ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2018, том 82, № 11, с. 1496–1499

УДК 535.8:517.958

ДВУМЕРНАЯ ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА ЗАХАРОВА–БЕННИ

© 2018 г. С. В. Сазонов[1, *], Н. В. Устинов[1]
[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Рассмотрен процесс генерации терагерцевого излучения оптическими импульсами в условиях квазирезонанса в среде несимметричных квантовых частиц. Выведена система нелинейных волновых уравнений, описывающая этот процесс в неколлинеарном случае, когда направление фазовой скорости оптических импульсов не совпадает с направлением излучения терагерцевого импульса. Изучены различные типы решений выведенной системы уравнений.

DOI: 10.1134/S0367676518110224

ВВЕДЕНИЕ

Большое число задач нелинейной оптики диспергирующих сред приводит к оптическим солитонам [1]. При этом можно выделить резонансные, нерезонансные и квазирезонансные солитоны. В первом случае несущая частота солитона близка к частоте одного из разрешенных квантовых переходов настолько, что спектр импульса за счет своей конечной длительности захватывает его. Во втором случае несущая частота далека от всех линий резонансного поглощения среды. В третьем случае абсолютная величина отстройки несущей частоты солитона от ближайшей к ней частоты разрешенного перехода значительно меньше обеих частот, но в то же время она настолько велика, что спектр импульса практически не захватывает рассматриваемый переход.

Поляризационный отклик среды на воздействие нерезонансного или квазирезонансного импульса можно представить в виде аддитивного разложения по степеням электрического поля и его производным. Эти степени в оптически изотропной среде будут нечетными. В таком случае минимальная степень нелинейности равна трем. При учете в минимальных порядках нелинейности и групповой дисперсии распространение импульса в оптически изотропной среде описывается нелинейным уравнением Шредингера как в нерезонансном [1, 2], так и в квазирезонансном случаях [3]. Это уравнение имеет решения в виде солитонов и интегрируемо методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4–6].

В случае анизотропных сред минимальная нелинейность в разложении отклика среды по степеням электрического поля импульса уже будет квадратичной. Если ограничиться минимальными нелинейностью и порядком групповой дисперсии оптического импульса, то при выполнении условия резонанса Захарова–Бенни [5] генерацию терагерцевого излучения оптическими импульсами в коллинеарном режиме в анизотропных средах можно описать с помощью системы уравнений Ядзимы–Ойкавы (ЯО) [7, 8]. Эта система тоже интегрируема с помощью МОЗР [9].

Анизотропия среды, необходимая для появления квадратичной оптической нелинейности, может быть создана вкраплением в изотропную среду несимметричных квантовых объектов (НКО), обладающих в стационарных квантовых состояниях постоянными дипольными моментами. При рассмотрении квазирезонансного взаимодействия оптических импульсов с НКО были получены в [10, 11] системы уравнений, обобщающие систему ЯО на случай двух коротковолновых компонент. При этом считалось, что оптические импульсы и терагерцевое излучение распространялись при выполнении условий резонанса Захарова–Бенни коллинеарно. Целью настоящей работы является обобщение этих результатов на случай неколлинеарного распространения, когда направление фазовой скорости оптических импульсов не совпадает с направлением излучения терагерцевого импульса.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работе [11] при исследовании генерации терагерцевого излучения двухкомпонентными ультракороткими оптическими импульсами, распространяющимися в условиях квазирезонанса в среде трехуровневых аксиально-симметричных НКО, была выведена следующая система уравнений

$$i\frac{\partial\Phi_o}{\partial y} = -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\Phi_o}{\partial\tau^2} - 2\alpha\left(\left|\Phi_e\right|^2 + \left|\Phi_o\right|^2\right)\Phi_o + \\ + \alpha U\Phi_o + \frac{c}{2n_{opt}\omega}\Delta_\perp\Phi_o, \quad (1)$$

$$i\frac{\partial\Phi_e}{\partial y} = -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial\tau^2} - 2\alpha\left(\left|\Phi_e\right|^2 + \left|\Phi_o\right|^2\right)\Phi_e + \\ + \alpha U\Phi_e + \frac{c}{2n_{opt}\omega}\Delta_\perp\Phi_e, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\beta\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left|\Phi_e\right|^2 + \left|\Phi_o\right|^2\right) + \frac{c}{2n_T}\Delta_\perp\int\limits_{-\infty}^{t} Udt'. \quad (3)$$

где Φ_o и Φ_e — огибающие обыкновенной и необыкновенной оптических компонент, U — поле терагерцевой составляющей, k_2 — параметр дисперсии групповой скорости, коэффициенты α и β выражаются через физические параметры задачи, $\tau = t - y/\upsilon_g = t - n_T y/c$, c — скорость света в вакууме, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — поперечный лапласиан, n_{opt} и n_T — оптический и терагерцевый показатели преломления кристаллической матрицы, ω — несущая частота оптических компонент.

Рассмотрим класс решений системы (1)–(3), для которого справедливо следующее представление:

$$\Phi_o = \varphi_o e^{i(\Omega\tau - \kappa_x x - \kappa_y y)}, \\ \Phi_e = \varphi_e e^{i(\Omega\tau - \kappa_x x - \kappa_y y)}, \quad (4)$$

где Ω, κ_x и κ_y — вещественные параметры такие, что выполняется соотношение

$$\kappa_y = \frac{k_2\Omega^2}{2} - \frac{c\kappa_x^2}{2n_{opt}\omega}. \quad (5)$$

Также при этом будем считать, что φ_o и φ_e — медленно меняющиеся огибающие, а поле U распространяется преимущественно вдоль оси y. Тогда система уравнений (1)–(3) в случае сильной анизотропии сводится к следующей системе:

$$i\frac{\partial\varphi_o}{\partial y_1} = -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\varphi_o}{\partial\tau_1^2} + \alpha U\varphi_o, \quad (6)$$

$$i\frac{\partial\varphi_e}{\partial y_1} = -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial\tau_1^2} + \alpha U\varphi_e, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = -\beta\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\left|\varphi_e\right|^2 + \left|\varphi_o\right|^2\right) - \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad (8)$$

где из соображений удобства введены новые переменные

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2n_{opt}\omega}{c\kappa_x}x + y, \\ y_1 = y, \\ \tau_1 = \tau - \dfrac{2k_2 n_{opt}\omega\Omega}{c\kappa_x}x. \end{cases} \quad (9)$$

Полученная система уравнений представляет собой двумерное обобщение двухкомпонентной системы ЯО, тоже интегрируемое в рамках МОЗР, как и исходная система ЯО. Эквивалентная система уравнений была выведена в [12] в модельной задаче о взаимодействии трех диспергирующих волн с помощью метода редуктивных возмущений в случае, когда две волны распространяются в области аномальной дисперсии, а третья волна — в области нормальной дисперсии. Пенлеве-анализ этой системы был выполнен в [13], где также были получены решения дромионного типа. Ее светлые многосолитонные решения были построены с помощью метода Хироты в [12] и в [14] в виде детерминантов Вронского и Грама.

РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ЯО

Система уравнений (6)–(8) является условием совместности переопределенных систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2} = \dfrac{2i}{k_2}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1} + \dfrac{2\alpha}{k_2}U\psi_1, \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\tau_1} = \dfrac{\alpha\beta}{k_2}\varphi_o^*\psi_1, \\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial\tau_1} = \dfrac{\alpha\beta}{k_2}\varphi_e^*\psi_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1} = -\varphi_o\psi_2 - \varphi_e\psi_3 - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_1} = \dfrac{i\alpha\beta}{2}\left(\varphi_o^*\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t_1} - \dfrac{\partial\varphi_o^*}{\partial t_1}\psi_1\right), \\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y_1} = \dfrac{i\alpha\beta}{2}\left(\varphi_e^*\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t_1} - \dfrac{\partial\varphi_e^*}{\partial t_1}\psi_1\right), \end{cases} \quad (11)$$

где $\psi_1 = \psi_1(x_1, y_1, \tau_1)$, $\psi_2 = \psi_2(x_1, y_1, \tau_1)$ и $\psi_3 = \psi_3(x_1, y_1, \tau_1)$ – решение систем (10) и (11).

Пусть $\chi_1 = \chi_1(x_1, y_1, \tau_1)$, $\chi_2 = \chi_2(x_1, y_1, \tau_1)$ и $\chi_3 = \chi_3(x_1, y_1, \tau_1)$ – некоторое решение переопределенных систем (10), (11). Тогда дифференциальная 1-форма

$$d\delta(\chi,\psi) = \delta_1(\chi,\psi)dx_1 + \\ + \delta_2(\chi,\psi)dy_1 + \delta_3(\chi,\psi)d\tau_1, \tag{12}$$

где использованы обозначения

$$\delta_1(\chi,\psi) = \frac{ik_2}{2}\left(\frac{\partial\chi_1^*}{\partial\tau_1}\psi_1 - \chi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}\right) - \\ - \frac{k_2}{\alpha\beta}(\chi_2^*\psi_2 + \chi_3^*\psi_3),$$

$$\delta_2(\chi,\psi) = \frac{ik_2}{2}\left(\chi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1} - \frac{\partial\chi_1^*}{\partial\tau_1}\psi_1\right),$$

$$\delta_3(\chi,\psi) = \chi_1^*\psi_1,$$

является замкнутой, т.е. интеграл по контуру Γ, соединяющему точки (x_0, y_0, τ_0) и (x_1, y_1, τ_1), следующего вида

$$\delta(\chi,\psi) = \int_\Gamma d\delta(\chi,\psi) \tag{13}$$

зависит только от начальной и конечной точек и не зависит от конкретного выбора контура Γ.

Для построения решений системы уравнений (6)—(8) будем использовать технику преобразования Дарбу [15]. Можно показать, что переопределенные системы линейных уравнений (10) и (11) ковариантны относительно преобразования Дарбу $(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\varphi_o,\varphi_e,U) \to (\tilde\psi_1,\tilde\psi_2,\tilde\psi_3,\tilde\varphi_o,\tilde\varphi_e,\tilde U)$, в котором преобразованные величины определены следующим образом:

$$\tilde\psi_j = \psi_j - \frac{\delta(\chi,\psi)}{\delta(\chi,\chi)}\chi_j \ (j = 1,2,3), \tag{14}$$

$$\tilde\varphi_o = \varphi_o - \frac{k_2}{\alpha\beta}\frac{\chi_1\chi_2^*}{\delta(\chi,\chi)}, \tag{15}$$

$$\tilde\varphi_e = \varphi_e - \frac{k_2}{\alpha\beta}\frac{\chi_1\chi_3^*}{\delta(\chi,\chi)}, \tag{16}$$

$$\tilde U = U - \frac{k_2}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2}\ln\delta(\chi,\chi). \tag{17}$$

Преобразованные величины $\tilde\varphi_o$, $\tilde\varphi_e$ и $\tilde U$ дают новое (“одетое”) решение системы (6)—(8). Итерации преобразования Дарбу (14)—(17) дают новые решения системы (6)—(8), выражающиеся через детерминанты, содержащие интегралы вида (13) от замкнутых дифференциальных форм, определенных на решениях переопределенных систем (10), (11).

Возьмем в качестве исходного решения системы (6)—(8) нулевой фон: $\varphi_o = \varphi_e = U = 0$. В этом случае решение переопределенных систем (10), (11) можно выбрать в виде

$$\chi_1 = e^\delta,\ \chi_2 = f_1(x_1),\ \chi_3 = f_2(x_1), \tag{18}$$

где $\delta = \lambda t - \frac{i}{2}k_2\lambda^2(x_1 - y_1)$, $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, λ_R и λ_I — вещественные постоянные, $f_1(x_1)$ и $f_2(x_1)$ — произвольные функции. Тогда имеем

$$\delta(\chi,\chi) = \frac{1}{2\lambda_R}e^{\delta+\delta^*} - \frac{k_2}{\alpha\beta}\int(|f_1(x_1)|^2 + \\ + |f_2(x_1)|^2)dx_1 + \mathrm{const}. \tag{19}$$

Подстановка выражений (18), (19) в формулы преобразования Дарбу (15)—(17) дает решение системы (6)—(8). Если $f_1(x_1) \sim f_2(x_1) \sim \exp(\varepsilon x_1)$ и const = 0, то это решение представляет собой плоский светлый солитон. Условие $\varepsilon = k_2\lambda_R\lambda_I$ дает солитоны одномерного случая. Если $f_1(x_1) \sim f_2(x_1) \sim \sim 1/\cosh(\varepsilon x_1)$ и const = 0, то решение системы (6)—(8) имеет локализованные коротковолновые компоненты, распространяющиеся вдоль оси x_1.

Пусть исходным решением системы (6)—(8) является постоянный фон: $\varphi_o = a_o$, $\varphi_e = a_e$, где a_o и a_e — вещественные постоянные, $U = 0$. Тогда решение переопределенных систем (10), (11) можно выбрать в виде

$$\chi_1 = \left(t - ik_2\lambda(x_1 - y_1) + \frac{\alpha\beta(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2\lambda^2}\right)e^\Delta, \tag{20}$$

$$\chi_2 = \frac{\alpha\beta a_o}{k_2\lambda}\times \\ \times\left(t - i\lambda k_2(x_1 - y_1) + \frac{\alpha\beta(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e^\Delta + \\ + a_e f(x_1), \tag{21}$$

$$\chi_3 = \frac{\alpha\beta a_e}{k_2\lambda}\times \\ \times\left(t - ik_2\lambda(x_1 - y_1) + \frac{\alpha\beta(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e^\Delta - \\ - a_o f(x_1), \tag{22}$$

где $\Delta = \lambda t - \frac{i}{2}k_2\lambda^2(x_1 - y_1) - \frac{\alpha\beta(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2\lambda}$, $f(x_1)$ — произвольная функция. В этом случае имеем

$$\delta(\chi,\chi) = \frac{1}{2\lambda_R^3}\left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \frac{1}{4}\right]e^{\Delta+\Delta^*} - \\ - \frac{k_2(a_o^2 + a_e^2)}{\alpha\beta}\int|f(x_1)|^2dx_1 + \mathrm{const}, \tag{23}$$

где

$$\delta_1 = \lambda_R t + k_2\lambda_R\lambda_I(x_1 - y_1) + \\ + \frac{\alpha\beta\lambda_R(\lambda_R^2 - \lambda_I^2)(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2|\lambda|^4} - \frac{1}{2},$$

$$\delta_2 = \lambda_R^2\left(k_2(x_1 - y_1) + \frac{\alpha\beta\lambda_I(a_o^2 + a_e^2)x_1}{k_2|\lambda|^4}\right).$$

Подстановка выражений (20)–(23) в формулы преобразования Дарбу (15)–(17) дает решение системы (6)–(8). Это решение будет локализованным для всех компонент импульса, если положить $f(x_1) = 0$ и const $= 0$ (см. [16]). Такого рода решения называют в теории солитонов лампами (“lump” анг. — ком, шишка). Если const $\neq 0$, то решение представляет собой темный плоский солитон.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена система нелинейных волновых уравнений, описывающая генерации терагерцевого излучения в условиях неколлинеарного распространения, когда направления фазовых скоростей оптических компонент образуют угол с направлением излучения терагерцевого импульса. С помощью техники преобразования Дарбу получены решения, содержащие произвольные функции. Эти решения описывают в частных случаях распространение светлых и темных плоских солитонов и локализованных решений (лампов).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00453а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
2. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.
3. *Башаров А.М., Маймистов А.И.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. С. 428.
4. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
6. *Фаддеев Л.Д.* // УФН. 2013. Т. 183. С. 487.
7. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. № 12. С. 746; ЖЭТФ. 2003. Т. 123. № 6. С. 1160.
8. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* // КЭ. 2005. Т. 35. № 11. С. 1019.
9. *Yadjima N., Oikawa M.* // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. № 6. P. 1719.
10. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. № 8. С. 651.
11. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. № 5. С. 842.
12. *Ohta Y., Maruno K., Oikawa M.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 7659.
13. *Radha R., Kumar C.S., Lakshmanan M., Gilson C.R.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. P. 102002.
14. *Kanna T., Vijayajayanthi M., Sakkaravarthi K., Lakshmanan M.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. P. 115103.
15. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformations and Solitons. Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 1991.
16. *Chen J., Chen Y., Feng B.F., Maruno K.I.* // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 1510.