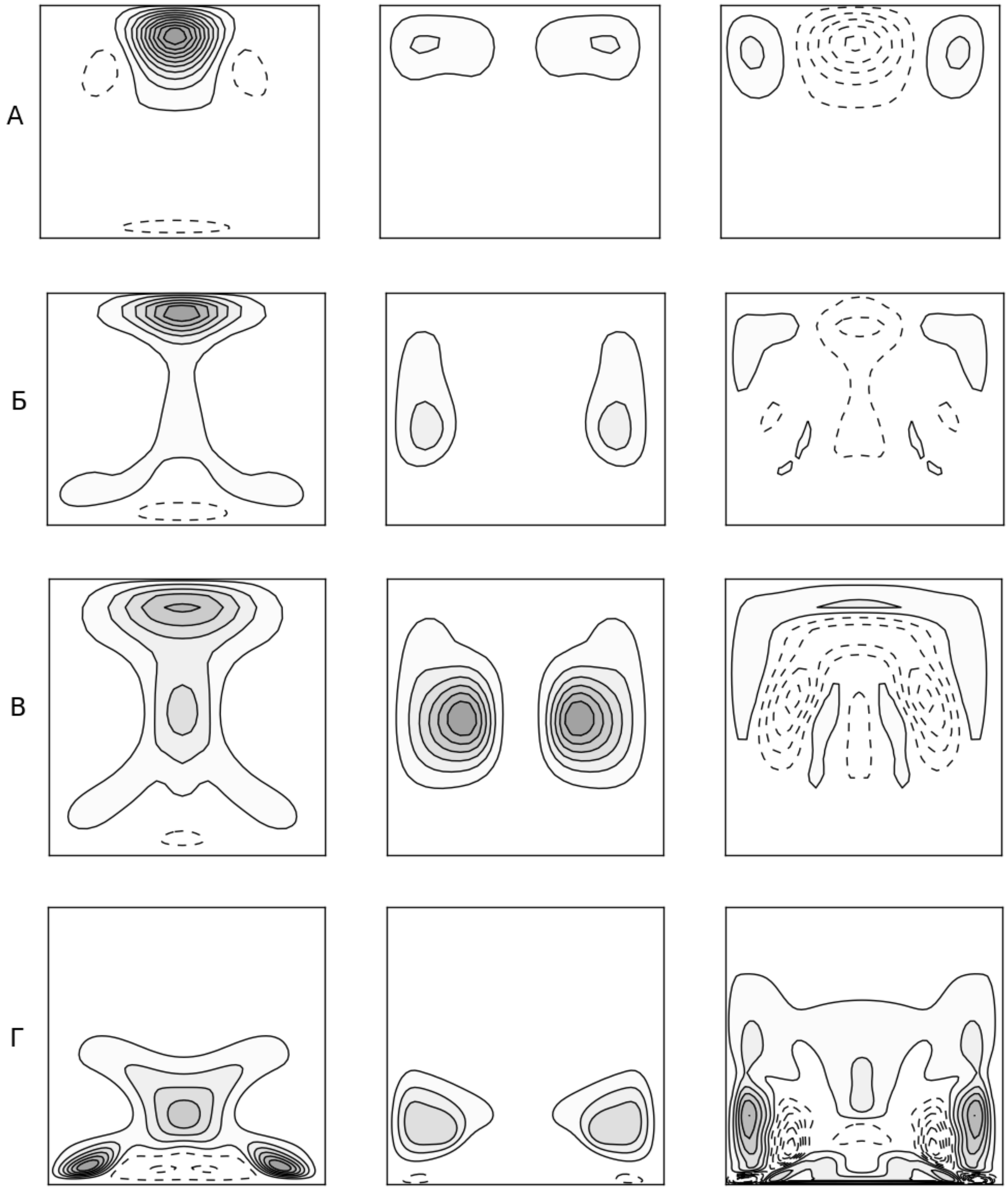

Рис. 4.19. Механизм образования пульсаций продольной завихренности: вклад в образование $\overline{\omega'_x \omega'_x}^x$ со стороны слагаемых, соответствующих слагаемым (3.8) (столбец 1), слагаемому (3.9) (столбец 2) и сумме других слагаемых в правой части (3.3) (столбец 3). Каждая строка соответствует одному решению. Изолинии построены с постоянным шагом, совпадающим внутри каждой строки. Сплошные линии — положительные значения, прерывистые – отрицательные. Твердая стенка внизу.

Объяснить наличие такой корреляции позволяет механизм образования пульсаций продольной завихренности. Для того, чтобы установить этот механизм, обратимся к уравнению эволюции пульсационной составляющей продольной завихренности (3.6). В скалярных переменных в декартовой системе координат это уравнение имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} + (V_x - c_{\mathrm{tw}})\frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} - \nu \nabla^2 \omega'_x = \\
&\qquad - v'_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - v'_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} + \Omega_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} + \omega'_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \omega'_z \frac{\partial V_x}{\partial z} - \\
&\qquad\quad - v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - v'_y \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - v'_z \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} + \omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \omega'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \omega'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} + \\
&\qquad\quad + \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^x + \overline{v'_y \frac{\partial \omega'_x}{\partial y}}^x + \overline{v'_z \frac{\partial \omega'_x}{\partial z}}^x - \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^x - \overline{\omega'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}}^x - \overline{\omega'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z}}^x . \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Здесь V_x — средняя продольная скорость, Ω_y, Ω_z — нормальная к стенке и трансверсальная компоненты средней завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{V}_{\mathrm{tw}}$. Второе, третье и четвертое слагаемые в правой части уравнения (4.13) отвечают за конвекцию пульсаций продольной скорости. Уравнение записано в системе отсчета, перемещающейся со скоростью бегущей волны c_{tw}. Последнее слагаемое в левой части уравнения описывает эффект вязкости. Слагаемые в правой части уравнения описывают различные механизмы образования пульсаций продольной завихренности. В этом уравнении мы выделяем две группы слагаемых, играющих наиболее существенную роль в поддержании ω'_x:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = \omega'_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} + \qquad (4.14)$$

$$+ \Omega_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \ldots \qquad (4.15)$$

Слагаемые (4.14) отвечают за поворот нормальных к стенке вихрей на фоне нормального к стенке градиента скорости и дают существенный вклад в поддержание пульсаций ω'_x, но производимые этими слагаемыми пульсации ω'_x не могут участвовать в поддержании продольных вихрей, так как не имеют необходимой для этого согласованности фаз с пульсациями v'_x (подробности в параграфе 3.3). Доминирующую роль в поддержании пульсаций ω'_x в области расположения продольных вихрей играет слагаемое (4.15). Именно это слагаемое обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз.

Для того, чтобы получить представление о роли различных слагаемых уравнения (4.13) в формирование ω'_x, обратимся к уравнению баланса среднего квадрата пульсаций продольной завихренности $\overline{\omega'_x\omega'_x}^x$, полученного умножением (4.13) на $2\omega'_x$ с последующим осреднением по x. Слагаемые в этом уравнении зависят только от y и z, что дает возможность привести их значение на рисунках. Положительное значение источниковых членов в этом уравнении говорит об их положительном вкладе в поддержание ω'_x, а отрицательное значение — об отрицательном вкладе. На рис. 4.19 в первом столбце приведено значение слагаемых (4.14), осредненные по x вместе с $2\omega'_x$, во втором столбце приведено значение слагаемого (4.15), осредненного по x вместе с $2\omega'_x$, а в третьем столбце приведено значение суммы других слагаемые из правой части (4.13), также осредненных по x вместе с $2\omega'_x$. Хотя слагаемые (4.14) дают существенный вклад в производство ω'_x, в области расположения продольных вихрей их влияние незначительно. Зато вклад слагаемого (4.15) сосредоточен именно в области расположения продольных вихрей и определяет форму пульсаций ω'_x в этой области. Другие источниковые члены на месте продольных вихрей дают существенный как положительный, так и отрицательный вклад, но их суммарное влияние близко к нулю. Кроме того, именно слагаемое (4.15) дает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз между ω'_x и v'_x. Даже если другие слагаемые из правой части (4.13) оказывают существенное влияние на форму пульсаций ω'_x, эти изменения формы в значительно меньшей степени влияют на значение слагаемых (4.12), поддерживающих существование продольных вихрей.

Слагаемое (4.15) отвечает за растяжение и сжатие существующих в потоке вихревых нитей, обусловленное наличием пульсаций продольной скорости. Это слагаемые стремится произвести пульсации ω'_x, пропорциональные пульсациям $\partial v'_x/\partial x$, причем коэффициентом пропорциональности выступает Ω_x. Соответственно, в области расположения положительного вихря пульсации ω'_x и $\partial v'_x/\partial x$ положительно пропорциональны, а в области расположения отрицательного — отрицательно пропорциональны. Именно такое соотношение фаз обеспечивает наибольшую эффективность поддержания продольных вихрей.

Подробности в параграфе 3.3.

Таким образом, все основные элементы механизма поддержания колебаний в исследованных бегущих волнах в плоском течении Пуазейля совпадают с выделенными в первой части работы при исследовании модельного порыва. Можно отметить несколько отличий. Во-первых, в случае решения Б среднее течение оказалось линейно устойчивым, но это не противоречит тому, что энергия в пульсационную составляющую движения передается линейным механизмом. То, что механизм передачи энергии действительно линейный, подтверждается тем, что собственная функция, соответствующая наиболее медленно затухающему решению, и в этом случае с высокой точностью повторяет форму и фазовую скорость пульсационной составляющей движения. Во-вторых, в случае решения Г собственная функция, соответствующая наиболее быстрорастущему собственному решению линейной задачи устойчивости среднего течения, не очень точно повторяет форму пульсационной составляющей движения. По-видимому, такая особенность объясняется высокой амплитудой колебаний в этом случае и существенной ролью нелинейных слагаемых в уравнении эволюции пульсационной составляющей движения. Качественное согласие между решением линейной задачи и пульсационной составляющей движения и в этом случае сохраняется. В-третьих, слагаемое (3.9) в уравнении (3.7) оказывается не единственным, оказывающим существенное влияние на форму ω_x' в области расположения продольных вихрей. Тем не менее, именно это слагаемое порождает пульсации ω_x', согласованные с v_x' необходимым для поддержания продольны вихрей образом, и именно это слагаемое имеет постоянное значение во всей области существования продольны вихрей.

4.6. Выводы по главе

В главе представлены результаты исследования нескольких семейств инвариантных решений уравнений Навье-Стокса. Продолжение модельного порыва по параметру позволило получить семейство условно периодических решений с пространственно-локализованной структурой. В геометрии круглой трубы и плоского канала найдено несколько семейств решений, имеющих вид бегущей волны. Найденные решения существенно отличаются друг от друга по форме, интенсивности различных компонент движения, геометрии расчетной области. Тем не менее, все найденные решения воспроизводят общий механизм поддержания колебаний, согласующийся с механизмом поддержания колебаний, выделенном при исследовании модельного порыва, что в некотором смысле говорит об универсальности этого механизма. Некоторые различия в деталях не противоречат уже сложившимся представлениям о нем. То обстоятельство, что выделенный в течении Гагена-Пуазейля механизм поддержания колебаний ответственен также за поддержание колебаний в плоском течении Пуазейля, говорит об отсутствие существенного влияния кривизны стенки на этот механизм. То, что выделенный механизм отвечает за поддержание колебаний в решениях, имеющих вид бегущей волны, говорит об отсутствии существенного влияния не этот механизм пространственно-локализованной структуры решения. Отметим также, что все исследованные решения найдены при схожих условиях симметрии. Существует возможность того, что при других условиях симметрии или в их отсутствии структура течения может качественно измениться.

Заключение

В геометрии течения в круглой трубе рассчитан модельный порыв — условно периодическое решение уравнений Навье-Стокса с пространственно-локализованной структурой, являющееся предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Описана внутренняя структура модельного порыва и его основные характеристики. Показано, что модельный порыв воспроизводит ряд качественных особенностей турбулентных порывов, наблюдаемых в круглых трубах при переходных числах Рейнольдса. Также, как в турбулентном порыве, в модельном порыве можно выделить вытянутые вдоль потока полосы повышенной и пониженной скорости, но если в первом случае эти полосы перемещаются вдоль стенки и их сплошность разрываются флуктуирующей составляющей движения, то во втором случае они сохраняют свое положение в пространстве и подвержены лишь небольшим колебаниям. Простое временное поведение модельного порыва позволило выполнить его детальное исследование. Полученные при исследовании модельного порыва результаты, мы полагаем, будут полезны для понимания турбулентного порыва.

Установить универсальность наблюдаемых в модельном порыве закономерностей движения позволяет анализ других инвариантных решений Навье-Стокса, рассчитанных в работе. Методом продолжения по параметру рассчитано соответствующее модельному порыву семейство условно периодических решений уравнений Навье-Стокса с пространственно-локализованной структурой. В частности, найдены решения, оказывающиеся по ряду качественных характеристик ближе к турбулентному порыву, чем модельный порыв. Можно ожидать, что выводы, сделанные на основе исследования модельного порыва и этих решений имеют большее отношение к турбулентному порыву, чем выводы, сделанные при исследовании только модельного порыва. Также в геометрии течения в круглой трубе и течения в плоском канале найдено три семейства решений, имеющих вид бегущей волны. Анализ всех найденных решений позволяет сформулировать идеализированный цикл поддержания колебаний в такого рода решениях.

Поле скорости каждого решения может быть представлено в виде суммы средней и пульсационной составляющих. Во всех исследованных решениях в среднем течении существуют вытянутые вдоль потока полосы повышенной и пониженной скорости, чередующиеся в угловом (поперечном) направлении. В случае решения в виде бегущей волны среднее поле скорости не зависит от продольной координаты и, соответственно, полосы имеют неограниченную протяженность. В случае решений с пространственно-локализованной структурой полосы имеют ограниченную протяженность. Возбуждение пульсаций связано с линейной неустойчивостью среднего течения. Колебания оказываются сконцентрированы в промежуточных областях между соседними полосами повышенной и пониженной скорости. В этих областях распределение среднее продольной скорости имеет точки перегиба, если рассматривать его как функцию угловой (поперечной) координаты, что позволяет связать неустойчивость среднего течения с неустойчивость струйных течений с точками перегиба. За поддержание полос ответственны продольные вихри, перемещающие жидкость в нормальной к основному потоку плоскости.

Существенным результатом работы является описание нелинейного механизма поддержания продольных вихрей. Показано, что во всех решениях продольные вихри образуются в результате нелинейного взаимодействия пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности. Пульсации продольной завихренности в области расположения продольных вихрей образуются за счет сжатия и растяжения существующих вихревых трубок пульсациями продольной скорости, что обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз между этими пульсациями. Отметим, что продольные вихри образуются в областях возникновения пульсаций, между полосами повышенной и пониженной скорости, так как именно в этих областях пульсации имеют наибольшую амплитуду и средняя скорость жидкость совпадает с фазовой скоростью пульсаций, что необходимо для образования пульсаций продольной завихренности описанным механизмом. Таким образом, продольные вихри образуются в промежуточной области между полосами повышенной и пониженной скорости, оказываясь расположенными наиболее удачным образом для поддержания существования этих полос.

Наиболее быстрорастущее решение линейной задачи устойчивости среднего течения также воспроизводит описанный механизм поддержания продольных вихрей, но только в том случае, если при анализе среднего течения на устойчивость учтена не только продольная но и поперечная компоненты средней скорости. Принято считать, что поперечная компонента движения, поддерживая угловую (поперечную) неоднородность среднего течения, не оказывает существенного влияния на характеристики устойчивости среднего течения. Мы видим, что учет поперечной компоненты среднего течения необходим для адекватного воспроизведения механизма поддержания колебаний.

Полосчатые структуры являются неотъемлемым элементом всех сценариев самоподдержания турбулентности в пристенных течениях, что говорит о вероятной близости выделенного в работе механизма с механизмом самоподдержания однородной (нелокализованной) пристенной турбулентности. На следующем этапе выполнения работы необходимо установить применимость сделанных выводов к турбулентному порыву и к более широкому классу пристенных турбулентных течений. Для этого, по-видимому, необходимо разработать метод промежуточного осреднения, позволяющий выделить в реальном турбулентном течении крупномасштабные и мелкомасштабные структуры. Это позволит обобщить рассуждения, применяемые в работе, на такого рода течения. Имея представления о механизме поддержания колебаний можно предложить эффективные стратегии управления турбулентными течениями с целью снижения или увеличения интенсивности колебаний. Эти стратегии также могут быть опробованы на реальных пристенных турбулентных течениях (численно), и в зависимости от их эффективности могут быть сделаны выводы о роли выделенных механизмов в поддержании такого рода режимов течения. В случае, если разработанные стратегии управления турбулентными потоками покажут себя эффективными, они имеют собственную значительную ценность.

Список литературы

1. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall he direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1883. — Vol. 174. — P. 935–982.

2. Wygnanski I.J., Champagne F.H. On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug // J. Fluid Mech. — 1973. — Vol. 59, no. 2. — P. 281–335.

3. Wygnanski I.J., Sokolov Mo., Friedman D. On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff // J. Fluid Mech. — 1975. — Vol. 69, no. 2. — P. 283–304.

4. Priymak V.G., Miyazaki T. Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow // Phys. Fluids. — 2004. — Vol. 16, no. 12. — P. 4221–4234.

5. Peixinho J., Mullin T. Decay of turbulence in pipe flow // Phys. Rev. Let. — 2006. — Vol. 96, no. 9. — P. 094501.

6. Hof B., Westerweel J., Schneider T.M., Eckhardt B. Finite lifetime of turbulence in shear flows // Nature. — 2006. — Vol. 443, no. 7107. — P. 59.

7. Willis A.P., Kerswell R.R. Critical behavior in the relaminarization of localized turbulence in pipe flow // Phys. Rev. Let. — 2007. — Vol. 98, no. 1. — P. 014501.

8. Hof B., de Lozar A., Kuik D.J., Westerweel J. Repeller or attractor? Selecting the dynamical model for the onset of turbulence in pipe flow // Phys. Rev. Let. — 2008. — Vol. 101, no. 21. — P. 214501.

9. Kuik D.J., Poelma C., Westerweel J. Quantitative measurement of the lifetime of localized turbulence in pipe flow // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 645. — P. 529–539.

10. Avila K., Moxey D., de Lozar A. et al. The onset of turbulence in pipe flow // Science. — 2011. — Vol. 333, no. 6039. — P. 192–196.

11. Shimizu M., Kida S. A driving mechanism of a turbulent puff in pipe flow // Fluid Dyn. Res. — 2009. — Vol. 41, no. 4. — P. 045501.

12. Skufca J.D., Yorke J.A., Eckhardt B. Edge of chaos in a parallel shear flow // Phy. Rev. Let. — 2006. — Vol. 96, no. 17. — P. 174101.

13. Avila M., Mellibovsky F., Roland N., Hof B. Streamwise-localized solutions at the onset of turbulence in pipe flow // Phys. Rev. Let. — 2013. — Vol. 110, no. 22. — P. 224502.

14. Kawahara G., Uhlmann M., Van Veen L. The significance of simple invariant solutions in turbulent flows // An. Rev. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 44. — P. 203–225.

15. Hamilton J.M., Kim J., Waleffe F. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures // J. Fluid Mech. — 1995. — Vol. 287. — P. 317–348.

16. Waleffe F. On a self-sustaining process in shear flows // Phys. Fluids. — 1997. — Vol. 9, no. 4. — P. 883–900.

17. Schoppa W., Hussain F. Coherent structure generation in near-wall turbulence // J. Fluid Mech. — 2002. — Vol. 453. — P. 57–108.

18. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys. — 2006. — Vol. 217, no. 2. — P. 759–781.

19. Nikitin N. Third-order-accurate semi-implicit Runge–Kutta scheme for incompressible Navier–Stokes equations // Int. J. Num. Meth. Fluids. — 2006. — Vol. 51, no. 2. — P. 221–233.

20. Chantry M., Willis A.P., Kerswell R.R. Genesis of streamwise-localized solutions from globally periodic traveling waves in pipe flow // Phys. Rev. Let. — 2014. — Vol. 112, no. 16. — P. 164501.

21. Meseguer A., Mellibovsky F. On a solenoidal Fourier–Chebyshev spectral method for stability analysis of the Hagen–Poiseuille flow // App. Num. Math. — 2007. — Vol. 57, no. 8. — P. 920–938.

22. Willis A.P., Kerswell R.R. Turbulent dynamics of pipe flow captured in a reduced model: puff relaminarization and localized ‘edge’states // J. Fluid Mech. — 2009. — Vol. 619. — P. 213–233.

23. Viswanath D. Recurrent motions within plane Couette turbulence // J. Fluid Mech. — 2007. — Vol. 580. — P. 339–358.

24. Dijkstra H.A., Wubs F.W., Cliffe A.K. et al. Numerical bifurcation methods and their application to fluid dynamics: analysis beyond simulation // Comm. Comp. Phys. — 2014. — Vol. 15, no. 1. — P. 1–45.

25. Deardorff James W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J. Fluid Mech. — 1970. — Vol. 41, no. 2. — P. 453–480.

26. Schumann Ulrich. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli // J. Comp. Phys. — 1975. — Vol. 18, no. 4. — P. 376–404.

27. Moin P., Reynolds W.C., Ferziger J.H. Large eddy simulation of incompressible turbulent channel flow: Rep. TF-12. Dept. Mech. Engin., Stanford Univ. — Stanford, California, 1978. — 149 с.

28. Moin P., Kim J. Numerical investigation of turbulent channel flow // J. Fluid Mech. — 1982. — Vol. 118. — P. 341–377.

29. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. — 1987. — Vol. 177. — P. 133–166.

30. Приймак В.Г., Рождественский Б.Л. Вторичные течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе и их статистические свойства // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 6. — С. 1326–1330.

31. Приймак В.Г. Результаты и возможности прямого численного моделирования турбулентных течений вязкой жидкости в круглой трубе // ДАН СССР. — 1991. — Т. 316, № 1. — С. 71–76.

32. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах круглого сечения // Изв. РАН. МЖГ. — 1994. — № 6. — С. 14–26.

33. Никитин Н.В. Статистические характеристики пристенной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. — 1996. — № 3. — С. 32–43.

34. Ahn Junsun, Lee Jae Hwa, Lee Jin et al. Direct numerical simulation of a 30R long turbulent pipe flow at $Re_\tau = 3008$ // Phys. Fluids. — 2015. — Vol. 27, no. 6. — P. 065110.

35. Lee Myoungkyu, Moser Robert D. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$ // J. Fluid Mech.s. — 2015. — Vol. 774. — P. 395–415.

36. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М. : «Наука», 1970. — 288 с.

37. И. Юдович В. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — Ростов-на-Дону : Изд. Ростовского ун-та, 1984. — 192 с.

38. Петров Г. И. Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // ПММ. — 1940. — Т. 4, № 3. — С. 3–11.

39. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Науч. труды Ин-та механики МГУ, №25. — М. : Изд. МГУ, 1973. — 192 с.

40. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений: Монография. — М. : Из-во АСВ, 2009. — 176 с.

41. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М. : «Наука», 1972. — 392 с.

42. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск : «Наука», 1977. — 366 с.

43. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 744 с.

44. Герценштейн С.Я., Шкадов В.Я. Устойчивость неосесимметричных жидких струй // Изв. РАН. МЖГ. — 1973. — № 1. — С. 43–52.

45. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. О взаимодействии волн конечной амплитуды в случае конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 219, № 2. — С. 297–297.

46. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М. : «Наука», 1984. — 285 с.

47. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье–Стокса. — М. : «Наука», 1987. — 271 с.

48. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 1994. — 519 с.

49. Никитин Н.В. Спектрально-конечноразностный метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в трубах и каналах // ЖВМ и МФ. — 1994. — Т. 34, № 6. — С. 909–925.

50. Рождественский Б.Л. О применимости разностных методов решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. — 1973. — Т. 211. — С. 308–311.

51. Rozhdestvensky B.L., Simakin I.N. Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 147. — P. 261–289.

52. Рождественский Б.Л., Стойнов М.И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье–Стокса, имеющие законы сохранения массы, импульса и энергии: Препринт №119. — М. : ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987. — 29 с.

53. Eggels J.G.M., Unger F., Weiss M.H. et al. Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment // J. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 268. — P. 175–210.

54. Avila M., Willis A.P., Hof B. On the transient nature of localized pipe flow turbulence // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 646. — P. 127–136.

55. Song B., Barkley D., Hof B., Avila M. Speed and structure of turbulent fronts in pipe flow // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 813. — P. 1045–1059.

56. Никитин Н.В. Пространственный подход к численному моделированию турбулентности в трубах // ДАН. — 1995. — Т. 343, № 6. — С. 767–770.

57. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50, no. 4. — P. 689–703.

58. Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comp. — 1965. — Vol. 19, no. 90. — P. 297–301.

59. Orszag S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 49, no. 1. — P. 75–112.

60. Rai M., Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes // 27th Aerospace Sciences Meeting. — 1991. — P. 369.

61. Yakhot A., Anor T., Liu H., Nikitin N. Direct numerical simulation of turbulent flow around a wall-mounted cube: spatio-temporal evolution of large-scale vortices // J. Fluid Mech. — 2006. — Vol. 566. — P. 1–9.

62. Yakhot A., Liu H., Nikitin N. Turbulent flow around a wall-mounted cube: A direct numerical simulation // Int. J. Heat Fluid Flow. — 2006. — Vol. 27, no. 6. — P. 994–1009.

63. Holzner M., Liberzon A., Nikitin N. et al. A Lagrangian investigation of the small-scale features of turbulent entrainment through particle tracking and direct numerical simulation // J. Fluid Mech. — 2008. — Vol. 598. — P. 465–475.

64. Demekhin E.A., Nikitin N.V., Shelistov V.S. Direct numerical simulation of electrokinetic instability and transition to chaotic motion // Phys. Fluids. — 2013. — Vol. 25, no. 12. — P. 122001.

65. Kerswell R.R. Recent progress in understanding the transition to turbulence in a pipe // Nonlinearity. — 2005. — Vol. 18, no. 6. — P. R17.

66. Schneider T.M., Eckhardt B., Yorke J.A. Turbulence transition and the edge of chaos in pipe flow // Phy. Rev. Let. — 2007. — Vol. 99, no. 3. — P. 034502.

67. Mellibovsky F., Meseguer A., Schneider T.M., Eckhardt B. Transition in localized pipe flow turbulence // Phy. Rev. Let. — 2009. — Vol. 103, no. 5. — P. 054502.

68. Duguet Y., Willis A.P., Kerswell R.R. Slug genesis in cylindrical pipe flow // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 663. — P. 180–208.

69. De Lozar A., Mellibovsky F., Avila M., Hof B. Edge state in pipe flow experiments // Phys. Rev. Let. — 2012. — Vol. 108, no. 21. — P. 214502.

70. Manneville P. On the decay of turbulence in plane Couette flow // Fluid Dyn. Res. — 2011. — Vol. 43, no. 6. — P. 065501.

71. Никитин Н. В., Пиманов В. О. Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2015. — № 5. — С. 64–75.

72. Никитин Н. В., Пиманов В. О. Локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2015. — Т. 157, кн. 3. — С. 111–116.

73. Пиманов В. О. Пространственно-локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 13–17 октября 2014 г. / Под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 42–50.

74. Пиманов В. О. О механизме самоподдержания локализованных турбулентных структур в трубах // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 12–14 октября 2015 г. / Под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 44–51.

75. Hof B., De Lozar A., Avila M. et al. Eliminating turbulence in spatially intermittent flows // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5972. — P. 1491–1494.

76. Waleffe F. Hydrodynamic Stability and Turbulence: Beyond Transients to a Self-Sustaining Process // Stud. App. Math. — 1995. — Vol. 95, no. 3. — P. 319–343.

77. Jiménez J., Pinelli A. The autonomous cycle of near-wall turbulence // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 389. — P. 335–359.

78. Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W. The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. — 1967. — Vol. 30, no. 04. — P. 741–773.

79. Smith C.R., Metzler S.P. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. — 1983. — Vol. 129. — P. 27–54.

80. Kim H. T., Kline S. J., Reynolds W. C. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50. — P. 133–160.

81. Никитин Н. В., Пиманов В. О. О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — № 1. — С. 68–76.

82. Пиманов В. О. О механизме поддержания колебаний в пристенных турбулентных течениях // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» [Электронный ресурс] / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2018. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Газовая и волновая динамика».— URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/index.htm.

83. Пиманов В. О., Никитин Н. В. О поддержании колебаний в пристенных турбулентных течениях // Турбулентность, динамика атмосферы и климата. Международная конференция, посвященная столетию со дня рождения академика А.М. Обухова. Москва. 16–18 мая 2018 г. Сборник тезисов докладов. — М. : Физматкнига, 2018. — С. 31–31.

84. Craik A.D.D. The generation of Langmuir circulations by an instability mechanism // J. Fluid Mech. — 1977. — Vol. 81, no. 2. — P. 209–223.

85. Hall P., Sherwin S. Streamwise vortices in shear flows: harbingers of transition and the skeleton of coherent structures // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 661. — P. 178–205.

86. Pimanov V. O. Maintenance of Oscillations in Three-Dimensional Traveling Waves in Plane Poiseuille Flows // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, Iss. 4. — P. 91–96.

87. Пиманов В. О. Некоторые детали механизма самоподдержания турбулентности в пристенных течениях // Труды конференции-конкурса молодых ученых 10-12 октября 2016 г. / Под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2017. — С. 46–53.

88. Пиманов В. О. О механизме формирования продольных вихрей в пристенных турбулентных течениях // Материалы Международного молодежного

научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» [Электронный ресурс] / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — М. : МАКС Пресс, 2017. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Гидромеханика».— URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/index.htm.

89. Пиманов В. О., Никитин Н. В. О механизме формирования стационарных продольных вихрей в пристенных турбулентных структурах // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 17–26 апреля 2017 года. Тезисы докладов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2017. — С. 165–166.

90. Пиманов В. О., Никитин Н. В. Эволюция пристенных турбулентных структур в круглых трубах с увеличением числа Рейнольдса // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18–27 апреля 2016 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 143–143.

91. Sánchez J., Net M., Garcıa-Archilla B., Simó C. Newton–Krylov continuation of periodic orbits for Navier–Stokes flows // J. Comp. Phys. — 2004. — Vol. 201, no. 1. — P. 13–33.

92. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. — М. : «Академия», 2007. — 320 с.