РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Математический институт им. В. А. Стеклова
Отдел геометрии и топологии

На правах рукописи
УДК 515.145, 515.172, 514.74

Устиновский Юрий Михайлович

# Топология и геометрия комплексных многообразий с максимальным действием тора.

01.01.04 – Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент РАН, профессор
Бухштабер Виктор Матвеевич

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва – 2014

# Оглавление

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Настоящая диссертация посвящена пространствам с действием тора $T^m = (S^1)^m$. Исследуется топология таких пространств, изучается возможность введения гладких и комплексно-аналитических структур на пространствах с действием "большого" тора $T^m$, решаются некоторые вопросы касательно геометрии комплексных структур в случае их существования.

Объекты, обладающие богатой группой симметрией, на протяжении последних 30 лет привлекают особенное внимание [57]. Развитию интереса к пространствам с действием торов $T^m$ способствовало появление *торической геометрии* — науки об алгебраических многообразиях, допускающих действие алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ с открытой плотной орбитой [7; 61]. Наличие большой группы симметрий позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между торическими многообразиями и комбинаторно-геометрическими объектами — веерами. Это соответствие открыло глубокие связи между геометрическими характеристиками торических многообразий и свойствами соответствующих комбинаторных объектов и нашло многочисленные приложения. Батырев [4] использовал торические многообразия для явного построения пар многообразий Калаби-Яу со свойствами, предписываемыми зеркальной симметрией. Поммерсхейм [50] доказал формулу для класса Тодда особой торической поверхности и использовал ее для доказательства теоретико-числовых тождеств, связывающих Дедекиндовы суммы. Стенли [52], применив сильную теорему Лефшеца к проективным торическим многообразиям, первым доказал необходимость неравенств МакМюллена в задаче об $f$-векторах простых многогранников.

Возможности торической геометрии, позволяющие доказывать внешние по отношению к алгебраической геометрии результаты при помощи изучения геометрии и топологии торических многообразий, мотивировали построение более общих пространств с действием тора. Дэвис и Янушкевич [17] определили топологический аналог проективных торических многообразий — *квазиторические многообразия*. Эти пространства уже не несут алгебраической структуры, однако обладают многими важным топологическими свойствами. Бухштабер и Рэй [9; 12] ввели на каждом квазиторическом многообразии, снабженном дополнительными комбинаторными данными, каноническую стабильно-комплексную структуру и явно описали способ построения квазиторических образующих в кольце комплексных кобордизмов. Ключевым шагом в создании *торической топологии* стала работа Бухштабера и Панова [58], в которой была существенно переработана конструкция Дэвиса и Янушкевича и для каждого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ были определены общие *момент-угол-комплексы* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — центральный объект новой области исследований. Авторы доказали, что момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, отвечающий симплициальному многограннику $\mathcal{K} = P^*$, допускает эквивариантную гладкую структуру и может быть реализован в виде невырожденного пересечения вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$. При таком описании, всякое квазиторическое многообразие над многогранником $P$ оказывается пространством орбит свободного действия подтора $T \subset T^m$ на пространстве $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Этот подход нашел применение в работе Бухшатбера Панова и Рэя [11], в которой авторы использовали теорию аналогичных многогранников для определения операции связной суммы на уровне квазиторических многообразий, снабженных стабильно-комплексной структурой, тем самым в каждом классе комплексных кобордизмов был построен связный торический представитель. Реализация общих момент-угол-комплексов в виде $\mathcal{K}$-степеней привела к появлению смежной области — *гомотопической теории полиэдральных произведений*, которая в настоящее время активно развивается. Так, в работах Грбич, Терио и Грбич, Терио, Панова и Ву [29; 30] удалось описать явный гомотпический тип момент-угол-комплексов, отвечающих специальным классам симплициальных комплексов.

Со временем выяснилось, что пространства, изучаемые в торической топологии, зачастую допускают сложные геометрические структуры, сохраняемые действием тора. Основываясь на реализации момент-угол-многообразий в виде пересечения невырожденных квадрик в $\mathbb{C}^m$, Миронов и Панов [63; 64] построили новые семейства гамильтоново-минимальных лагранжевых погружений в $\mathbb{C}^m$ и в общие симплектические торические многообразиях. Хорошо известный результат Дельзана [19] гласит, что все компактные симплектические многообразия с гамильтоновым действием тора половинной размерности реализуются неособыми проективными торическими многообразиями. Оказывается, что, если ослабить условие существования симплектической структуры до условия существования инвариантной почти комплексной структуры, квазиторические многообразия предоставляют множество новых примеров. Так, в работе Кустарева [62] приведены необходимые и достаточные условия существования на квазиторических многообразиях инвариантной почти комплексной структуры, эквивалентной данной стабильно комплексной. Благодаря подходу к квазиторическим многообразиям, развитому в работах Бухштабера и Панова [10], Кустареву удалось дать явный ответ в терминах геометрических и комбинаторных данных, задающих многообразие. Естественно возникающий вопрос об интегрируемости этих почти комплексных структур решен в работе Каршон и Исиды [38], где изучаются комплексные структуры на компактных многообразиях с действием тора половинной размерности, имеющим неподвижную точку. В этой работе, в частности, доказано, что интегрируемыми оказываются лишь структуры соответствующие компактным торическим многообразиям. Этот результат интересен тем, что, как правило, вопрос об интегрируемости почти комплексных структур крайне труден (например, до сих пор открыт вопрос о существовании комплексной структуры на шестимерной сфере), однако в рамках обширного класса многообразий, предоставляемого торической топологией, он может быть полностью решен.

С построением комплексных структур на многообразиях с действием тора связана другая серия работ [40; 42–44], мотивированных вопросами голоморфной динамики. В этих работах удалось построить комплексные структуры на обширном классе многообразий, заданных невырожденной системой вещественных квадрик специального вида в $\mathbb{C}^m$. Построенные примеры являются далеко идущими обобщениями классических многообразий Хопфа [35] и Калаби-Экманна [13]. Все многообразия данных семейств за исключением тривиальных случаев некэлеровы, и к ним неприменимы большинство методов комплексной геометрии. Однако, явная конструкция и наличие большой группы симметрий позволяют получать нетривиальные результаты об их геометрии. Так, Меерсманн [43] при некоторых ограничениях описал поле мерофорфных функций на этих многообразиях и вычислил универсальное пространство деформаций комплексных структур. Кроме нетривиальной геометрии, многообразия из работ Меерсманна имеют сложную топологию. Лопез де Медрано [41] явно описал в частном случае их дифференциальный тип и доказал, что они являются связной суммой произведений сфер. Недавно Босио и Меерсманн [5] установили, что все эти многообразия являются момент-угол-комплексами, соответствующими выпуклым многогранникам, и использовали результаты об их когомологиях для построения компактных комплексных многообразий с предписанным кручением в когомологиях.

Помимо прочего, торическая топология предоставляет массу примеров для анализа различных гипотез эквивариантной геометрии. Упомянем отдельно классическую гипотезу *о торическом ранге*, являющуюся до сих пор открытой. Она была сформулирована Гальпериным [31] для действия торов $T^m = (S^1)^m$. Сама гипотеза дает нижнюю оценку на ранг кольца когомологий конечномерного пространства с почти свободным действием тора $T^m$. Пуппе [51] доказал линейную по $m$ оценку на ранг кольца когомологий и, как следствие, установил, что гипотеза верна при $m \leqslant 3$. Частные результаты для различных классов пространств с действием тора приведены в книге Феликса, Опреа и Тома [25].

**Цели и задачи диссертационной работы:** исследование связи между топологической гипотезой о торическом ранге и алгебраической гипотезой Хоррокса, доказательство оценок на размерности биградуированных компонент когомологий момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Исследование возможности введения на момент-угол-комплексах, не покрываемых результатами Бухштабера и Панова, гладких и комплексных структур. Построение модели для вычисления когомологий Дольбо главных расслоений со слоем комплексный тор. Изучение геометрии компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора.

**Научная новизна.** Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и заключаются в следующем:

1) Установлена связь между классической гипотезой Хоррокса о размерностях модулей $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbb{Q}[v_1,\ldots,v_m]}(M,\mathbb{Q})$ и гипотезой Гальперина-Карлссона. Доказана гипотеза Гальперина-Карлссона для индуцированных действий торов на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Доказан градуированный вариант гипотезы Гальперина-Карлссона для момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, и, как следствие, получены новые неравенства на биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(\mathcal{K})$ общих симплициальных комплексов $\mathcal{K}$.

2) Доказано, что четномерные момент-угол-комплексы и некоторые их частичные факторы, отвечающие полным симплициальным веерам, допускают гладкие и комплексно-аналитические структуры. Тем самым описаны все компактные комплексные многообразия, допускающие максимальное действие тора.

3) Введено каноническое голоморфное слоение на компактных комплексных многообразиях с максимальным действием тора. Найдено достаточное условие для существования трансверсально-кэлеровой относительно канонического слоения формы. Построена конечномерная модель для вычисления когомологий Дольбо многообразий, для которых листы канонического слоения компактны и изоморфны друг другу.

4) При дополнительных ограничениях на комбинаторные и геометрические данные, определяющие компактное комплексное многообразие с максимальным действием тора, описаны все их аналитические подмножества и мероморфные функции.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области алгебраической топологии, комплексной дифференциальной геометрии, комбинаторики и торической топологии.

**Методы исследования.** В работе используются методы эквивариантной топологии, рациональной теории гомотопий (минимальные модели расслоенных пространств), коммутативной алгебры, теории торических многообразий и дифференциальной комплексной геометрии. Также используется техника спектральных последовательностей Лере-Серра и Бореля.

**Апробация результатов.** Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих международных научных конференциях:

1. «Ломоносов 2010», г. Москва, 12-15 апреля 2010 г.;

2. «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения», посвященная 120-летию Б.Н. Делоне, г. Москва, 16-20 августа 2010 г.;
3. «Торическая топология и автоморфные функции», г. Хабаровск, 5-10 сентября 2011 г.;
4. «Toric topology meeting», г. Осака, Япония, 28-30 ноября 2011 г.;
5. «Александровские чтения», г. Москва, 21-25 мая 2012 г.;
6. «Рождественские математические встречи фонда “Династия”», г. Москва, 8-11 января 2013 г.;
7. «Действия торов: топология, геометрия, теория чисел», г. Хабаровск, 2-7 сентября 2013 г.;

и научно-исследовательских семинарах:

1. «Алгебраическая топология и её приложения» им. М.М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, проф. И.А. Дынникова, проф. Т.Е. Панова, доц. Л.А. Алания и доц. Д.В. Миллионщикова, МГУ, март 2011 г.;
2. Семинар отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством академика РАН С.П. Новикова и чл.-корр. РАН В.М. Бухштабера, МИАН, 25 апреля 2012 г.;
3. «Комплексные задачи математической физики» под руководством проф. А.Г. Сергеева и доц. А.В. Домрина, МИАН, 1 апреля 2013 г.;
4. «Петербургский геометрический семинар им. А.Д. Александрова» под руководством проф. Ю.Д. Бураго, ПОМИ, 18 апреля 2013 г.;
5. Семинар лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне, ЯрГУ, 13 сентября 2013 г.;
6. «Mathematics and Physics seminar» под руководством проф. Т. Пантева, University of Pennsylvania, 5 ноября 2013 г.;
7. «Algebraic Topology Seminar» под руководством проф. Т. Бари, Princeton University, 7 ноября 2013 г.;
8. «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством проф. Э.Б. Винберга, проф. А.Л. Онищика, проф. И.В. Аржанцева и доц. Д.А. Тимашева, МГУ, 5 марта 2014 г.

**Публикации.** Основное содержание диссертации опубликовано в шести печатных работах в рецензируемых научных журналах, список которых приведен в конце автореферата [48; 66–70]. Из совместной публикации с научным руководителем Тарасом Евгеньевичем Пановым [48] на защиту выносятся результаты, в получении которых роль диссертанта была решающей.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, 4 глав и библиографии. Общий объем диссертации 51 страниц. Библиография включает 72 наименования на 4 страницах.

## Краткое содержание работы

**Во введении** приведен краткий исторический обзор исследований по топологии и комплексной геометрии пространств с действием тора, обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы основные результаты работы.

**Глава 1** носит вводный характер. В ней определяются комбинаторные, геометрические и топологические понятия, необходимые для дальнейшего изложения. В разделах 1.1–1.3 даются определения симплициальных комплексов, выпуклых многогранников, конусов и вееров, колец Стенли-Райснера. В разделе 1.4 приведена классическая конструкция торических многообразий и сформулирована фактор-конструкция Кокса-Батырева. В разделе 1.5 определяется общая категорная конструкция $\mathcal{K}$-степеней и вводятся момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Также формулируются хорошо известные результаты о топологии момент-угол-комплексов, включая описания колец когомологий и эквивариантных когомологий.

**Глава 2** посвящена гипотезе Гальперина-Карлссона, которая дает нижнюю оценку на ранг кольца когомологий пространства с почти свободным действием тора $T^m$:

**Гипотеза** (О торическом ранге). *Пусть на конечномерном CW-комплексе $X$ почти свободно действует тор $T^m$, тогда*

$$\operatorname{hrk}(X,\mathbb{Q}) := \sum_i \dim H^i(X,\mathbb{Q}) \geqslant 2^m.$$

В разделе 2.1 анализируется связь гипотезы о торическом ранге с алгебраической гипотезой Хоррокса:

**Гипотеза** (Гипотеза Хоррокса). *Пусть $M$ — конечномерный над $\mathbb{Q}$ градуированный модуль над кольцом многочленов $S(m)$, тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0,\dots,m.$$

Строится конечномерная модель для вычисления кольца когомологий пространств с действием тора, чье гомотопическое пространство орбит формально. При помощи этой модели доказывается следующий результат:

**Теорема 2.1.7.** *Предположим, что пространство орбит почти свободного действия группы $T^m$ на конечномерном CW-комплексе $X$ односвязно и формально. Тогда слабая гипотеза Хоррокса для $H^*_{T^m}(pt,\mathbb{Q})$-модуля $H^*_{T^m}(X,\mathbb{Q})$ влечет гипотезу о торическом ранге для пространства $X$.*

Из доказательства Теоремы 2.1.7, в частности следует, что любое частичное продвижение в гипотезе Хоррокса автоматически влечет продвижение в гипотезе о торическом ранге.

В разделе 2.2 определяется комбинаторная операция *удвоения* симплициальных комплексов и устанавливается ее связь с операцией $\mathcal{K}$-степени. Эта связь используется при доказательстве гипотезы о торическом ранге для момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

**Теорема 2.2.10.** *Гипотеза о торическом ранге выполнена для действия подторов в торе $T^m$, действующем стандартным образом на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.*

Раздел 2.3 мотивирован результатами раздела 2.1, связывающими гипотезу Хоррокса с гипотезой о торическом ранге. В нем определяется биградуировка в когомологиях пространств с действием тора, чье гомотопическое пространство орбит формально, и формулируется градуированная гипотеза о торическом ранге, которая затем доказывается для момент-угол-комплексов. В качестве приложения этих теорем приводится результат о комбинаторике общих симплициальных комплексов.

**Теорема 2.3.2.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ размерности $n-1$. Тогда биградуированные числа Бетти $\beta^{2i,-j}(\mathcal{K})$ удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\dim H^{*,-j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}},\mathbb{Q}) = \sum_{i\geqslant 0} \beta^{2i,-j}(\mathcal{K}) \geqslant \binom{m-n}{j}.$$

**Следствие 2.3.5.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ размерности $n-1$. Тогда*

$$\sum_{\mathcal{J}\subset[m]} \dim \tilde{H}^{|\mathcal{J}|-i-1}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}},\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m-n}{i}.$$

В заключительном разделе второй главы, следуя работе Исиды [37], вводится понятие *максимального действия* тора $T^m$ на гладком многообразии.

**В главе 3** изучается возможность введения гладких и комплексно-аналитических структур на момент-угол-комплексах и их частичных факторах, приводится конструкция, позволяющая строить все компактные комплексные многообразия с максимальным действием тора. В разделе 3.1 даются достаточные условия существования гладких и комплексных структур на пространствах $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$:

**Теорема 3.1.6.** *Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, отвечающие симплициальным комплексам $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$, где $\Sigma$ — полный симплициальный веер в некотором векторном пространстве $V$, допускают структуру гладкого многообразия.*

**Теорема 3.1.12.** *Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ четной размерности, отвечающие симплициальным комплексам $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$, где $\Sigma$ — полный симплициальный веер в некотором векторном пространстве $V$, допускают структуру комплексного многообразия.*

Также в разделе 3.1 приводится конструкция, позволяющая строить комплексные структуры на частичных факторах пространств $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. В разделе 3.2 с помощью результата работы Исиды [37] доказано, что любое компактное комплексное многообразий с максимальным действием тора можно получить таким образом. Построенные многообразия являются обобщениями многообразий Хопфа и Калаби-Экманна.

**Теорема 3.1.17** (Фактор-конструкция-III)**.** *Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Пусть $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$ такая связная комплексная подгруппа Ли, что все пересечения вида $H \cap (\mathbb{C}^*, 1)^{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$, тривиальны. Обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ соответствующие алгебры Ли. Рассмотрим $p\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ и $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — естественные проекции на первое слагаемое и на фактор-пространство, соответственно, $\Sigma_{\mathcal{K}}$ — веер в $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^m$, соответствующий комплексу $\mathcal{K}$.*

*Предположим, что ограничение проекции*

$$q|_{\Sigma_{\mathcal{K}}}\colon \Sigma_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) \tag{3.4}$$

*взаимно-однозначно. Тогда группа $H$ действует на пространстве $U(\mathcal{K})$, причем*

1. *пространство орбит $U(\mathcal{K})/H$ является комплексным многообразием с естественным действием тора $T^m/(T^m \cap H) \subset T^m_{\mathbb{C}}/H$;*

2. *частичный фактор $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/(T^m \cap H)$ момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ эквивариантно (относительно действия группы $T^m/(T^m \cap H)$) гомеоморфен пространству $U(\mathcal{K})/H$.*

**Теорема 3.2.3.** *Всякое компактное комплексное многообразие $M$ с максимальным действием тора может быть получено при помощи конструкции Теоремы 3.1.17.*

**Глава 4** посвящена изучению комплексной геометрии многообразий с максимальным действием тора. Каждое такое многообразие может быть реализовано как пространство орбит эффективного действия группы $H \simeq \mathbb{C}^l$ на торическом многообразии $V_\Sigma$. Группа $H$ задается своей алгеброй Ли — комплексным подпространством $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ тора $T^m_{\mathbb{C}}$, действующего на многообразии $V_\Sigma$. В разделах 4.1 и 4.2 на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ вводится каноническое голоморфное слоение $\mathcal{F}$ и изучается пространство его листов.

**Теорема 4.2.1.** *Предположим, что листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ замкнуты. Тогда пространство листов слоения $\mathcal{F}$ есть торическое многообразие $V_{q(\Sigma)}$, где $q(\Sigma)$ — рациональный веер в пространстве $\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ с решеткой $N/(N \cap p(\mathfrak{h}))$.*

В разделе 4.3 строится модель когомологий Дольбо многообразий $M(\Sigma, \mathfrak{h})$, на которых листы канонического слоения замкнуты и изоморфны друг другу. В этом случае многообразие $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ является главным расслоением над полным неособым торическим многообразием:

**Теорема 4.3.5.** *Предположим, что листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ есть свободные орбиты действия компактного комплексного тора $\mathcal{T} = H'/(H \cap H')$ комплексной размерности $l$. Тогда имеется главное голоморфное расслоение $\mathcal{T} \to M(\Sigma, \mathfrak{h}) \to V_{q(\Sigma)}$, причем*

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(M(\Sigma, \mathfrak{h})) = H\big[\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/(\mathcal{I}_{SR} + \mathcal{J}_{q(\Sigma)}) \otimes \Lambda(\xi^{1,0}_1, \ldots, \xi^{1,0}_l), \bar\partial\big] \otimes \Lambda(\eta^{0,1}_1, \ldots, \eta^{0,1}_l), \tag{4.6}$$

*где дифференциал задан на элементах $\xi^{1,0}_i \in H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T})$ и продолжен на всю алгебру по правилу Лейбница: $\bar\partial(\xi^{1,0}_i) = \tau_{\mathbb{C}}(\xi^{1,0}_i) \in H^{1,1}_{\bar\partial}(V_{q(\Sigma)})$.*

Раздел 4.4 посвящен построению трансверсально-кэлеровых форм на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$. Подобные формы являются эффективным инструментом при изучения геометрии некэлеровых многообразий. Приведенная конструкция идейно воспроизводит схему построения проективного вложения торических многообразий, отвечающих выпуклым многогранникам. В качестве иллюстрации построена трансверсально-кэлерова форма на многообразиях Хопфа.

**Теорема 4.4.6.** *Рассмотрим многообразие $M(\Sigma, \mathfrak{h})$. Предположим, что веер $q(\Sigma)$ является слабо нормальным. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ существует форма $\omega_{\mathcal{F}}$ класса гладкости $C^k$, являющаяся трансверсально-кэлеровой относительно канонического слоения $\mathcal{F}$ на открытой плотной $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите.*

В разделе 4.5 изучается геометрия "типичных" многообразий $M(\Sigma, \mathfrak{h})$, то есть при "общем" выборе подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. При помощи канонического слоения $\mathcal{F}$ и трансверсально-кэлеровой формы $\omega_{\mathcal{F}}$, в случае ее существования, доказывается, что типичные многообразия $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ не допускают непостоянных мероморфных функций и содержат лишь конечное число аналитических подмножеств положительной размерности. Таким образом, с этой точки зрения, компактные комплексные многообразия с максимальным действием тора оказываются близки комплексным торам и поверхностям Хопфа.

**Теорема 4.5.9.** *Предположим, что линейная оболочка веера $\Sigma \subset \mathfrak{t}$ совпадает с $\mathfrak{t}$. Тогда на многообразии $M = M(\Sigma, \mathfrak{h})$, снабженном общей комплексной структурой, существуют лишь постоянные мероморфные функции.*

**Теорема 4.5.10.** *Для общей комплексной структуры на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ верно, что если веер $q(\Sigma)$ слабо нормален, то все аналитические подмножества положительной размерности являются замыканиями $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбит.*

**Благодарности.** Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить глубокую признательность Виктору Матвеевичу Бухштаберу и Тарасу Евгеньевичу Панову за многолетнее научное руководство, постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор благодарен М.С. Вербицкому, А.А. Гайфуллину и А.А. Кустареву за плодотворные обсуждения и ценные советы, а также всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического МГУ и отделу геометрии и топологии МИАН за творческую атмосферу.

# Глава 1

# Предварительные комбинаторные, геометрические и топологические понятия

## 1.1. Симплициальные комплексы

**Определение 1.1.1.** *Абстрактным симплициальным комплексом* на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ называется такой набор $\mathcal{K} = \{\mathcal{I}\}$ подмножеств множества $[m]$, что для каждого $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ все подмножества $\mathcal{I}$ также принадлежат $\mathcal{K}$, в частности $\varnothing \in \mathcal{K}$. Подмножество $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ называется *симплексом* комплекса $\mathcal{K}$. *Размерностью* симплекса $\mathcal{I}$ называется $\dim \mathcal{I} = |\mathcal{I}| - 1$, симплексы нулевой размерности называются *вершинами*.

*Линком* симплекса $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ называется симплициальный комплекс $\operatorname{link} \mathcal{I}$ на множестве $[m] \backslash \mathcal{I}$. Симплексами комплекса $\operatorname{link} \mathcal{I}$ являются все такие подмножества $\mathcal{J} \subset [m] \backslash \mathcal{I}$, что $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \in \mathcal{K}$.

*Замечание.* В некоторых случаях удобно считать, что не все одноэлементные подмножества $\{j\} \subset [m]$ принадлежат комплексу $\mathcal{K}$. Такие подмножества мы будем называть *призрачными вершинами*.

Часто отдельно определяют геометрическую реализацию абстрактного симплициального комплекса $\mathcal{K}$:

**Определение 1.1.2.** Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. *Геометрической реализацией* комплекса $\mathcal{K}$ называется топологическое пространство

$$|\mathcal{K}| := \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{K}} \operatorname{conv}\{\boldsymbol{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \tag{1.1}$$

где conv — выпуклая оболочка.

Далее, если это не оговорено отдельно, под симплициальным комплексом понимается абстрактный симплициальный комплекс.

Стенли сопоставил каждому абстрактному симплициальному комплексу важный алгебраический объект — *кольцо граней*, также известное как *кольцо Стенли-Райснера*. Это кольцо в дальнейшем будет играть важную роль.

**Определение 1.1.3** (Стенли [52])**.** Пусть $R$ — кольцо коэффициентов. *Идеалом Стенли-Райснера* $\mathcal{I}_{SR}$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется идеал в кольце многочленов $R[v_1, \ldots, v_m]$, порожденный всеми мономами вида $v_{i_1} \ldots v_{i_k}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}$.

*Кольцом Стенли-Райснера* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется фактор кольца многочленов $R[v_1, \ldots, v_m]$ по идеалу Стенли-Райснера $\mathcal{I}_{SR}$:

$$R[\mathcal{K}] := R[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_{SR}.$$

Далее кольца $R[\mathcal{K}]$ и $R[v_1, \ldots, v_m]$ предполагаются градуированными с $\deg v_i = 2$.

## 1.2. Вееры

**Определение 1.2.1.** Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — конечный набор векторов в векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$. *Полиэдральным конусом*, порожденным векторами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, называется множество

$$\sigma = \{\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mu_k \boldsymbol{a}_k | \mu_i \geqslant 0\}.$$

Конус $\sigma$ называется *строго выпуклым*, если он не содержит прямой. Строго выпуклый конус является *симплициальным*, если векторы, его порождающие, линейно независимы. Конус $\sigma$ называется *рациональным* относительно фиксированной решетки $N \subset V$, если в качестве векторов его порождающих можно выбрать элементы решетки $N$, и *регулярным*, если можно выбрать порождающие векторы так, чтобы они являлись частью базиса решетки $N$.

*Двойственным конусом* к конусу $\sigma \subset V$ называется множество (также являющееся полиэдральным конусом):

$$\check{\sigma} = \{\boldsymbol{u} \in V^* \mid \forall \boldsymbol{a} \in \sigma \ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \geqslant 0\}.$$

**Определение 1.2.2.** *Веером* в векторном пространстве $V$ называется такой набор строго выпуклых конусов $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^m$, $\sigma_i \subset V$, что

(1) грань каждого конуса снова принадлежит набору;

(2) пересечение любых двух конусов — грань каждого из них.

Веер $\Sigma$ называется *полным*, если $\bigcup_i \sigma_i = V$ и *симплициальным*, если все его конусы симплициальные.

Пусть теперь в векторном пространстве $V$ зафиксирована решетка полного ранга $N \subset V$. Веер $\Sigma$ *рациональный*, если все его конусы рациональные, и *регулярный*, если все его конусы регулярные.

*Замечание.* Часто мы будем сталкиваться с ситуацией, когда $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^m$ веер в пространстве $V$, а линейное отображение векторных пространств $f\colon V \to W$ таково, что конуса $f(\sigma_i)$ образуют веер в пространстве $W$. В таком случае веер $\{f(\sigma_i)\}_{i=1}^m$ мы будем обозначать $f(\Sigma)$.

Кроме того, иногда нам будет удобно считать, что веер $\Sigma$ является подмножеством соответствующего векторного пространства $\Sigma \subset V$.

Всякий симплициальный веер $\Sigma$ определяет симплициальный комплекс на множестве своих одномерных конусов:

**Конструкция 1.2.3.** Пусть $\Sigma = \{\sigma\}$ — симплициальный веер в векторном пространстве $V$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ — образующие его одномерных конусов. Симплициальным комплексом $\mathcal{K}_\Sigma$, соответствующим вееру $\Sigma$, называется комплекс, состоящий из всех такие подмножеств $\mathcal{I} \subset [m]$, что конус, порожденный векторами $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j\in\mathcal{I}}$, принадлежит вееру $\Sigma$.

*Замечание.* В важном случае полного веера $\Sigma$ геометрическая реализация $|\mathcal{K}_\Sigma|$ соответствующего симплициального комплекса является кусочно-линейным многообразием. При этом $|\mathcal{K}_\Sigma|$ кусочно-линейно изоморфно сфере $S^{\dim \mathcal{K}_\Sigma}$, снабженной стандартной гладкой структурой.

Также, аналогично Определению 1.1.2 по каждому симплициальному комплексу можно естественным образом построить веер:

**Конструкция 1.2.4.** Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Определим веер $\Sigma_\mathcal{K} = \{\sigma_\mathcal{I}\}_{\mathcal{I}\in\mathcal{K}}$, где $\sigma_\mathcal{I}$ — конус, порожденный векторами $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j\in\mathcal{I}}$.

Конструкции 1.2.3 и 1.2.4, конечно же, не являются взаимно-обратными: всегда $\mathcal{K}_{\Sigma_\mathcal{K}} = \mathcal{K}$, тогда как, вообще говоря, $\Sigma_{\mathcal{K}_\Sigma} \neq \Sigma$.

## 1.3. Выпуклые многогранники

**Определение 1.3.1.** *Выпуклым многогранником* в векторном пространстве $V$ называется выпуклая оболочка конечного набора точек.

**Определение 1.3.2.** *Выпуклым полиэдром* в векторном пространстве $V$ называется пересечение конечного числа полупространств:

$$P = \{\boldsymbol{v} \in V | \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_i\rangle + b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in V^*$ — некоторые линейные функции на $V$, а $b_i \in \mathbb{R}$. Ограниченный выпуклый полиэдр называется *выпуклым многогранником.*

Хорошо известно (см., например, [72]), что эти два определения приводят к одному и тому же геометрическому объекту. *Размерностью* многогранника $P$ называется размерность его аффинной оболочки. Ниже, по умолчанию, размерность рассматриваемых многогранников совпадает с размерностью объемлющего пространства $V$. Далее мы будем пользоваться, в основном, Определением 1.3.2, при этом будет предполагаться, что система (1.2) *приведенная*, то есть ни одно из неравенств $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_i\rangle + b_i \geqslant 0$ не является следствием остальных. В этом случае пересечение многогранника $P$ с каждой из гиперплоскостей $\{\boldsymbol{v} \in V | \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_i\rangle + b_i = 0\}$ является *гипергранью* многогранника $P$. Многогранник $P$ называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно $\dim P$ гиперграням.

Каждый выпуклый многогранник определяет веер в двойственном пространстве:

**Определение 1.3.3.** Пусть $P \subset V$ — многогранник полной размерности, заданный системой неравенств вида (1.2). Сопоставим каждой грани $F$ конус $\sigma_F$ в пространстве $V^*$, порожденный всеми такими векторами $\boldsymbol{a}_i$, что соответствующая гипергрань $F_i$ пересекается с гранью $F$. Множество всех конусов $\sigma_F$ образует полный веер $\Sigma_P$, который называется *нормальным веером* многогранника $P$. Веер $\Sigma$ симплициальный, если многогранник $P$ простой.

Следующий пример демонстрирует, что существуют вееры не являющиеся нормальными веерами какого-либо многогранника:

**Пример 1.3.4** (Фултон [26, Section 3.4])**.** Рассмотрим в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^3$ с базисом $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ веер $\Sigma$, имеющий 7 одномерных конусов, порожденных векторами $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_6 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_7 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, из которых 10 троек векторов $\boldsymbol{v}_i$ порождают максимальные конусы: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,5,7\}$, $\{4,5,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{4,6,7\}$. Как показано в [26, Section 3.4] этот веер не является нормальным.

## 1.4. Торические многообразия

Прежде всего, зафиксируем обозначения и напомним, что $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ обозначает мультипликативную группу поля комплексных чисел, группа $T^m_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^*)^m$ называется *алгебраическим тором*, а группа $T^m \simeq (S^1)^m$ называется *компактным тором*, или просто *тором*. При этом, когда мы пишем $T^m_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^m$ (соответственно, $T^m = (S^1)^m$), мы подразумеваем, что зафиксировано разложение $T^m_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$ (соответственно, $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$). Группу $\mathcal{T} \simeq \mathbb{C}^l/\Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2l}$ — решетка полного ранга, мы называем *комплексным тором.*

### 1.4.1. Определение

**Определение 1.4.1.** Нормальное неприводимое алгебраическое многообразие $V$, на котором действует алгебраический тор $T^n_{\mathbb{C}}$ с открытой плотной орбитой, называется *торическим.*

Примерами торических многообразий могут служить $(\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{C}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$.

Один из основных результатов теории торических многообразий гласит, что имеется взаимно-однозначное соответствие между торическими многообразиями и рациональными веерами в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ компактного тора $T^n \subset T^n_{\mathbb{C}}$, в которой зафиксирована решетка $N$, двойственная решетке характеров. Именно, всякое гладкое торическое многообразие $V$ может быть получено при помощи следующей конструкции (детали можно найти в книге Фултона [26]):

**Конструкция 1.4.2** (Торические многообразия)**.** Напомним, что, если $M$ — аддитивная полугруппа, то $\mathbb{C}[M]$ — коммутативная алгебра $\bigoplus_{m\in M} \mathbb{C}\cdot \boldsymbol{u}^m$ с умножением, заданным на аддитивных образующих следующим образом: $u^{m_1}\cdot u^{m_2} = u^{m_1+m_2}$.

Пусть $\Sigma$ — рациональный веер в векторном пространстве $\mathfrak{t}$, в котором зафиксирована решетка $N \subset \mathfrak{t}$, $\dim \mathfrak{t} = n$. Для каждого конуса $\sigma \in \Sigma$ определим алгебру $\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap N^*]$. Каждая алгебра $\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap N^*]$ определяет открытую карту $U_\sigma = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap N^*]$. Множество карт $U_\sigma$ упорядочено по включению так же, как и множество конусов $\Sigma$. Определим

$$V_\Sigma := \varinjlim_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma. \tag{1.3}$$

Схема $V_\Sigma$ оказывается алгебраическим многообразием, на котором с открытой плотной орбитой действует тор $T^n_{\mathbb{C}} = N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$. Таким образом алгебра Ли тора $T^n_{\mathbb{C}}$ есть $\mathfrak{t}\oplus i\mathfrak{t}$.

*Замечание.* Геометрия многообразия $V_\Sigma$ тесно связана с геометрией и комбинаторикой соответствующего веера $\Sigma$. Приведем лишь несколько утверждений, демонстрирующих эту связь.

1. Многообразие $V_\Sigma$ компактно тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ полный.

2. Многообразие $V_\Sigma$ неособо тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ регулярный.

3. Многообразие $V_\Sigma$ является орбифолдом тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ симплициальный.

4. Многообразие $V_\Sigma$ проективно тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ является нормальным веером выпуклого многогранника.

**Пример 1.4.3** (Фултон [26, Section 1.1])**.** Пусть $\Sigma$ – полный веер в $\mathbb{R}$, то есть веер, состоящий из трех конусов: $\sigma_0 = \{\boldsymbol{0}\}, \sigma_+ = \{t\in\mathbb{R}|t\geqslant 0\}, \sigma_- = \{t\in\mathbb{R}|t\leqslant 0\}$. Соответствующее торическое многообразие, получаемое в результате склейки:

$$\begin{gathered}\mathbb{C}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x,x^{-1}] \hookleftarrow \mathbb{C}[x^{-1}]\\ \mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C},\end{gathered}$$

есть проективная прямая $\mathbb{C}P^1$.

Введем важный класс торических многообразий, который будет играть ключевую роль в последующих конструкциях.

**Пример 1.4.4** (Дополнение до набора координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$)**.** Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Следуя Конструкции 1.2.4 построим веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ с базисом $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ и со стандартной решеткой $\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$. Определим многообразие:

$$U(\mathcal{K}) := V_{\Sigma_{\mathcal{K}}}. \tag{1.4}$$

Разберемся более подробно как устроено многообразие $U(\mathcal{K})$. Согласно Конструкции 1.4.2 многообразие $U(\mathcal{K})$ покрывается открытыми картами вида $U_{\sigma_{\mathcal{I}}}$, где $\mathcal{I}\subset\mathcal{K}$ — симплекс комплекса $\mathcal{K}$, $\sigma_{\mathcal{I}}$ — конус, натянутый на базисные векторы $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j\in\mathcal{I}}$, см. Конструкцию 1.2.4.

Пусть $\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_m^* \in V^*$ — базис двойственный к базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Тогда нетрудно проверить, что

$$\check{\sigma}_{\mathcal{I}} \cap N^* = \{\alpha_1 \boldsymbol{e}_1^* + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{e}_m^* | \alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geqslant 0 \text{ при } i \in \mathcal{I}\} \tag{1.5}$$

Следовательно, каждая карта $U_{\sigma_{\mathcal{I}}}$ естественным образом вкладывается в пространство $\mathbb{C}^m$ и имеет вид:

$$U_{\sigma_{\mathcal{I}}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma}_{\mathcal{I}} \cap N^*] = \{(z_1, \ldots, z_m) | z_i \in \mathbb{C}, z_i \neq 0 \text{ при } i \in \mathcal{I}\} \subset \mathbb{C}^m. \tag{1.6}$$

Тем самым, многообразие $U(\mathcal{K}) = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{K}} U_{\sigma_{\mathcal{I}}}$ суть дополнение до набора координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\mathcal{J} \notin \mathcal{K}} \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m | z_j = 0 \text{ при } j \in \mathcal{J}\}. \tag{1.7}$$

Отметим, что на пространстве $U(\mathcal{K})$ имеется естественное покоординатное действие алгебраического тора $T_{\mathbb{C}}^m$ с фиксированным изоморфизмом $T_{\mathbb{C}}^m \simeq (\mathbb{C}^*)^m$.

### 1.4.2. Фактор-конструкция Кокса-Батырева

Согласно Конструкции 1.4.2 всякое торическое многообразие $V$ определяется некоторым рациональным веером $\Sigma$ в векторном пространстве $\mathfrak{t}$ с фиксированной решеткой $N$. При этом, данные, закодированные в веере $\Sigma$, состоят из двух частей: (1) *комбинаторной*, то есть частично упорядоченного по включению множества конусов веера $\Sigma$, и (2) *геометрической*, то есть примитивных образующих одномерных конусов. Оказывается, что имеется замечательная конструкция Кокса-Батырева [16], позволяющая разделить эти части.

Хотя конструкция Кокса-Батырева имеет место для произвольных торических многообразий, мы сформулируем ее только для многообразий $V_\Sigma$, отвечающих *симплициальным* веерам $\Sigma$. Это, с одной стороны, позволит упростить и усилить формулировку конструкции, с другой стороны, именно в такой общности она будет применяться дальше.

**Конструкция 1.4.5.** Пусть $\Sigma$ — рациональный веер в векторном пространстве $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^n$, в котором зафиксирована решетка $N \subset \mathfrak{t}$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in N$ — примитивные векторы, порождающие его одномерные конусы. Предположим дополнительно, что линейная оболочка векторов $\boldsymbol{a}_i$ совпадает с $\mathfrak{t}$.

Рассмотрим отображение $\rho\colon \mathbb{Z}^m \to N$, переводящее $i$-ый базисный вектор в вектор $\boldsymbol{a}_i$. Отображение $\rho$ индуцирует отображение алгебраических торов:

$$\rho_{\mathbb{C}}\colon (\mathbb{C}^*)^m \to T_{\mathbb{C}}^n = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*. \tag{1.8}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_i$ линейно порождают все пространство $\mathfrak{t}$, отображение $\rho_{\mathbb{C}}$ сюръективно, и определена короткая точная последовательность групп:

$$1 \to G \to (\mathbb{C}^*)^m \to T_{\mathbb{C}}^n \to 1. \tag{1.9}$$

**Теорема 1.4.6** (Кокс [16, Theorem 2.1])**.** *Пусть $\Sigma$ — рациональный симплициальный веер и линейная оболочка конусов $\Sigma$ совпадает с пространством $\mathfrak{t}$. Тогда торическое многообразие $V_\Sigma$ является фактор-пространством $U(\mathcal{K}_\Sigma)/G$.*

*Замечание.* Ограничение на веер $\Sigma$ не является существенным. Если линейная оболочка примитивных векторов веера $\Sigma$ есть собственное подпространство $\mathfrak{t}' \subsetneq \mathfrak{t}$, то соответствующее торическое многообразие $V_\Sigma$ есть $(\mathbb{C}^*)^{\dim \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{t}'} \times V_{\Sigma'}$, где веера $\Sigma$ рассматривается как веер в пространстве $\mathfrak{t}'$. Таким образом, применив конструкцию Кокса-Батырева к многообразию $V_{\Sigma'}$, имеем:

$$V_\Sigma = (\mathbb{C}^*)^{\dim \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{t}'} \times (U(\mathcal{K}_\Sigma)/G).$$

## 1.5. Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Торические многообразия $U(\mathcal{K})$, играющие ключевую роль в конструкции Кокса-Батырева, послужили отправной точкой для введения класса топологических пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, снабженных действием компактного тора $(S^1)^m$. Изначально *момент-угол-комплексы* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, подобно многообразиям $U(\mathcal{K})$, играли лишь вспомогательную роль при построении топологических аналогов торических многообразий, см. [17]. Однако, впоследствии выяснилось, что пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеют богатую алгебро-топологическую структуру, многие из них допускают довольно тонкие геометрические структуры, и момент-угол-комплексы сами стали предметом независимых исследований.

### 1.5.1. $\mathcal{K}$-степени и момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Определим сначала общую категорную конструкцию $\mathcal{K}$-степеней.

**Определение 1.5.1.** Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными произведениями и прямыми пределами. Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — морфизм между двумя объектами категории $\mathcal{C}$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и введем для каждого подмножества $\mathcal{I} \subset [m]$ объект

$$(X,Y)^\mathcal{I} = \prod_{i=1}^m Z_i, \quad Z_i = X \text{ при } i \in \mathcal{I},\ Z_i = Y \text{ иначе.}$$

отметим, что при $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ имеется естественный морфизм

$$\varphi_{\mathcal{I},\mathcal{J}}\colon (X,Y)^\mathcal{I} \to (X,Y)^\mathcal{J}. \tag{1.10}$$

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. *$\mathcal{K}$-степенью* $(X,Y)^\mathcal{K}$ называется прямой предел диаграммы, состоящей из всех морфизмов вида (1.10) по всем симплексам $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{K}$:

$$(X,Y)^\mathcal{K} = \varinjlim (X,Y)^\mathcal{I}. \tag{1.11}$$

Хотя Определение 1.5.1 применимо в самой общей ситуации, далее мы будем им пользоваться, в основном, в категориях топологических пространств и групп, при этом отображение $\varphi\colon Y \to X$ будет являться вложением.

**Пример 1.5.2.** Пусть $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ — естественное вложение. Соответствующая $\mathcal{K}$-степень есть, объединение блоков вида $(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)^\mathcal{I}$ внутри $\mathbb{C}^m$:

$$(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)^\mathcal{K} = \bigcup_{\mathcal{I}\in\mathcal{K}} (\mathbb{C},\mathbb{C}^*)^\mathcal{I}.$$

Это представление совпадает с покрытием многообразия $U(\mathcal{K})$ картами $U_{\sigma_\mathcal{I}}$, см. Пример 1.4.4.

**Определение 1.5.3.** Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. *Момент-угол-комплексом* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ называется топологическое пространство

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K},$$

где $\varphi\colon S^1 \to D^2$ — вложение окружности в качестве границы двумерного диска.

Удобно считать, что $D^2 \subset \mathbb{C}$ — единичный диск в комплексной плоскости, а $S^1 \subset D^2$ — единичная окружность. Отображение пар $(D^2,S^1) \to (\mathbb{C},\mathbb{C}^*)$ индуцирует естественное вложение $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow U(\mathcal{K})$.

*Замечание.* Поскольку на двумерном диске $D^2$ и его границе $\partial D^2 = S^1$ действует окружность и вложение $\varphi$ эквивариантно, пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает действие тора $T^m = (S^1)^m$. Пространством этого орбит действия является *кубическая реализация* конуса над комплексом $\mathcal{K}$ (см. [59, §5.2]):

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K}/(S^1)^m \simeq ([0,1],\{1\})^\mathcal{K}.$$

Всюду далее пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ предполагаются снабженными действием тора $T^m = (S^1)^m$.

**Пример 1.5.4.** Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве $\{1,2\}$, имеющий 3 симплекса: $\varnothing, \{1\}, \{2\}$. Тогда разбиение

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2 \times S^1) \bigcup_{S^1\times S^1} (S^1 \times D^2) \simeq S^3$$

есть стандартное представление трехмерной сферы в виде объединения двух полноторий.

Непосредственно из Определения 1.5.3 и Примера 1.5.2 видно, что пространства $U(\mathcal{K})$ и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ тесно связаны друг с другом. Это наблюдение подтверждается следующим результатом:

**Теорема 1.5.5** (Бухштабер-Панов [59, Предложение 9.8])**.** *Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ имеется $(S^1)^m$-эквивариантная деформационная ретракция:*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$$

Таким образом, пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ являются компактными аналогами торических многообразий $U(\mathcal{K})$. При этом, конечно, пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ не несут ни естественной алгебраической ни гладкой структуры. Тому, какие геометрические структуры, все-таки можно ввести на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для различных классов симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, во-многом посвящена настоящая диссертация.

### 1.5.2. Топология момент-угол-комплексов

Согласно Конструкции 1.4.5 всякое торическое многообразие $V_\Sigma$ является пространством орбит действия подходящей группы на многообразии $U(\mathcal{K}_\Sigma)$, а многообразие $U(\mathcal{K}_\Sigma)$, в свою очередь, согласно Теореме 1.5.5, гомотопически эквивалентно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Тем самым, топология пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет интерес с точки зрения изучения торических многообразий.

**Теорема 1.5.6** (Бухштабер-Панов [59, Лемма 7.13]). *Пусть $\mathcal{K}$ есть симплициальный комплекс на множестве $[m]$, чья геометрическая реализация гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере $S^{n-1}$. Тогда пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является замкнутым $(m+n)$-мерным топологическим многообразием.*

Для многих комплексов $\mathcal{K}$ пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ оказывается не только топологическим, но и гладким многообразием (см. Пример 1.5.4). В связи с этим возникает важный вопрос:

**Вопрос.** *Для каких триангуляций $\mathcal{K}$ сферы $S^{n-1}$ топологическое многообразие $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ может быть* сглажено*?*

В том случае, когда $\mathcal{K}$ является симплициальным комплексом двойственным некоторому простому многограннику $P$, имеется альтернативная конструкция момент-угол-комплексов, приводящая к гладким многообразиям, см. [59]. Эти многообразия возникают, как многообразия уровня при операции симплектической редукции торических многообразий $U(\mathcal{K})$, подробности можно найти в [1].

В разделе 3.1.1 мы разовьем подход, который позволит ввести гладкие структуры на всех момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, отвечающих симплициальным комплексам $\mathcal{K}=\mathcal{K}_\Sigma$, где $\Sigma$ — полный симплициальный веер.

Важным следствием определения момент-угол-комплексов 1.5.3 является наличие явного клеточного разбиения. Это разбиение позволяет эффективно вычислять кольца когомологий пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

**Теорема 1.5.7** (Бухштабер-Панов [59, Теорема 8.6]). *Имеет место градуированный функториальный по $\mathcal{K}$ изоморфизм алгебр:*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Z}) \simeq \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \simeq H[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K],d],$$

*где градуировка и дифференциал в последней алгебре заданы на мультипликативных образующих* $\deg v_i = 2, \deg u_i = 1, d\,v_i = 0, d\,u_i = v_i$.

Приведем еще одно пространство, естественным образом возникающее в торической топологии и являющееся $\mathcal{K}$-степенью.

**Пример 1.5.8.** Рассмотрим классифицирующее пространство главных $T^1$-расслоений — $BT^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$ и отмеченную точку pt на нем. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. *Пространством Дэвиса-Янушкевича* $DJ(\mathcal{K})$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется $\mathcal{K}$-степень:

$$DJ(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}P^\infty, \mathrm{pt})^\mathcal{K}.$$

Следующие утверждения проясняют связь пространств Дэвиса-Янушкевича с торическими многообразиями и момент-угол-комплексами.

**Предложение 1.5.9** (Бухштабер-Панов [59, Предложение 7.38]). *Пусть $X_\Sigma$ — полное неособое торическое многообразие с действием $n$-мерного компактного тора $T^n$. Тогда конструкция Бореля $X_\Sigma \times_{T^n} ET^n$ гомотопически эквивалентна $DJ(\mathcal{K}_\Sigma)$.*

Аналогичный результат имеется для момент-угол-комплексов.

**Предложение 1.5.10** (Бухштабер-Панов [59, Теорема 7.30]). *Рассмотрим момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ со стандартным действием тора $T^m$. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \times_{T^m} ET^m \simeq_{he} DJ(\mathcal{K})$.*

Известно, также, что кольцом когомологий пространства Дэвиса-Янушкевича является алгебра Стенли-Райснера [59, 7.29]:

$$H^*(DJ(\mathcal{K}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathcal{K}]. \tag{1.12}$$

# Глава 2

# Топология пространств с действием тора

В этой главе мы приводим различные результаты о топологии пространств с действием тора. В части 2.1 мы сформулируем две классические гипотезы — топологическую гипотезу Гальперина о торическом ранге и алгебраическую гипотезу Хоррокса и установим связь между ними, анализируя действия тора на $CW$-комплексах с формальным односвязным пространством орбит. Полученные результаты позволят нам доказать новые оценки в общей гипотезе о торическом ранге.

Пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ предоставляют богатый запас топологических пространств с действием торов $T^m$, поэтому естественно спросить выполняется ли для этих действий утверждение гипотезы о торическом ранге. В части 2.2 мы дадим положительный ответ на этот вопрос. Основываясь на связях между гипотезой о торическом ранге и гипотезой Хоррокса, в части 2.3 мы сформулируем градуированный вариант гипотезы о торическом варианте и докажем соответствующие неравенства в случае момент-угол-комплексов.

Закончим главу мы определением важного класса действий торов на гладких многообразиях, введенного в работе [37]. Этот класс многообразий будет ключевым объектом изучения в следующих двух главах.

## 2.1. Общая гипотеза о торическом ранге

В этой части мы будем иметь дело с общей топологической гипотезой о торическом ранге. Она была сформулирована Гальпериным [31] для действия торов $T^m = (S^1)^m$. Сама гипотеза дает нижнюю оценку на ранг кольца когомологий пространства с почти свободным действием тора $T^m$ (напомним, что действие группы $G$ на пространстве $X$ называется *почти свободным*, если стабилизатор $G_x \subset G$ каждой точки $x \in X$ конечен):

**Гипотеза** (О торическом ранге)**.** *Пусть на конечномерном $CW$-комплексе $X$ почти свободно действует тор $T^m$, тогда*

$$\operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}) := \sum_i \dim H^i(X, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m.$$

Аналогичная гипотеза для свободных действий $p$-торов $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$ на произведениях сфер была сформулирована Коннером в 1957 г. [15]. На данный момент (см. [51]) полностью гипотеза доказана лишь для рангов $m \leqslant 3$ в случае торов и 2-торов, и для $m \leqslant 2$ в случае $p$-торов ($p$ — простое нечетное). Однако, имеется огромное количество примеров семейств многообразий с действием тора, для которых гипотеза выполняется. Так, известно [25, 7.3.3], что она верна для однородных пространств компактных групп Ли, для симплектических действий на симплектических многообразиях, для многообразий, чьи когомологии удовлетворяют сильной теореме Лефшеца и многих других.

Мы изучаем выполнение гипотезы о торическом ранге для общих топологических пространств. При этом, возникающие объекты естественным образом приводят нас к хорошо известной в коммутативной алгебре гипотезе Бухсбаума-Айзенбада и Хоррокса [33, prob. 24]. После своей первоначальной формулировки Бухсбаумом и Айзенбадом в [8, p. 453] утверждение гипотезы много раз обобщалось. Следуя [33, prob. 24], мы будем называть ее гипотезой Хоррокса. Поскольку исходная мотивировка нашего исследования лежит в области эквивариантной топологии, мы приведем тот вариант гипотезы, который непосредственным образом связан с проблемой торического ранга.

Рассмотрим кольцо многочленов $S(m) = \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$ с “топологической” градуировкой $\deg v_i = 2$.

**Гипотеза** (Гипотеза Хоррокса)**.** *Пусть $M$ — конечномерный над $\mathbb{Q}$ градуированный модуль над кольцом многочленов $S(m)$, тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Отметим, что часто в формулировке гипотезы участвует не градуированное кольцо многочленов $\mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$, а локальное кольцо. Имеется большое количество ярких результатов связанных с гипотезой Хоррокса. Так, в работе Эванса и Гриффитса [23] дан положительный ответ в том случае, когда модуль $M$ есть прямая сумма подмодулей вида $k[v_1, \ldots, v_m]/I$, где идеал $I$ порожден мономами, в частности модуль $M$ допускает $\mathbb{Z}^m$-мультиградуировку. При некоторых чисто алгебраических ограничениях на модуль $M$ гипотеза доказана в [21]. В [23] указано (без доказательства), что гипотеза Хоррокса верна для $m \leqslant 4$. Более сильная оценка была получена Авраамовым и Бушвейцем в [2]. Используя теорему Эванса-Гриффитса о сизигиях [22], авторы доказали неравенство $\dim \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \frac{3}{2}(m-1)^2 + 8$. Ниже мы покажем (см. Теорему 2.1.7), что та же квадратичная оценка имеется для ранга когомологий произвольного конечномерного топологического пространства с почти свободным действием тора, чье пространство орбит связно и формально и односвязно. В частности, для таких пространств это влечет гипотезу о торическом ранге для $m \leqslant 5$.

### 2.1.1. Главные $T^m$-расслоения

*Моделью* градуированной алгебры $\mathcal{B}$ мы будем называть такую дифференциальную градуированную алгебру $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$, что $H[\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}}] \simeq \mathcal{B}$. Нашей первой целью является построение удобной дифференциальной градуированной алгебры $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$, вычисляющей кольцо $H^*(X, \mathbb{Q})$ рациональных когомологий $CW$-комплекса $X$ с действием $m$-мерного тора $T^m$.

**Лемма 2.1.1.** *Набор $(X \times ET^m, X_{T^m}, T^m, \pi)$, где $X_{T^m} = X \times_{T^m} ET^m$ — конструкция Бореля (гомотопическое пространство орбит), $\pi\colon X \times ET^m \to X_{T^m}$, является локально-тривиальным гомологически простым расслоением.*

*Доказательство.* Поскольку $\pi$ является проекцией на пространство орбит свободного действия компактной группы, набор $(X \times ET^m, X_{T^m}, T^m, \pi)$ автоматически является главным $T^m$-расслоением.

Теперь докажем гомологическую простоту, т.е. покажем, что фундаментальная группа пространства $X_{T^m}$ тривиально действует на гомологиях слоя. Рассмотрим произвольную петлю $\gamma\colon S^1 \to X_{T^m}$. Расслоение $\gamma^*\pi$ тривиально, так как оно классифицируется некоторым элементом группы $H^2(S^1, \mathbb{Z}^m) = 0$, поэтому действие $[\gamma] \in \pi_1(X_{T^m})$ на $H_*(T^m, \mathbb{Z})$ тривиально. □

В общем случае эта спектральная последовательность не вырождается, однако, при некоторых дополнительных ограничениях на пространство $X_{T^m}$ все дифференциалы $d_i$, при $i \geqslant 3$ обращаются в ноль и член $(E_2, d_2)$ спектральной последовательности Лерре-Серра предоставляет явную модель для когомологий пространства $X$.

Прежде чем доказывать результаты о вырождении спектральной последовательности Лере-Серра, мы зафиксируем обозначения и введем некоторые понятия рациональной теории гомотопий. Все дифференциальные алгебры, рассматриваемые дальше, предполагаются градуировано-коммутативными, то есть $a \cdot b = (-1)^{\deg a \deg b} b \cdot a$ и $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot db$. Пусть $Y$ — односвязное топологическое пространство, $[A^*_{PL}(Y), d]$ — коммутативная дифференциальная градуированная алгебра кусочно линейных дифференциальных форм на $Y$ (см. [25, §2.4.2]).

**Определение 2.1.2.** *Минимальной моделью* односвязного топологического пространства $Y$ называется градуированная дифференциальная алгебра $(\mathcal{M}(Y), d)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathcal{M}^0(Y) = \mathbb{Q}$, $d|_{\mathcal{M}^0(Y)} = 0$, $\dim \mathcal{M}^i(Y) < \infty$ при всех $i \in \mathbb{N}$;
2. $\mathcal{M}(Y)$ свободно порождена однородными элементами $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$:
$$\mathcal{M}(Y) = \Lambda(\{x_i | \deg x_i \text{ нечетна}\}) \otimes S(\{x_i | \deg x_i \text{ четна}\}),$$
$\deg x_k \leqslant \deg x_l$ при $k < l$;
3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ элемент $dx_k$ является многочленом от $x_1, \ldots, x_{k-1}$;
4. Существует квази-изоморфизм $\varphi\colon (\mathcal{M}(Y), d) \to (A^*_{PL}(Y), d)$.

**Определение 2.1.3.** Односвязное топологическое пространство $Y$ называется *формальным*, если существует цепочка квази-изоморфизмов между дифференциальными градуированными алгебрами $[A_{PL}(Y), d]$ and $[H^*(Y, \mathbb{Q}), 0]$. Эквивалентно, пространство $Y$ формально, если существует квази-изоморфизм из минимальной модели $Y$ в алгебру когомологий с нулевым дифференциалом:
$$\varphi\colon [\mathcal{M}(Y), d] \to [H^*(Y, \mathbb{Q}), 0].$$

**Определение 2.1.4.** Скажем, что действие тора $T^m : X$ удовлетворяет *условию формальности* (или просто *формально*), если гомотопическое пространство орбит $X_{T^m}$ формально и односвязно.

*Замечание.* Из формальности действия $T^m : X$, вообще говоря, не следует формальность самого $X$. Так, момент-угол-комплексы с нетривиальными произведениями Масси в когомологиях, построенные в работе [56], не являются формальными, тогда как их гомотопические пространства орбит формальны.

Важно отметить, что класс формальных пространств достаточно богат: он включает в себя все кэлеровы многообразия, однородные пространства групп Ли; произведение и букет формальных пространств формальны; связная сумма формальных многообразий формальна; ретракт формального пространства формален. Детальное обсуждение понятия формальности можно найти в книгах [24; 25].

Топологически главное $T^m$-расслоение $X \times ET^m \to X_{T^m}$ однозначно определятся характеристическим классом
$$\tau\colon H^1(T^m, \mathbb{Z}) \simeq H^2(BT^m, \mathbb{Z}) \to H^2(X_{T^m}, \mathbb{Z}).$$
Расширение класса $\tau$ над полем $\mathbb{Q}$ мы будем обозначать $\tau_{\mathbb{Q}}$.

**Лемма 2.1.5.** *Рассмотрим пространство $X$ с действием тора $T^m$. Предположим, что действие $T^m\colon X$ удовлетворят условию формальности 2.1.4. Тогда спектральная последовательность Лерре-Серра главного расслоения $X \times ET^m \to X_{T^m}$ вырождается в члене $E_3$ и имеет место изоморфизм*

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d_2\big], \tag{2.1}$$

*где дифференциал $d_2$ равен нулю на $H^*(X_{T^m},\mathbb{Q})$, совпадает с характеристическим классом $\tau_{\mathbb{Q}}$ на $H^1(T^m,\mathbb{Q})$ и продолжен по правилу Лейбница на всю алгебру.*

*Доказательство.* Согласно Лемме 2.1.1 спектральная последовательность Лерре-Серра $(E_i, d_i)$ расслоения $T^m \to X \times ET^m \to X_{T^m}$ сходится к когомологиям пространства $X$. Рассмотрим эту последовательность с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Поскольку дифференциал $d_2$ удовлетворяет правилу Лейбница, достаточно задать $d_2$ на мультипликативных образующих члена $E_2 = H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q})$. Так как $d_2|_{E^{*,0}} = 0$, достаточно найти значение $d_2$ на $H^1(T^m,\mathbb{Q})$. Нетрудно видеть, что для универсального главного $T^m$-расслоения $ET^m \to BT^m$ дифференциал $d_2\colon H^1(T^m,\mathbb{Q}) \to H^2(BT^m,\mathbb{Q})$ является изоморфизмом. В силу естественности отображений между спектральными последовательностями, индуцированными отображениями между пространствами, $d_2\colon H^1(T^m,\mathbb{Q}) \to H^2(X_{T^m},\mathbb{Q})$ совпадает с $i^*\colon H^2(BT^m,\mathbb{Q}) \to H^2(X_{T^m},\mathbb{Q})$, где $i\colon X_{T^m} \to BT^m$ — классифицирующее отображение. Следовательно дифференциал $d_2$ определяется характеристическим классом $\tau_{\mathbb{Q}} = i^*$ и $E_3 = H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d_2\big]$.

Докажем теперь, что при условии формальности действия $T^m\colon X$ все старшие дифференциалы тривиальны. Алгебра когомологий $H^*(T^m,\mathbb{Q})$ тора $T^m$ суть внешняя алгебра $\Lambda(m) := \Lambda(u_1,\dots,u_m)$. Пусть $(\mathcal{M}(X_{T^m}),\partial)$ — минимальная модель пространства $X_{T^m}$, вычисляющая кольцо рациональных когомологий. Тогда, согласно [25, Ex. 2.72], алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{M}(X_{T^m}) \otimes \Lambda(m)$ с дифференциалом $d_{\mathcal{A}}$, который совпадает с $\partial$ на $\mathcal{M}(X_{T^m})$ и отображает $u \in \Lambda^1(m)$ в представителя характеристического класса $\tau_{\mathbb{Q}}(u)$, является моделью для когомологий пространства $X$. Поскольку пространство $X_{T^m}$ формально, существует квази-изоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}(X_{T^m}) \to H^*(X_{T^m},\mathbb{Q})$, который, согласно [24, Lemma 14.2], продолжается до квази-изоморфизма:

$$\varphi \otimes \mathrm{id}\colon \big[\mathcal{M}(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big] \to \big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big]. \tag{2.2}$$

Тем самым, алгебра $H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big]$ изоморфна алгебра когомологий $X$, а поскольку $H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big] \simeq H\big[E_2, d_2\big] \simeq E_3$, спектральная последовательность Лерре-Серра вырождается в члене $E_3$. □

Если $X$ — конечный $CW$ комплекс, а действие $T^m\colon X$ почти свободно, то кольцо когомологий конструкции Бореля $X_{T^m}$ в изоморфизме (2.1) может быть заменено на кольцо когомологий пространства орбит $X/T^m$.

**Предложение 2.1.6.** *Пусть $X$ — конченый $CW$ комплекс, снабженный почти свободным действием тора $T^m$. Тогда*

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X/T^m,\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big]. \tag{2.3}$$

*Доказательство.* Согласно изоморфизму (2.1)

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big].$$

Следовательно, чтобы доказать предложение, достаточно доказать, что алгебры $H^*(X_{T^m},\mathbb{Q})$ и $H^*(X/T^m,\mathbb{Q})$ естественно изоморфны. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим проекцию на первый множитель:

$$f\colon Y_n := X \times_{T^m} (S^{2n+1})^m \to X/T^m.$$

Заметим, что полный прообраз $f^{-1}(z)$ любой точки $z \in X/T^m$ есть $(S^{2n-1})^m/G_x$, где $x \in X$ — один из прообразов $z$, а $G_x \subset T^m$ — стабилизатор $x \in X$. Так как $|G_x| < \infty$, $H^i\big((S^{2n+1})^m/G_x,\mathbb{Q}\big) = 0$ при $0 < i < 2n$. В самом деле, пространство $(S^{2n+1})^m/G_x$ гомеоморфно клеточному остову классифицирующего пространства группы $G_x$, которое имеет тривиальные группы рациональных когомологий. Тем самым, по теореме Вьеториса-Бегле [65] отображение

$$f^*\colon H^r(X/T^m,\mathbb{Q}) \to H^r(Y_n,\mathbb{Q})$$

является изоморфизмом при $r < 2n$. Переходя к пределу $n \to \infty$, $\varinjlim Y_n = X \times_{T^m} ET^m$, и пользуясь тем, что функтор когомологий коммутируют с прямыми пределами, получаем естественный изоморфизм:

$$f^*\colon H^*(X/T^m,\mathbb{Q}) \simeq H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}).$$

□

*Замечание.* Из доказательства Предложения 2.1.6, в частности, следует, что для пространств с почти свободным действием $T^m\colon X$ формальность гомотопического пространства орбит $X_{T^m}$ эквивалентна формальности обычного фактор-пространства $X/T^m$.

Отметим, что из условия Предложения 2.1.6 следует, что алгебра $H^*(X/T^m,\mathbb{Q})$ конечномерна. Этот факт будет играть ключевую роль далее.

*Замечание.* В статье [51] В. Пуппе доказал гипотезу о торическом ранге для $m \leqslant 3$. Вместо главного $T^m$ расслоения $T^m \to X\times ET^m \to X_{T^m}$ для анализа когомологий $H^*(X,\mathbb{Q})$ он использовал локально тривиальное расслоение из конструкции Бореля $X \to X\times_{T^m} ET^m \to BT^m$. То же расслоение использовалось в [25, §7.3.2] для изучения минимальной модели пространства $X$.

### 2.1.2. Гипотеза Хоррокса

Обозначим алгебру $H^*(X/T^m,\mathbb{Q})$ за $\mathcal{A}$, а внешнюю алгебру $H^*(T^m,\mathbb{Q}) = \Lambda(u_1,\dots,u_m)$ за $\Lambda(m)$. Для модулей над кольцом полиномов $S(m) = \mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$ размерность соответствующего векторного пространства над $\mathbb{Q}$ мы будем обозначать $\dim$.

Изоморфизм (2.3) позволяет свести задачу оценки размерности когомологий пространства с действием тора к чисто алгебраической задаче вычисления когомологий дифференциальной алгебры: $H[\mathcal{A}\otimes\Lambda(m),d]$.

Дифференциал $d$ задан на компоненте $\Lambda^1(m)$, обращается в ноль на $\mathcal{A}$ и продолжается по правилу Лейбница на всю алгебру. Отображение $d\colon \Lambda^1(m) \to \mathcal{A}^2$ определяет на алгебре $\mathcal{A}$ структуру $S(m)$-модуля. С топологической точки зрения эта структура является структурой $H^*_{T^m}(pt,\mathbb{Q})$-модуля в эквивариантных когомологиях $H^*_{T^m}(X,\mathbb{Q})$. Алгебра $[\mathcal{A}\otimes\Lambda(m),d]$, чьи когомологии нас интересуют, является комплексом Кошуля, вычисляющим модули $\mathrm{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$. Тем самым, $H[\mathcal{A}\otimes\Lambda(m),d] = \mathrm{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$.

В связи с появлением модулей $\mathrm{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$ естественно привести гипотезу Хоррокса, впервые сформулированную в [8, p. 453], см. также [33, Problem 24]. Для наших целей нам не потребуется наиболее общая формулировка, поэтому мы остановимся на следующем частном варианте. Далее все модули над кольцом $S(m)$ предполагаются градуированными.

**Гипотеза.** *Рассмотрим конечномерный модуль $M$ над кольцом многочленом $S(m)$. Тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^{-i}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0,\dots,m. \tag{2.4}$$

Имеется также слабый вариант гипотезы:

**Гипотеза.** *Рассмотрим конечномерный модуль $M$ над кольцом многочленом $S(m)$. Тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^{*}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant 2^m. \tag{2.5}$$

**Теорема 2.1.7.** *Предположим, что пространство орбит почти свободного действия группы $T^m$ на конечномерном $CW$-комплексе $X$ односвязно и формально. Тогда слабая гипотеза Хоррокса для $H^*_{T^m}(pt,\mathbb{Q})$-модуля $H^*_{T^m}(X,\mathbb{Q})$ влечет гипотезу о торическом ранге для пространства $X$.*

*Доказательство.* Предположим, что действие $T^m\colon X$ удовлетворяет условиям гипотезы о торическом ранге. Тогда, согласно (2.3),

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A},\mathbb{Q}).$$

Поскольку $X$ — конечномерный $CW$-комплекс, пространство $X/T^m$ также конечномерно, поэтому $\dim\mathcal{A} < \infty$. Согласно слабой гипотезе Хоррокса (2.5), имеем:

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) = \dim \mathrm{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A},\mathbb{Q}) \geqslant 2^m.$$

□

*Замечание.* Требование формальности пространства орбит $X/T^m$, является ключевым условием в доказательстве Теоремы 2.1.7. В связи с этим возникает вопрос, может ли это условие быть ослаблено.

Далее мы приведем и докажем несколько элементарных оценок на размерности Tor-модулей из гипотезы Хоррокса, а в заключение этой части сформулируем наиболее сильное известное на данный момент неравенство касательно слабой гипотезы Хоррокса.

**Лемма 2.1.8.** *Пусть $M$ — конечномерный модуль над кольцом многочленов $S(m)$. Тогда*

*(1)* $\dim \mathrm{Tor}^{0}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$,

*(2)* $\dim \mathrm{Tor}^{-1}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant m$,

*(3)* $\dim \operatorname{Tor}^{-(m-1)}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant m$,

*(4)* $\dim \operatorname{Tor}^{-m}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1$.

*Доказательство.* Первое неравенство очевидно выполняется, поскольку $\dim \operatorname{Tor}^{0}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ есть минимальное количество образующих модуля $M$.

Докажем теперь второе неравенство. Рассмотрим длинную точную последовательность

$$0 \to \mathcal{I} \to \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \to M \to 0,$$

где $k = \dim \operatorname{Tor}^{0}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ — минимальное число образующих модуля $M$, $F_i$ — свободные $S(m)$-модули ранга 1, а $\mathcal{I}$ — ядро естественной проекции. Лемма утверждает, что количество образующий модуля $\mathcal{I}$ не меньше $m$. Действительно, рассмотрим образующие $f_1, \ldots, f_s \in \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ модуля $\mathcal{I}$. Тогда $\varphi_1 = \operatorname{pr}_1(f_1), \ldots, \varphi_s = \operatorname{pr}_1(f_s)$ порождают некоторый однородный идеал $\mathcal{J}$ в $F_1$, где $\operatorname{pr}_1 \colon \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \to F_1$ — проекция на первое слагаемое. Этот идеал собственный, поскольку $k$ есть минимальное число образующих модуля $M$, кроме того, $\dim F_1/\mathcal{J} \leqslant \dim M < \infty$.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся стандартным результатом коммутативной алгебры [32, Th. 7.2], утверждающим, что размерность пересечения конических гиперповерхностей $\varphi_i(v_1, \ldots, v_m) = 0$, $i = 1, \ldots, s$ в $\mathbb{C}^m$ не меньше $m - s$. В применении к нашей ситуации имеем: $\operatorname{Spec}(S(m)/\mathcal{J}) \otimes \mathbb{C} = \{0\}$, поскольку все элементы положительной степени в $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{J}$ нильпотентны, тем самым $s \geqslant m$.

Чтобы доказать последние два неравенства, рассмотрим вместо комплекса Кошуля $[M \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m), d]$ двойственный комплекс $[M^\star \otimes \Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_m), \partial]$, где $M^\star = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(M, \mathbb{Q})$, $\xi_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Lambda^1(m), \mathbb{Q})$, а $\partial = d^*$. Эти пространства корректно определены, поскольку $M$ и $\Lambda(m)$ конечномерны. Нетрудно проверить, что $(M^\star \otimes \Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_m), \partial)$ есть резольвента, вычисляющая $\operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M^\star, \mathbb{Q})$, тем самым

$$\operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) = \operatorname{Tor}^{-(m-i)}_{S(m)}(M^\star, \mathbb{Q}).$$

Применяя первые две оценки к модулю $M^\star$, мы получаем оставшиеся два неравенства. □

**Теорема 2.1.9.** *Пусть $M$ — конечномерный модуль над кольцом многочленов $S(m)$. Тогда*

- $\dim \operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 5m - 4$ *при четных* $m \geqslant 4$,
- $\dim \operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 3m - 1$ *при нечетных* $m$.

*Доказательство.* Лемма 2.1.8 утверждает, что $\dim \operatorname{Tor}^{m}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1$, поэтому, согласно свойству функтора Tor, для всех $i = 0, \ldots, m$ соответствующие компоненты Tor-модуля нетривиальны: $\dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1$, поскольку иначе длинна свободной резольвенты модуля $M$ меньше $m$. Итак, поскольку $\operatorname{Tor}^{-1}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant m$ и $\operatorname{Tor}^{-(m-1)}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant m$, имеет место следующее неравенство:

$$S_{odd} := \sum_{i=2k+1} \dim \operatorname{Tor}^{i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1 + m + \frac{m-3}{2},$$

для нечетных $m$ и

$$S_{odd} \geqslant 2m + \frac{m-4}{2},$$

для четных $m$. Поскольку гомологическая Эйлерова характеристика $\chi_h(\operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ обращается в ноль,

$$\chi_h(\operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})) = \chi_h(M \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)) = 0,$$

полная размерность равна $\dim \operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) = S_{odd} + S_{even} = 2S_{odd}$, где $S_{even} := \sum_{i=2k} \dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$. □

Теорема 2.1.9 дает лишь линейную по $m$ оценку на суммарную размерность $\dim \operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ для общих конечномерных модулей $M$. Самыми сильными известными на данный момент общими неравенствами являются квадратичные оценки:

**Теорема 2.1.10** (Аврамов-Бушвейц [2, Prop. 1])**.** *Пусть $M$ — конечномерный модель над кольцом многочленов $S(m)$, $m \geqslant 5$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^{*}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \frac{3}{2}(m-1)^2 + 8. \tag{2.6}$$

Согласно Теореме 2.1.7 такие же оценки имеют место для ранга кольца когомологий с почти свободным формальным действием тора $T^m$:

**Теорема 2.1.11.** *Пусть $X$ — конечномерный CW-комплекс с почти свободным действием тора $T^m$, удовлетворяющем условию формальности 2.1.4. Тогда*

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \geqslant \frac{3}{2}(m-1)^2 + 8. \tag{2.7}$$

*В частности, гипотеза о торическом ранге для таких пространств имеет место при $m \leqslant 5$.*

## 2.2. Гипотеза о торическом ранге для момент-угол-комплексов

В прошлом параграфе мы доказали частные результаты касательно гипотезы о торическом ранге для общих топологических пространств. На пространствах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, как мы отметили в части 1.5, имеется стандартное действие $m$-мерного тора. Это действие не является почти свободным, однако, при некоторых $r$ возможно выбрать подтор $T^r \subset T^m$, действующий на пространстве $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ почти свободно. Мы хотим оценить сверху максимальный ранг $r$ такого подтора, найти нижнюю границу для $\mathrm{hrk}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}, \mathbb{Q})$ и проверить, таким образом, выполнение гипотезы о торическом ранге для индуцированных действий подторов $T \subset T^m$ на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Для этого мы рассмотрим операцию $\mathcal{K} \mapsto L(\mathcal{K})$ на множестве симплициальных комплексов, которую называем *операцией удвоения*. Эта комбинаторная операция была привнесена в торическую топологию в недавней работе авторов Бари, Бендерски, Коэн и Гитлер, посвященной $\mathcal{K}$-степеням [3]. Основное свойство операции удвоения состоит в том, что момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ может быть отождествлен с вещественным момент-угол-комплексом $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(\mathcal{K})}$, отвечающим удвоенному комплексу $L(\mathcal{K})$. Мы докажем гипотезу о торическом ранге для пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, оценив снизу ранг кольца когомологий вещественных момент-угол-комплексов $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$.

### 2.2.1. Вещественные момент-угол-комплексы

**Определение 2.2.1.** Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. *Вещественным момент-угол-комплексом* $\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ называется пространство

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} = ([-1,1], \{-1,1\})^\mathcal{K}.$$

*Замечание.* Поскольку каждое вложение $\{-1,1\} \hookrightarrow [-1,1]$ коммутирует с действием группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$, на вещественных момент-угол-комплексах имеется действие 2-тора $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$. Пространство орбит этого действия совпадает с пространством орбит действия тора $T^m$ на обычном момент-угол-комплексе $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$:

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \simeq ([0,1], \{1\})^\mathcal{K}.$$

**Пример 2.2.2.** Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^3$ — граница трехмерного симплекса, то есть симплициальный комплекс на множестве $\{1,2,3,4\}$, состоящий из всех собственных подмножеств $\mathcal{I} \subset \{1,2,3,4\}$. Соответствующий вещественный момент-угол-комплекс есть граница четырех-мерного куба:

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} = ([-1,1], \{-1,1\})^\mathcal{K} \simeq \partial[-1,1]^4 \simeq S^3.$$

Как мы покажем ниже, всякий момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является вещественным момент-угол-комплексом $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ для некоторого комплекса $\mathcal{K}'$.

### 2.2.2. Операция удвоения симплициальных комплексов

Об определении, сформулированном ниже, автор узнал от авторов работы [3], в которой впервые операция удвоения была рассмотрена в контексте торической топологии.

**Определение 2.2.3.** Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{v_1, \ldots, v_m\}$. *Удвоением* комплекса $\mathcal{K}$ называется комплекс $L(\mathcal{K})$ на множестве вершин $[2m] = \{v_1, v_1', \ldots, v_m, v_m'\}$ определяемый следующим условием: $\mathcal{I} \subset [2m]$ является минимальным (по включению) недостающим симплексом комплекса $L(\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ имеет вид $\{v_{i_1}, v_{i_1}', \ldots, v_{i_k}, v_{i_k}'\}$, где $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ минимальный недостающий симплекс комплекса $\mathcal{K}$.

Отметим, что если комплекс $\mathcal{K} = \partial P^*$ является границей многогранника двойственного простому многограннику $P$, то $L(\mathcal{K})$ также является границей выпуклого многогранника и совпадает с операцией $L(P)^*$, введенной в [66, Определение 1]. Операция удвоения простых многогранников использовалась также в работе [28] С. Гитлера и Лопеса де Медрано для описания топологического типа некоторых момент-угол-комплексов.

**Примеры 2.2.4.**

- Если $\mathcal{K} = \Delta^m$ есть $(m-1)$-мерный симплекс, то $L(\mathcal{K}) = \Delta^{2m}$.
- Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^m$ граница $(m-1)$-мерного симплекса, то $L(\mathcal{K}) = \partial\Delta^{2m}$.

Легко видеть, что операция удвоения уважает джоин симплициальных комплексов, т.е. $L(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) = L(\mathcal{K}_1) * L(\mathcal{K}_2)$.

Обозначим через $\operatorname{mdim}\mathcal{K}$ минимальную размерность максимального по включению симплекса комплекса $\mathcal{K}$. Таким образом, например, комплекс, $\mathcal{K}$ является *чистым*, то есть все максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность, тогда и только тогда, когда $\operatorname{mdim}\mathcal{K} = \dim\mathcal{K}$.

Следующая лемма напрямую следует из определений.

**Лемма 2.2.5.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, тогда $\dim L(\mathcal{K}) = m + \dim\mathcal{K}$ и $\operatorname{mdim} L(\mathcal{K}) = m + \operatorname{mdim}\mathcal{K}$.*

Ключевым свойством операции удвоения является тесная связь с конструкцией $\mathcal{K}$-степеней, что позволяет использовать ее при изучении связей между момент-угол-комплексами и их вещественными аналогами.

**Лемма 2.2.6.** *Пусть $(X, A)$ — пара клеточных пространств, $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим пару пространств*

$$(Y, B) = \big(X \times X, (X \times A) \cup_{A\times A} (A \times X)\big). \tag{2.8}$$

*Тогда:*

$$(Y, B)^{\mathcal{K}} = (X, A)^{L(\mathcal{K})}. \tag{2.9}$$

*В частности $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \mathbb{R}\mathcal{K}_{L(\mathcal{K})}$.*

*Доказательство.* Для точки $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in Y^m$ положим

$$\mathcal{I}_Y(\boldsymbol{y}) = \{v_i \in [m] \mid y_i \in Y \backslash B\} \subset [m].$$

Для точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1', \ldots, x_m, x_m') \in X^{2m}$ подмножество $\mathcal{I}_X(\boldsymbol{x}) \subset [2m]$ определяется аналогично. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = ((x_1, x_1'), \ldots, (x_m, x_m')) \in Y^m = X^{2m}$. Из определения $\mathcal{K}$-степеней следует что $\boldsymbol{y} \notin (Y, B)^{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}_Y(\boldsymbol{y}) \notin \mathcal{K}$. Покажем, что последнее эквивалентно условию $\mathcal{I}_X(\boldsymbol{x}) \notin L(\mathcal{K})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1', \ldots, x_m, x_m')$.

Действительно, если $\mathcal{I}_Y(\boldsymbol{y}) = \{v_{i_1}, \ldots v_{i_k}\} \notin \mathcal{K}$ то $\mathcal{I}_X(\boldsymbol{x}) \supset \{v_{i_1}, v_{i_1}', \ldots, v_{i_k}, v_{i_k}'\} \notin L(\mathcal{K})$. Обратно, пусть $\mathcal{I}_X(\boldsymbol{x}) \notin L(\mathcal{K})$, тогда по определению операции удвоения в комплексе $L(\mathcal{K})$ найдется недостающий симплекс вида $\{v_{i_1}, v_{i_1}', \ldots, v_{i_k}, v_{i_k}'\} \subset \mathcal{I}_X(\boldsymbol{x})$, где $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \notin \mathcal{K}$. Следовательно $\mathcal{I}_Y(\boldsymbol{y})$ содержит недостающий симплекс комплекса $\mathcal{K}$, что и требовалось.

Итак, окончательно имеем:

$$\boldsymbol{y} \notin (Y, B)^{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \notin (X, A)^{L(\mathcal{K})},$$

тем самым, утверждение леммы доказано. □

*Замечание.* Определение пары топологических пространств $(Y, B)$ в (2.8) можно переписать следующим образом

$$(Y, B) = \big((X, A)^{\Delta^1}, (X, A)^{\partial\Delta^1}\big).$$

Заменив комплексы $\Delta^1$ и $\partial\Delta^1$ произвольным симплициальными комплексам $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2$, мы аналогично Лемме 2.2.6 можем рассмотреть $\mathcal{K}$-степень $(Y, B)^{\mathcal{K}}$. Оказывается, что пространство $(Y, B)^{\mathcal{K}}$ является $\mathcal{K}$-степенью $(X, A)^{\mathcal{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K})}$ для некоторого комплекса $\mathcal{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K})$ (то есть в терминах этих обозначений $\mathcal{L}(\Delta^1, \partial\Delta^1, \mathcal{K}) = L(\mathcal{K})$).

Таким образом, можно определить комбинаторную операцию

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}),$$

переводящую пару комплексов $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2$ на множестве вершин $[k]$ и комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ в комплекс на множестве $[m] \times [k]$. Эта операция оказывается чрезвычайно полезной с точки зрения конструкций торической топологии [3; 28], она обладает важными свойствами дистрибутивности и ассоциативности относительно стандартных операций на симплициальных комплексах, для нее выполняется экспоненциальный закон [54; 55].

### 2.2.3. Доказательство гипотезы о торическом ранге для момент-угол-комплексов

**Лемма 2.2.7.** *Пусть $\mathcal{K}$ — $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда ранг подтора $T^r \subset T^m$, действующего на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ почти свободно, не превосходит $m-n$.*

*Доказательство.* Для подмножества $\mathcal{I} \subset [m]$ положим $T^\mathcal{I} = (S^1, e)^\mathcal{I}$ (см. определение общих $\mathcal{K}$-степеней 1.5.1), где $e \in S^1$ — единица группы. Легко видеть, что стабилизаторы точек в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеют вид $T^\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \in K$. Следовательно $T^r \subset T^m$ действует почти свободно тогда и только тогда, когда пересечение $T^r \cap T^\mathcal{I}$ конечно для каждого симплекса $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим симплекс $\mathcal{I}$ размерности $(n-1)$. Так как пересечение $T^r \cap T^\mathcal{I}$ двух подторов в $T^m$ конечно, то

$$\dim T^r + \dim T^\mathcal{I} \leqslant \dim T^m,$$

поэтому $r \leqslant m-n$. □

*Замечание.* На самом деле, для каждого $(n-1)$-мерного комплекса $\mathcal{K}$ найдется подтор $T^r \subset T^m$ ранга в точности $r = m-n$, действующий на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ почти свободно. Действительно, достаточно найти в касательном пространстве $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^m$ к единице $e$ группы $T^m$ такое подпространство $V$, что (1) $\dim_\mathbb{Q}(V \cap \mathbb{Q}^m) = \dim_\mathbb{R} V$; (2) $\dim V = m-n$; (3) $V$ трансверсально пересекает все пространства вида $(\mathbb{R}, 0)^\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$. Тогда тор $T' := \exp V \subset T^m$ пересекается со всеми торами $T^\mathcal{I}$ по конечной подгруппе.

Теперь мы можем сформулировать основной результат о когомологиях вещественных момент-угол-комплексов.

**Теорема 2.2.8.** *Пусть дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ с $\operatorname{mdim} \mathcal{K} = n-1$. Тогда*

$$\operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K}, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

Для начала сформулируем и докажем одну общую лемму.

**Лемма 2.2.9.** *Пара клеточных пространств $(X, A)$ такова, что у $A$ есть окрестность $U(A)$ в $X$, вида $(U(A), A) \simeq (A \times [0;1), A \times \{0\})$. Обозначим за $Y = X_1 \bigcup_A X_2$ пространство, полученное склейкой двух копий $X$ вдоль $A$. Тогда для ранга кольца когомологий пространства $Y$ имеет место оценка снизу:*

$$\operatorname{hrk}(Y, \mathbb{Q}) \geqslant \operatorname{hrk}(A, \mathbb{Q}).$$

*Доказательство.* Пусть $Y = X_1 \cup X_2$ и $U_1(A)$, $U_2(A)$ — окрестности пространства $A$ в $X_1$ и в $X_2$, соответственно. Рассмотрим покрытие $Y = W_1 \cup W_2$ открытыми множествами $W_1 = X_1 \cup U_2(A)$, $W_2 = X_2 \cup U_1(A)$ (в частности $W_i \simeq_{he} X$; $W_1 \cap W_2 = U_1(A) \cup U_2(A) \simeq A \times (-1, 1)$). Теперь рассмотрим длинную точную последовательность Майера-Веториса (над $\mathbb{Q}$) и оценим ранг кольца когомологий пространства $Y$:

$$\cdots \xrightarrow{p^*_{(k-1)}} H^{k-1}(W_1 \cap W_2) \xrightarrow{\delta^*_{(k)}} H^k(Y) \xrightarrow{g^*_{(k)}} H^k(W_1) \oplus H^k(W_2) \xrightarrow{p^*_{(k)}} \cdots$$

Отображение $p^*_{(k)}$ имеет вид $(i_1^*) \oplus (-i_2^*)$ где $i_1$ и $i_2$ вложения пространства $W_1 \cap W_2$ в $W_1$ и $W_2$, соответственно. Так как $W_1 = W_2$ и отображения $i_1$ и $i_2$ совпадают, то $\dim \ker p^*_{(k)} \geqslant \dim H^k(W_1) = \dim H^k(X)$. Применяя эти неравенства (напомним, что $W_1 \cap W_2 \simeq_{he} A$), получаем:

$$\begin{aligned}
\dim H^k(Y) = \dim \ker g^*_{(k)} + \dim \operatorname{im} g^*_{(k)} = \\
= \dim \operatorname{im} \delta^*_{(k)} + \dim \ker p^*_{(k)} \geqslant \dim H^{k-1}(A) - \dim \operatorname{im} p^*_{(k-1)} + \dim H^k(X) \geqslant \\
\geqslant \dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X).
\end{aligned}$$

Осталось лишь просуммировать эти неравенства по $k$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{hrk}(Y, \mathbb{Q}) = \sum \dim H^k(Y) \geqslant \sum \big(\dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X)\big) = \\
= \sum \dim H^{k-1}(A) = \operatorname{hrk}(A, \mathbb{Q}),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

*Доказательство Теоремы 2.2.8.* Доказательство проведем индукцией по $m$. База индукции очевидна.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех комплексов с менее, чем $m$ вершинами, а комплекс $\mathcal{K}$ имеет $m$ вершин.

Вещественный момент-угол-комплекс естественным образом вкладывается в $m$-мерный куб: $\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset [-1;1]^m$. Обозначим за $(x_1, \ldots, x_m)$ координаты в $[-1;1]^m$. Без ограничения общности можно считать, что вершина $v_1$ принадлежит максимальному (по включению) симплексу комплекса $\mathcal{K}$ размерности $\operatorname{mdim} \mathcal{K} = n-1$. Рассмотрим разложение $\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} = M_+ \cup_X M_-$, где

- $M_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \colon x_1 \geqslant 0\}$,
- $M_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \colon x_1 \leqslant 0\}$,
- $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \colon x_1 = 0\}$.

Легко видеть, что пара пространств $(M_+, X)$ удовлетворяет предположению леммы 2.2.9, поэтому

$$\operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K}, \mathbb{Q}) \geqslant \operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}).$$

Опишем пространство $X$ более подробно. Непосредственно из определения пространств $\mathbb{R}\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ вытекает, что $X$ есть вещественный момент-угол-комплекс $\operatorname{link} v_1$. Более того, так как вершина $v_1$ принадлежит максимальному по включению симплексу размерности $n-1$, то $\operatorname{mdim}\operatorname{link} v_1 = n-2$. Таким образом, по предположению индукции

$$\operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}) = \operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\operatorname{link} v_1}, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{(m-1)-(n-1)} = 2^{m-n}.$$

Переход индукции доказан. □

Обратимся теперь к момент-угол-комплексам. Комбинируя результаты Леммы 2.2.5 и Леммы 2.2.6, а также Теоремы 2.2.8, имеем:

$$\operatorname{hrk}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}, \mathbb{Q}) = \operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(\mathcal{K})}) \geqslant 2^{2m-\operatorname{mdim} L(\mathcal{K})-1} = 2^{m-\operatorname{mdim}\mathcal{K}-1} \geqslant 2^{m-\dim\mathcal{K}-1}. \tag{2.10}$$

Тем самым, с учетом Леммы 2.2.7 мы получаем следующий результат:

**Теорема 2.2.10.** *Гипотеза о торическом ранге выполнена для действия подторов в торе $T^m$, действующем стандартным образом на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.*

## 2.3. Градуированная гипотеза о торическом ранге для момент-угол-комплексов

Связь между общей гипотезой о торическом ранге и гипотезой Хоррокса подсказывает, что для конечномерного пространства $X$ с почти свободным действием тора $T^m$ помимо неравенства на суммарный когомологический ранг $\operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m$, соответствующего слабой гипотезе Хоррокса, должны еще существовать *градуированные* неравенства, соответствующие общей гипотезе Хоррокса. В этой части мы сформулируем *градуированную гипотезу о торическом ранге* для пространств с формальным пространством орбит и докажем ее аналог для момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. В качестве приложения, используя результат Хохстера [34] и Теорему 1.5.7, мы получим новые неравенства на *биградуированные числа Бетти* симплициальных комплексов $\mathcal{K}$.

Пусть $X$ — конечный $CW$-комплекс с почти свободным действием тора $T^m$, удовлетворяющим условию формальности 2.1.4. Тогда, согласно (2.3), имеется модель для когомологий пространства $X$:

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H[H^*(X/T^m, \mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{Q}), d] = H[\mathcal{A} \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m), d], \tag{2.11}$$

где $\mathcal{A}^i := H^i(X/T^m, \mathbb{Q})$, $H^j(T^m, \mathbb{Q}) \simeq \Lambda^j(u_1, \ldots, u_m)$, $du_i \in \mathcal{A}^2$. По умолчанию, алгебры в левой и правой частях (2.11) имеют лишь топологическую градуировку. Однако, нетрудно видеть, что алгебра $\mathcal{A} \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$ допускает дополнительную *гомологическую градуировку*, таким образом, она *биградуирована*:

$$\operatorname{bideg}\mathcal{A}^i = (i, 0), \quad \operatorname{bideg} u_j = (1, -1), \quad \operatorname{bideg} d = (1, 1). \tag{2.12}$$

Поскольку дифференциал $d$ уважает биградуировку на алгебре $\mathcal{A} \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$, левая часть (2.11) также имеет две градуировки. Далее $H^{k,l}(X, \mathbb{Q})$ обозначает компоненту степени $(k, l)$.

Общая гипотеза Хоррокса естественным образом подталкивает нас к формулировке следующего предположения:

**Гипотеза** (Градуированная гипотеза о торическом ранге)**.** *Пусть $X$ — конечный $CW$-комплекс с таким почти свободным действием тора $T^m$, что, имеет место модель* (2.11)*. Тогда*

$$\dim H^{*,-i}(X, \mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i},$$

*где градуировка в $H(X, \mathbb{Q})$ задана в* (2.12)*.*

*Замечание.* Из Леммы 2.1.8 следует, что гипотеза верна при $i = 0, 1, m-1, m$.

В свете сформулированной гипотезы, проанализируем кольца когомологий момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Согласно Теореме 1.5.7 имеется следующая модель для когомологий пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$:

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Q}[\mathcal{K}],\mathbb{Q}) \simeq H[\mathbb{Q}[\mathcal{K}]\otimes\Lambda(u_1,\dots,u_m),d]. \tag{2.13}$$

*Замечание.* Отметим, что модель (2.1) дает альтернативное доказательство этого изоморфизма. Действительно, согласно Предложению 1.5.10, конструкция Бореля пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентна пространству $DJ(\mathcal{K})$. Последнее, в свою очередь, формально, согласно результату [59, Лемма 7.35], следовательно для вычисления когомологий $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q})$ применима модель (2.1). Поскольку $H^*(DJ(\mathcal{K}),\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$, эта модель приводит в точности к (2.13).

Аналогично уравнению (2.12) алгебры в (2.13) обладают биградуировкой (считаем, что $\mathrm{bideg}\, v_i=(2,0)$).

**Определение 2.3.1.** *Биградуированным числом Бетти* $\beta^{2i,-j}(\mathcal{K})$ момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ называется размерность компоненты $H^{2i,-j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q})$:

$$\beta^{2i,-j}(\mathcal{K}) = \dim H^{2i,-j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q}).$$

**Теорема 2.3.2.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ размерности $n-1$. Тогда биградуированные числа Бетти $\beta^{2i,-j}(\mathcal{K})$ удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\dim H^{*,-j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q}) = \sum_{i\geqslant 0}\beta^{2i,-j}(\mathcal{K}) \geqslant \binom{m-n}{j}.$$

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем общий результат Хараламбос. Также стоит упомянуть вариант этого утверждения для конечномерных модулей в [23, Cor. 2.5] и более общее утверждение в работе [6, Th. 1.1].

**Теорема 2.3.3** (Хараламбос [14, Th. 3])**.** *Пусть $M$ — конечно порожденный $\mathbb{Z}^m$-градуированный модуль над кольцом многочленов $S(m)$ размерности Крулля $s$. Тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^{-i}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m-s}{i}.$$

*Доказательство Теоремы 2.3.2.* Введем в $S(m)$ мультиградуировку $\mathbb{Z}^m$, положив $\deg v_i = (0,\dots,\underbrace{2}_{i},\dots,0)$. Поскольку идеал Стенли-Райснера порожден мономами, кольцо Стенли Райснера $\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ также $\mathbb{Z}^m$-градуировано. Легко проверить, что размерность Крулля $\mathrm{krdim}\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ равна $\dim\mathcal{K}+1=n$, поэтому, применяя Теорему 2.3.3, получаем требуемое неравенство:

$$\sum_{i\geqslant 0}\beta^{2i,-j}(\mathcal{K}) = \dim \mathrm{Tor}^{-j}_{S(m)}(\mathbb{Q}[\mathcal{K}],\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m-n}{j}.$$

□

*Замечание.* Дополнительная градуировка в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K},\mathbb{Q})$ и, соответственно, утверждение Теоремы 2.3.2, вообще говоря, не являются частными случаями градуировки и утверждения градуированной гипотезы о торическом ранге, поскольку действие стандартного тора $T^m\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ не является почти свободным. Однако, поскольку максимальный ранг $r$ подтора $T^r\subset T^m$, действующего свободно, равен в точности $m-n$, неравенства Теоремы 2.3.2 аналогичны неравенствам градуированной гипотезы о торическом ранге.

Следующий результат позволяет интерпретировать утверждение Теоремы 2.3.2 исключительно в комбинаторных терминах.

**Теорема 2.3.4** (Хохстер [34])**.** *Для произвольного симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ имеет место равенство*

$$\beta^{2j,-i}(\mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{J}\subset[m],|\mathcal{J}|=j}\dim\tilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{K}_\mathcal{J},\mathbb{Q}),$$

*где $\mathcal{K}_\mathcal{J}$ — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$, образованный всеми такими симплексами $\mathcal{I}\in\mathcal{K}$, что $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$, а $\tilde{H}^*(\cdot,\mathbb{Q})$ обозначает приведенные когомологии.*

**Следствие 2.3.5.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ размерности $n-1$. Тогда*

$$\sum_{\mathcal{J}\subset[m]}\dim\tilde{H}^{|\mathcal{J}|-i-1}(\mathcal{K}_\mathcal{J},\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m-n}{i}.$$

## 2.4. Максимальные действия торов

Пусть $M$ — гладкое многообразие без края, снабженное гладким эффективным действием тора $T^k = (S^1)^k$. В этой части нас будут интересовать топологические ограничения, накладываемые на многообразие $M$ и на действие $T\colon M$. Необходимые технические результаты о гладких действиях компактных групп можно найти в книге [57].

**Теорема 2.4.1** (Исида [37])**.** *Пусть тор $T$ эффективно и гладко действует на гладком многообразии $M$. Тогда для любой точки $x \in M$ выполнено неравенство*

$$\dim M \geqslant \dim T + \dim T_x, \tag{2.14}$$

*где $T_x \subset T$ — стабилизатор точки $x$.*

Теорема 2.4.1 послужила основанием для введения в работе [37] понятия *максимального действия тора* $T$ на гладком многообразии $M$:

**Определение 2.4.2** (Исида [37, Def. 2.1])**.** Будем говорить, что эффективное действие тора $T$ на гладком связном многообразии $M$ *максимально*, если существует такая точка $x \in M$, что в неравенстве (2.14) выполняется равенство:

$$\dim M = \dim T + \dim T_x. \tag{2.15}$$

Непосредственно из Теоремы 2.4.1 вытекает следующее предложение, обуславливающее термин "максимальное действие":

**Предложение 2.4.3** (Исида [37, Lemma 2.2])**.** *Пусть тор $T$ гладко и эффективно действует на связном многообразии $M$. Предположим, что индуцированное действие торической подгруппы $T_0 \subset T$ максимально. Тогда $T_0 = T$.*

Из предложения 2.4.3 следует, что если действие $T : M$ максимально, то его нельзя расширить до действия большего тора $T' \supset T$. Приведем несколько примеров многообразий с максимальным действием тора.

**Пример 2.4.4.** В уравнении (2.15) возможно два экстремальных случая — (i) $\dim T_x = 0$ для некоторой, а следовательно для любой, точки $x$; (ii) $\dim T_x = \dim T$ для некоторой точки $x$.

1. Случай (i) дает лишь торы $T$, действующие на себе сдвигами $T \times T \to T$. Это действие свободно, то есть для любой точки $x \in T$ стабилизатор $T_x$ тривиален, $\dim T_x = 0$, и неравенство (2.14) обращается в равенство.

2. В случае (ii) возникает уже множество интересных примеров, в частности, симплектические многообразия с гамильтоновым действием тора половинной размерности, классифицированные Дельзантом [19]. Например, рассмотрим тор $T = U(1)^n$ действующий на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ покоординатным умножением в однородных координатах:

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot [z_0 : z_1 : \dots : z_n] = [z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n].$$

В этом случае точка $x = [1 : 0 : \dots : 0]$ является неподвижной $T_x = T$, следовательно $\dim \mathbb{C}P^n = \dim T + \dim T_x$ и действие максимально.

3. Рассмотрим единичную сферу $S^{2n-1} = \{z \subset \mathbb{C}^n \colon |z| = 1\}$. Тогда тор $T = U(1)^n$, действующий на $\mathbb{C}^n$ покоординатным умножением, сохраняет сферу $S^{2n-1}$. Стабилизатор точки $x = (1, 0, \dots, 0)$ суть координатный подтор: $T_x = \{(1, z_2, \dots, z_n) \in T\}$ и неравенство (2.14) вновь обращается в равенство.

Свойство максимальности сохраняется при факторизации по свободному действию подтора, поскольку $\dim M$ и $\dim T$ в уравнении (2.15) уменьшаются на одно и то же число:

**Предложение 2.4.5.** *Пусть тор $T$ действует максимально на многообразии $M$, при этом подтор $T' \subset T$ действует на многообразии $M$ свободно. Тогда пространство орбит $M/T'$ является гладким многообразием с максимальным действием тора $T/T'$.*

Как следует из следующего предложения, момент-угол-комплексы, снабженные эквивариантной гладкой структурой тоже являются примерами многообразий с максимальным действием тора.

**Предложение 2.4.6.** *Пусть на момент-угол-комплексе $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ существует такая гладкая структура, что естественное действие тора $T = (S^1)^m$ гладко. Тогда действие $T\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ максимально.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ — симплекс максимальной размерности $(n-1)$. Рассмотрим такую точку $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ в $(D^2, S^1)^{\mathcal{I}}$, что $z_i = 0$ при $i \in \mathcal{I}$ и $z_i = 1$ иначе. Тогда стабилизатор $T_{\boldsymbol{z}}$ есть координатный тор $(S^1, e)^{\mathcal{I}} \subset (S^1)^m$, поэтому

$$\dim T + \dim T_z = m + n = \dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

□

Отметим, что класс *гладких* многообразий с максимальным действием тора очень широк, и по-видимому, не имеет разумного полного описания. В частности, имея многообразие $M$ с максимальным действием тора $T$ и любое многообразие $N$ с эффективным действием тора $T$, можно взять эквивариантную связную сумму вдоль свободной орбиты $T \cdot y$ и получить новое многообразие

$$M \#_{T\cdot y} N = \big(M \backslash U(T\cdot y)\big) \bigcup_{\partial U(T\cdot y)} \big(N \backslash U(T\cdot y)\big), \tag{2.16}$$

где $U(T\cdot y)$ — эквивариантная трубчатая окрестность. Поскольку максимальность действия тора на многообразии $M$ обеспечивается условиями, накладываемыми на стабилизатор лишь в одной точке $x \in M$, действие тора $T$ на связной сумме $M\#_{T\cdot y}N$ тоже максимально.

Как мы увидим далее, ситуация кардинально меняется при переходе от категории гладких многообразий к категории *комплексных* многообразий.

# Глава 3

# Комплексно-аналитические структуры на многообразиях с максимальным действием тора

В этой главе мы анализируем возможность введения гладких и комплексных структур на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и на пространствах орбит $\mathcal{Z}_\mathcal{K}/T$ свободных действий подторов $T \subset T^m$. В части 3.1 мы докажем, что, если симплициальный комплекс $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ отвечает некоторому полному симплициальному вееру $\Sigma$, то соответствующее пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ эквивариантно гомеоморфно фактор-пространству многообразия $U(\mathcal{K})$ по действию некоторой группы $S \subset (\mathbb{C}^*)^m$. Используя это представление, мы введем на момент-угол-комплексах и их факторах гладкие и комплексно-аналитические структуры. Замечательная особенность построенных комплексных многообразий — наличие большой группы торических симметрий, а именно, каждое из многообразий допускает максимальное действие компактного тора $T^m$. Условие максимальности действие тора в комплексно-аналитической категории оказалось удачным обобщением условия действия алгебраического тора с открытой плотной орбитой. Так, основываясь на недавнем результате Исиды [37], в части 3.2 мы докажем, что наша конструкция, подобно конструкции Кокса-Батырева торических многообразий 1.4.5, позволяет получить все компактные комплексные многообразия с максимальным действием тора.

## 3.1. Фактор-конструкция момент-угол-комплексов

Прежде всего сформулируем несколько важных определений и теорем о действиях групп на топологических пространствах. Напомним, что топологическое пространство $G$, снабженное структурой абстрактной группы, называется *топологической группой*, если операции умножения $\mu\colon G \times G \to G$ и взятия обратного $\iota\colon G \to G$ непрерывны. Далее все действия топологических групп $G$ на топологических пространствах $X$ предполагаются непрерывными, то есть отображение $G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx$ непрерывно.

**Определение 3.1.1.** Действие топологической группы $G$ на топологическом пространстве $X$ называется *собственным*, если отображение действия

$$\boldsymbol{m}\colon G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

собственно, то есть прообраз любого компактного множества компактен.

*Замечание.* Действие компактной топологической группы $G$ всегда собственно. Действительно, для любого компактного множества $K \subset X \times X$ полный прообраз $\boldsymbol{m}^{-1}(K)$ содержится в компактном множестве $G \times \operatorname{pr}_2(K)$, где $\operatorname{pr}_2\colon X \times X \to X$ — проекция на второй сомножитель.

Начиная с этого момента, если противное не оговорено, мы предполагаем, что все действия $G\colon X$ гладкие, то есть $G$ — группа Ли, $X$ — гладкое многообразие, а отображение $G \times X \to X$ гладко.

Вообще говоря, пространство орбит $X/G$ гладкого действия не является ни многообразием, ни даже хаусдорфовым топологическим пространством. Например, действие группы $\mathbb{R}$ на торе $T^2$, задающее всюду плотную обмотку, имеет пространством орбит множество с тривиальной топологией. Однако, как показывается следующий результат, при некоторых ограничениях на действие $G\colon X$ пространство орбит имеет естественную гладкую структуру:

**Теорема 3.1.2** (Ли [39, Th. 7.10])**.** *Предположим, что группа Ли $G$ действует свободно и собственно на многообразии $M$. Тогда пространство орбит $M/G$ есть топологическое многообразие вещественной размерности $\dim M - \dim G$, причем на $M/G$ существует единственная такая гладкая структура, что естественная проекция $M \to M/G$ есть гладкое отображение.*

### 3.1.1. Гладкие структуры

Рассмотрим группу $R = \mathbb{R}^m_>$, действующую на пространстве $\mathbb{R}^m_\geqslant = \{(x_1, \dots, x_m) | x_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}$ покоординатным умножением:

$$(t_1, \dots, t_m) \cdot (x_1, \dots, x_m) = (t_1x_1, \dots, t_mx_m). \tag{3.1}$$

Нашей ближайшей целью будет выяснение достаточных условий, при которых действие подгруппы Ли $S \subset R$ на подмножестве $(\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m_\geqslant$ собственно. Всюду далее в этой части $\mathfrak{r} = \mathbb{R}^m$ и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ — алгебры Ли групп $R$ и $S$, соответственно; векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m \in \mathfrak{r}$ — базис пространства $\mathfrak{r}$; отображение $q\colon \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{s}$ — естественная проекция.

**Лемма 3.1.3.** *Пусть $\mathcal{K}$ —симплициальный комплекс на множестве $[m]$, $R(\mathcal{K}) := (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^{\mathcal{K}}$. Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{r} = \mathbb{R}^m$ веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$, соответствующий комплексу $\mathcal{K}$ (см. Конструкцию 1.2.4). Предположим, что отображение $q\colon \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{s}$, ограниченное на веер $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{r}$ является вложением. Тогда действие $S\colon R(\mathcal{K})$ собственно.*

*Доказательство.* Пусть $\boldsymbol{m}\colon S \times R(\mathcal{K}) \to R(\mathcal{K}) \times R(\mathcal{K})$ — отображение действия, $C \subset R(\mathcal{K}) \times R(\mathcal{K})$ — компакт. Нам необходим доказать, что прообраз $\boldsymbol{m}^{-1}(C)$ компактен. Так как топологическое пространство $S \times R(\mathcal{K})$ метризуемо, достаточно доказать, что всякая последовательность точек в $\boldsymbol{m}^{-1}(C)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим последовательность точек $\{(g^i, x^i)\} \in \boldsymbol{m}^{-1}(C) \subset S \times R(\mathcal{K})$. Поскольку $C$ — компакт, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, считаем, что последовательность $\{(y^i, x^i)\}$, где $y^i := g^i x^i$, сходятся в $C$:

$$\{x^i\} \to \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad \{y^i\} \to \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m).$$

Нам необходимо доказать, что некоторая подпоследовательность в $\{g^i\}$ сходится в $S$. Всякая точка $g^i$ в $S$ представляется в виде

$$g^i = (e^{\gamma_1^i}, \dots, e^{\gamma_m^i}) \in S \subset R,$$

где $\gamma_1^i \boldsymbol{e}_1 + \dots + \gamma_m^i \boldsymbol{e}_m \in \mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$. Заменив, если необходимо, последовательность $\{g^i\}$ ее подпоследовательностью, мы можем считать, что для всякого $k = 1, \dots, m$ последовательность чисел $\gamma_k^i$ имеет конечный или бесконечный (включая $\pm\infty$) предел. Положим

$$\mathcal{I}_+ = \{k | \gamma_k^i \to +\infty\} \subset [m], \quad \mathcal{I}_- = \{k | \gamma_k^i \to -\infty\} \subset [m].$$

Так как множества $\{x^i\}$ и $\{y^i\}$ ограничены, то $x_j = 0$ при $j \in \mathcal{I}_+$ и $y_j = 0$ при $j \in \mathcal{I}_-$. Из определения $R(\mathcal{K})$ следует, что $\mathcal{I}_+$ и $\mathcal{I}_-$ являются симплексами $\mathcal{K}$. Обозначим за $\sigma_+$ и $\sigma_-$ соответствующие конусы веера $q(\Sigma_{\mathcal{K}})$. Так как $\sigma_+ \cap \sigma_- = \{0\}$, найдется линейная функция $\xi$ на пространстве $\mathfrak{r}/\mathfrak{s}$ такая, что $\xi(\boldsymbol{v}) > 0$ при $\boldsymbol{v} \in \sigma_+$, $\boldsymbol{v} \neq 0$ и $\xi(\boldsymbol{v}) < 0$ при $\boldsymbol{v} \in \sigma_-$, $\boldsymbol{v} \neq 0$. Так как $\boldsymbol{w} = \gamma_1^i \boldsymbol{e}_1 + \dots + \gamma_m^i \boldsymbol{e}_m \in \mathfrak{s}$, имеем:

$$0 = \xi\big(q(\boldsymbol{w})\big) = \xi\left(\sum_{k=1}^m \gamma_k^i q(\boldsymbol{e}_k)\right) = \sum_{k=1}^m \gamma_k^i \xi\big(q(\boldsymbol{e}_k)\big).$$

Таким образом, множества $\mathcal{I}_+$ и $\mathcal{I}_-$ пусты, иначе правая часть равенства стремится к $+\infty$. Тем самым, последовательность $g^i$ сходится к элементу в $S$, значит прообраз всякого компактного подмножества в $R(\mathcal{K}) \times R(\mathcal{K})$ при отображении $\boldsymbol{m}$ компактен. □

*Замечание.* Группа $R = \mathbb{R}^m_>$ естественно вложена в группу $(\mathbb{C}^*)^m = R \times T^m$, поэтому определено действие группы $R$ на множестве $\mathbb{C}^m$, и, следовательно, действие всякой подгруппы $S \subset R$ на любом $(\mathbb{C}^*)^m$-инвариантном подмножестве, в частности, на $U(\mathcal{K}) \subset (\mathbb{C}^*)^m$.

**Лемма 3.1.4.** *Пусть симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и группа $S$ удовлетворяют условиям Леммы 3.1.3. Тогда естественное действие $S\colon U(\mathcal{K})$ собственно и свободно.*

*Доказательство.* Докажем сначала собственность действия. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S \times U(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\boldsymbol{m}_U} & U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ S \times R(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\boldsymbol{m}_R} & R(\mathcal{K}) \times R(\mathcal{K}), \end{array}$$

где вертикальные стрелки $\pi_1$ и $\pi_2$, соответствуют проекциям на пространства орбит действия $T^m$ и $T^m \times T^m$, соответственно, а горизонтальные стрелки соответствуют отображениям действия.

Пусть $C \subset U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K})$ — компакт, тогда, согласно Лемме 3.1.3, множество $\boldsymbol{m}_R^{-1}(\pi_2(C))$ компактно. Поскольку отображение $\pi_1$ есть проекция на пространство орбит действия компактной группы, множество $\pi_1^{-1}(\boldsymbol{m}_R^{-1}(\pi_2(C)))$ компактно. Следовательно множество $\boldsymbol{m}_U^{-1}(C)$ компактно, как замкнутое подмножество компакта $\pi_1^{-1}(\boldsymbol{m}_R^{-1}(\pi_2(C)))$.

Докажем теперь, что действие $S\colon U(\mathcal{K})$ свободно. Доказательство свободности действия, приведенное ниже, повторяет рассуждения из [59, Лемма 8.34]. Стабилизатор $R_{\boldsymbol{z}}$ точки $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m$ в группе $R = \mathbb{R}^m_>$ имеет вид $(\mathbb{R}_>, 1)^{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I} \subset [m]$ — множество нулевых координат $\boldsymbol{z}$. Если $\boldsymbol{z} \in U(\mathcal{K})$, то $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$. Из условия на веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ следует, что ограничение проекции $q\colon \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{s}$ на каждое подпространство вида $(\mathbb{R}, 0)^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ является вложением, поэтому группа $S$ пересекает каждую группу вида $(\mathbb{R}_>, 1)^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ тривиально. Следовательно действие $S\colon U(\mathcal{K})$ свободно. □

**Теорема 3.1.5** (Фактор-Конструкция-I). *Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ и подгруппу Ли $S \subset R = \mathbb{R}^m_>$. Пусть, $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — алгебры Ли групп $R$ и $S$, $q\colon \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{s}$ — естественная проекция, $\Sigma_{\mathcal{K}}$ — веер в $\mathfrak{r} = \mathbb{R}^m$, соответствующий комплексу $\mathcal{K}$.*

*Предположим, что ограничение проекции*

$$q|_{\Sigma_{\mathcal{K}}}\colon \Sigma_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{s} \tag{3.2}$$

*взаимно-однозначно.Тогда группа $S \subset R = \mathbb{R}^m_> \subset \mathbb{R}^m_> \times T^m = (\mathbb{C}^*)^m$ действует на пространстве $U(\mathcal{K})$, причем*

1. *пространство орбит $U(\mathcal{K})/S$ является гладким многообразием с естественным действием тора $T^m \subset (\mathbb{C}^*)^m/S$;*

2. *момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ $T^m$-эквивариантно гомеоморфен пространству $U(\mathcal{K})/S$.*

*Доказательство.* Первое утверждение моментально следует из Леммы 3.1.4 и Теоремы 3.1.2.

Компактное подпространство в хаусдорфовом локально компактном пространстве $X$, пересекающее каждую орбиту собственного $G$-действия в единственной точке, гомеоморфно пространству орбит $X/G$. В нашем случае пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ эквивариантно вложено в $U(\mathcal{K})$, поэтому для доказательства второго утверждения достаточно доказать, что всякая $S$-орбита в $U(\mathcal{K})$ пересекает подмножество $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$ в единственной точке.

Рассмотрим сначала точку в открытой $(\mathbb{C}^*)^m$-орбите:

$$\boldsymbol{z} = (e^{i\varphi_1}\rho_1, \dots, e^{i\varphi_m}\rho_m) \in (\mathbb{C}^*)^m.$$

Определим вектор $\boldsymbol{w} = (-\log\rho_1, \dots, -\log\rho_m) \in \mathfrak{r}$. Поскольку проекция (3.2) взаимно-однозначна, существует единственный такой вектор $\boldsymbol{v} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathfrak{s}$, что $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \in \Sigma_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{r}$. Поскольку вектор $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} = (t_1, \dots, t_m)$ лежит в одном из конусов веера $\Sigma_{\mathcal{K}}$, существует такой симплекс $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$, что $t_i \geqslant 0$ при $i \in \mathcal{I}$ и $t_i = 0$, иначе. Подействовав на точку $\boldsymbol{z}$ элементом $s = (e^{-s_1}, \dots, e^{-s_m}) \in S$:

$$s \cdot \boldsymbol{z} = (e^{i\varphi_1}e^{-t_1}, \dots, e^{i\varphi_m}e^{-t_m}),$$

мы получим точку, лежащую в блоке $(D^2, S^1)^{\mathcal{I}} \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, притом взаимно-однозначность отображения $q$ гарантирует, что пересечение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cap (S \cdot \boldsymbol{z})$ состоит из единственной точки.

Пусть теперь дана точка $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m) \in U(\mathcal{K})$ с нулевыми координатами $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_l\}$. По определению пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, подмножество $\mathcal{I} \subset [m]$ является симплексом $\mathcal{K}$. Симплексы $\mathcal{K}$, содержащие $\mathcal{I}$ в качестве грани, образуют абстрактный симплициальный комплекс $\operatorname{link}\mathcal{I}$ (*линк* симплекса $\mathcal{I}$) на множестве $[m]\backslash\mathcal{I}$. Заметим, что пространство

$$\{\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m) \in U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m | z_i = 0 \text{ при } i \in \mathcal{I}\}$$

есть $U(\operatorname{link}\mathcal{I})$ и индуцированное действие группы $S$, рассматриваемой как подгруппа в $(\mathbb{R}_>, 0)^{\mathcal{I}}$, на нем, удовлетворяет аналогичным условиям, что и действие $S\colon U(\mathcal{K})$, поэтому мы можем дословно повторить рассуждения, проведенные выше. □

**Теорема 3.1.6.** *Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, отвечающие симплициальным комплексам $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$, где $\Sigma$ — полный симплициальный веер в некотором векторном пространстве $V$, допускают структуру гладкого многообразия.*

*Доказательство.* Пусть $\boldsymbol{a}_i \in V$ — образующие одномерных конусов веера $\Sigma$. Рассмотрим веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ с базисом $\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_m$. Взаимно-однозначное соответствие 1-мерных конусов вееров $\Sigma$ и $\Sigma_{\mathcal{K}}$ определяют линейное отображение:

$$p\colon \mathbb{R}^m \to V, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i.$$

Пусть $\mathfrak{s} \subset \mathbb{R}^m$ — ядро проекции $p$. Тогда действие группы $S := \exp\mathfrak{s} \subset R = \mathbb{R}^m_>$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.5 и момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен гладкому многообразию $U(\mathcal{K})/S$. □

*Замечание.* Способ построения гладких структур на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ зависит от геометрической реализации веера $\Sigma$, однако ожидается, что если вееры $\Sigma$ и $\Sigma'$ определяют один и тот же симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, то соответствующие гладкие структуры на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ определяют диффеоморфные многообразия. Известно, что это верно для момент-угол-комплексов, построенных по нормальным веерам простых многогранников [5].

**Пример 3.1.7.** Рассмотрим момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующий границе 1-мерного симллекса, то есть симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на множестве $\{1,2\}$, состоящему из симплексов $\{1\},\{2\},\varnothing$. Рассмотрим 1-мерное вещественное пространство $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{r}=\mathbb{R}^2$. Пусть пространство $\mathfrak{s}$ порождено вектором $(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$. По определению веер $\Sigma_{\mathcal{K}}\subset\mathbb{R}^2$ состоит из трех конусов: двух конусов, образованных базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, и $\boldsymbol{e}_2$, и нулевого конуса $\{\boldsymbol{0}\}$. Проекция $q\colon\mathfrak{r}\to\mathfrak{r}/\mathfrak{s}$, ограниченная на веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$, является вложением тогда и только тогда, когда $s_1$ и $s_2$ имеют один знак. В этом случае, имеем:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\simeq U(\mathcal{K})/S=(\mathbb{C}^2\backslash\{\boldsymbol{0}\})/\big((z_1,z_2)\sim(e^{ts_1}z_1,e^{ts_2}z_2)\big).$$

Нетрудно проверить, что всякая $S$-орбита пересекает трансверсально в единственной точек единичную сферу $S^3=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2||z_1|^2+|z_2|^2=1\}\subset U(\mathcal{K})$, поэтому $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\simeq S^3$, что соответствует Примеру 1.5.4.

*Замечание.* Вопрос существования $T^m$-эквивариантных гладких структур на момент-угол-комплексах, отвечающих другим семействам симплициальных комплексов остается открытым. Предполагается, что, если геометрическая реализация комплекса $\mathcal{K}$ является $PL$-триангуляцией сферы $S^{n-1}$, пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ может быть снабжено гладкой структурой.

Поскольку пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, отвечающие полным симплициальным веерам, допускают структуру гладких многообразий, мы будем называть их далее момент-угол-многообразиями.

### 3.1.2. Комплексно-аналитические структуры

Аналогично гладкой категории, действие комплексно-аналитической группы Ли $G$ на комплексном многообразии *комплексно*, если отображение $G\times X\to X,\ (g,x)\mapsto gx$ голоморфно. В голоморфной категории имеется аналог теоремы 3.1.2:

**Теорема 3.1.8** (Huybrechts [36, Prop. 2.1.13])**.** *Предположим, что комплексная группа Ли $G$ действует свободно и собственно на комплексном многообразии $M$. Тогда пространство орбит $M/G$ есть топологическое многообразие вещественной размерности* $\dim_{\mathbb{R}}M-\dim_{\mathbb{R}}G$*, причем на $M/G$ существует единственная такая комплексная структура, что естественная проекция $M\to M/G$ есть голоморфное отображение комплексных многообразий.*

Для построения комплексных структур на многообразиях $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ мы будет следовать той же схеме, что и при доказательстве Теоремы 3.1.6, а именно мы представим многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в виде пространства орбит свободного собственного действия комплексной группы на $U(\mathcal{K})$. По этой причине нам потребуется запас подгрупп в алгебраическом торе $T^m_{\mathbb{C}}=(\mathbb{C}^*)^m$. Помимо “обычных” алгебраических подгрупп $H\subset T^m_{\mathbb{C}}$, являющихся произведением конеченой абелевой группы и алгебраического тора, в $G$ существует множество комплексных неалгебраических подгрупп, см. [45; 53].

**Конструкция 3.1.9** (Комплексные подгруппы в $T^m_{\mathbb{C}}\simeq(\mathbb{C}^*)^m$)**.** Рассмотрим алгебраический тор $T^m_{\mathbb{C}}\simeq(\mathbb{C}^*)^m$. Алгебра Ли группы $T^m_{\mathbb{C}}$ имеет вид $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{t}\oplus i\mathfrak{t}=\mathbb{C}^m$, где $\mathfrak{t}\simeq\mathbb{R}^m$ — алгебра Ли компактного тора $T^m\subset T^m_{\mathbb{C}}$, $i\colon\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\to\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ — оператор умножения на мнимую единицу, а $i\mathfrak{t}=\mathfrak{r}$ — алгебра Ли *радиальной* группы $R\simeq\mathbb{R}^m_>$. Всюду далее $\exp\colon\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\to T^m_{\mathbb{C}}$ обозначает *экспоненциальное* отображение из алгебры Ли в соответствующую группу, а $N\subset\mathfrak{t}$ — решетка, двойственная решетке характеров тора $T^m$, то есть ядро отображения $\exp$.

Выберем произвольное комплексное подпространство $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Пространство $\mathfrak{h}$ определяет подгруппу $H=\exp\mathfrak{h}\subset T^m_{\mathbb{C}}$. Группа $H$, вообще говоря, не является подгруппой Ли, поскольку $H\cap T^m$ может образовывать плотную обмотку тора. Нетрудно проверить, что верно следующее:

- $H\simeq\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap N)$;
- $H$ — подгруппа Ли $\Leftrightarrow$ $H$ замкнута в $T^m_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk}(\mathfrak{h}\cap N)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{t})$;
- $H$ — алгебраическая подгруппа $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk}(\mathfrak{h}\cap N)=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}$.

Отметим, что всякая связная комплексная подгруппа Ли алгебраического тора $T^m_{\mathbb{C}}$ получается таким образом.

**Пример 3.1.10.** В обозначениях Конструкции 3.1.9 рассмотрим 1-мерное комплексное подпространство $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}^2$, порожденное вектором $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Тогда

$$H=\{(e^{2\pi i\alpha w},e^{2\pi i\beta w})\subset(\mathbb{C}^*)^2|w\in\mathbb{C}\}.$$

Нетрудно видеть, что (1) группа $H$ алгебраическая тогда и только тогда, когда $\alpha$ и $\beta$ пропорциональны над $\mathbb{Q}$ (в этом случае $H\simeq\mathbb{C}^*$), (2) $H$ замкнутая тогда и только тогда, когда $\alpha$ и $\beta$ либо пропорциональны над $\mathbb{Q}$, либо не пропорциональны над $\mathbb{R}$ (в этом случае $H\simeq\mathbb{C}$).

Теперь у нас есть все для формулировки аналога Теоремы 3.1.5.

**Теорема 3.1.11** (Фактор-конструкция-II)**.** *Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Пусть, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ — алгебра Ли группы $T^m_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^m$, а $\mathfrak{h}$ такое комплексное подпространство в $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, что $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$. Рассмотрим $p\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ и $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — естественные проекции на первое слагаемое и на фактор-пространство, соответственно, $\Sigma_{\mathcal{K}}$ — веер в $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^m$, соответствующий комплексу $\mathcal{K}$.*

*Предположим, что ограничение проекции*

$$q|_{\Sigma_{\mathcal{K}}}\colon \Sigma_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) \tag{3.3}$$

*взаимно-однозначно. Тогда группа $H = \exp \mathfrak{h} \subset T^m_{\mathbb{C}}$ действует на пространстве $U(\mathcal{K})$, причем*

1. *пространство орбит $U(\mathcal{K})/H$ является комплексным многообразием с естественным действием тора $T^m \subset T^m_{\mathbb{C}}/H$;*
2. *момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ $T^m$-эквивариантно гомеоморфен пространству $U(\mathcal{K})/H$.*

*Доказательство.* Отметим, прежде всего, что подгруппа $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$ является замкнутой, поскольку по условию $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$, следовательно $\operatorname{rk}(\mathfrak{h} \cap N) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}) = 0$.

Докажем собственность действия. Рассмотрим вещественное векторное пространство $\mathfrak{s} := ip(\mathfrak{h}) \subset i\mathfrak{t} = \mathfrak{r}$. Это подпространство задает группу $S = \exp \mathfrak{s} \subset R$, которая удовлетворяет условиям Леммы 3.1.3, а потому действие $S\colon R(\mathcal{K})$ собственно. Аналогично доказательству Леммы 3.1.4 рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H \times U(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\boldsymbol{m}_U} & U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ S \times R(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\boldsymbol{m}_R} & R(\mathcal{K}) \times R(\mathcal{K}). \end{array}$$

Она коммутативна, поскольку действие $H\colon U(\mathcal{K})$ при проекции на пространство орбит действия $T^m$ "переходит" в действие $S\colon R(\mathcal{K})$, значит мы можем полностью повторить доказательство Леммы 3.1.4 и, тем самым, заключить, что действие $H\colon U(\mathcal{K})$ собственно.

Докажем, что действие $H\colon U(\mathcal{K})$ свободно. Стабилизаторы точек $\boldsymbol{z} \in U(\mathcal{K})$ в группе $T^m_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^m$ имеют вид $(\mathbb{C}^*, 1)^{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$. Для проверки того, что группа $H$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно, необходимо показать, что $H$ тривиально пересекает стабилизатор всякой точки. Рассмотрим элемент $g \in H \cap (\mathbb{C}^*, 1)^{\mathcal{I}} \subset (\mathbb{C}^*)^m$. Представим его в виде $g = (g_1, \ldots, g_m) \in (\mathbb{C}^*)^m$ и рассмотрим соответствующий ему элемент

$$|g| := (|g_1|, \ldots, |g_m|) \in R = \mathbb{R}^m_>.$$

Согласно доказательству свободности действия в Теореме 3.1.5 $S \cap (\mathbb{R}_>, 1)^{\mathcal{I}} = \{e\}$, поэтому $|g| = (1, \ldots, 1)$. Следовательно $g \in H \cap T^m$, а это пересечение по условию тривиально, тем самым $g = (1, \ldots, 1)$ и действие $H\colon U(\mathcal{K})$ свободно.

Итак действие $H\colon U(\mathcal{K})$ комплексно, свободно и собственно, значит по Теореме 3.1.8 пространство орбит $U(\mathcal{K})/H$ есть комплексное многообразие.

Доказательство того факта, что $U(\mathcal{K})/H$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения Теоремы 3.1.5. □

**Теорема 3.1.12.** *Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ четной размерности, отвечающие симплициальным комплексам $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$, где $\Sigma$ — полный симплициальный веер в некотором векторном пространстве $V$, допускают структуру комплексного многообразия.*

*Доказательство.* Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ — образующие одномерных конусов веера $\Sigma$. Рассмотрим веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ с базисом $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m$. Взаимно-однозначное соответствие 1-мерных конусов вееров $\Sigma$ и $\Sigma_{\mathcal{K}}$ определяют линейное отображение:

$$p\colon \mathbb{R}^m \to V, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i.$$

Пусть $\mathfrak{s} \subset \mathbb{R}^m$ — ядро проекции $p$. Размерность пространства $\mathfrak{s}$ четная:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s} = m - \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} - 2\dim_{\mathbb{R}} V,$$

поэтому в пространстве $\mathfrak{s}$ можно выбрать оператор комплексной структуры $J\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$, $J^2 = -\mathrm{id}$. Определим при помощи него комплексное подпространство

$$\mathfrak{h} := \{(\boldsymbol{w}, J\boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m | \boldsymbol{w} \in \mathfrak{s}\}.$$

Тогда действие группы $H := \exp \mathfrak{h} \subset T^m_{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.11 и момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен комплексному многообразию $U(\mathcal{K})/H$. □

**Пример 3.1.13** (Компактные комплексные торы)**.** Рассмотрим тривиальный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$, состоящий только из пустого множества. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (S^1)^m$, $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^*)^m$. Рассмотрим комплексное пространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, тривиально пересекающее алгебру компактного тора $\mathfrak{t}$. Пусть, также, $N \subset \mathfrak{t}$, как выше, решетка двойственная решетке характеров, $H = \exp \mathfrak{h}$. Тогда

$$(\mathbb{C}^*)^m/H \simeq \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{h} \oplus N) = (\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h})/\pi(N),$$

где $\pi\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}$ — естественная проекция. $\pi(N)$ — решетка полного ранга в $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}$, следовательно $(\mathbb{C}^*)^m/\mathfrak{h}$ — *компактный комплексный тор*, то есть фактор-группа комплексного векторного пространства по решетке полного ранга. Нетрудно видеть, что таким образом можно получить все компактные комплексные торы.

**Пример 3.1.14** (Поверхность Хопфа)**.** Рассмотрим торическое многообразие $U(\mathcal{K})$, отвечающее комплексу $\mathcal{K}$ на множестве $\{1, 2, 3\}$, имеющему своими симплексами вершины $\{1\}, \{2\}$ и пустое множество. Соответствующее торическое многообразие есть $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\}) \times \mathbb{C}^*$. Рассмотрим комплексное пространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$, порожденное над $\mathbb{C}$ вектором $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где $\mu_i \in \mathbb{C}$.

Из условия на $\mathfrak{h}$ в Теореме 3.1.11 следует, что $\mu_3 \neq 0$, поэтому далее считаем без ограничения общности, что $\mu_3 = 1$. Из условия на $\mathfrak{h}$ также следует, что мнимые части $\operatorname{Im} \mu_1$ и $\operatorname{Im} \mu_2$ имею один знак. Тогда

$$V_\Sigma/H \simeq (\mathbb{C}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma,$$

где группа $\Gamma \simeq \mathbb{Z} \subset (\mathbb{C}^*)^2$, порождена умножением на элемент $(e^{2\pi i \mu_1}, e^{2\pi i \mu_2})$. Построенные многообразия являются поверхностями Хопфа — исторически первым примером некэлровых многообразий, [35].

**Пример 3.1.15** (Многообразия Калаби-Экманна)**.** Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k_1} * \partial\Delta^{k_2}$ на множестве $[k_1 + k_2 + 2]$, являющийся джойном границ симплексов размерностей $k_1$ и $k_2$. Тогда $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^{k_1+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\}) \times (\mathbb{C}^{k_2+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\})$. Рассмотрим комплексное пространство $\mathfrak{h}$, порожденное вектором $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1+1}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{k_2+1}) \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{k_1+k_2+2}$, $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$. Пространство $\mathfrak{h}$ удовлетворяет условиям Теоремы 3.1.11, поэтому фактор-пространство $U(\mathcal{K})/H$ является комплексным многообразием. Нетрудно проверить, что каждая орбита группы $H$ пересекает произведение единичных сфер $S^{2k_1+1} \times S^{2k_2+1} \subset (\mathbb{C}^{k_1+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\}) \times (\mathbb{C}^{k_2+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\})$ трансверсально в единственной точке, поэтому имеет место диффеоморфизм:

$$U(\mathcal{K})/H \simeq S^{2k_1+1} \times S^{2k_2+1}.$$

Таким образом, наша конструкция позволяет ввести комплексные структуры на произведениях нечетномерных сфер. Впервые эти комплексные многообразия были описаны в работе Калаби и Экманна [13]. Важным свойством построенной комплексной структуры, отвечающей выбранному пространству $\mathfrak{h}$, является наличие главного расслоения: $G/H \to U(\mathcal{K})/H \to U(\mathcal{K})/G = \mathbb{C}P^{k_1} \times \mathbb{C}P^{k_2}$, где сомножители группы $G \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ действует диагонально на многообразиях $\mathbb{C}^{k_1+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ и $\mathbb{C}^{k_2+1} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$.

*Замечание.* Комплексная структура на момент-угол-комплексе $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, в случае ее существования, определяется комплексным подпространством $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющим двум условиям:

(a) $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$;

(b) $q|_{\Sigma_{\mathcal{K}}} \colon \Sigma_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — биекция.

Оба этих условия "открыты", то есть множество подпространств $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих им, образует открытое (в обычной топологии) подмножество комплексного Грассманиана $\operatorname{Gr}(l, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, где $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Тем самым, комплексная структура на момент-угол-комплексе $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ всегда возникает вместе с пространством инфинитезимальных деформаций $T_{\mathfrak{h}} \operatorname{Gr}(l, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \simeq \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h})$.

В связи с существованием целого семейства комплексных структур на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ возникают вопросы полноты и точности приведенного выше описания:

1. Верно ли, что любая эквивариантная комплексная структура на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ может быть получена таким образом?

2. Когда пространства $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \operatorname{Gr}(l, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ определяют эквивариантно биголоморфные многообразия?

### 3.1.3. Комплексно-аналитические структуры на частичных факторах

**Определение 3.1.16.** *Частичным фактором* момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ называется пространство орбит $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/T$ свободного действия подтора $T \subset (S^1)^m$.

Если пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ снабжено эквивариантной гладкой структурой, то, согласно Теореме 3.1.2, частичный фактор $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/T$ также является гладким многообразием. Оказывается, что многие частичные факторы, подобно момент-угол-комплексам, допускают комплексно-аналитическую структуру.

**Теорема 3.1.17** (Фактор-конструкция-III). *Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Пусть $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$ такая связная комплексная подгруппа Ли, что все пересечения вида $H \cap (\mathbb{C}^*, 1)^{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$, тривиальны. Обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ соответствующие алгебры Ли. Рассмотрим $p\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ и $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — естественные проекции на первое слагаемое и на фактор-пространство, соответственно, $\Sigma_{\mathcal{K}}$ — веер в $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^m$, соответствующий комплексу $\mathcal{K}$.*

*Предположим, что ограничение проекции*

$$q|_{\Sigma_{\mathcal{K}}}\colon \Sigma_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) \tag{3.4}$$

*взаимно-однозначно. Тогда группа $H$ действует на пространстве $U(\mathcal{K})$, причем*

1. *пространство орбит $U(\mathcal{K})/H$ является комплексным многообразием с естественным действием тора $T^m/(T^m \cap H) \subset T^m_{\mathbb{C}}/H$;*

2. *частичный фактор $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/(T^m \cap H)$ момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ эквивариантно (относительно действия группы $T^m/(T^m \cap H)$) гомеоморфен пространству $U(\mathcal{K})/H$.*

*Доказательство.* Отметим, что из условия следует, что $T' = H \cap T^m$ — компактный подтор в $T^m$, так как $H$ — замкнутая подгруппа. Кроме того, из условия сразу следует, что действие $H\colon U(\mathcal{K})$ свободно, так как группа $H$ тривиально пересекает стабилизаторы всех точек.

Представим комплексную алгебру $\mathfrak{h}$ в виде прямой суммы вещественных алгебр Ли $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}) \oplus \mathfrak{h}'$. Это разложение соответствует разложению группы $H$ в прямое произведение вещественных групп Ли $T' \times H'$, где $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Полностью аналогично теоремам 3.1.5 и 3.1.11 доказывается, что

- действие $H'$ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно,
- пространство орбит $U(\mathcal{K})/H'$ эквивариантно (относительно действия группы $T^m$) гомеоморфно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Так как действие $H'\colon U(\mathcal{K})$ собственно, а группа $T'$ компактна, действие $H = H' \times T$ тоже собственно, следовательно, снова по Теореме 3.1.8 многообразие $U(\mathcal{K})/H$ комплексно. Поскольку $U(\mathcal{K})/H'$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, их $T'$-пространства орбит также $T^m/T'$-эквивариантно гомеоморфны. □

*Замечание.* В отличие от ситуации в Теореме 3.1.12, для симплициального комплекса $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$, соответствующего полному вееру $\Sigma$, далеко не все частичные факторы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/T$ допускают комплексные структуры. Так, известно [17; 59], что в качестве частичного фактора $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{K}$ — квадрат, можно получить связную сумму двух проективных плоскостей $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, которая по чисто топологическим причинам не допускает даже почти комплексной структуры. О достаточных условиях существования почти комплексных структур на некоторых частичных факторах $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/T$ смотри работу [62].

## 3.2. Компактные комплексные многообразия с максимальным действием тора

Из Предложений 2.4.5 и 2.4.6 следует, что комплексные многообразия, построенные нами, представляют собой компактные комплексные многообразия с максимальным действием тора. Условия максимальности действия тора на комплексно-аналитическом многообразии оказывается крайне удачным обобщением условия действия алгебраического тора с открытой плотной орбитой. Следующая конструкция, приведенная в недавней статье [37], дает другое описание компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора.

**Конструкция 3.2.1** (Фактор-конструкция Исиды). Пусть $V_\Sigma$ — неособое торическое многообразие с действием тора $T^m_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли компактного тора $T^m$. Рассмотрим комплексное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$ (следовательно и $\mathfrak{h} \cap i\mathfrak{t} = \{0\}$, поскольку $\mathfrak{h}$ — комплексное подпространство), то есть ограничение $p|_{\mathfrak{h}}$ проекции $p\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ является вложением;

(b) проекция $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ взаимно-однозначно отображает веер $\Sigma$ на полный веер $q(\Sigma)$.

Определим группу $H := \exp \mathfrak{h} \subset T^m_{\mathbb{C}}$. Можно доказать, что из условий (a) и (b) следует, что $H$ действует на многообразии $V_\Sigma$ свободно и собственно и пространство орбит

$$M(\Sigma, \mathfrak{h}) := V_\Sigma/H$$

есть компактное комплексное многообразие с максимальным действием тора $T^m \subset T^m_{\mathbb{C}}/H$.

Отметим, что, если $\dim\mathfrak{h} = 0$, то веер $\Sigma$, согласно условию (b), полный и $M(\Sigma,\mathfrak{h}) = V_\Sigma$ есть полное торическое многообразие, на котором с неподвижной точкой действует тор $T^m$ половинной размерности. Подробно данная ситуация изучается в работе [38].

Замечательный результат работы [37] гласит:

**Теорема 3.2.2** (Исида [37, Cor. 6.7])**.** *Всякое компактное комплексное многообразие с максимальным действием тора может быть получено при помощи Конструкции 3.2.1.*

И Теорема 3.1.17 и Конструкция 3.2.1 рассматривают компактные многообразия, являющиеся пространствами орбит действия комплексной подгруппы $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$ на некотором торическом многообразии $V_\Sigma$. Отличия между ними заключаются в следующем: Теорема 3.1.17 работает только торическими многообразиями вида $U(\mathcal{K})$, но рассматривает все связные замкнутые подгруппы $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$. Конструкция 3.2.1, напротив, работает со всеми торическими многообразиями $V_\Sigma$, но рассматривает только такие подгруппы $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$, что $H \cap T^m = e$. Оказывается, что классы многообразий, получаемых в результате конструкции Теоремы 3.1.17 и Конструкции 3.2.1, совпадают.

**Теорема 3.2.3.** *Всякое компактное комплексное многообразие $M$ с максимальным действием тора может быть получено при помощи конструкции Теоремы 3.1.17.*

Теорема 3.2.3 позволяет разделить данные $(\Sigma,\mathfrak{h})$, определяющие многообразие $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ в Конструкции 3.2.1, на комбинаторную (симплициальный комплекс $\mathcal{K}$) и геометрическую (подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}^m$) составляющие. Таким образом, по-существу, конструкция теоремы 3.1.17 является аналогом конструкции Кокса-Батырева торических многообразий 1.4.5.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное компактное комплексное многообразие $M$ с максимальным действием тора. Согласно Теореме 3.2.2 многообразие $M$ есть $M(\Sigma,\mathfrak{h}) = V_\Sigma/H$ для некоторых веера $\Sigma \subset \mathfrak{t}$ и подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

Из конструкции Кокса-Батырева 1.4.5, в частности, следует, что всякое неособое торическое многообразие $V_\Sigma$ с действием тора $T^m_{\mathbb{C}}$ может быть получено как пространство орбит свободного действия алгебраической подгруппы (квазитора) $G \subset (\mathbb{C}^*)^k$ на многообразии $U(\mathcal{K}_\Sigma)$.

$$V_\Sigma = U(\mathcal{K})/G.$$

Обозначим через $\pi\colon (\mathbb{C}^*)^k \to (\mathbb{C}^*)^k/G = T^m_{\mathbb{C}}$ естественную проекцию. Тогда многообразие $M$ является пространством орбит действия группы $\pi^{-1}(H) \subset (\mathbb{C}^*)^k$ на пространстве $U(\mathcal{K})$. Это описание почти совпадает с конструкцией Теоремы 3.1.17, за исключением того, что группа $\pi^{-1}(H)$ не обязана быть связной, то есть имеет вид $H' \times \Gamma$, где $H'$ связная, а $\Gamma$ конечная абелева группа. Чтобы исправить это отличие, воспользуемся следующим очевидным предложением:

**Предложение 3.2.4.** *Пусть группа $\mathbb{C}^*$ действует на многообразии $M$. Предположим, что подгруппа $G_k \subset \mathbb{C}^*$ корней $k$-ой степени из единицы действует на многообразии $M$ свободно. Тогда*

$$M/G_k \simeq (M \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{C}^*,$$

*где группа $\mathbb{C}^*$ действует на многообразии $M \times \mathbb{C}^*$ следующим образом*

$$w \cdot (m,z) = (w \cdot m, w^k z)$$

Используя Предложение 3.2.4, при подходящем $r$ мы можем заменить пространство орбит действия группы $H' \times \Gamma$ на $U(\mathcal{K})$ пространством орбит действия группы $H' \times (\mathbb{C}^*)^r$ на $U(\mathcal{K}) \times (\mathbb{C}^*)^r$:

$$M = V_\Sigma/H = U(\mathcal{K})/(G \times H) = (U(\mathcal{K}) \times (\mathbb{C}^*)^r)/(H' \times (\mathbb{C}^*)^r).$$

Поскольку действия групп $H\colon V_\Sigma$ и $G\colon U(\mathcal{K})$ свободны, то группа $H'' = H' \times (\mathbb{C}^*)^r$ тоже действует свободно. Кроме того, согласно Конструкции Кокса-Батырева, веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ сначала проецируется взаимно-однозначно на веер $\Sigma$, а тот, в свою очередь, согласно условию (b) Конструкции 3.2.1, проецируется взаимно-однозначно на полный веер. Тем самым все условия Теоремы 3.1.17 выполнены. □

# Глава 4

# Комплексная геометрия компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора

В прошлой главе мы построили множество компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора и показали, что они тесно связаны с классическими объектами торической топологии — пространствами $U(\mathcal{K})$ и момент-угол-комплексами $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. В этой главе мы продемонстрируем, что их явная конструкция вместе с наличием большой группой симметрий позволяют получать различные результаты об их комплексной геометрии. Большинство из них некэлеровы по простым топологическим причинам — в $H^2(M,\mathbb{C})$ нет класса, чья старшая степень не обращается в ноль, см., например, [43]. Тем самым, многообразия $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ образуют семейство многообразий, на котором можно тестировать методы некэлеровй геометрии и получать результаты недоступные для более широких классов некэлеровых многообразий.

Всюду далее в этой главе, если специально не оговорено противного, мы будем пользоваться обозначениями Конструкции 3.2.1, а именно:

1. $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора $T^m$,
2. $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ – алгебра ли тора $T^m_{\mathbb{C}}$,
3. $N \subset \mathfrak{t}$ — решетка, двойственная решетке характеров, ядро $\exp\colon \mathfrak{t} \to T^m$
4. $\Sigma$ — регулярный веер в $\mathfrak{t}$, $V_\Sigma$ — соответствующее торическое многообразие,
5. $p\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ — проекция на вещественную часть,
6. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ — такое комплексное подпространство, что $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{\boldsymbol{0}\}$,
7. $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — проекция, переводящая биективно веер $\Sigma$ в полный веер $q(\Sigma)$,
8. $\exp \mathfrak{h} = H \subset T^m_{\mathbb{C}}$,
9. $M(\Sigma,\mathfrak{h}) = V_\Sigma/H$.

В разделе 4.1 мы построим на многообразиях $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ слоение, заданное орбитами действия группы вида $\mathbb{C}^l/\Lambda$, где $\Lambda$ — некоторая дискретная подгруппа. В разделе 4.2 мы изучим пространство орбит этого слоения при некоторых дополнительных условиях рациональности. При этих условиях пространство орбит окажется полным торическим многообразием $V_{q(\Sigma)}$. В следующем разделе мы докажем общий результат о вырождении спектральной последовательности Бореля, вычисляющий когомологии Дольбо тотальных пространств главных расслоений со слоем комплексный тор $\mathcal{T}$. В качестве приложения, мы построим модель, вычисляющую когомологии Дольбо некоторых многообразий $M(\Sigma,\mathfrak{h})$.

В разделе 4.4 мы вводим понятие *слабо нормального* веера $\Sigma$, обобщающее понятие нормального веера $\Sigma_P$ выпуклого многогранника, и доказываем, что, если веер $q(\Sigma)$ слабо нормален, на многообразии $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ существует форма трансверсально-кэлерова относительно слоения $\mathcal{F}$. Идейно наше доказательство воспроизводит схему доказательства проективности торических многообразий, отвечающих выпуклым многогранникам.

Раздел 4.5 посвящен геометрии многообразий $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ при “общем” выборе подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Пользуясь результатами предыдущих разделов, мы покажем, что при некоторых технических ограничениях на данные $(\Sigma,\mathfrak{h})$ многообразия $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ не допускают непостоянных мероморфных функций и содержат лишь конченое число аналитических подмножеств положительной размерности. С этой точки зрения, многообразия $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ оказываются близки комплексным торам и поверхностям Хопфа.

## 4.1. Каноническое слоение

**Определение 4.1.1.** Говорят, что гладкое действие группы $G$ на почти комплексном многообразии $M$ сохраняет почти комплексную структуру, если для всякого элемента $g \in G$ дифференциал умножения $m_g\colon M \to M$ на элемент $g$ коммутирует с оператором почти комплексной структуры $J$:

$$dm_g \circ J = J \circ dm_g.$$

Всюду далее группы действуют на *комплексно-аналитических* многообразиях, сохраняя естественную почти комплексную структуру.

Действие тора $T^m : M$ определят гомоморфизм из алгебры Ли $\mathfrak{t}$ группы $T^m$ в алгебру Ли векторных полей на многообразии $\rho\colon \mathfrak{t} \to \mathcal{L}(M)$. При помощи оператора почти комплексной структуры $J$, отображение

$\rho$ можно продолжить до отображения $\rho_{\mathbb{C}}\colon \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t} \to \mathcal{L}(M)$. Как показано в [37], из условия интегрируемости почти комплексной структуры $J$ следует, что $\rho_{\mathbb{C}}$ — гомоморфизм алгебр Ли. Следовательно, группа $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ действует на многообразии $M$ посредством экспоненциального отображения. Поскольку решетка $N \subset \mathfrak{t}$, двойственная решетке характеров, действует тривиально, действие группы $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ спускается до действия группы $T^m_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/N$. Тем самым, доказано следующее предложение:

**Предложение 4.1.2** (Исида [37, Section 3])**.** *Пусть тор $T^m$ действует на комплексном многообразии $M$. Тогда действие $T^m : M$ продолжается до* комплексифицированного действия *алгебраического тора $T^m_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^*)^m$ на многообразии $M$.*

Отметим, что действие $T^m_{\mathbb{C}}\colon M$ не обязано быть эффективным. В связи с этим введем обозначение:

$$H := \{h \in T^m_{\mathbb{C}} | \forall x \in M \ hx = x\} \tag{4.1}$$

Поскольку действие тора сохраняет комплексную структуру, $H$ — абелева комплексная подгруппа. Более того, так как торическая компактная часть $T^m \subset T^m_{\mathbb{C}}$ действует эффективно, то $H \cap T^m = \{e\}$ и, следовательно, $H \simeq \mathbb{C}^l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь действие $T^m\colon M$ максимально. В этом случае подгруппа $H \subset T^m_{\mathbb{C}}$ позволяет ввести на многообразии $M$ каноническое *голоморфное слоение* $\mathcal{F}$, которое оказывается чрезвычайно полезным инструментом при изучении комплексной геометрии многообразия $M$.

**Конструкция 4.1.3** (Каноническое голоморфное слоение)**.** Из результатов [37] следует, что группа $T^m_{\mathbb{C}}/H$ эффективно действует на многообразии $M$ с открытой плотной орбитой, на которой действие группы свободно. Таким, образом $M$ есть *эквивариантная компактификация комплексно-аналитической группы $T^m_{\mathbb{C}}/H$.*

Обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ алгебру Ли группы $H$, а через $\overline{\mathfrak{h}}$ алгебру комплексно-сопряженную алгебре $\mathfrak{h}$ относительно разложения $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$. Отметим, что подалгебры $\mathfrak{h}, \overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ комплексные.

Орбиты действия группы $(H \times H')/H = H'/(H \cap H')$, где $H' = \exp \overline{\mathfrak{h}} \subset T^m_{\mathbb{C}}$, задают на многообразии $M$ голоморфное слоение $\mathcal{F}$, которое мы в дальнейшем будем называть *каноническим.* Поскольку $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$, пространства $\mathfrak{h}$ и $\overline{\mathfrak{h}}$ трансверсальны, следовательно группа $H' \cap H$ дискретна и листы слоения, лежащие внутри открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$ орбиты, изоморфны $(H \times H')/H = H'/(H \cap H') \simeq \mathbb{C}^l/\Lambda$, где $l = \dim_{\mathbb{C}} H$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^l$ — некоторая дискретная подгруппа. Размерность слоения $\mathcal{F}$ есть:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{C}} H = \dim_{\mathbb{C}} T^m_{\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{C}} M = \frac{1}{2}(\dim T^m - \dim T^m_x).$$

Отметим, что, вообще говоря, листы слоения $\mathcal{F}$ не обязаны быть замкнутыми.

В связи с возникновением слоения на комплексных многообразиях с максимальным действием тора, естественно задать вопрос при каких условиях его листы замкнуты.

**Лемма 4.1.4.** *Предположим, что лист слоения $\mathcal{F}$, проходящий через точку $\boldsymbol{z} \in M$, лежащую в открытой плотной $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите, замкнут. Тогда все слои слоения $\mathcal{F}$ замкнуты.*

*Доказательство.* Всякий лист слоения $\mathcal{F}$ есть орбита действия группы $H'/(H \cap H')$. По условию орбита $H'/(H \cap H') \cdot \boldsymbol{z}$ замкнута и, следовательно, компактна, так как многообразие $M$ компактно. Поскольку $\boldsymbol{z} \in T^m_{\mathbb{C}}/H$, сама подгруппа $H'/(H \cap H') \subset T^m_{\mathbb{C}}/H$ тоже компактна, значит все $H'/(H \cap H')$-орбиты компактны. □

**Предложение 4.1.5.** *Следующие условия эквивалентны:*

*(1) листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M$ замкнуты;*

*(2) листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M$ есть компактные комплексные торы;*

*(3)* $\dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) = \operatorname{rk}(p(\mathfrak{h}) \cap N)$;

*(4)* $H \times H' = \exp(\mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{h}})$ *есть алгебраический подтор в* $(\mathbb{C}^*)^m$.

*Доказательство.* Пусть $l = \dim_{\mathbb{C}} H = \dim_{\mathbb{C}} H'$.

(1)⇒(2) Лист слоения $\mathcal{F}$, проходящий через общую точку, имеет вид $H'/(H \cap H')$, где $H' \simeq \mathbb{C}^l$, $H \cap H'$ — дискретная подгруппа. Если свободная орбита группы $H'/(H \cap H')$ замкнута, то она компактна, следовательно $H'/(H \cap H')$ является компактным комплексным тором. Значит все орбиты изоморфны фактор-группам группы $H'/(H \cap H')$, поэтому сами являются компактными комплексными торами.

(2)⇒(3) Предположим, что общая орбита, изоморфная $H'/(H \cap H')$, является компактным тором. Тогда $\operatorname{rk}(H \cap H') = 2l$, значит $\operatorname{rk}\big((\mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{h}}) \cap N\big) = 2l$. Заметим, что $\mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{h}} = p(\mathfrak{h}) \oplus ip(\mathfrak{h})$, поэтому $\operatorname{rk}(p(\mathfrak{h}) \cap N) = \dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) = 2l$.

(3)⇒(4). Если пространство $p(\mathfrak{h})$ таково, что $\dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) = \operatorname{rk}(p(\mathfrak{h}) \cap N)$, то $H \times H' = \exp(p(\mathfrak{h}) \oplus ip(\mathfrak{h})) \simeq (N \cap p(\mathfrak{h})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ — алгебраический тор.

(4)⇒(1). Если $H \times H'$ — алгебраический подтор в $T^m_{\mathbb{C}}$, то фактор-группа $(H \times H')/H$, согласно Примеру 3.1.13, является компактным комплексным тором, следовательно все ее орбиты замкнуты. □

## 4.2. Главные расслоения над торическими многообразиями

Рассмотрим многообразие $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ снабженное такой комплексной структурой, что все листы канонического слоения замкнуты. Оказывается, в этом случае пространство листов слоения несет структуру алгебраического многообразия.

**Теорема 4.2.1.** *Предположим, что листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ замкнуты. Тогда пространство листов слоения $\mathcal{F}$ есть торическое многообразие $V_{q(\Sigma)}$, где $q(\Sigma)$ — рациональный веер в пространстве $\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ с решеткой $N/(N\cap p(\mathfrak{h}))$.*

*Доказательство.* Согласно Конструкции 3.2.1 многообразие $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ есть пространство орбит $V_\Sigma/H$, где $H=\exp\mathfrak{h}\subset T^m_{\mathbb{C}}$, а тор $T^m_{\mathbb{C}}$ действует на торическом многообразии $V_\Sigma$ с открытой плотной орбитой. Из определения канонического слоения следует, что пространство орбит его листов есть фактор-пространство действия группы $(H'\times H)/H$ на $M(\Sigma,\mathfrak{h})$. Следовательно интересующее нас пространство орбит естественным образом отождествляется с $V_\Sigma/(H\times H')$.

В свою очередь, согласно Конструкции Кокса-Батырева 1.4.5, $V(\Sigma)$ есть $U(\mathcal{K}_\Sigma)/G$, где $G\subset(\mathbb{C}^*)^k$, $k$ — количество вершин $\mathcal{K}_\Sigma$, $T^m_{\mathbb{C}}=(\mathbb{C}^*)^k/G$. Пусть $\pi\colon(\mathbb{C}^*)^k\to(\mathbb{C}^*)^k/G=T^m_{\mathbb{C}}$ — проекция. Тогда группа $G'=\pi^{-1}(H\times H')$ действует на $U(\mathcal{K}_\Sigma)$, причем

$$V_\Sigma/(H\times H')=U(\mathcal{K}_\Sigma)/G'.$$

Нетрудно видеть, что, согласно Конструкции Кокса-Батырева, фактор-пространство $U(\mathcal{K}_\Sigma)/G'$, есть в точности представление торического многообразия $V_{q(\Sigma)}$ с действием тора $(\mathbb{C}^*)^m/G'$. □

*Замечание.* В том случае, когда веер $q(\Sigma)$ регулярный, действие $G'\colon U(\mathcal{K})$ свободно, следовательно действие $H\times H'$ на $V_\Sigma$ тоже свободно и многообразие $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ есть тотальное пространство главного расслоения $(H\times H')/H\to M(\Sigma,\mathfrak{h})\to V_{q(\Sigma)}$.

**Пример 4.2.2.** Пусть $\mathcal{H}=(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})/\Gamma$ — поверхность Хопфа из примера 3.1.14. Листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на поверхности Хопфа замкнуты тогда и только тогда, когда группа $\Gamma$ лежит в 1-мерном алгебраическом торе $T^1_{\mathbb{C}}\subset(\mathbb{C}^*)^2$. В этом случае пространство орбит слоения $\mathcal{F}$ есть проективная прямая $(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})/T^1_{\mathbb{C}}$, причем слоем проекции $\mathcal{H}\to\mathbb{C}P^1$ над общей точкой является комплексный тор $T^1_{\mathbb{C}}/\Gamma$.

## 4.3. Модель для когомологий Дольбо

Пространство $C^\infty$-гладких комплекнозначных дифференциальных форм $\Lambda^kT^*M$ на всяком почти комплексном многообразии $M$ раскладывается в прямую сумму дифференциальных форм типа $(p,q)$:

$$\Lambda^kT^*M=\bigoplus_{p+q=k}\Lambda^{p,q}T^*M$$

в соответствии с разложением комплексифицированного касательного пространства в прямую сумму собственных пространств оператора почти комплексной структуры — *голоморфной* и *анти-голоморфной* частей:

$$T_{\boldsymbol{x}}M\otimes\mathbb{C}=T^{1,0}_{\boldsymbol{x}}M\oplus T^{0,1}_{\boldsymbol{x}}M.$$

Компонента типа (0,1) дифференциала де Рама $d$ называется *дифференциалом Дольбо* и обозначается $d^{0,1}=\bar\partial$ (компонента типа (1,0) обозначается, соответственно, $\partial$). В случае интегрируемой почти комплексной структуры $\partial^2=\bar\partial^2=0$. Всюду далее мы будем иметь дело только с интегрируемыми комплексными структурами.

**Определение 4.3.1.** *Когомологиями Дольбо* $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ комплексного многообразия $M$ называются когомологии цепного комплекса $(\Lambda^{p,q}T^*M,\bar\partial)$.

Размерности однородных компонент когомологий Дольбо обозначаются $h^{p,q}(M)$ и называются *числами Ходжа*: $h^{p,q}(M)=\dim_{\mathbb{C}}H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$.

**Пример 4.3.2.** Пусть $\mathcal{T}\simeq\mathbb{C}^l/\Lambda$, где $\Lambda\simeq\mathbb{Z}^{2l}$ — компактный комплексный тор. Тогда его когомологии Дольбо есть свободная алгебра от $l$ образующих степени $(1,0)$ — *голоморфных дифференциалов* и $l$ образующих степени $(0,1)$ — *анти-голоморфных дифференциалов*:

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{T})\simeq\Lambda(\xi^{1,0}_1,\dots,\xi^{1,0}_l,\eta^{0,1}_1,\dots,\eta^{0,1}_l),\quad h^{p,q}(\mathcal{T})=\binom{l}{p}\binom{l}{q}.$$

Следующий классический результат демонстрирует, что когомологии Дольбо описывают важные комплексно-геометрические характеристики соответствующих многообразий.

**Теорема 4.3.3** (Теорема Дольбо, см. [60]). *Пусть $\Omega^p(M)$ — пучок голоморфных $p$-форм на многообразии $M$. Тогда*
$$H^q(M,\Omega^p(M)) = H^{p,q}_{\bar\partial}(M).$$

Нашей целью является построение модели для вычисления когомологий Дольбо компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора, являющихся главными расслоениями со слоем комплексный тор над торическими многообразиями.

Сначала докажем общий результат о когомологиях Дольбо главных голоморфных расслоений. Предположим, что комплексный тор $\mathcal{T} \simeq \mathbb{C}^l/\Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2l}$, свободно действует на комплексном многообразии $M$ так, что отображение $\mathcal{T}\times M \to M$ голоморфно. Тогда пространство орбит $M/\mathcal{T}$ — комплексное многообразие. Мы хотим вычислить когомологии Дольбо многообразия $M$, зная когомологии пространства орбит и характеристический класс главного расслоения $\mathcal{T}\to M\to M/\mathcal{T}$.

Будем говорить, что комплексное многообразие $Z$ *удовлетворяет условиям $\partial\bar\partial$-Леммы*, если для всякой $\partial$-точной, $\bar\partial$-замкнутой формы $\alpha$ на $Z$ существует такая форма $\beta$, что $\alpha = \partial\bar\partial\beta$.

Предположим, что многообразие $M/\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям $\partial\bar\partial$-Леммы. Тогда, согласно результату [46, Th. 8], оно *строго формально*, то есть его минимальная модель над полем $\mathbb{C}$ реализует одновременно обычные когомологии и когомологии Дольбо. В частности, в $H^2(M/\mathcal{T},\mathbb{C})$ имеется разложение Ходжа:

$$\varphi\colon H^2(M/\mathcal{T},\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{2,0}_{\bar\partial}(M/\mathcal{T})\oplus H^{1,1}_{\bar\partial}(M/\mathcal{T})\oplus H^{0,2}_{\bar\partial}(M/\mathcal{T}); \qquad (4.2)$$

обозначим через $\varphi^{2,0},\varphi^{1,1},\varphi^{0,2}$ соответствующие однородные компоненты изоморфизма $\varphi$.

Пусть $\tau\colon H^1(\mathcal{T},\mathbb{Z})\to H^2(M/\mathcal{T},\mathbb{Z})$ — характеристический класс расслоения $M\xrightarrow{\mathcal{T}} M/\mathcal{T}$, $\tau_{\mathbb{C}}$ — его расширение над $\mathbb{C}$:
$$\tau_{\mathbb{C}}\colon H^1(\mathcal{T},\mathbb{C}) = H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T})\oplus H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathcal{T}) \to H^2(M/\mathcal{T},\mathbb{C}). \qquad (4.3)$$

В комплексно-аналитической ситуации существует аналог спектральной последовательности Лере-Серра — спектральная последовательность Бореля, вычисляющая $H_{\bar\partial}(M)$, см. Приложение 2 в [71]. Оказывается, что при дополнительных ограничениях, накладываемых на многообразие $M/\mathcal{T}$, верен следующий результат аналогичный “топологической” Лемме 2.1.5:

**Теорема 4.3.4.** *Предположим, что комплексное многообразие $M/\mathcal{T}$*

*(1) односвязно;*

*(2) удовлетворят условиям $\partial\bar\partial$-Леммы (например кэлерово).*

*Тогда спектральная последовательность Бореля главного расслоения $\mathcal{T}\to M\to M/\mathcal{T}$ вырождается в члене $E_3$ и имеет место изоморфизм*

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(M) \simeq H[H^{*,*}_{\bar\partial}(M/\mathcal{T})\otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{T}),\bar\partial], \qquad (4.4)$$

*где дифференциал $\bar\partial$ задан на мультипликативных образующих:*

$$\bar\partial|_{H^{*,*}_{\bar\partial}(M)} = 0, \qquad \bar\partial|_{H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T})} = \varphi^{1,1}\circ\tau_{\mathbb{C}}, \qquad \bar\partial|_{H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathcal{T})} = \varphi^{0,2}\circ\tau_{\mathbb{C}}.$$

*Доказательство.* Пусть $(\mathcal{M}(M/\mathcal{T}),\delta)$ — минимальная модель над $\mathbb{C}$ пространства $\mathcal{M}(M/\mathcal{T})$, вычисляющее кольцо когомологий $H^*(M/\mathcal{T},\mathbb{C})$. Как мы отметили выше, многообразие $M/\mathcal{T}$ строго формально и существует квази-изоморфизм
$$\iota\colon \big(\mathcal{M}(M/\mathcal{T}),\delta\big) \to \big(H^{*,*}_{\bar\partial}(M),0\big).$$
Согласно [25, Th.4.65], моделью когомологий Дольбо $H^{*,*}_{\bar\partial}(M)$ является алгебра $(\mathcal{M}(M/\mathcal{T})\otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{T}),\delta+D)$, где дифференцирование $D$ равно нулю на $\mathcal{M}(M/\mathcal{T})$, а на $H^1(\mathcal{T},\mathbb{C}) = H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T})\oplus H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathcal{T})$ задано $(0,1)$-частью характеристического класса $\tau_{\mathbb{C}}$.

Аналогично доказательству Леммы 2.1.5 квази-изоморфизм $\iota$ продолжается до квази-изоморфизма

$$\iota\otimes\mathrm{id}\colon \big(\mathcal{M}(M/\mathcal{T})\otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{T}),\delta+D\big) \to \big(H^{*,*}_{\bar\partial}(M)\otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{T}),\bar\partial\big).$$

Итак, изоморфизм (4.4) предоставляет модель для вычисления когомологий Дольбо многообразия $M$. Поскольку правая часть (4.4) в точности совпадает с членом $(E_2,d_2)$ спектральной последовательности Бореля, последовательность вырождается в члене $E_3$. □

Мы используем Теорему 4.3.4 для построения модели, вычисляющей когомологии Дольбо компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора, для которых группа $H/(H\cap H')$ компактна (см. 4.1.5) а все слои канонического слоения $\mathcal{F}$ есть свободные орбиты действия $H/(H\cap H')$. Поскольку все такие многообразия расслаиваются над полными торическими многообразиями, для применения теоремы нам понадобится описание когомологий Дольбо торических многообразий.

Отступим на время этого абзаца от обозначений, зафиксированных в начале главы 4. Рассмотрим полный регулярный веер $\Sigma$ в пространстве $\mathfrak{t}$ с решеткой $N$. Пусть $\boldsymbol{a}_i \in N$, $i = 1, \dots, m$ — примитивные векторы, порождающие одномерные конуса веера $\Sigma$, $\rho\colon \mathbb{Z}^m \to N$ линейное отображение, переводящее $i$-ый базисный вектор в вектор $\boldsymbol{a}_i \in N$. Отождествим линейную компоненту алгебры многочленов $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ с двойственной решеткой $(\mathbb{Z}^m)^*$ и определим линейный идеал $\mathcal{J}_\Sigma$, как идеал порожденный образом отображения $\rho^*\colon N^* \to (\mathbb{Z}^m)^*$. Согласно результату Данилова [61, §10], когомологии де Рама полного неособого многообразия $V_\Sigma$ описываются следующей алгеброй:

$$H^*(V_\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_{SR} + \mathcal{J}_\Sigma), \tag{4.5}$$

где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_\Sigma] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I}_{SR}$ — алгебра Стенли-Райснера. Из результатов Данилова [61, §12], в частности, следует что когомологии Дольбо полных неособых торических многообразий сконцентрированы в биградуировке $(p, p)$ и совпадают с расширением алгебры (4.5) над полем $\mathbb{C}$, где элементам $v_i$ присвоена биградуировка $(1, 1)$. Тем самым, $h^{p,q}(V_\Sigma) = 0$ при $p \neq q$ и $h^{p,p}(V_\Sigma) = \operatorname{rk} H^{2p}(V_\Sigma, \mathbb{Z})$.

Теперь в исходных обозначениях мы можем сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 4.3.5.** *Предположим, что листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ есть свободные орбиты действия компактного комплексного тора $\mathcal{T} = H'/(H \cap H')$ комплексной размерности $l$. Тогда имеется главное голоморфное расслоение $\mathcal{T} \to M(\Sigma, \mathfrak{h}) \to V_{q(\Sigma)}$, причем*

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(M(\Sigma, \mathfrak{h})) = H\big[\mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_{SR} + \mathcal{J}_{q(\Sigma)}) \otimes \Lambda(\xi_1^{1,0}, \dots, \xi_l^{1,0}), \bar\partial\big] \otimes \Lambda(\eta_1^{0,1}, \dots, \eta_l^{0,1}), \tag{4.6}$$

*где дифференциал задан на элементах $\xi_i^{1,0} \in H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T})$ и продолжен на всю алгебру по правилу Лейбница: $\bar\partial(\xi_i^{1,0}) = \tau_{\mathbb{C}}(\xi_i^{1,0}) \in H^{1,1}_{\bar\partial}(V_{q(\Sigma)})$.*

*Доказательство.* Поскольку действие $\mathcal{T}\colon M(\Sigma, \mathfrak{h})$ свободно и комплексно, его пространство есть орбит комплексное многообразие, изоморфное по Теореме 4.2.1 торическому многообразию $V_{q(\Sigma)}$.

Всякое полное торическое многообразие бирационально эквивалентно проективному пространству $\mathbb{C}P^n$, поэтому, согласно [18, Th. 5.22], удовлетворяет условиям $\partial\bar\partial$-леммы. Следовательно к расслоению $\mathcal{T} \to M(\Sigma, \mathfrak{h}) \to V_{q(\Sigma)}$ применима Теорема 4.3.4.

Поскольку $H^{2,0}_{\bar\partial}(V_{q(\Sigma)}) = H^{0,2}_{\bar\partial}(V_{q(\Sigma)}) = 0$, дифференциал $\bar\partial$ на анти-голорфных дифференциалах равен нулю и модель (4.4) превращается в (4.6). $\square$

**Пример 4.3.6.** Рассмотрим *диагональную* поверхность Хопфа:

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma,$$

где $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ — группа, порожденная покоординатным умножением на $(\lambda, \lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$. Тогда листы канонического слоения есть орбиты действия группы $\mathcal{T} = \mathbb{C}^*/\Gamma \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}{\cdot}2\pi i \oplus \mathbb{Z}{\cdot}\log\gamma)$, где группа $\mathbb{C}^*$ действует на $\mathbb{C}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ диагонально. В таком случаем действие $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}$ свободно и возникает главное расслоение:

$$\mathcal{T} \to \mathcal{H} \to \mathbb{C}P^1.$$

Применим к этому расслоению Теорему 4.3.5, для вычисления когомологий Дольбо диагональной поверхности Хопфа. Когомологии Дольбо $\mathbb{C}P^1$ есть $\mathbb{C}[v^{1,1}]/(v^{1,1})^2$. Покажем, что в модели (4.6) $\bar\partial\xi^{1,0} \neq 0$. Пусть $dx, dy \in H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}) \subset H^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})$ – базис “целочисленных” дифференциалов, $\xi^{1,0} = dz \in H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathcal{T}) \subset H^1(\mathcal{T}, \mathbb{C})$ — голоморфный дифференциал. Поскольку $\tau\colon H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}) \to H^2(M/\mathcal{T}, \mathbb{Z})$ имеет ранг 1, считаем, что $\tau(dx) = 0$, и $\tau(dy) \neq 0$. Тогда, так как $dz$ не пропорциональна ни одной из форм $dx$ и $dy$, $\tau_{\mathbb{C}}(dz) \neq 0$.

Итак, $\bar\partial\xi^{1,0} \neq 0$, поэтому без ограничения общности считаем, что $\bar\partial\xi^{1,0} = v^{1,1}$. В таком случае, кольцо $H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{H})$ аддитивно порождено элементами 1, $[\eta^{0,1}]$, $[v^{1,1} \otimes \xi^{1,0}]$, $[v^{1,1} \otimes \xi^{1,0} \otimes \eta^{0,1}]$.

*Замечание.* Теорема 4.3.5 позволяет вычислять когомологии Дольбо только многообразий с максимальным действием тора, снабженных очень специальными комплексными структурами, при которых $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ расслаивается над полным неособым торическим многообразием. Вопрос о построении подобных моделей в более общем случае, например, когда листы канонического слоения $\mathcal{F}$ на $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ не замкнуты, остается открытым.

## 4.4. Построение трансверсально-кэлеровых форм

В отличие от предыдущего раздела, ниже мы будем иметь дело с $C^k$-гладкими формами, где $k \geqslant 1$ — заранее зафиксированное число.

**Определение 4.4.1.** Рассмотрим комплексное многообразие $M$. Дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^{1,1}T^*M$ называется *трансверсально-кэлеровой* по отношению к голоморфному слоению $\mathcal{F}$, если

(a) $\omega$ замкнута, $d\omega = 0$;

(b) $\omega$ положительна, то есть $\omega(X, JX) \geqslant 0$ для любого вектора $X$;

(c) $\omega(X, JX) = 0$ тогда и только тогда, когда вектор $X$ касается слоения: $X \in T\mathcal{F}$.

**Пример 4.4.2** (Поверхность Хопфа)**.** Рассмотрим диагональную поверхность Хопфа $\mathcal{H}$ из Примера 4.3.6. $\mathcal{H}$ расслаивается над $\mathbb{C}P^1$ со слоем $\mathbb{C}^*/\Gamma$:

$$\mathbb{C}^2\backslash\{0\} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{H} \xrightarrow{\mathbb{C}^*/\Gamma} \mathbb{C}P^1.$$

Рассмотрим форму $\omega = \pi^*\omega_{FS} \in \Lambda^{1,1}(\mathcal{H})$, где $\pi\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}P^1$ — проекция, $\omega_{FS}$ — форма Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^1$. Так как форма $\omega_{FS}$ положительна, форма $\omega$ трансверсально-кэлерова относительно слоев отображения $\pi$.

Прежде чем приступить к построению трансверсально-кэлеровых форм на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$, введем некоторые понятия из выпуклой геометрии.

**Определение 4.4.3.** Рассмотрим полный веер $\Sigma$ в пространстве $V$. Зафиксируем векторы $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ — образующие одномерных конусов веера $\Sigma$ и набор действительных чисел $b_1, \dots, b_m$. Рассмотрим набор из $m$ линейных неравенств в двойственном пространстве $V^*$:

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{4.7}$$

где $\boldsymbol{u} \in V^*$. Для каждого конуса максимальной размерности $\sigma \in \Sigma$ определим *вершину* $\boldsymbol{u}_\sigma \in V^*$ системой $\dim V$ уравнений:

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_\sigma \rangle + b_i = 0, \quad v_i \in \sigma, \tag{4.8}$$

где $v_i$ пробегает множество образующих конуса $\sigma$. Из условия полноты веера следует, что система (4.8) имеет единственное решение.

Полный веер $\Sigma$ называется *нормальным*, если существует такой набор чисел $\{b_i\}_{i=1}^m$, что для каждой вершины $\boldsymbol{u}_\sigma$ и каждой линейной формы $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u} \rangle + b_i$

(a) $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_\sigma \rangle + b_i \geqslant 0$;

(b) $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_\sigma \rangle + b_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}_i \in \sigma$.

В этом случае говорят, что веер $\Sigma$ является *нормальным* веером многогранника, заданного системой неравенств (4.7) (см. Определение 1.3.3).

Полный веер $\Sigma$ называется *слабо нормальным*, если существует такой набор чисел $\{b_i\}_{i=1}^m$, что для каждой вершины $\boldsymbol{u}_\sigma$ и каждой линейной формы $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u} \rangle + b_i$

(a) $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_\sigma \rangle + b_i \geqslant 0$;

(b) множество, заданное системой (4.7), имеет полную размерность $\dim V^*$.

*Замечание.* Определение 4.4.3 имеет смысл для всех полных вееров, однако дальше мы будем иметь дело только с симплициальными веерами.

Очевидно, что всякий нормальный веер является слабо нормальным. Как показывает следующий пример, обратное неверно.

**Пример 4.4.4.** Рассмотрим веер из Примера 1.3.4. Напомним, что веер $\Sigma$ лежит в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^3$ с базисом $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и имеет 7 одномерных конусов, порожденных векторами $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_6 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_7 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, из которых 10 троек векторов $\boldsymbol{v}_i$ порождают максимальные конусы: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,5,7\}$, $\{4,5,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{4,6,7\}$. Веер $\Sigma$ не является нормальным.

Докажем, что он является слабо нормальным. Рассмотрим набор чисел $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 1$. Нетрудно проверить, что вершинами являются векторы $\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{e}_1^*, -\boldsymbol{e}_2^*, -\boldsymbol{e}_3^* \in V^*$ и каждая функция $\boldsymbol{u} \mapsto \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle + b_i$ неотрицательна на каждой из вершин.

В теории торических многообразий имеется следующий важный результат.

**Теорема 4.4.5** (Фултон [26, Sec. 3.4])**.** *Неособое торическое многообразие $V_\Sigma$ является проективным тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ является нормальным.*

Из Теоремы 4.4.5 следует, что, если веер $\Sigma$ нормальный, то на многообразии $V_\Sigma$ существует кэлерова форма $\omega$, являющаяся формой кривизны линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$. Оказывается, что аналогичный результат имеет место для трансверсально-кэлеровых форм на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$.

**Теорема 4.4.6.** *Рассмотрим многообразие $M(\Sigma, \mathfrak{h})$. Предположим, что веер $q(\Sigma)$ является слабо нормальным. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ существует форма $\omega_\mathcal{F}$ класса гладкости $C^k$, являющаяся трансверсально-кэлеровой относительно канонического слоения $\mathcal{F}$ на открытой плотной $T^m_\mathbb{C}/H$-орбите.*

*Замечание.* Поскольку мы требуем, чтобы ядра формы $\omega_\mathcal{F}$ совпадали с касательными пространствами $T\mathcal{F}$ слоения $\mathcal{F}$ лишь на открытом плотном множестве, условие нормальности веера $\Sigma$, необходимое в Теореме 4.4.5, удается ослабить до условия слабой нормальности.

*Доказательство.* Доказательство теоремы следует следующей схеме:

1. на каждой карте $U_\sigma \subset V_\Sigma$ мы построим $C^{k+2}$-гладкую функцию $\Phi_\sigma \colon U_\sigma \to \mathbb{R}_>$;
2. на каждой карте $U_\sigma \subset V_\Sigma$ определим форму $\omega_\sigma = dd^c \log \Phi_\sigma$, где $d^c = J \circ d \circ J$ — скрученный дифференциал ($J$ — оператор почти комплексной структуры);
3. проверим, что формы $\omega_{\sigma_1}$ и $\omega_{\sigma_2}$ совпадают на $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}$, задавая неотрицательную форму $\omega$ на многообразии $V_\Sigma$;
4. проверим, что форма $\omega$ спускается до формы $\omega_\mathcal{F}$ на многообразии $V_\Sigma/H$;
5. докажем, что $\ker \omega_\mathcal{F} = T\mathcal{F}$ на $T^m_\mathbb{C}/H \subset V_\Sigma/H$.

1. Пусть $N^* \subset \mathfrak{t}^*$ — решетка целочисленных характеров, $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_m$ — примитивные порождающие одномерных конусов веера $\Sigma$. Зафиксируем конус $\sigma$, порожденный векторами $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_t}$. По определению, целочисленный характер $\boldsymbol{w} \in \check{\sigma} \cap N^*$ задает регулярную функцию $\chi_{\boldsymbol{w}} \colon U_\sigma \to \mathbb{C}$. Аналогично, любой характер $\boldsymbol{w} \in \check{\sigma}$ задает непрерывную функцию

$$\chi^\mathbb{R}_{\boldsymbol{w}} \colon U_\sigma \to \mathbb{R}_\geqslant.$$

Дополнив произвольным образом множество векторов $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_t}\}$ до целочисленного базиса $\{\boldsymbol{a}'_1, \dots, \boldsymbol{a}'_{\dim N}\}$ решетки $N$ (это можно сделать, так как по условию многообразие $V_\Sigma$ неособо), мы можем записать отображения $\chi_{\boldsymbol{w}}$ и $\chi^\mathbb{R}_{\boldsymbol{w}}$ в координатах $z = (z_1, \dots, z_{\dim N})$ на $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^{\dim \sigma} \times (\mathbb{C}^*)^{\dim N - \dim \sigma}$:

$$\chi_{\boldsymbol{w}} \colon (z_1, \dots, z_{\dim N}) \mapsto \prod_i z_i^{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}'_i \rangle}$$

$$\chi^\mathbb{R}_{\boldsymbol{w}} \colon (z_1, \dots, z_{\dim N}) \mapsto \prod_i |z_i|^{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}'_i \rangle}$$

Отметим, что функция $\chi^\mathbb{R}_{\boldsymbol{w}}$ — $C^k$-гладкая, если все значения $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}_{i_j} \rangle$ характера $\boldsymbol{w}$ равны 0, или больше $k$.

Напомним, что $q \colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — естественная проекция. По условию веер $q(\Sigma)$ слабо-нормальный. Пусть векторы $\boldsymbol{v}_i = q(\boldsymbol{a}_i)$ — порождающие его одномерных конусов, $b_1, \dots, b_m$ — числа, задающие структуру слабо-нормального веера. Зафиксируем для конуса $\sigma$ такой характер $\boldsymbol{b}_\sigma \in \mathfrak{t}^*$, что для всех образующих $\boldsymbol{a}_{i_j}$ конуса $\sigma$ выполнено $\langle \boldsymbol{b}_\sigma, \boldsymbol{a}_{i_j} \rangle = b_{i_j}$.

Рассмотрим все вершины $\boldsymbol{u}_\tau \in (\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}))^*$, где $\tau \in \Sigma$ — максимальный конус, и для каждой вершины определим характер

$$\boldsymbol{w}_\tau = q^*(\boldsymbol{u}_\tau) + \boldsymbol{b}_\sigma.$$

**Лемма 4.4.7.** *Характер $\boldsymbol{w}_\tau$ лежит в $\check{\sigma} \subset \mathfrak{t}^*$.*

*Доказательство леммы.* Необходимо проверить, что для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \sigma$ значение $\langle \boldsymbol{w}_\tau, \boldsymbol{a} \rangle$ неотрицательно. Поскольку конус $\sigma$ порожден векторами $\boldsymbol{a}_{i_s}$, достаточно проверить это для его образующих:

$$\langle \boldsymbol{w}_\tau, \boldsymbol{a}_{i_s} \rangle = \langle q^*(\boldsymbol{u}_\tau) + \boldsymbol{b}_\sigma, \boldsymbol{a}_{i_s} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_\tau, q(\boldsymbol{a}_{i_s}) \rangle + b_{i_s} = \langle \boldsymbol{u}_\tau, \boldsymbol{v}_{i_s} \rangle + b_{i_s} \geqslant 0,$$

где последнее неравенство выполнено в силу слабой нормальности веера $q(\Sigma)$. □

Итак, каждый характер $\boldsymbol{w}_\tau$ определяет неотрицательную функцию $\chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{w}_\tau}$ на $U_\sigma$. При этом, если $\sigma \subset \tau$, то функция $\chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{w}_\tau}$ строго положительная, так как значения $\langle \boldsymbol{w}_\tau, \boldsymbol{a}_{i_s} \rangle$, отвечающие нулевым координатам точки $z \in U_\sigma$ равны нулю. Следовательно, функция $\sum_\tau \chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{w}_\tau}$ строго положительна на $U_\sigma$, в частности, на $U_\sigma$ определена положительная функция

$$\Phi_\sigma = \sum_\tau \chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{w}_\tau}.$$

Домножив, если необходимо, все характеры $\boldsymbol{w}_\tau$ на одну положительную константу, можно добиться того, что $\Phi_\sigma$ имеет любой наперед заданный класс гладкости.

2. Определим форму $\omega_\sigma = dd^c \log \Phi_\sigma$. Согласно общему результату [20, Th. I.5.6], функция $\log \Phi_\sigma$ *плюрисубгармоническая*, то есть форма $\omega_\sigma$ неотрицательна.

3. Рассмотрим функции $\log \Phi_{\sigma_1}$ и $\log \Phi_{\sigma_2}$ на $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$. Из определения функций $\Phi_{\sigma_i}$ следует, что $\log \Phi_{\sigma_1} - \log \Phi_{\sigma_2} = \log \sum_\tau (\chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{b}}) = \log C \chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{b}}$, где $C$ — число вершин, а $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{\sigma_1} - \boldsymbol{b}_{\sigma_2}$. Поскольку левая часть равенства является корректно определенной функцией, функция $\chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{b}} = |z|^{\boldsymbol{b}}$ не обращается в ноль на $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}$. Из формулы Пуанкаре-Лелонга [20, Th. II.2.15] следует, что $dd^c \log \chi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{b}} = 0$, следовательно формы $\omega_{\sigma_1}$ и $\omega_{\sigma_2}$ совпадают на $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}$. Тем самым, на многообразии $V_\Sigma$ определена глобальная неотрицательная форма $\omega$ такая, что $\omega|_{U_\sigma} = \omega_\sigma$.

4. и 5. Доказательству этих шагов предпошлем лемму.

**Лемма 4.4.8.** *Рассмотрим точку* $\boldsymbol{z}$ *в открытой части* $T^m_{\mathbb{C}} \subset V_\Sigma$. *Ядро формы* $\omega$ *в* $T_{\boldsymbol{z}} V_\Sigma = T_{\boldsymbol{z}} T_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ *есть* $\ker q \oplus i \ker q$

*Доказательство леммы.* Выберем функцию $\Phi = \Phi_\sigma$. Поскольку функции $\Phi$ постоянны вдоль торической части, $\omega(\mathfrak{t}, i\mathfrak{t}) = 0$. Более того, так как форма $i$-инвариантна, $i \ker \omega|_{\mathfrak{t}} = \ker \omega|_{i\mathfrak{t}}$. Поэтому $\ker \omega = \ker \omega|_{\mathfrak{t}} \oplus i \ker \omega|_{\mathfrak{t}}$.

Чтобы найти ядро $\ker \omega|_{\mathfrak{t}}$ достаточно для каждого $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{t}$ вычислить

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \log \Phi(\exp \lambda \boldsymbol{v} \cdot z)|_{\lambda=0}.$$

После преобразований аналогичных [49, Lemma 4.7] получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} \log \Phi(\exp \lambda \boldsymbol{v} \cdot z)\Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\sum_\tau \langle \boldsymbol{w}_\tau, \boldsymbol{v} \rangle \chi^{\mathbb{R}}_\tau(\exp \lambda \boldsymbol{v} \cdot z)}{\Phi(z)} \right)\Bigg|_{\lambda=0} = \\ &= \frac{1}{\Phi^2(z)} \left( \sum_{\tau_1} \langle \boldsymbol{w}_{\tau_1}, \boldsymbol{v} \rangle \chi^{\mathbb{R}}_{\tau_1}(z) \cdot \sum_{\tau_2} \langle \boldsymbol{w}_{\tau_2}, \boldsymbol{v} \rangle \chi^{\mathbb{R}}_{\tau_2}(z) - \big( \sum_\tau \langle \boldsymbol{w}_\tau, \boldsymbol{v} \rangle \chi^{\mathbb{R}}_\tau(z) \big)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\Phi^2(z)} \left( \sum_{\tau_1, \tau_2} \chi^{\mathbb{R}}_{\tau_1}(z) \chi^{\mathbb{R}}_{\tau_2}(z) \langle \boldsymbol{w}_{\tau_1} - \boldsymbol{w}_{\tau_2}, \boldsymbol{v} \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

Правая часть обращается в ноль тогда и только тогда значения всех характеров $\boldsymbol{w}_{\tau_1} - \boldsymbol{w}_{\tau_2}$ на векторе $\boldsymbol{v}$ равны 0, или, что то же самое, $\langle \boldsymbol{u}_{\tau_1} - \boldsymbol{u}_{\tau_2}, q(\boldsymbol{v}) \rangle$=0. С другой стороны, из условия (b) в Определении 4.4.3 слабо-нормального веера вытекает, что это возможно только при $q(\boldsymbol{v}) = 0$. Итак в точках $\boldsymbol{z} \in T^m_{\mathbb{C}}$ имеем: $\ker \omega|_{\mathfrak{t}} = \ker\, q$, значит $\ker \omega = \ker\, q \oplus i \ker\, q = \mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{h}}$. □

Форма $\omega$ является *базисной* относительно действия группы $H$ на плотной открытой части $T^m_{\mathbb{C}} \subset V_\Sigma$, то есть для любого вектора $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{h}$ и соответствующего ему фундаментального векторного поля $V$ имеем $\mathcal{L}_V \omega|_{T^m_{\mathbb{C}}} = i_V \omega|_{T^m_{\mathbb{C}}} = 0$. По соображениям непрерывности $\omega$ является базисной на всем многообразии $V_\Sigma$, следовательно, она спускается до формы на $V_\Sigma/H$. То есть, существует такая форма $\omega_{\mathcal{F}}$ на $M(\Sigma, \mathfrak{h}) = V_\Sigma/H$, что $\omega = \pi^* \omega_{\mathcal{F}}$, где $\pi \colon V_\Sigma \to M(\Sigma, \mathfrak{h})$ — естественная проекция. При этом ядра формы $\omega_{\mathcal{F}}$ в точках $T^m_{\mathbb{C}}/H$ совпадают с касательными пространствами к орбитам группы $H'/(H \cap H')$, см. Конструкцию 4.1.3. Тем самым, форма $\omega_{\mathcal{F}}$ является трансверсально-кэлеровой относительно слоения $\mathcal{F}$ на открытой плотной части $M(\Sigma, \mathfrak{h})$. □

Далее форму $\omega_{\mathcal{F}}$ на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ мы будет называть просто трансверсально-кэлеровой, подразумевая, что соответствующее условие накладывается только на открытой плотной $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите.

Проиллюстрируем Теорему 4.4.6 следующим примером.

**Пример 4.4.9.** Применим Теорему 4.4.6 для построения трансверсально-кэлеровых форм на многообразиях Хопфа — многомерном обобщении поверхностей Хопфа 3.1.14:

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma, \tag{4.9}$$

где группа $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ действует покоординатным умножением на $(e^{2\pi i \mu_1}, \ldots, e^{2\pi i \mu_m})$, а числа $\mu_i \in \mathbb{C}$ таковы, что $\operatorname{Im} \mu_i > 0$.

Представим многообразие $\mathcal{H}$ в виде фактор-пространства $U(\mathcal{K})/H$. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, на множестве $[m+1]$, состоящий из всех собственных подмножеств $\mathcal{I} \subsetneq [m] \subset [m+1]$. Тогда $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\}) \times \mathbb{C}^*$. Определим комплексное подпространство

$$\mathfrak{h} = \{(\mu_1 w, \dots, \mu_m w, w) | w \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^{m+1} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}.$$

Представим пространство $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^{m+1}$ в виде $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{t}' = \mathbb{R}^m$ — алгебра Ли тора $T^m$, действующего на $\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ (координатное подпространство $\mathfrak{t}$, натянутое на первые $m$ базисных векторов). В таком случае имеется изоморфизм $\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{t}'/L$, где одномерное вещественное векторное пространство $L$ порождено вектором $(\operatorname{Im} \mu_1, \dots, \operatorname{Im} \mu_m)$. Из условия на числа $\mu_i$ следует, что веер $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{t}$, при отождествлении $\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{t}'/L$, проецируется взаимно-однозначно на полный веер $q(\Sigma)$, порожденный векторами $\pi(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, \dots, m$, где $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ — базис $\mathfrak{t}'$, а $\pi \colon \mathfrak{t}' \to \mathfrak{t}'/L$ — проекция.

Как и на всяком компактном комплексном многообразии с максимальным действием тора, на многообразиях Хопфа существует каноническое слоение $\mathcal{F}$. Нетрудно проверить, что в представлении (4.9) слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{H}$ задается действием группы $\{(e^{\operatorname{Im} \mu_1 w}, \dots, e^{\operatorname{Im} \mu_m w}) \in (\mathbb{C}^*)^m | w \in \mathbb{C}\}$.

Веер $q(\Sigma)$ является нормальным веером $m$-мерного симплекса, поэтому к многообразию $\mathcal{H}$ применима Теорема 4.4.6, следовательно на многообразии Хопфа существует форма $\omega_{\mathcal{F}}$ любого заданного класса гладкости $C^k$, являющаяся трансверсально-кэлеровой относительно канонического слоения $\mathcal{F}$ на открытой части $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma \subset \mathcal{H}$.

*Замечание.* Как правило, многообразиями Хопфа называют более общий класс фактор-пространств $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$, где группа $\Gamma$ порождена действием такого линейного оператора $A \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, что все его собственные значения $\lambda_i$ по модулю больше 1. В этом случае действие $\Gamma \colon \mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ собственно и $\mathcal{H}$ является комплексным многообразием. Мы же в Примере 4.4.9 рассматриваем только случай полупростых операторов $A$. Это связано с тем, что общее многообразие Хопфа допускает максимальное действие тора тогда и только тогда, когда оператор $A$ диагонализуем.

Интересно, что множество многообразий Хопфа, которые попадают под наше рассмотрение, совпадает со множеством многообразий Хопфа, допускающих локально конформно кэлерову метрику, см. [27; 47].

В следующей секции мы используем факт существования трансверсально-кэлеровой формы на многообразиях Хопфа для изучения геометрии общих компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора.

## 4.5. Геометрия общих комплексных структур

Рассмотрим компактное комплексное многообразие $M = M(\Sigma, \mathfrak{h})$, полученное при помощи Конструкции 3.2.1. Напомним, что на комплексное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ накладываются два условия:

- $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$;
- $q|_{\Sigma} \colon \Sigma \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ — биекция.

Аналогично ситуации с комплексными структурами на момент-угол-многообразиях (см. замечание в конце части 3.1.2) эти условия определяют открытое подмножество в комплексном грассманиане $W(\Sigma) \subset \operatorname{Gr}(l, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, где $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. В разделе 4.3 мы изучали геометрические свойства специальных “рациональных” структур $\mathfrak{h} \in W(\Sigma) \subset \operatorname{Gr}(l, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, для которых листы канонического слоения компактны, а само многообразие $M$ расслаивается над полным торическим многообразием. В этом разделе нас, напротив, будет интересовать комплексная геометрия “типичных” структур $\mathfrak{h} \in W(\Sigma)$. Случай $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 0$ с этой точки зрения тривиален и позволяет получить только компактные торические многообразия $V_{\Sigma}$, поэтому далее в этой секции мы рассматриваем только случай $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = l > 0$. Также мы считаем, что $\dim \Sigma > 0$ (соответственно, $\dim_{\mathbb{C}} M > \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ и $\dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) < \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}$), так как в противном случае мы снова приходим к хорошо изученной ситуации — компактным комплексным торам, см. Пример 3.1.13.

**Определение 4.5.1.** Будем говорить, что некоторое утверждение о комплексной геометрии многообразий $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ *верно для общей комплексной структуры*, если множество тех $\mathfrak{h} \in W(\Sigma)$, для которых утверждение не выполнено, имеет меру ноль по Лебегу.

**Определение 4.5.2.** *Аналитическим замыканием* $\overline{V}$ подмножества $V$ комплексного многообразия $M$ называется минимальное по включению аналитическое множество, содержащее $V$.

Будем говорить, что подпространство $p(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{t}$ *полностью иррационально*, если (1) ни один ненулевой характер $\boldsymbol{u} \in N^*$ тора $T^m$ не обращается тождественно в ноль на $p(\mathfrak{h})$; (2) $p(\mathfrak{h}) \cap N = \{\boldsymbol{0}\}$. В том случае, когда подпространство $p(\mathfrak{h})$ таково, что $\dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) = \operatorname{rk}(p(\mathfrak{h}) \cap N)$, согласно Предложению 4.1.5, листы слоения $\mathcal{F}$ замкнуты. В полностью иррациональном случае ситуация противоположная:

**Лемма 4.5.3.** *Пусть многообразие $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ таково, что подпространство $p(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{t}$ полностью иррационально. Тогда*

*(a) аналитическое замыкание листа слоения $\mathcal{F}$, лежащего в открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите, совпадает со всем многообразием $M(\Sigma,\mathfrak{h})$;*

*(b) лист слоения $\mathcal{F}$, лежащий в открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите, изоморфен $\mathbb{C}^l$.*

*Доказательство.* Докажем сначала пункт (a). Покажем, что аналитическое замыкание подгруппы $\exp(\mathfrak{h}\oplus\overline{\mathfrak{h}})=H\times H'\subset T^m_{\mathbb{C}}$ совпадает со всей группой $T^m_{\mathbb{C}}$.

$$G=\overline{H\times H'}.$$

В силу минимальности замыкания, $G\subset T^m_{\mathbb{C}}$ является (комплексной) подгруппой. Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ — алгебра Ли группы $G$. Так как группа $G$ замкнута, $G\cap T^m$ есть подтор в $T^m$, следовательно $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t})=\operatorname{rk}(\mathfrak{g}\cap N)$. Поскольку $p(\mathfrak{h})=(\mathfrak{h}\oplus\overline{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{t}$, имеем цепочку вложений

$$p(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t}\subset\mathfrak{t}.$$

По условию $p(\mathfrak{h})$ — полностью иррациональное пространство. Если пространство $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t}$ не совпадает $\mathfrak{t}$, то $\mathfrak{g}\cap N$ не совпадает с $N$ и существует такой ненулевой характер $\boldsymbol{u}\in N^*$, что $\boldsymbol{u}(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t})\equiv 0$. Итак $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t}=\mathfrak{t}$, следовательно, группа $G$, будучи комплексной, совпадает со всем алгебраическим тором $T^m_{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь $Y=\overline{\mathcal{F}\boldsymbol{x}}$ — замыкание листа слоения, проходящего через точку в открытой плотной орбите: $\boldsymbol{x}\in T^m_{\mathbb{C}}/H$. Аналитическое множество $\pi^{-1}(Y\cap(T^m_{\mathbb{C}}/H))$ содержит $H\times H'$-орбиту элемента $\pi^{-1}(\boldsymbol{x})$, где $\pi\colon T^m_{\mathbb{C}}\to T^m_{\mathbb{C}}/H$ — естественная проекция. Согласно доказанному, $\pi^{-1}(Y\cap T^m_{\mathbb{C}})\supset\overline{(H\times H')\boldsymbol{x}}=T^m_{\mathbb{C}}$, следовательно $Y\cap(T^m_{\mathbb{C}}/H)=T^m_{\mathbb{C}}/H$, и $Y=M(\Sigma,\mathfrak{h})$.

Докажем теперь пункт (b). Лист, проходящий через точку в открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите изоморфен группе $H'/(H\cap H')$, поэтому достаточно доказать, что $H\cap H'=e$. Поскольку $H\cap H'\simeq(\mathfrak{h}\oplus N)\cap\overline{\mathfrak{h}}$, нетривиальность пересечения $H\cap H'$ возможно только в том случае, когда $p(\mathfrak{h})\cap N\neq\{\boldsymbol{0}\}$. □

**Лемма 4.5.4.** *Для общей комплексной структуры на $M(\Sigma,\mathfrak{h})$ единственным таким комплексным подпространством $\mathfrak{u}\subset\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, что*

*(1)* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{u}$;

*(2)* $\overline{\mathfrak{h}}\cap\mathfrak{u}\neq\{\boldsymbol{0}\}$;

*(3)* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{t})=\operatorname{rk}(\mathfrak{u}\cap N)$,

*является* $\mathfrak{u}=\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

*Доказательство.* Пусть $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=l$ и $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}=m$. Множество пространств $\mathfrak{h}$, удовлетворяющих условиям Конструкции 3.2.1, отождествляется с открытым подмножеством $W(\Sigma)$ в грассманиане $\operatorname{Gr}(l,\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ и имеет комплексную размерность $l(m-l)$. Мы докажем, что множество тех пространств $\mathfrak{h}$, для которых существует комплексное пространство $\mathfrak{u}\subsetneq\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющее условиям (1)-(3), содержится в счетном объединении аналитических подмножеств в $\operatorname{Gr}(l,\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ размерности $<l(m-l)$.

Пусть $V\subset\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ — произвольное комплексное подпространство. Прежде всего отметим, что аналитическое подмножество $\{\mathfrak{h}\in\operatorname{Gr}(l,\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})\,|\operatorname{codim}(\mathfrak{h}\cap V)<\min(m,\operatorname{codim}V+\operatorname{codim}\mathfrak{h})\}$ имеет комплексную размерность $<l(m-l)$.

Предположим, что $\mathfrak{u}\subsetneq\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условиям (1)-(3). Введем обозначения $Q=\mathfrak{u}\cap\mathfrak{t}$ и $V=Q\oplus iQ\subset\mathfrak{t}\oplus i\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Поскольку множество возможных таких подпространств $Q\subsetneq\mathfrak{t}$, что $\dim_{\mathbb{R}}Q=\operatorname{rk}(Q\cap N)$, счетно, нам достаточно доказать, что $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}\cap V)>\operatorname{codim}V+\operatorname{codim}\mathfrak{h}$.

Пусть $\dim_{\mathbb{R}}Q=q$, $\dim_{\mathbb{R}}(p(\mathfrak{h})\cap Q)=r$. Из свойств (1) и (2) следует, что $r\geqslant 1$. Поскольку $p|_{\mathfrak{h}}$ является биекцией, $\dim_{\mathbb{R}}p(\mathfrak{h})=2l$, следовательно $r\geqslant 2l+q-m$.

Покажем, что $\dim_{\mathbb{C}}(V\cap\mathfrak{h})\geqslant r/2$. Для каждого вектора $\boldsymbol{v}\in p(\mathfrak{h})\cap Q$ существует единственный вектор $\boldsymbol{v}\oplus i\boldsymbol{w}\in\mathfrak{h}\subset\mathfrak{t}\oplus i\mathfrak{t}$. Тогда $\boldsymbol{w}=p(w\oplus i(-\boldsymbol{v}))\in p(\mathfrak{h})$ и $\boldsymbol{w}\in\mathfrak{u}\cap\mathfrak{t}=Q$, следовательно $\boldsymbol{v}\oplus i\boldsymbol{w}\in V\cap\mathfrak{h}$. Итак, $\dim_{\mathbb{C}}(V\cap\mathfrak{h})=\dim_{\mathbb{R}}(V\cap\mathfrak{h})/2\geqslant r/2$.

Тем самым комплексные пространства $V$ и $\mathfrak{h}$ находятся не в общем положении друг относительно друга (здесь мы пользуемся тем, что $q<m$):

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}(V\cap\mathfrak{h})\leqslant m-r/2\leqslant(m-l)+(m-q)/2<(m-l)+(m-q)=\\=\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}+\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}V,$$

следовательно для данного $V=Q\oplus iQ$ множество таких $\mathfrak{h}$ имеет меру ноль. Поскольку множество возможных подпространств $Q\subsetneq\mathfrak{t}$ счетно, утверждение леммы верно для общих $\mathfrak{h}$. □

В качестве следствия Лемм 4.5.3 и 4.5.4 мы получаем следующий результат:

**Следствие 4.5.5.** *Для общей комплексной структуры на $M(\Sigma, \mathfrak{h})$*

*(a) аналитическое замыкание листа слоения $\mathcal{F}$, лежащего в открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите, совпадает со всем многообразием $M(\Sigma, \mathfrak{h})$;*

*(b) лист слоения $\mathcal{F}$, лежащий в открытой $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите изоморфен $\mathbb{C}^l$.*

*Доказательство.* Докажем, что для общей комплексной структуры пространство $p(\mathfrak{h})$ полностью иррационально.

Во-первых, если $p(\mathfrak{h}) \subset \ker \boldsymbol{u}$, для некоторого ненулевого характера $\boldsymbol{u} \in N^*$, то в качестве подпространства $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ выберем $\ker \boldsymbol{u} \oplus i \ker \boldsymbol{u}$. Тогда $\mathfrak{h}$ не удовлетворяет условиям Леммы 4.5.4, а множество таких $\mathfrak{h}$ имеет меру ноль.

Во-вторых, множество таких $l$-мерных комплексных подпространств $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, что фиксированный ненулевой элемент $\boldsymbol{n} \in N$ лежит в $p(\mathfrak{h})$ имеет меру ноль, поскольку в общем положении $p(\mathfrak{h})$ тривиально пересекается с прямой, порожденной вектором $\boldsymbol{n}$ (поскольку $\dim_{\mathbb{R}} p(\mathfrak{h}) < \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}$). Множество таких $\boldsymbol{n}$ счетно, поэтому для общего пространства $\mathfrak{h}$ пересечение $\mathfrak{h} \cap N$ тривиально.

Итак, для общей комплексной структуры $p(\mathfrak{h})$ полностью иррационально, следовательно применима Лемма 4.5.3. □

Применим развитую нами технику для изучения аналитических подмножеств многообразия Хопфа из Примера 4.4.9:

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma,$$

где $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ порождена умножением на $(e^{2\pi i \mu_1}, \ldots, e^{2\pi i \mu_m})$. Напомним, что на многообразии $\mathcal{H}$ максимально действует тор $T^{m+1}$.

**Предложение 4.5.6.** *Пусть многообразие Хопфа $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$ таково, что никакая линейная комбинация вида $u_1 \operatorname{Im} \mu_1 + \cdots + u_m \operatorname{Im} \mu_m$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\boldsymbol{u} \neq 0$, не обращается в ноль. Тогда аналитическое замыкание листа канонического слоения $\mathcal{F}$, проходящего через точку $\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}$, совпадает с замыканием орбиты $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma \cdot \boldsymbol{z}$.*

*Доказательство.* Предположим, что точка $\boldsymbol{z}$ лежит в отрытой $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$-орбите. Слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{H}$ задается действием группы $G = \{(e^{\operatorname{Im} \mu_1 w}, \ldots, e^{\operatorname{Im} \mu_m w}) \in (\mathbb{C}^*)^m | w \in \mathbb{C}\}$. Так как ни одна нетривиальная целочисленная комбинация вида $u_1 \operatorname{Im} \mu_1 + \cdots + u_m \operatorname{Im} \mu_m$ не обращается в ноль, аналогично доказательству пункта (a) Леммы 4.5.3, замыкание $\overline{G}$ в $(\mathbb{C}^*)^m$ есть $(\mathbb{C}^*)^m$. Следовательно, аналитическое замыкание листа $\mathcal{F} \cdot \boldsymbol{z}$ совпадает со всем многообразием $\mathcal{H}$.

Если точка $\boldsymbol{z}$ лежит в $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$-орбите меньшей размерности, те же рассуждения можно повторить для многообразия Хопфа $\overline{(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma \cdot \boldsymbol{z}}$. □

Существование на многообразиях Хопфа трансверсально-кэлеровой формы $\omega_{\mathcal{F}}$ позволяет доказать, что всякое аналитическое подмножество $Y \subset \mathcal{H}$ касается канонического слоения $\mathcal{F}$. В случае общей комплексной структуры это влечет следующий результат (см. также [43, Th. 8]):

**Теорема 4.5.7.** *Пусть многообразие Хопфа $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$ таково, что никакая линейная комбинация вида $u_1 \operatorname{Im} \mu_1 + \cdots + u_m \operatorname{Im} \mu_m$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\boldsymbol{u} \neq 0$, не обращается в ноль. Тогда на многообразии Хопфа существует лишь конечное число неприводимых аналитических подмножеств положительной размерности. Каждое такое подмножество является замыканием $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$-орбиты.*

При доказательстве этой теоремы и некоторых последующих результатов нам потребуется интегрирование по особым аналитическим подмножествам $Y \subset M$. Напомним, что по определению $\int_Y \omega|_Y := \int_{Y_{reg}} \omega|_{Y_{reg}}$, где $\omega$ — дифференциальная форма на $M$, а $Y_{reg} \subset Y$ — множество *гладких* точек $Y$. При этом, несмотря на то, что множество $Y_{reg}$, вообще говоря, не компактно, интеграл $\int_{Y_{reg}} \omega|_{Y_{reg}}$ конечен, если $Y$ компактно. Детали можно найти в [60, §0.2].

*Доказательство.* Рассмотрим аналитическое подмножество $Y \subset \mathcal{H}$, проходящее через точку $\boldsymbol{x}$ в отрытой $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$-орбите. Докажем, что $T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{F} \subset T_{\boldsymbol{x}}Y$.

Предположим, что это так. Так как слоение $\mathcal{F}$ одномерно, пространства $T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{F}$ и $T_{\boldsymbol{x}}Y$ трансверсальны. Рассмотрим трансверсально-кэлерову форму $\omega_{\mathcal{F}}$ класса гладкости $C^1$ из Теоремы 4.4.6. Тогда форма $\omega_{\mathcal{F}}|_Y$ всюду неотрицательна и строго положительна в окрестности точки $\boldsymbol{x} \in Y$, следовательно

$$\int_Y (\omega_{\mathcal{F}}|_Y)^{\dim_{\mathbb{C}} Y} > 0.$$

С другой стороны, форма $\omega_{\mathcal{F}}$ точна по построению, $\omega_{\mathcal{F}} = d\alpha$, поэтому

$$\int\limits_Y (\omega_{\mathcal{F}}|_Y)^{\dim_{\mathbb{C}} Y} = \int\limits_Y d(\alpha|_Y \wedge \omega_{\mathcal{F}}|_Y^{\dim_{\mathbb{C}} Y-1}) = 0.$$

Противоречие.

Итак, аналитическое множество $Y$ содержит общий лист слоения $\mathcal{F}$, следовательно, согласно Предложению 4.5.6, совпадает со всем многообразием $\mathcal{H}$.

Если множество $Y \subset \mathcal{H}$ лежит в объединении $\overline{(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma}$-орбит меньшей размерности, те же рассуждения можно повторить для многообразия Хопфа $\overline{(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma \cdot \boldsymbol{z}}$. $\square$

**Следствие 4.5.8.** *Пусть многообразие Хопфа $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$ таково, что никакая линейная комбинация вида $u_1 \operatorname{Im} \mu_1 + \cdots + u_m \operatorname{Im} \mu_m$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\boldsymbol{u} \neq 0$, не обращается в ноль. Тогда на многообразии $\mathcal{H}$ существуют лишь постоянные мероморфные функции.*

*Доказательство.* Пусть $f(\boldsymbol{z})$ — непостоянная мероморфная функция на $\mathcal{H}$. Рассмотрим такую точку $\boldsymbol{z}_0$ в открытой $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$ — орбите, что значение $f(\boldsymbol{z}_0)$ определено и конечно. Тогда дивизор нулей функции $f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{z}_0)$ является собственным аналитическим подмножеством многообразия $\mathcal{H}$, отличным от замыкания $(\mathbb{C}^*)^m/\Gamma$-орбиты. Противоречие с утверждением Теоремы 4.5.7. $\square$

Из результатов Теоремы 4.5.7 и Следствия 4.5.8 вытекает, что на многообразиях Хопфа, снабженных общей комплексной структурой, имеется лишь конечное число неприводимых аналитических подмножеств положительной размерности, а поле мероморфных функций тривиально. Оказывается, аналогичное утверждение имеет место для многих компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора.

**Теорема 4.5.9.** *Предположим, что линейная оболочка веера $\Sigma \subset \mathfrak{t}$ совпадает с $\mathfrak{t}$. Тогда на многообразии $M = M(\Sigma, \mathfrak{h})$, снабженном общей комплексной структурой, существуют лишь постоянные мероморфные функции.*

*Доказательство.* Доказательство теоремы следует следующей схеме:

1. построим такие вееры $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и $\Sigma' \supset \Sigma_0$ в $\mathfrak{t}$, что дополнение к образу естественного вложения
$$V_{\Sigma'} \hookleftarrow V_{\Sigma_0}$$
имеет комплексную коразмерность $\geqslant 2$;
2. построим разветвленное накрытие $\mathbb{C}^m \to V'_{\Sigma}$;
3. в предположении существования мероморфной функции $f\colon V(\Sigma)/H \dashrightarrow \mathbb{C}$ построим мероморфную функцию $F\colon \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}$ инвариантную относительно действия некоторой группы $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$;
4. применим к многообразию $(\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$ результат Следствия 4.5.8 и получим, что $F$ постоянна.

1. Пусть веер $\Sigma$ имеет $k$ одномерных конусов, порожденных примитивными векторами $\boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{t}$, $i = 1, \ldots, k$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t} = m$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h}) = n$. Из условия следует, что линейная оболочка векторов $\boldsymbol{a}_i$ совпадает с $\mathfrak{t}$.

Так как веер $q(\Sigma)$ полный, можно выбрать такой набор векторов $q(\boldsymbol{a}_{i_j}) \in \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$, $j = 1, \ldots, n+1$, что

$$\boldsymbol{0} \in \overset{\circ}{\operatorname{conv}}\{q(\boldsymbol{a}_{i_1}), \ldots, q(\boldsymbol{a}_{i_n})\}, \tag{4.10}$$

где $\overset{\circ}{\operatorname{conv}}$ обозначает внутренность выпуклой оболочки. В частности, их линейная оболочка совпадает с $\mathfrak{t}$. Без ограничения общности можно считать, что векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_{n+1}}$ линейно независимы. Действительно, если это не так, добавим к набору вектор $\boldsymbol{a}_{i_{n+2}}$, не лежащий в линейной оболочке векторов $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_{n+1}}$ (такой вектор существует, так как линейная оболочка $\boldsymbol{a}_i$ совпадает с $\mathfrak{t}$ по условию). Тогда можно заменить ровно один из векторов $\boldsymbol{a}_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n+1$ на вектор $\boldsymbol{a}_{i_{n+2}}$ так, чтобы условие (4.10) сохранилось.

Итак, считаем, что векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_{n+1}}$ линейно независимы. Расширим этот набор до базиса $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ векторного пространства $\mathfrak{t}$, добавив некоторые из оставшихся векторов $\boldsymbol{a}_i$. В силу условия (4.10), существуют такие положительные вещественные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, что $\mu_1 q(\boldsymbol{a}_{i_1}) + \cdots + \mu_m q(\boldsymbol{a}_{i_m}) = \boldsymbol{0}$ в $\mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$. Следовательно, по определению отображения $q$, вектор $\mu_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + \mu_m \boldsymbol{a}_{i_m}$ лежит в $p(\mathfrak{h})$. определим прообраз вектора $\mu_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + \mu_m \boldsymbol{a}_{i_m}$ в $\mathfrak{h}$:

$$\boldsymbol{v}' := p^{-1}(\mu_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + \mu_m \boldsymbol{a}_{i_m}) \in \mathfrak{h}.$$

Поскольку для общей комплексной структуры на $M$ пространство $p(\mathfrak{h})$ полностью иррационально, в достаточно малой окрестности вектора $\boldsymbol{v}'$ в $\mathfrak{h}$ можно найти такой вектор $\boldsymbol{v}$, что

(1) разложение вектора $p(\boldsymbol{v})$ по базису $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ пространства $\mathfrak{t}$ имеет положительные координаты;

(2) ни один ненулевой характер $\boldsymbol{u} \in N^*$ не обращается в ноль на векторе $p(\boldsymbol{v})$.

Выберем в качестве веера $\Sigma'$ конус, порожденный векторами $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$, и все его грани. В качестве веера $\Sigma_0$ возьмем $\Sigma \cap \Sigma'$. Получим вложения соответствующих торических многообразий

$$V_{\Sigma'} \overset{i'}{\hookleftarrow} V_{\Sigma_0} \overset{i}{\hookrightarrow} V_{\Sigma}.$$

Так как множества одномерных конусов вееров $\Sigma_0$ и $\Sigma'$ совпадают, дополнение $V_{\Sigma'} \backslash V_{\Sigma_0}$ имеет коразмерность $\geqslant 2$ в $V_{\Sigma'}$.

2. Выясним подробнее как устроено торическое многообразие $V_{\Sigma'}$. Применим для этого конструкцию Кокса 1.4.5. Многообразие $U(\mathcal{K})$ есть $\mathbb{C}^m$, поэтому

$$V_{\Sigma'} = \mathbb{C}^m / G, \tag{4.11}$$

где $G \subset (\mathbb{C}^*)^m$. Векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ образуют базис векторного пространства $\mathfrak{t}$, но, вообще говоря, не являются базисом решетки $N$, поэтому группа $G \simeq N/(\mathbb{Z}\boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\boldsymbol{a}_{i_m})$ суть конечная подгруппа в $(\mathbb{C}^*)^m$:

$$1 \to G \to (\mathbb{C}^*)^m \xrightarrow{\pi} T^m_{\mathbb{C}} \to 1. \tag{4.12}$$

3. Рассмотрим произвольную мероморфную функцию $f\colon M \dashrightarrow \mathbb{C}$. Пусть $r\colon V(\Sigma) \to M$ — естественная проекция. По теореме Хартогса (см., например, [60]) мероморфная функция $i \circ r \circ f$ на многообразии $V_{\Sigma_0}$ продолжается до функции на многообразии $V_{\Sigma'}$, поскольку многообразий $V_{\Sigma_0}$ и $V_{\Sigma'}$ отличается во множестве коразмерности $\geqslant 2$. Обозначим прообраз этой функции при проекции (4.11) через $F\colon \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}$. Функция $F$ инвариантна относительно действия группы $\pi^{-1}(H) \subset (\mathbb{C}^*)^m$ (см. (4.12)), в частности она инвариантна относительно действия подгруппы $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, порожденной умножением на любой из прообразов $\exp \boldsymbol{v} \in H$ при отображении $\pi$.

4. Из условия (1) на вектор $\boldsymbol{v}$ следует, что действие группы $\Gamma$ удовлетворяет условиям Примера 4.4.9 и фактор-пространство $= \mathcal{H} = (\mathbb{C}^m \backslash \{\boldsymbol{0}\})/\Gamma$ есть многообразие Хопфа, на котором корректно определена мероморфная функция $F$. Из условия (2) следует, что действие удовлетворяет условиям Следствия 4.5.8, тем самым функция $F$ постоянна на $\mathcal{H}$, а значит и исходная функция $f\colon M \dashrightarrow \mathbb{C}$ постоянна. □

Теорема 4.5.9 демонстрирует, что большая часть многообразий $M(\Sigma, \mathfrak{h})$, снабженных типичной комплексной структурой устроены с точки зрения бирациональной геометрии максимально "бедно" — на них не существует непостоянных мероморфных функций. В этом смысле они похожи на общие многообразия Хопфа (см. 4.5.8) и общие компактные комплексные торы $\mathcal{T}$. Как показывает следующий результат, это касается не только мероморфных функций — общие комплексные структуры на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ при условии слабой нормальности веера $q(\Sigma)$ содержат лишь конечное число аналитических подмножеств положительной размерности.

**Теорема 4.5.10.** *Для общей комплексной структуры на многообразии $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ верно, что если веер $q(\Sigma)$ слабо нормален, то все аналитические подмножества положительной размерности являются замыканиями $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбит.*

*Доказательство.* Далее считаем, что для всех наших комплексных структур веер $q(\Sigma)$ слабо нормален. В частности, определена трансверсально-кэлерова форма $\omega_{\mathcal{F}}$ (класса гладкости $C^1$).

Рассмотрим неприводимое аналитическое подмножество $Y \subset M$ минимальной возможной положительной размерности, проходящее через точку в отрытой плотной $T^m_{\mathbb{C}}/H$-орбите. Введем число

$$k = \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \dim_{\mathbb{C}}(T_{\boldsymbol{y}} Y \cap T_{\boldsymbol{x}} \mathcal{F}).$$

Тогда в общей точке $\boldsymbol{x} \in (T^m_{\mathbb{C}}/H) \cap Y$ размерность $\dim_{\mathbb{C}}(T_{\boldsymbol{x}} Y \cap T_{\boldsymbol{x}} \mathcal{F})$ тоже равна $k$, и множество

$$U_Y = \{\boldsymbol{y} \in Y \cap (T^m_{\mathbb{C}}/H) | \dim_{\mathbb{C}} T_{\boldsymbol{y}} Y \cap T_{\boldsymbol{y}} \mathcal{F} = k\}$$

является открытым плотным подмножеством $Y$. Покажем, что $\dim_{\mathbb{C}} Y > k > 0$. Если $k = 0$, мы приходим к противоречию путем рассмотрения интеграла $\int_Y (\omega_{\mathcal{F}}|_Y)^{\dim_{\mathbb{C}} Y}$ аналогично доказательству Теоремы 4.5.7. Если же $k = \dim Y$, аналитическое множество $Y$ содержится в листе слоения $\mathcal{F}$, который, согласно части (b) Следствия 4.5.5, изоморфен $\mathbb{C}^l$. Поскольку $Y$ компактно, это невозможно. Итак,

$$\dim_{\mathbb{C}} Y > k > 0.$$

Листы слоения $\mathcal{F}$ являются орбитами действия группы $(H \times H')/H$. Отождествим $\bar{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{h}})/\mathfrak{h}$ с алгеброй Ли группы $(H \times H')/H'$. Определим $\mathrm{ev}_{\boldsymbol{y}}\colon \bar{\mathfrak{h}} \to T_{\boldsymbol{y}} \mathcal{F}$ — отображение, отправляющее вектор $\boldsymbol{v} \in \bar{\mathfrak{h}}$ в вектор соответствующего фундаментального векторного поля.

Введем аналитическое подмножество $\widetilde{Y} \subset Y \times \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$, состоящее из всех таких пар $(\boldsymbol{y}, V) \in Y \times \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$, что $\mathrm{ev}_{\boldsymbol{y}}(V) \subset T_{\boldsymbol{y}}Y \cap T_{\boldsymbol{y}}\mathcal{F}$. Обозначим за $\pi_Y : \widetilde{Y} \to Y$ и $\pi_G : \widetilde{Y} \to \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$ естественные проекции. Отметим, что отображение $\pi_Y^{-1} : U_Y \to \pi_Y^{-1}(U_Y)$, является биекцией, поскольку $\dim_{\mathbb{C}} T_{\boldsymbol{y}}Y \cap T_{\boldsymbol{y}}\mathcal{F} = k$ при $\boldsymbol{y} \in U_Y$, то есть существует единственное такое $k$-мерное пространство $V \subset \overline{\mathfrak{h}}$, что $\mathrm{ev}(V) \subset T_{\boldsymbol{y}}Y \cap T_{\boldsymbol{y}}\mathcal{F}$. Аналитическое множество $\widetilde{Y}$, вообще говоря, приводимо и его неприводимые компоненты имеют разную размерность. Рассмотрим неприводимую компоненту $Y^* \subset \widetilde{Y}$, содержащую гладкую точку $\pi^{-1}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in U_Y$.

$$\mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}}) \xleftarrow{\pi_G} Y^* \xrightarrow{\pi_Y} Y.$$

Выберем $V \in \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$ и рассмотрим множество $\pi_Y \circ \pi_G^{-1}(V) \subset Y$. По теореме Реммерта, $\pi_Y \circ \pi_G^{-1}(V)$ аналитическое подмножество в $M$. Так как $Y \subset M$ аналитическое подмножество минимальной положительной размерности, возможны два случая:

1) Для всех $V \in \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$ множество $\pi_Y \circ \pi_G^{-1}(V) \subset Y$ кончено. Определим на $Y^*$ две дифференциальные формы: $\omega_Y = \pi_Y^* \omega_{\mathcal{F}}|_Y$ и $\omega_G = \pi_G^* \omega$, где $\omega$ — кэлерова форма на $\mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$. В силу нашего предположения, отображение $\pi_G : Y^* \to \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$ конечно в общей точке, следовательно форма $\omega_G$ положительна в общей точке. Форма $\omega_{\mathcal{F}}|_Y$ также невырождена по крайней мере в окрестности одной точки $\boldsymbol{y} \in U_Y$, поскольку $\omega_{\mathcal{F}}$ трансверсально-кэлерова относительно слоения $\mathcal{F}$, а $k < \dim_{\mathbb{C}} Y$, то есть $Y$ не лежит в листе слоения. Тогда форма $\omega_G^{\dim_{\mathbb{C}} Y - 1} \wedge \omega_Y$ неотрицательна всюду на $Y^*$ и положительна в точке $\pi_Y^{-1}(\boldsymbol{y})$, следовательно

$$\int_{Y^*} \omega_G^{\dim_{\mathbb{C}} Y-1} \wedge \omega_Y > 0.$$

С другой стороны, форма $\omega_Y$ точна, а форма $\omega_G$ замкнута, поэтому форма $\omega_G^{\dim_{\mathbb{C}} Y-1} \wedge \omega_Y$ также точна и интеграл обязан обращаться в ноль. Противоречие.

2) Для некоторого $V \in \mathrm{Gr}(k,\overline{\mathfrak{h}})$ множество $\pi_Y \circ \pi_G^{-1}(V) \subset Y$ совпадает с $Y$. В этом случае, в каждой точке аналитическое множество $Y$ касается направления $\mathrm{ev}_{\boldsymbol{y}}(V) \subset T_{\boldsymbol{y}}\mathcal{F}$. Следовательно $Y$ содержит орбиты группы $\exp V \subset H'/(H \cap H')$. Докажем, что аналитическое замыкание орбиты группы $\exp V$ есть все многообразие $M$. Пусть $\pi_H : H \times H' \to (H \times H')/H$ — естественная проекция. Рассмотрим группу $G := \pi^{-1}(\overline{\exp V}) \subset T_{\mathbb{C}}^m$, где $\overline{\exp V}$ — замыкание группы $\exp V$ в $T_{\mathbb{C}}^m/H$. Пусть $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда (1) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, так как $H \subset \ker \pi_H \subset G$; (2) $\mathfrak{g} \cap \overline{\mathfrak{h}} \neq \{\boldsymbol{0}\}$, так как $V \subset \overline{\mathfrak{h}}$ и $V \subset \mathfrak{g}$; (3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}) = \mathrm{rk}(\mathfrak{g} \cap N)$, так как $G \cap T^m$ есть подтор в $T^m$. Следовательно комплексное подпространство $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условиям (1)-(3) Леммы 4.5.4, поэтому для общего выбора $\mathfrak{h}$ алгебра $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Тем самым $G = T_{\mathbb{C}}^m$, поэтому $Y$ совпадает со всем многообразием $M$.

Итак, единственным аналитическим множеством, проходящем через точку в отрытой $T_{\mathbb{C}}^m/H$-орбите является все многообразие $M$. Если же аналитическое подмножество $Y \subset M$ не пересекает открытую $T_{\mathbb{C}}^m/H$-орбиту, повторим доказательство, рассмотрев вместо $M$ подмногообразие $M_1 = \overline{(T_{\mathbb{C}}^m/H)\boldsymbol{y}}$, где $\boldsymbol{y} \in Y$. □

*Замечание.* Теоремы 4.5.9 и 4.5.10 описывают мероморфные функции и аналитические подмножества общих комплексных структур на многообразиях $M(\Sigma, \mathfrak{h})$ только при дополнительных технических ограничениях (условие того, что веер $\Sigma$ линейно порождает $\mathfrak{t}$ и условие слабой нормальности веера $q(\Sigma)$, соответственно). Мы рассчитываем, что и в отсутствии этих условий компактные комплексные многообразия, снабженные общей структурой, все-равно содержат лишь конечное число аналитических подмножеств, и, как следствие, допускают лишь постоянные мероморфные функции.

# Список литературы


1. Audin M. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Birkhäuser, Basel, 1991.
2. Avramov L., Buchweitz R. Lower bounds for Betti numbers // Compositio Math. 1993. Vol. 86. P. 147–158.
3. Bahri A., Bendersky M., Cohen F. R., Gitler S. Operations on Polyhedral products and a new topological construction of infinite families of toric manifolds // Preprint. 2010. arXiv:1011.0094.
4. Batyrev V. Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties // J. Algebraic Geom. 1993. no. 3. P. 493–535. arXiv:alg-geom/9310003.
5. Bosio F., Meersseman L. Real quadrics in $C^n$, complex manifolds and convex polytopes // Acta Math. 2006. Vol. 197;1. P. 53–127.
6. Brun M., Römer T. Betti numbers of $\mathbb{Z}^n$-graded modiles // Communications in Algebra. 2004. Vol. 32:12. P. 4589–4599.
7. Brylinski J.-L. Eventails et variétés toriques // Lecture Notes in Math. 1980. Vol. 777. P. 247–288.
8. Buchsbaum D., Eisenbud D. Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3 // Amer. J. Math. 1977. Vol. 99, no. 3. P. 447–485.
9. Buchstaber V., Ray N. Flag manifolds and the Landweber–Novikov algebra // Geom. Topol. 1998. Vol. 2. P. 79–101.
10. Buchstaber V. M., Panov T. E. Torus actions and their applications in topology and combinatorics. Univ. Lecture Ser., AMS, 2002. Vol. 24.
11. Buchstaber V. M., Panov T. E., Ray N. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds // Mosc. Math. J. 2007. Vol. 7, no. 2. P. 219–242.
12. Buchstaber V. M., Ray N. Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes // Int. Math. Res. Not. 2001. no. 4. P. 193–219.
13. Calabi E., Eckmann B. A class of compact complex manifolds which are not algebraic // Annals of Mathematics. 1953. Vol. 58. P. 494–500.
14. Charalambous H. Betti Numbers of Multigraded Modules // Journal of Algebra. 1991. Vol. 137. P. 491–500.
15. Conner P. E. On the action of a finite group on $S^n \times S^n$ // Ann. of Math. 1957. Vol. 66. P. 586–588.
16. Cox D. A. The homogeneous coordinate ring of a toric variety // J. Algebraic Geometry. 1995. Vol. 4. P. 17–50.
17. Davis M. W., Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. Vol. 62, no. 2. P. 417–451.
18. Deligne P., Griffiths P., Morgan J., Sullivan D. Real homotopy theory of Kähler manifolds // Invent. Math. 1975. Vol. 29:3. P. 245–274.
19. Delzant T. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment // Bulletin de la Société Math. de France. 1988. Vol. 116, no. 3. P. 315–339. URL: `http://eudml.org/doc/87558` (дата обращения: 04.06.2014).
20. Demailly J.-P. Complex Analytic and Differential Geometry. A book project. URL: `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr//~demailly/manuscripts/agbook.pdf` (дата обращения: 04.06.2014).
21. Erman D. A special case of the Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks rank conjecture // Math. Res. Lett. 2010. Vol. 17, no. 06. P. 1079–1089.
22. Evans E. G., Griffith P. The syzygy problem // Ann. of Math. 1981. Vol. 114:2. P. 323–333.
23. Evans E. G., Griffith P. Binomial behavior of Betti numbers for modules of finite length // Pacific J. Math. 1988. Vol. 133. P. 267–276.
24. Félix Y., Halperin S., Thomas J. Rational Homotopy Theory. Springer-Verlag, 2001.
25. Félix Y., Oprea J., Tanré D. Algebraic Models in Geometry. Oxford University Press, 2008.
26. Fulton W. Introduction to toric varieties. Annals of mathematics studies. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
27. Gauduchon P., Ornea L. Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces // Ann. Inst. Fourier. 1998. Vol. 48, no. 4. P. 1107–1127.
28. Gitler S., López de Medrano S. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // Preprint. 2009. arXiv:0901.2580.
29. Grbić J., Panov T., Theriault S., Wu J. The homotopy types of moment-angle complexes fo flag complexes // Preprint. 2013. arXiv:1211.0873.
30. Grbić J., Theriault S. The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes // Advances in Mathematics. 2013. Vol. 245. P. 690–715.
31. Halperin S. Rational homotopy and torus actions // London Math. Soc. Lecture Notes. 1985. Vol. 93. P. 293–306.
32. Hartshorne R. Algebraic Geometry. Springer-Verlag, 1977.
33. Hartshorne R. Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list // Topology. 1979. Vol. 18, no. 2. P. 117–128.
34. Hochster M. Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes // Ring theory, II // Lecture

Notes in Pure Appl. Math. 1977. Vol. 26. P. 171–223.
35. Hopf H. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten // Studies and Essays, Interscience Publishers, Inc., New York. 1948. P. 167–185.
36. Huybrechts D. Complex Geometry: An Introduction. Springer, 2006.
37. Ishida H. Complex manifolds with maximal torus actions // Preprint. 2013. arXiv:1302.0633.
38. Ishida H., Karshon Y. Completely integrable torus actions on complex manifolds with fixed points // to appear in Mathematical Research Letters. 2012. arXiv:1203.0789.
39. Lee J. M. Introduction to smooth Manifolds. Springer-Verlag, New York, 2000.
40. Loeb J.-J., Nicolau M. On the complex geometry of a class of non-Kählerian manifolds // Israel J. Math. 1999. Vol. 110. P. 371–379.
41. López de Medrano S. Topology of the intersection of quadrics in $R^n$ // Lecture Notes in Math. 1989. Vol. 1370. P. 280–292.
42. López de Medrano S., Verjovsky A. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds // Bol. Soc. Mat. Brasil. 1997. Vol. 28. P. 253–269.
43. Meersseman L. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension // Math. Ann. 2009. P. 79–115.
44. Meersseman L., Verjovsky A. Holomorphic principal bundles over projective toric varieties // J. Reine Angew. Math. 2004. Vol. 572. P. 57–96.
45. Morimoto A. Noncompact complex abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123. P. 200–228.
46. Neisendorfer J., Taylor L. Dolbeault homotopy theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 245. P. 183–210.
47. Ornea L., Verbitsky M. Locally conformally Kähler manifolds with potential // Math. Ann. 2010. Vol. 348. P. 25–33.
48. Panov T., Ustinovsky Y. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds // Mosc. Math. J. 2012. Vol. 12, no. 1. P. 149–172. arXiv:1008.4764.
49. Panov T., Ustinovsky Y., Verbitsky M. Complex geometry of moment-angle manifolds // Preprint. 2013. arXiv:1308.2818.
50. Pommersheim J. Toric varieties, lattice points and Dedekind sums // Math. Ann. 1993. Vol. 295. P. 1–24.
51. Puppe V. Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture // Georgian Mathematical Journal. 2009. Vol. 16, no. 2. P. 369–379.
52. Stanley R. P. Combinatorics and Commutative Algebra. Birkhäuser, Boston, 1996. Vol. 41.
53. Vallïres D. Connected abelian complex Lie groups and number fields // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2012. Vol. 24:1. P. 201–229.
54. Айзенберг А. А. Экспоненциальный закон для $K$-степени // Успехи метем. наук. 2009. Т. 64, № 4(388). С. 175–176.
55. Айзенберг А. А. Подстановки многогранников, симплициальных комплексов и мультиградуированные числа Бетти // Тр. ММО. 2013. Т. 74, № 2. С. 211–245.
56. Баскаков И. В. Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов // Успехи метем. наук. 2013. Т. 58, № 5.
57. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. Наука, Москва, 1980.
58. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра // Успехи метем. наук. 2000. Т. 55, № 5. С. 825–921.
59. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. МЦНМО, Москва, 2004.
60. Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии. Мир, Москва, 1982.
61. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // Успехи метем. наук. 1978. Т. 33. С. 85–134.
62. Кустарев А. А. Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях // Труды МИАН. 2009. Т. 266. С. 140–148.
63. Миронов А. Е., Панов Т. Е. Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях // Успехи метем. наук. 2013. Т. 68, № 2. С. 203–204.
64. Миронов А. Е., Панов Т. Е. Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения // Функц. анализ и его прил. 2013. Т. 47, № 1. С. 47–61.
65. Спеньер Э. Алгебраическая топология. Мир, Москва, 1971.
66. Устиновский Ю. М. Операция удвоения многогранников и действия тора // Успехи метем. наук. 2009. Т. 64, № 5(389). С. 181–182. arXiv:0909.1050.
67. Устиновский Ю. М. Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 300–305. arXiv:0909.1053.
68. Устиновский Ю. М. О почти свободных действиях тора и гипотезе Хоррокса // Дальневост. матем. журн. 2012. Т. 12, № 1. С. 98–107. arXiv:1203.3685.
69. Устиновский Ю. М. Геометрия компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора // Труды МИАН. 2014. Т. 3.
70. Устиновский Ю. М. О моделях колец когомологий пространств с действием тора // Успехи метем. наук.

2014. Т. 69, № 4(418).
71. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. Мир, Москва, 1973.
72. Циглер Г. Теория многогранников. МЦНМО, Москва, 2014.