МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Полосин Алексей Андреевич

Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
академик РАН, профессор
Моисеев Евгений Иванович

Москва – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел Страница

Введение …….. 3

Глава 1. Краевые задачи с отходом от характеристики
для уравнения Геллерстедта ……. 24

§ 1. Задача с гладким отходом от характеристики ……. 24

§ 2. Задача с отходом от характеристики параллельно линии изменения
типа уравнения …….. 46

Глава 2. Задачи с наклонной производной в двумерных областях …….. 61

§ 1. Задача с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в круге …… 61

§ 2. Смешанная задача с наклонной производной для уравнения
Гельмгольца в полукруге …….. 73

§ 3. Расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа
в полукруге ……. 86

§ 4. Расположение спектра и отсутствие свойства базисности у системы
корневых функций задачи с наклонной производной с переменным
углом наклона ……...… 101

Глава 3. Интегральные уравнения …….. 110

§ 1. Асимптотика спектра и собственных функций оператора свертки
на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией ……. 110

§ 2. Решение одного сингулярного интегрального уравнения
с некарлемановским сдвигом …….. 125

§ 3. Решение в квадратурах одного сингулярного интегрального уравнения …….. 133

§ 4. Асимптотическое решение одной системы уравнений Винера-Хопфа с
кусочно-постоянными образами ядер …… 140

§ 5. Некоторые интегральные преобразования решений задач сопряжения …….. 149

§ 6. Решение в квадратурах одной системы сингулярных интегральных
уравнений …….. 160

Заключение …… 167

Список литературы ……... 168

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и ее разработанность в литературе. Уравнениями смешанного типа называются уравнения в частных производных, которые принадлежат разным типам в разных частях рассматриваемой области. Например, в одной части области уравнение может принадлежать эллиптическому, а в другой – гиперболическому типу; эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение вырождается в параболическое или не определено.

Постановка краевых задач для уравнений смешанного типа отличается исключительным богатством и своеобразием.

В 1923 г. Ф. Трикоми [174] рассмотрел краевую задачу для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0\,, \tag{1}$$

впоследствии названного его именем, в области, ограниченной при $y > 0$ ляпуновской кривой Γ (с некоторыми ограничениями на поведение вблизи линии $y = 0$, которые впоследствии были значительно ослаблены), а при $y < 0$ – выходящими из концов этой кривой характеристиками уравнения (1); краевые условия при этом ставились на кривой Γ и на одной из характеристик. Решение должно было быть непрерывным в замыкании области, непрерывно дифференцируемым внутри нее и дважды непрерывно дифференцируемым в верхней (эллиптической) и нижней (гиперболической) подобластях; для первых производных решения допускались особенности интегрируемого порядка вблизи концов кривой Γ. Трикоми доказал существование и единственность решения поставленной задачи в указанном классе; при доказательстве существования он свел задачу к сингулярному интегральному уравнению.

Работа Трикоми, ставшая классической, положила начало теории краевых задач для уравнений смешанного типа.

Кроме того, Ф. Трикоми [174] и его ученица М. Чибрарио [193] показали, что общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными в случае одной линии параболического вырождения и некоторых ограничениях на коэффициенты можно записать в виде

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

(уравнение первого рода) или в виде

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

(уравнение второго рода), где m – натуральное число. Эти уравнения называются классическими уравнениями смешанного типа.

В конце 1930-х годов С. Геллерстедт предложил более общее, по сравнению с (1), уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0, \tag{2}$$

впоследствии названное его именем, а также поставил и исследовал новые краевые задачи для этого уравнения [195, 196].

Вопросы струйных течений газа при дозвуковых скоростях рассматривались в докторской диссертации С.А. Чаплыгина [182]. Уравнение

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3}$$

где $yK(y) > 0$, $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, называют уравнением Чаплыгина.

На момент своего появления работа Трикоми не нашла приложений и поэтому не привлекала особого внимания вплоть до конца 40-х – начала 50-х годов прошлого века, когда с появлением сверхзвуковых самолетов стал актуальным вопрос о математическом описании движения летательных аппаратов при транс- и сверхзвуковых скоростях. Выяснилось, что соответствующие нелинейные задачи могут быть при определенных допущениях (на т.н. плоскости годографа) сведены к линейным краевым задачам для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

С начала 1950-х годов началось бурное развитие теории краевых задач для уравнений смешанного типа, прежде всего в СССР и США. В работах М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, Л. Берса, М. Проттера, К. Моравец и других математиков были поставлены и решены многие задачи для уравнений смешанного типа; подробную библиографию по этим вопросам см. в [9], [34], [20], [62], [143].

Для описания явлений газовой динамики М.А. Лаврентьевым и А.В. Бицадзе было предложено более простое, по сравнению с (1)-(3), уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \tag{4}$$

получившее название уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Постановка краевых задач для этого уравнения сохраняет основные особенности общего случая, но дает возможность воспользоваться мощным инструментом – методами теории аналитических функций комплексного переменного. Отметим, что в случае, когда Γ – полуокружность, задача Трикоми для уравнения (4) решается в квадратурах.

А.В. Бицадзе [12] сформулировал и доказал принцип максимума для уравнения (4), применимый к широкому классу краевых задач для уравнений смешанного типа. П. Жермен и Р. Баде [197] распространили принцип максимума на уравнение (1).

Другим эффективным способом доказательства единственности является т.н. метод abc, применявшийся К. Моравец [211] и другими авторами.

Со временем были обнаружены и другие области применения уравнений смешанного типа [142], [114], [186], [183], [59]. Были поставлены и исследованы многие новые задачи для уравнений смешанного типа на плоскости, в частности, задачи со смещением, с отходом от характеристики, задачи Франкля, Бицадзе-Самарского, Геллерстедта.

Приведем постановки задачи Трикоми для уравнения (2) в классах регулярных и обобщенных решений, теоремы о ее однозначной разрешимости и важнейшие утверждения, применяемые при доказательстве этих теорем, из книги М.М. Смирнова [153].

Пусть D – область на плоскости, ограниченная простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками

$$AC:\xi = x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0,\ BC:\eta = x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=1$$

уравнения (2). Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$.

Задача Трикоми. Найти в области D решение уравнения (2), непрерывное в $\overline{D}$ и принимающее на кривой Γ и на одной из характеристик, например на AC $(\xi=0)$, заданные непрерывные значения

$$u|_{\Gamma}=\varphi(s),\ u|_{\xi=0}=\psi(\eta), \tag{5}$$

причем $\varphi(\ell)=\psi(0)$, где ℓ – длина кривой Γ.

На линии $y=0$ параболического вырождения уравнения (2) выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\lim_{y\to-0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\ 0<x<1.$$

Обозначим $\beta=m/(2m+4)$. Регулярным решением уравнения (2) в области D называется функция $u(x,y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y)\in C^2(D^+\cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (2) соответственно в областях D^+ и D^-;

3) функции

$$\nu(x)=\lim_{y\to0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

и $\tau'(x)$, где $\tau(x)=u(x,0)$, непрерывно дифференцируемы в $(0,1)$, причем $\nu(x)$ на концах этого интервала может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-2\beta$.

Обобщенным решением уравнения (2) в области D, принадлежащим классу R_1, называется функция $u(x,y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (2);

3) для любого $x\in(0,1)$ существует

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x);$$

4) в области D^- $u(x,y)$ представима в виде

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1\int_\xi^\eta\frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\tau(t)dt}{(\eta-t)^{1-\beta}(t-\xi)^{1-\beta}}-\gamma_2\int_\xi^\eta\frac{\nu(t)dt}{(\eta-t)^{\beta}(t-\xi)^{\beta}},$$

где $\nu(x)$ определяется из условия 3), а

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

5) функция $\tau(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1>1-\beta$ при $0\le t<1$, а функция $\nu(t)$ удовлетворяет условию $\alpha_2>\beta$ при $0\le t<1$.

Класс R_1 был введен К.И. Бабенко [2].

Принцип Заремба-Жиро. Пусть функция $u(x,y)\in C^2(D^+)\bigcap C(\overline{D}^+)$ удовлетворяет неравенству

$$y^m u_{xx}+u_{yy}\ge 0\ \ (\le 0)$$

в области D^+ и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в некоторой точке $(x_0,0)$ отрезка AB, причем значение $u(x,y)$ на кривой Γ меньше (больше), чем $u(x_0,0)$. Тогда

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}<0\ \ (>0)$$

при условии, что этот предел существует.

Принцип экстремума для задачи Трикоми. Решение $u(x,y)$ из класса R_1 задачи Трикоми для уравнения (2), равное нулю на характеристике AC, положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\overline{D}^+$ принимает на кривой Γ.

Из принципа экстремума непосредственно следует единственность решения задачи Трикоми.

Так как функция $a+bx+cy+dxy$ является решением уравнения (2), то без ограничения общности можно считать, что $u(A)=u(B)=0$.

Теорема 1 [153, с. 143]. Пусть выполнены следующие условия:

1) кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(s)$, $y=y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки B; функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на отрезке $[0,\ell]$, $x'^2(s)+y'^2(s)>0$, где ℓ – длина кривой Γ; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ существуют и удовлетворяют условию Гельдера на отрезке $[0;\ell]$; в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $|dx/ds|\le Cy^{m+1}(s)$, где C – постоянная;

2) функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, причем $|\varphi(s)|<C(\ell-s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)|<C's$;

3) функция $\psi(\eta)$ имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем δ при $0<\eta<1$.

Тогда в области D существует единственное решение уравнения (2), принадлежащее классу R_1, которое удовлетворяет краевым условиям (5).

Теорема 2 [153, с. 148]. Если кривая Γ совпадает с нормальной кривой $C_{1/2}$:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4},\ y\ge 0,$$

функция $\varphi_1(x)=\varphi(s)$ представима в виде $\varphi_1(x)=y^2\overline{\varphi}_1(x)$, где $\varphi_1(x)\in C[0,1]$, а функция $\psi(\eta)\in C^2[0,1]\cap\in C^{2,\delta}(0,1)$, то в области $D^+\cup(0,1)\cup D^-$ существует регулярное решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (5).

Если функция $\psi(\eta)$ имеет только ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем δ, то существует обобщенное решение задачи Трикоми, принадлежащее классу R_1.

Существование решения задачи Трикоми доказывается методом интегральных уравнений. Этот метод, применявшийся еще Ф. Трикоми, является одним из основных в теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Основная его идея заключается в том, что сначала решаются соответствующие задачи в верхней и нижней подобластях, а затем решения "склеиваются" вдоль линии изменения типа. При этом широко используются идеи и методы теории потенциала, фундаментальные решения, функция Римана и теория сингулярных интегральных уравнений. Подробное изложение метода и

его применение для решения многих классических задач для уравнений смешанного типа приведено в [152], [153].

Воспользовавшись альтернирующим методом Шварца, К.И. Бабенко [2, 4] распространил теорему существования на более широкий класс областей, сняв ограничение на подход кривой Γ к угловым точкам.

Наряду с классической задачей Трикоми рассматривают также задачу с отходом от характеристики, когда область D^- ограничена нехарактеристической кривой $\gamma = AC$, отходящей от характеристики внутрь области, и характеристикой BC; краевое условие при этом ставится на γ. Эту задачу называют также обобщенной задачей Трикоми, или задачей М.

Впервые задачу М на плоскости годографа для уравнения (3) поставил Ф.И. Франкль [178] в 1945 г. при изучении основной задачи теории сопла Лаваля. В 1951 г. он доказал существование решения задачи М для уравнения (1) [179] в случае, когда кривая Γ является «нормальной» кривой в смысле Трикоми и кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой, выходящей из точки A, и близка к ней.

К.И. Бабенко [2] для уравнения (3) при следующих условиях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma:\ (1-x)dy + ydx \le 0,\ \gamma:\ 0 \ge dy/dx \ge -1/\sqrt{-K(y)},$$

доказал единственность решения задачи М. Используя теорему единственности, он методом интегральных уравнений, опираясь на ограниченность сингулярных интегральных операторов в пространстве L_p с весом, показал разрешимость задачи М при условии, когда γ – гладкая кривая, Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B удовлетворяет условию ортогональности $|dx/ds| \le Cy^2(s)$, $C = \text{const} > 0$.

А.В. Бицадзе [13-15] впервые исследовал задачу М для уравнения (4). Он доказал единственность ее решения при следующих ограничениях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma:\ \left(x - x^2 - y^2\right)\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} \ge 0, \tag{6}$$

$\gamma:\ y = -\alpha(x),\ \alpha(0) = 0,\ \alpha(x) > 0$ при $x > 0$,

$$0 < \alpha'(x) \le 1,\ \alpha'(x) \le \alpha(x)/\left(x - x^2 + \alpha^2\right). \tag{7}$$

Опираясь на теорему единственности, А.В. Бицадзе доказал существование решения задачи М, когда кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой,

выходящей из точки A, а кривая Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B оканчивается дугами нормальной полуокружности.

М. Проттер [222] в 1954 г. рассмотрел задачу М для уравнения (3) и наметил способ доказательства существования ее решения, сохраняя известные ограничения Трикоми [174] на кривую Γ и предполагая, что кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой.

В 1954 г. К. Моравец [211] предложила т.н. метод *abc* доказательства единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

А.П. Солдатов [154, 155] методами теории аналитических функций доказал единственность и существование регулярного решения задачи М для уравнения (4), сняв ограничение (6) на кривую Γ и заменив условие (7) на кривую γ на следующее:

$$0<\alpha'(0)<1,\ \alpha'(x)\geq\alpha(x)/x.$$

В 1990-е А.П. Солдатов предложил новые корректные постановки смешанных задач для уравнения (4). В частности, он [158, 159] доказал теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения (4) в смешанной области, ограниченной при $y>0$ и $y<0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в угловых точках, при этом дуга при $y<0$ лежит внутри характеристического треугольника.

Задачи с отходом от характеристики рассматривались также в монографии Л.В. Овсянникова [109].

Краевая задача с нехарактеристическим участком границы, параллельным линии изменения типа уравнения, на котором ставится условие Дирихле, была рассмотрена в кандидатской диссертации автора; предложенный подход активно развивается М. Мирсабуровым и его соавторами [73-77].

В монографии А.М. Нахушева [105] рассмотрены краевые и внутренне-краевые задачи со смещением для основных типов локальных и нелокальных уравнений в частных производных. Теория таких задач интенсивно развивается с конца 1960-х гг.

Многие важные достижения теории уравнений смешанного типа нашли свое отражение в монографии А.Г. Кузьмина [62]. В частности, в ней рассмотрены т.н. неклассические уравнения смешанного типа, когда характеристики пересекают линию (или линии) изменения типа несколько раз; дана качественная картина поведения характеристик уравнения смешанного типа в случае двух независимых переменных; исследована разрешимость краевых задач в пространствах Соболева; изучены неклассические модельные уравнения типа Лаврентьева-Бицадзе; даны приложения

рассмотренных методов и результатов к задачам газовой динамики, в частности, к прямой задаче теории сопла Лаваля.

В 1954 г. М. Проттер [223, 224] предложил некоторые многомерные аналоги краевых задач для уравнений смешанного типа. Впоследствии выяснилось, что эти задачи не обладают свойством нетеровости. Многомерный случай оказался весьма сложным, и даже вопрос о корректной постановке краевых задач остается открытым. В последнее время многомерные задачи активно исследуются Н. Попивановым и его школой [217-220]; отметим также работы [96, 207-209].

Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 1970-х годов. В 1977 г. Т.Ш. Кальменов [46] доказал,что однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром λ

$$-\operatorname{sgn} y\, u_{xx} - u_{yy} = \lambda u$$

имеет положительное собственное число λ и неотрицательную собственную функцию

$$u(x, y) \in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right) \cap C^{1+\alpha}(D) \cap C^{2}\left(D^{+}\right) \cap C^{2}\left(D^{-}\right),\ 0 < \alpha < 1/2\,.$$

С.М. Пономарев [132, 133] впервые выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области, являющейся круговым сектором. Е.И. Моисеев доказал базисность этой системы в эллиптической части области и, опираясь на свойство базисности, разработал спектральный метод решения краевых задач для уравнения смешанного типа.

Разложения решений в биортогональные ряды, которые можно вывести из общей формулы при решении задачи в квадратурах, применялись еще А.В. Бицадзе. В работах Е.И. Моисеева эти методы вышли на качественно новый уровень. Доказанная им теорема о базисности системы негармонических синусов [87] позволила строить решения широкого класса задач, в том числе со спектральным параметром, для уравнений смешанного типа путем разложения в биортогональные ряды. Эта тематика продолжает активно развиваться Е.И. Моисеевым и его учениками [92], [93], [97-100], [206], [210]. Отметим, что задачи со спектральным параметром естественным образом возникают при решении трехмерных задач в цилиндрических областях методом разделения переменных.

Приведем формулировку результатов Е.И. Моисеева. Рассмотрим систему функций

$$\left\{\sin\left(\left(n + \frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty},\ \theta \in (0, \pi). \tag{8}$$

Теорема ([87]).

1) Пусть $-1/p<\gamma/\pi<2-1/p$, $p>1$, тогда система (8) образует базис в $L_p(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда (при $p=2$ базис Рисса) $1/p-2<\gamma/\pi+\beta<1/p$; при $\gamma/\pi+\beta\le 1/p-2$ система (8) полна в $L_p(0,\pi)$, но не минимальна; при $\gamma/\pi+\beta>1/p$ система (8) минимальна, но не полна в $L_p(0,\pi)$; при $\gamma/\pi+\beta=1/p$ система (8) полна и минимальна в $L_p(0,\pi)$.

2) Пусть $\gamma/\pi=-1/p$, $p>1$, тогда система (8) базиса в $L_p(0,\pi)$ не образует; точнее, при $2/p-2<\beta\le 2/p$ система (8) полна и минимальна, но не базис; при $\beta>2/p$ система (8) минимальна, но не полна в $L_p(0,\pi)$; при $\beta\le 2/p-2$ система (8) полна, но не минимальна в $L_p(0,\pi)$.

Биортогональная к (8) система найдена в явном виде.

В [87] изучен также вопрос о равномерной сходимости разложений по системе (8) в пространстве $C^{\alpha}[0,\pi]$.

По теории краевых и спектральных задач для уравнений смешанного типа отметим работы [25], [27], [36], [40], [43], [52], [55], [56], [60], [61], [67], [70], [137], [138], [177], [190], [203].

Одним из основных методов изучения краевых задач для уравнений смешанного типа является их сведение к краевым задачам для уравнений эллиптического типа в соответствующей подобласти. Возникающие при этом краевые условия, как правило, нестандартны. Изучение таких задач имеет важное теоретическое значение.

В.А. Ильин и Е.И. Моисеев [45] рассмотрели задачу на собственные значения для оператора Лапласа в единичном круге D с наклонной производной на границе, которая была поставлена еще А. Пуанкаре в связи с изучением теории приливов:

$$\Delta u+\mu^2 u=0,\ (r,\theta)\in D,$$

$$\left(ru_r+ku_\theta\right)\big|_{\partial D}=0,$$

где $k-$ ненулевое вещественное число, и доказали, что спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\{\mu:|\operatorname{Im}\mu|\le \text{const}\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D)$, $q>1$.

В [89], [90] изучалось расположение спектра задач с наклонной производной в областях, примыкающих к вещественной оси.

В теории краевых задач для уравнений смешанного типа важную роль играет теория интегральных уравнений, в частности, сингулярных (особых) интегральных

уравнений, уравнений типа свертки, в том числе заданных на конечном отрезке. Этот один из классических разделов математики, вклад в эту область внесли многие известные ученые: И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Т. Карлеман, З. Прёсдорф, Н.И. Мусхелишвили, Ф.Д. Гахов. Отметим в связи с этим работы [30], [32], [33], [68], [78], [104], [106], [107], [111], [112].

А.П. Солдатовым построена теория одномерных сингулярных интегро-функциональных операторов, которые широко встречаются в приложениях и объединяют черты сингулярного оператора Коши и операторов Винера-Хопфа. Эти результаты изложены в его монографии [157].

Как известно, уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке, как и системы уравнений типа свертки, заданные на полупрямой, не допускают решения в квадратурах, и для построения их решений приходится прибегать к различным приближенным и асимптотическим методам.

В работах S. Ukai [229-230] была найдена точная асимптотика собственных значений интегрального уравнения переноса, $0<\alpha<1$:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{|t-x|^{\alpha}},\ x\in[-1,1]. \qquad (9)$$

Уравнение (9) доставляет пример оператора с разностным ядром (оператора типа свертки), заданного на конечном отрезке. Преобразование Фурье ядра этого оператора имеет одну конечную точку разрыва.

Б.В. Пальцев [113] изучил асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов свертки

$$(Au)(\tau)=\int_{0}^{T}k(t-\tau)u(\tau)d\tau,\ 0\le t\le T,$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $\tilde{K}(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $\tilde{K}(cx)=c^{-\gamma}\tilde{K}(x)$ для любого $c>0$ и любого вещественного x, с ограничением $0<\gamma<1$.

Л.А. Сахнович [150] предложил метод решения уравнений типа свертки, заданных на конечном отрезке, в случае, когда известны два частных решения, отвечающие правым частям специального вида.

Цели и задачи диссертационной работы. Исследовать краевую задачу с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта. Выписать и изучить символ концевого оператора, отвечающего за поведение решения в окрестности угловой точки.

Исследовать краевую задачу с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения.

Доказать однозначную разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге. Исследовать вид обратного оператора.

Исследовать смешанную краевую задачу с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге и связанное с ней особое интегральное уравнение с переменными коэффициентами. Исследовать вид обратного оператора.

Изучить расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге.

Изучить расположение спектра задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа. Выяснить, образует ли базис в пространствах Лебега система корневых функций этой задачи.

Найти асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией.

Решить некоторые вспомогательные сингулярные интегральные уравнения и системы таких уравнений.

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов. Работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты сформулированы в виде математических теорем и снабжены строгими доказательствами.

В работе широко используются метод интегральных уравнений, методы теории функций комплексного переменного, операторы дробного дифференцирования, теория специальных функций, асимптотические разложения, метод эталонных задач при построении асимптотических решений задач дифракции коротких волн, теория и аппарат сингулярных интегральных операторов, методы решения задач сопряжения для кусочно-аналитических функций.

При доказательстве единственности решения краевых задач используется т.н. метод abc.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, и их научная новизна. На защиту выносятся следующие результаты автора.

В главе 1 рассмотрены задачи с отходом от характеристики. Основные результаты заключены в следующих теоремах.

В параграфе 1 главы 1 изучена задача с гладким отходом от характеристики. Рассмотрим уравнение Геллерстедта (2)

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0,$$

в области D, ограниченной при $y \ge 0$ простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – участком BC характеристики $\eta = x + (-y)^{m/2+1}/(m/2+1) = 1$, где $C(x_c, y_c)$, $1/2 < x_c < 1$, и кривой AC.

Задача. Найти в области D решение уравнения (2), непрерывное в $\overline{D}$ и принимающее на кривых Γ и AC заданные непрерывные значения:

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s),\ u|_{AC} = \psi(\eta).$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$; $\beta = m/(2(m+2))$.

Будем предполагать, что кривая AC задается уравнением

$$y = -\left(\frac{m+2}{2}\alpha(x)\right)^{\frac{2}{m+2}},\ 0 \le x \le x_c,$$

где функция $\alpha(x) \in C^{1,\delta}[0, x_c]$, $\alpha(x) \ge 0$, $\alpha(0) = 0$; $-1 < \alpha'(x) < 1$ при $0 \le x \le x_c$.

Длину кривой Γ обозначим через ℓ.

Будем предполагать [153, с. 131], что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки B; функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на $[0; \ell]$, $x'^2(s) + y'^2(s) > 0$; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ существуют и гёльдеровы на $[0; \ell]$; в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $|dx/ds| \le Cy^{m+1}(s)$, где C – постоянная.

Замечание [153, с. 138]. Так как функция $a + bx + cy + dxy$, очевидно, удовлетворяет уравнению (2) при любых значениях постоянных a, b, c, d, то без ограничения общности можно считать, что $u(A) = u(B) = 0$.

Будем также предполагать, что $\varphi(s)$ гёльдерова, причем $|\varphi(s)| \le C(\ell - s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)| \le Cs$; $\psi(\eta)$ имеет ограниченную первую производную, гёльдерову при $0 < \eta < 1$; $\varphi(\ell) = \psi(0) = 0$.

Решение будем искать в классе функций, первые производные которых могут иметь особенности не выше интегрируемого порядка вблизи точек A и B; функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ должны удовлетворять условию Гёльдера с показателем больше β при $0 < x < 1$,

$|\tau(x)| \le Cx^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}$, $|\nu(x)| \le Cx^{2\beta-1+\varepsilon}(1-x)^{2\beta-1+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$ и некоторой постоянной $C > 0$. Значение ε (достаточно малое) укажем ниже, однако сразу потребуем, чтобы выполнялось ограничение $\varepsilon < \delta$.

При доказательстве единственности будем дополнительно предполагать, что кривая Γ удовлетворяет условию обобщенной звездности $(x-1)dy - ydx \ge 0$.

Теорема 1.1.1. Решение задачи существует и единственно.

Доказательство существования решения опирается на сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом. Найден и проанализирован концевой символ соответствующего сингулярного оператора. Он выражается через гипергеометрическую функцию и имеет достаточно сложный вид. Доказано, что индекс этого оператора в рассматриваемом классе функций равен нулю, откуда, с учетом единственности решения, и вытекает разрешимость.

В параграфе 2 главы 1 изучена задача с отходом от характеристики параллельно линии изменения типа уравнения. Рассмотрим уравнение (2) в области D, ограниченной при $y \ge 0$ нормальной кривой

$$\Gamma = \left\{(x, y): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}, 0 \le x \le 1\right\}$$

с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками

$$AC_1 = \left\{(x, y): \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, 0 < x \le \frac{1}{4}\right\},$$

$$BC_2 = \left\{(x, y): \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1, \frac{3}{4} \le x < 1\right\}$$

уравнения (2) и отрезком

$$C_1C_2 = \left\{(x, y): \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, y = -\left(\frac{m+2}{8}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right\}.$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, через C – середину отрезка AB, через CC_1 и CC_2 – характеристики уравнения (2), соединяющие C с C_1 и C_2.

Задача. В области D найти функцию

$$u = u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1\left((D \cup C_1C_2) \setminus \left(\overline{CC_1 \cup CC_2}\right)\right) \cap C^2\left(\left(D^+ \cup D^-\right) \setminus \left(\overline{CC_1 \cup CC_2}\right)\right),$$

удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s),\ u|_{AC_1} = \psi(\eta),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C_1C_2} = \chi(x),$$

где $\varphi(s)$, $\psi(\eta)$, $\chi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. В дальнейшем будем полагать, что эти функции представимы в следующем виде: $\varphi(s) = \varphi_1(x) = y^2\overline{\varphi}_1(x)$, $(x, y) \in \Gamma$, $\overline{\varphi}_1(x) \in C[0,1]$; $\psi(\eta) = \eta^2\tilde{\psi}(\eta)$, $\tilde{\psi}(\eta) \in C^2[0,1] \cap C^{2,\delta}[0,1)$; $\chi(x) \in C^{1,\delta}(1/4, 3/4)$, причем на концах интервала $(1/4, 3/4)$ функция $\chi(x)$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1/4 + \beta/2$, $\beta = m/(2(m+2))$.

Указанное выше замечание справедливо и в данном случае.

Теорема 1.1.2. Решение задачи существует и единственно.

В главе 2 рассмотрены краевые задачи для уравнения Гельмгольца и спектральные задачи. Основные результаты заключены в следующих теоремах.

В параграфе 1 главы 2 изучена задача с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге. Пусть (r, θ) – полярные координаты, $D = \{(r, \theta) | r < 1\}$. Требуется найти функцию $u(r, \theta) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющую в D уравнению Гельмгольца

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \tag{10}$$

где $\mu = \xi + i\eta = \rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma \in (-\pi/2, \pi/2)$, и на границе D – краевому условию с наклонной производной:

$$\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - k(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\Bigg|_{r=1} = h(\theta),$$

где $k(\theta) \in C^2[0, 2\pi]$ – вещественная знакоопределенная функция, $k(0) = k(2\pi)$, $k'(0) = k'(2\pi)$; $h(\theta) \in C[0, 2\pi]$, $h(0) = h(2\pi)$.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $h(\theta)$ можно считать зависящей от μ; коэффициент $k(\theta)$, напротив, не должен зависеть от μ.

Теорема 2.1.1. Существуют функции $C_I(\varsigma)$ и $C_*(\varsigma)$ такие, что при $\nu \geq 0$, $\mu \in D_* = \{(\xi, \varsigma) | \xi > C_*(\varsigma)\}$ справедливо представление

$$\frac{\mu I_\nu'(\mu)}{I_\nu(\mu)} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - \frac{\mu^2}{2(\mu^2 + \nu^2)} + \frac{\Xi(\mu, \nu)}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}},$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя ([22], с. 91), $|\Xi(\mu, \nu)| \leq C_I(\varsigma)$, причем $C_*(0) = 0$, $C_I(0) = 15/8$.

В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических вместе со своими производными до второго порядка включительно функций определим оператор B и его коммутатор с оператором умножения на коэффициент k:

$$f = \sum_n f_n e^{in\theta}\ ,\ Bf = \sum_n f_n \sqrt{\mu^2 + n^2}\, e^{in\theta}\ ,\ [B, k] = Bk - kB.$$

Обозначим

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}\ ,\ \|f\|_C = \max_{0 \le t \le 2\pi} |f(t)|.$$

Теорема 2.1.2. Существует функция $C_B(\varsigma)$ такая, что $\|[B,k]\|_2 \le C_B(\varsigma)\|k'\|_C$.

Показано, что исходная задача эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно производной граничного значения искомой функции. Обозначим через A вполне непрерывный оператор из этого уравнения.

Теорема 2.1.3. Существует функция $C_A(\varsigma, k)$ такая, что для оператора A справедлива оценка $\|A\|_2 \le C_A(\varsigma, k)/\sqrt{\xi}$ при $\mu \in D_*$, откуда при $\mu \in D_* \cap D_A$, где $D_A = \{(\xi, \varsigma) | \sqrt{\xi} > C_A(\varsigma, k)\}$, следует однозначная разрешимость задачи.

В параграфе 2 главы 2 рассмотрена смешанная краевая задача с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге. Пусть (r, θ) – полярные координаты, $D = \{(r, \theta) | r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, $\Gamma = \{(r, \theta) | r = 1, 0 < \theta < \pi\}$. Требуется найти функцию $u(r, \theta) \in C^2(D) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению (10), где $\mu = \xi + i\eta = \rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma \in (-\pi/2, \pi/2)$, и на границе области D – краевым условиям

$$u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\pi} = 0\,,\ \left(r\frac{\partial u}{\partial r} - k\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\Bigg|_{\Gamma} = l(\theta),$$

где $k \ne 0$ – вещественное число.

Относительно функции $l(\theta)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Гельдера на интервале $(0, \pi)$ и может иметь особенности порядка меньше единицы на его концах.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $l(\theta)$ можно считать также зависящей от μ.

Обозначим $a = 1/\sqrt{1+k^2}$, $b = 2k/(1+k^2)$.

Теорема 2.2.1. Исходная задача эквивалентна особому интегральному уравнению

$$f(x)-\frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(1+\frac{1-a^2}{(x+a)(s+a)}\right)\frac{f(s)}{s+x}\frac{sds}{\sqrt{s^2-1}}=h(x),\ x>1.$$

Это уравнение однозначно разрешимо, его решение построено в квадратурах. Отсюда следует, что существует функция $\chi_*(\varsigma)$ такая, что при $\xi>\chi_*(\varsigma)$ задача однозначно разрешима, причем главный член разложения решения по параметру μ может быть найден в явном виде.

В параграфе 3 главы 2 изучена спектральная задача для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями в полукруге. Пусть область D на плоскости ограничена полуокружностью Γ, $\Gamma=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ y>0\}$, и отрезком AB, $A(-1,0)$, $B(1,0)$. Рассмотрим следующую спектральную задачу (за (r,φ) обозначены полярные координаты):

$$\Delta u+\lambda^2 u=0,\ (x,y)\in D, \qquad (11)$$

$$u\big|_{AB}=0,\ (ru_r-ku_\varphi)\big|_\Gamma=0,\ k\neq 0, k\in \mathrm{R},$$

где

$$u=u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(\overline{D}\setminus\{A,B\})\cap C^2(D).$$

Теорема 2.3.1. Собственные значения задачи не лежат в карлемановской параболе $|\mathrm{Im}\,\lambda|\le C$ ни при каком C; точнее, существует последовательность собственных значений $\lambda_n=\alpha_n+i\beta_n$ такая, что $\alpha_n\to+\infty$, $\beta_n\to+\infty$, $\beta_n/\alpha_n\to 0$.

В параграфе 4 главы 2 результаты работы [45] распространены на случай переменного непрерывного невырождающегося коэффициента угла наклона производной.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа (11) в единичном круге D с наклонной производной на границе: $(ru_r+k(\theta)u_\theta)\big|_{\partial D}=0$, где $k(\theta)$ – непрерывная 2π-периодическая положительная функция.

Теорема 2.4.1. Спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\{\lambda:|\mathrm{Im}\,\lambda|\le \mathrm{const}\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D)$, $q>1$.

В главе 3 рассмотрены различные интегральные уравнения, связанные с теорией краевых задач. Ниже приведены основные результаты.

В параграфе 1 главы 3 найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки с образом ядра – характеристической функцией отрезка.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}K(x-t)\varphi(t)dt\,,\ x\in[-1,1], \qquad (12)$$

где $K(x)=(\pi x)^{-1}\sin(lx)$, $l>0$, λ – спектральный параметр.

Теорема 3.1.1. Спектр уравнения (12) состоит из двух перемежающихся последовательностей вида

$$\lambda_n^{+}=\exp\left(\pi l^{-1}\left(\pi n/4+\vartheta_{+}+\ldots\right)^2\right),\ n=1,3,\ldots;\ \lambda_n^{-}=\exp\left(\pi l^{-1}\left(\pi n/4+\vartheta_{-}+\ldots\right)^2\right),\ n=2,4,\ldots,$$

где $\vartheta_{\pm}$ – некоторые постоянные.

Кроме того, выписана асимптотика собственных функций интегрального оператора (12). Асимптотическое представление собственных функций выражается через решения задач сопряжения теории аналитических функций.

В параграфе 2 главы 3 решено в квадратурах сингулярное интегральное уравнение с некарлемановским сдвигом ($0<l<1$)

$$f(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{f(t)dt}{t-lx}=h(x),\ x\in(0,1).$$

В параграфе 3 главы 3 решено в квадратурах особое интегральное уравнение

$$f(x)-\lambda\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-a(x+t)}}{x+t}\,f(t)dt=g(x),\ x>0.$$

В параграфе 4 главы 3 построено асимптотическое решение системы уравнений Винера-Хопфа с кусочно-постоянными образами ядер.

Пусть $\alpha\to 1-0$. Рассмотрим на R^{+} следующую систему уравнений, вырождающуюся при $\alpha=1$:

$$f_1(x)+\frac{\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,f_1(t)dt-\frac{\alpha}{i\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}\,f_2(t)dt=g_1(x),$$

$$f_2(x)-\frac{1}{\pi\alpha}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,f_2(t)dt+\frac{1}{i\pi\alpha}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}\,f_1(t)dt=g_2(x).$$

Предполагаем, что правые части абсолютно интегрируемы на любом конечном отрезке полупрямой, при $x\to+0$ имеют порядок $O\left(x^{-1/4}\right)$, а при $x\to+\infty$ ведут себя как $e^{iax}x^{-\delta}$, $\delta>0$, $a\in\mathrm{R}$, или как линейная комбинация таких функций; решение будем искать в том же классе.

Теорема 3.4.1. Индекс задачи в рассматриваемом классе равен единице, т.е. однородная система имеет одно линейно независимое решение, а неоднородная система всегда разрешима и ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной.

В параграфе 5 главы 3 сингулярные интегралы от функций, в которые входят решения задач сопряжения, выражены через линейные комбинации этих функций с дробно-рациональными коэффициентами.

Пусть $\lambda>1,\quad \lambda\neq 2,\quad \delta=(2\pi i)^{-1}\ln(\lambda-1),\quad x>1,\quad W_{\pm}(x)=\pm\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{1-x^{-2}}$, $D_{\pm}(x)=\left(W_{\pm}(x)+1\right)/\left(W_{\pm}(x)-1\right)$. Рассмотрим следующие однородные задачи сопряжения на полупрямой $x>1$: $X_{\pm}^{+}(x)=D_{\pm}(x)X_{\pm}^{-}(x)$ (терминологию и обозначения см. [29], с. 30). У этих задач существуют единственные, с точностью до постоянного множителя, решения, имеющие особенности интегрируемого порядка и исчезающие на бесконечности:

$$X_{\pm}(z)=(1-z)^{\mp\delta-1/2}\exp\left((2\pi i)^{-1}\int_{1}^{+\infty}(t-z)^{-1}\ln\left((1-\lambda)^{\mp 1}D_{\pm}(t)\right)dt\right)$$

(полагаем $-\pi<\arg z\le\pi$).

Обозначим

$$\Theta(x)=-iX_{-}(-x)/\left(X_{+}^{+}(x)\left(W_{+}(x)-1\right)\right),\ \Sigma(x)=\Theta(x)\sqrt{x+1}/\left(x\sqrt{x-1}\right),\ \rho(x)=\sqrt{x^2-1}.$$

Теорема 3.5.1. Справедливы следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Sigma(x)d\rho(x)}{x\pm y}=P_{\pm}(y)\Sigma(y)\mp Q(y),\ y>1, \tag{13}$$

где

$$P_{\pm}(y)=\frac{p_{\pm}y^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)\left(y^2-1\right)},\ Q(y)=\frac{\lambda\Sigma(1)y}{2(\lambda-2)\left(y^2-1\right)}$$

– дробно-рациональные функции, $p_{+}=4(\lambda-1),\ p_{-}=-2\left((\lambda-1)^2+1\right)$.

В параграфе 6 главы 3 рассмотрена система сингулярных интегральных уравнений с ядрами, в которые входят решения задач сопряжения. В дополнение к обозначениям предыдущего параграфа, обозначим

$$\Theta_{+}(x)=\frac{-iX_{-}(-x)}{X_{+}^{+}(x)\left(W_{+}(x)-1\right)},\ a=\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)},\ \Theta_{-}(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)\left(1+a^{-1}\left(x^2-1\right)\right)\Theta_{+}(x)}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$U_{-}+\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{+}U_{+}dt}{t+x}=V_{-},\ U_{+}-\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{-}U_{-}dt}{t+x}=V_{+},\ x>1.$$

Предполагаем, что $V_{\pm}\in C[1,+\infty)$ и $V_{\pm}=O\left(x^{-1}\right)$ при $x\to+\infty$. Решения $U_{\pm}$ будем искать в классе функций, имеющих особенность интегрируемого порядка при $x\to 1+0$ и исчезающих на бесконечности.

С помощью формул (13) построено решение этой системы в квадратурах.

Все полученные автором результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Доказана однозначная разрешимость задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта. В ходе доказательства найден и проанализирован символ концевого оператора, отвечающего за поведение решения в окрестности угловой точки.

2. Доказана однозначная разрешимость задачи с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения.

3. Доказана однозначная разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде.

4. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде; в ходе доказательства решено в квадратурах особое интегральное уравнение с переменными коэффициентами.

5. Изучено расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге.

6. Изучено расположение спектра и доказано отсутствие свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа.

7. Найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией.

8. Построены решения некоторых вспомогательных сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений.

При решении рассматриваемых в диссертации задач использованы методы теории краевых задач для уравнений смешанного типа, теории сингулярных интегральных уравнений и теории задач сопряжения Римана, асимптотические методы, теория операторов, методы функционального анализа.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы. Отдельные результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения следующих научно-исследовательских проектов:

- 1 сентября 2017 г. – 31 декабря 2019 г. Изучение постановок и корректной разрешимости многомерных краевых задач для уравнений смешанного типа (грант РФФИ 17-51-18042 Болг_а)
- 12 апреля 2017 г. – 31 декабря 2019 г. Изучение разрешимости неклассических краевых и спектральных задач для уравнений смешанного типа (грант РФФИ 17-01-00847\17)
- 11 мая 2016 г. – 31 декабря 2018 г. Изучение краевых и спектральных задач для уравнений эллиптического, эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов, а также задач граничного управления (грант РНФ 16-11-10194)
- 1 января 2016 г. – 31 декабря 2020 г. Изучение уравнений смешанного типа и методы решения задач граничного управления (гос. бюджет 1.3.16)
- 27 июня 2014 г. – 31 декабря 2015 г. Классические и обобщенные решения задач для одномерных гиперболических уравнений (грант РФФИ 14-01-90005-Бел_а)
- 21 февраля 2014 г. – 31 декабря 2016 г. Исследование спектральных свойств, классической и обобщенной разрешимости краевых задач и задач управления для уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов (грант РФФИ 14-01-00163-а)
- 1 января 2014 г. – 31 декабря 2015 г. Решение спектральным методом и методом компьютерного моделирования краевых задач и задач управления, возникающих при описании волновых процессов и процессов теплообмена в технических и информационных устройствах (грант Президента РФ НШ-5461.2014.9)
- 1 января 2011 г. – 31 декабря 2015 г. Уравнения смешанного типа и задачи граничного управления (госбюджет, раздел 0110, 1.3)
- 1 января 2011 г. – 31 декабря 2013 г. Изучение классической и обобщенной разрешимости задач для уравнений эллиптического, гиперболического, смешанного типов и исследование этих задач спектральным методом (грант РФФИ 11-01-00164)
- 10 января 2009 г. – 31 декабря 2011 г. Разработка математических методов, вычислительных алгоритмов и их применение в естествознании (ФЦП

«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013», 02.740.11.0196)

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 22-27 мая 2001 г.;
- международная научная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, 19-25 июня 2006 г.;
- научная конференция «Понтрягинские чтения» в рамках Воронежской математической школы «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3-9 мая 2010 г.;
- международная научная конференция, посвященная 110-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 30 мая – 5 июня 2011 г.;
- научная конференция «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел», Белгород, 17-21 октября 2011 г.;
- научный семинар при кафедре дифференциальных уравнений Казанского федерального университета под руководством В.И. Жегалова, Казань, 14 марта 2012 г.;
- научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» под руководством В.А. Садовничего, Москва, 6 ноября 2013 г.;
- международная научная конференция «Applications of Mathematics in Engineering and Economics», Созополь (Болгария), 8-13 июня 2012-16 гг. и 2018 г.;
- научный семинар при кафедре функционального анализа и его применений под руководством Е.И. Моисеева, Москва (многократно);
- научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» под руководством Е.И. Моисеева и И.С. Ломова, Москва, 16 апреля 2018 г.

Публикации. Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в статьях [115-131]. Все 17 работ опубликованы в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов докторских диссертаций. Совместные публикации отсутствуют.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 232 наименования. Работа изложена на 182 страницах и содержит 1 таблицу.

ГЛАВА 1
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

В этой главе рассмотрены некоторые задачи с отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта.

§ 1. ЗАДАЧА С ГЛАДКИМ ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим уравнение Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $y \ge 0$ простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – участком BC характеристики $\eta = x + (-y)^{m/2+1}/(m/2+1) = 1$, где $C(x_c, y_c)$, $1/2 < x_c < 1$, и кривой AC.

Задача М. Найти в области D решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$ и принимающее на кривых Γ и AC заданные непрерывные значения:

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s),\ u|_{AC} = \psi(\eta). \tag{2}$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$; $\beta = m/(2(m+2))$.

Будем предполагать, что кривая AC задается уравнением

$$y = -\left(\frac{m+2}{2}\alpha(x)\right)^{\frac{2}{m+2}},\ 0 \le x \le x_c,$$

где функция $\alpha(x) \in C^{1,\delta}[0, x_c]$, $\alpha(x) \ge 0$, $\alpha(0) = 0$; $-1 < \alpha'(x) < 1$ при $0 \le x \le x_c$.

Указанные условия гарантируют, что подобласть D^- лежит в характеристическом треугольнике с основанием AB и любая характеристика, выходящая из любой точки интервала AB, пересекает границу подобласти D^- ровно в одной точке.

Длину кривой Γ обозначим через ℓ.

Будем предполагать [153, с. 131], что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки B; функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на $[0; \ell]$, $x'^2(s) + y'^2(s) > 0$; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ существуют и гёльдеровы на $[0; \ell]$; в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $|dx/ds| \le Cy^{m+1}(s)$, где C – постоянная.

Замечание [153, с. 138]. Так как функция $a+bx+cy+dxy$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1) при любых значениях постоянных a, b, c, d, то без ограничения общности можно считать, что $u(A)=u(B)=0$.

Будем также предполагать, что $\varphi(s)$ гёльдерова, причем $|\varphi(s)|\le C(\ell-s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)|\le Cs$; $\psi(\eta)$ имеет ограниченную первую производную, гёльдерову при $0<\eta<1$; $\varphi(\ell)=\psi(0)=0$.

Решение будем искать в классе функций, первые производные которых могут иметь особенности не выше интегрируемого порядка вблизи точек A и B; функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ должны удовлетворять условию Гёльдера с показателем больше β при $0<x<1$, $|\tau(x)|\le Cx^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}$, $|\nu(x)|\le Cx^{2\beta-1+\varepsilon}(1-x)^{2\beta-1+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon>0$ и некоторой постоянной $C>0$. Значение ε (достаточно малое) укажем ниже, однако сразу потребуем, чтобы выполнялось ограничение $\varepsilon<\delta$.

Основная теорема. Решение задачи М существует и единственно.

При доказательстве единственности дополнительно предположим, что кривая Г (при движении против часовой стрелки) удовлетворяет условию обобщенной звездности $(x-1)dy-ydx\ge 0$. Условие звездности ставилось в работе [211].

Отметим, что условие обобщенной звездности всегда выполняется для т.н. нормальной кривой (2.1). В самом деле, если положить

$$x=\frac{1+\cos t}{2},\ y=\left(\frac{m+2}{4}\sin t\right)^{\frac{2}{m+2}},$$

то указанное условие сведется к неравенству $2(1-\cos t)+m\sin^2 t\ge 0$, справедливому для всех t.

Обозначим $K(y)=\operatorname{sgn} y|y|^m$. При сделанном предположении достаточно лишь незначительно модифицировать метод bc, предложенный в [211]. В самом деле, пусть

$$b(x,y),\ c(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1\left(\overline{D^+}\cup\overline{D^-}\right),$$

а $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1), тогда в $D^+\cup D^-$ справедливо тождество [211]

$$2(bu_x+cu_y)(Ku_{xx}+u_{yy})=\left(Kbu_x^2+2Kcu_xu_y-bu_y^2\right)_x+\left(cu_y^2+2bu_xu_y-Kcu_x^2\right)_y+$$

$$+u_x^2\left(-Kb_x+(Kc)_y\right)+u_y^2(b_x-c_y)-2u_xu_y(Kc_x+b_y).$$

Пусть B' – точка на интервале AB, близкая к точке B. Проведем через B' линию уровня функции $u(x,y)$, близкую к $\Gamma\cup AC$. Точку пересечения этой линии с интервалом

AB обозначим через A', часть этой линии, лежащую в D^+, – через Γ'. Из точки B' проведем также характеристику $B'C'$ до пересечения с этой линией уровня. Обозначим через $D' \subset D$ область с границей $\Gamma' \bigcup A'C' \bigcup C'B'$.

Пусть $\hat{y} > 0$ – достаточно малое число. Проинтегрируем тождество по подобласти $\hat{D} = D' \bigcap \{|y| > \hat{y}\}$ и применим формулу Грина:

$$0 = \iint\limits_{\hat{D}} 2(bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})dxdy =$$

$$= \oint\limits_{\partial\hat{D}} (Kcu_x^2 - 2bu_xu_y - cu_y^2)dx + (Kbu_x^2 + 2Kcu_xu_y - bu_y^2)dy +$$

$$+ \iint\limits_{\hat{D}} (u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + u_y^2(b_x - c_y))dxdy.$$

Устремим $\hat{y}$ к нулю, тогда

$$\iint\limits_{D' \setminus \hat{D}} (u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + u_y^2(b_x - c_y))dxdy \underset{\hat{y}\to 0}{\to} 0$$

в силу кусочной непрерывности подынтегральных функций,

$$\int\limits_{\partial\hat{D}\cap\{y=\hat{y}\}} - \int\limits_{\partial\hat{D}\cap\{y=-\hat{y}\}} \underset{\hat{y}\to 0}{\to} \int\limits_{A'B'} [Kcu_x^2 - 2bu_xu_y - cu_y^2]_{y=0} dx = 0$$

в силу непрерывности подынтегральных функций (квадратные скобки обозначают здесь скачок функции). Таким образом, в последнем тождестве можно заменить $\hat{D}$ на D'. Так как $du = 0$ на $\Gamma' \bigcup A'C'$ и $dx = \sqrt{-K}dy$ на $C'B'$, то это тождество можно переписать в виде

$$0 = \int\limits_{\Gamma' \bigcup A'C'} (K(dy/dx)^2 + 1)u_y^2(bdy - cdx) - \int\limits_{C'B'} (du/dy)^2(bdy + cdx) +$$

$$+ \iint\limits_{D'} (u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + u_y^2(b_x - c_y))dxdy.$$

Устремив теперь B' к B, получим

$$0 = \int\limits_{\Gamma \bigcup AC} (K(dy/dx)^2 + 1)u_y^2(bdy - cdx) - \int\limits_{CB} (du/dy)^2(bdy + cdx) +$$

$$+ \iint\limits_{D} (u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + u_y^2(b_x - c_y))dxdy.$$

Для неотрицательности всех слагаемых в правой части этого равенства достаточно потребовать выполнения следующих условий ([211]):

$$-Kb_x + (Kc)_y \geq 0,\ b_x - c_y \geq 0,\ (Kc_x + b_y)^2 \leq (b_x - c_y)(-Kb_x + (Kc)_y),$$

$$bdy - cdx \geq 0 \text{ на } \Gamma \bigcup AC,\ bdy + cdx \leq 0 \text{ на } CB.$$

Положим $b = x - 1,\ c = y$ при $y \geq 0$ и $c = 0$ при $y < 0$.

Если $dy/dx \leq 0$ на всей кривой AC, то указанные условия будут выполнены.

Если же AC содержит участки, на которых $dy/dx>0$, то заменим такие участки на отрезки характеристик малой длины, примыкающие к AC изнутри. Обозначим их через L, тогда

$$I=-\oint_L b\left(-Ku_x^2dy+2u_xu_ydx+u_y^2dy\right)=-\oint_L b\left(du/dy\right)du=\oint_L ud\left(bdu/dy\right).$$

Из условий на решение вытекает, что функция u мала на L и интеграл

$$\oint_L\left|d\left(bdu/dy\right)\right|$$

регулярен равномерно по L, а стало быть, I можно сделать сколь угодно малым при надлежащем выборе L.

Перейдем к доказательству существования решения. Обозначим $\tau(x)=u(x,0)$, $\nu(x)=u_y(x,0)$. Доказательство разобьем на несколько этапов:

I. Вывод первого соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенного из подобласти D^-.

II. Получение второго соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенного из подобласти D^+, и вывод основного уравнения.

III. Доказательство разрешимости основного уравнения.

Перейдем теперь к подробному доказательству.

I. Выведем первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Будем искать т.н. обобщенное ([153, с. 129) решение, т.е. будем предполагать, что в характеристических координатах в области D^- функция $u(x,y)$ представима в виде ([153, с. 103]):

$$u(\xi_0,\eta_0)=\gamma_1\int_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}\tau(\xi)d\xi}{(\xi-\xi_0)^{1-\beta}(\eta_0-\xi)^{1-\beta}}-\gamma_2\int_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{\nu(\xi)d\xi}{(\xi-\xi_0)^{\beta}(\eta_0-\xi)^{\beta}},$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Положим $\eta_0=y=x+\alpha(x)$, $\xi_0=q(y)=x-\alpha(x)$, тогда $(\xi_0,\eta_0)\in AC$ (если поставить точки y и $q(y)$ на отрезке AB, то выпущенные из них соответствующие характеристики встретятся на кривой AC), $0\le y\le 1$, и в силу условия (2) получаем:

$$\gamma_1\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-q(y))^{1-2\beta}\tau(\xi)d\xi}{(\xi-q(y))^{1-\beta}(y-\xi)^{1-\beta}}-\gamma_2\int_{q(y)}^{y}\frac{\nu(\xi)d\xi}{(\xi-q(y))^{\beta}(y-\xi)^{\beta}}=\psi(y).\qquad(3)$$

Обозначим

$$\tau(x)=\gamma\int_0^x\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}},\ \gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}$$

([153], с. 129), тогда

$$\mu(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}.$$

Преобразуем первый интеграл из уравнения (3) (как обычно, $F(a,b,c;z)$ обозначает гипергеометрическую функцию ([7], с. 72]).

$$\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-q(y))^{1-2\beta}\tau(\xi)d\xi/\gamma}{(\xi-q(y))^{1-\beta}(y-\xi)^{1-\beta}}=\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-q(y))^{1-2\beta}d\xi}{(\xi-q(y))^{1-\beta}(y-\xi)^{1-\beta}}\int_0^{\xi}\frac{\mu(t)dt}{(\xi-t)^{2\beta}}=$$

$$=\int_0^{q(y)}\mu(t)dt\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-q(y))^{1-2\beta}(\xi-t)^{-2\beta}d\xi}{(\xi-q(y))^{1-\beta}(y-\xi)^{1-\beta}}+\int_{q(y)}^{y}\mu(t)dt\int_t^{y}\frac{(y-q(y))^{1-2\beta}(\xi-t)^{-2\beta}d\xi}{(\xi-q(y))^{1-\beta}(y-\xi)^{1-\beta}}=$$

$$=\int_0^{q(y)}\frac{\mu(t)}{(q(y)-t)^{2\beta}}dt\int_0^1\frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}ds}{(1+(y-q(y))s/(q(y)-t))^{2\beta}}+$$

$$+(y-q(y))^{1-2\beta}\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-t)^{-\beta}\mu(t)}{(t-q(y))^{1-\beta}}dt\int_0^1\frac{s^{-2\beta}(1-s)^{\beta-1}ds}{(1+(y-t)s/(t-q(y)))^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\int_0^{q(y)}\frac{\mu(t)dt}{(q(y)-t)^{2\beta}}F\left(\beta,2\beta,2\beta;\frac{y-q(y)}{t-q(y)}\right)+$$

$$+(y-q(y))^{1-2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-t)^{-\beta}\mu(t)dt}{(t-q(y))^{1-\beta}}F\left(1-2\beta,1-\beta,1-\beta;\frac{t-y}{t-q(y)}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\int_0^{q(y)}\frac{\mu(t)dt}{(q(y)-t)^{2\beta}}\left(1-\frac{y-q(y)}{t-q(y)}\right)^{-\beta}+$$

$$+(y-q(y))^{1-2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\int_{q(y)}^{y}\frac{(y-t)^{-\beta}\mu(t)dt}{(t-q(y))^{1-\beta}}\left(1-\frac{t-y}{t-q(y)}\right)^{2\beta-1}=$$

$$=\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\int_0^{q(y)}\frac{\mu(t)dt}{(q(y)-t)^{\beta}(y-t)^{\beta}}+\frac{\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\int_{q(y)}^{y}\frac{\mu(t)dt}{(t-q(y))^{\beta}(y-t)^{\beta}}.$$

Следовательно, (3) переходит в следующее уравнение:

$$\int_0^{q(y)}\frac{\mu(t)dt}{(q(y)-t)^{\beta}(y-t)^{\beta}}+\varsigma\int_{q(y)}^{y}\frac{\zeta(t)dt}{(t-q(y))^{\beta}(y-t)^{\beta}}=\frac{\psi(y)}{\gamma},\ 0\le y\le 1,\qquad(4)$$

где $\zeta(x)=\mu(x)-\nu(x)$, $\varsigma=1/(2\cos(\pi\beta))$.

В силу требований, наложенных на кривую AC, функция $q(y)$ монотонно возрастает при $0\le y\le 1$. Обозначим обратную к ней функцию через $Q(y)$, тогда $q(y)<y<Q(y)$ при $0<y<1$, $q(0)=Q(0)=0$, $q(y)\le q(1)=2x_c-1$.

Подействуем на обе части соотношения (4) оператором дробного дифференцирования. Для этого сначала применим оператор дробного интегрирования:

$$\int_0^y \frac{ds}{(y-s)^{1-\beta}} \int_0^{q(s)} \frac{\mu(t)dt}{(q(s)-t)^{\beta}(s-t)^{\beta}} + \varsigma \int_0^y \frac{ds}{(y-s)^{1-\beta}} \int_{q(s)}^s \frac{\zeta(t)dt}{(t-q(s))^{\beta}(s-t)^{\beta}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^y \frac{\psi(s)ds}{(y-s)^{1-\beta}},$$

или

$$\int_0^{q(y)} \mu(t)dt \int_{Q(t)}^y \frac{(s-t)^{-\beta}ds}{(y-s)^{1-\beta}(q(s)-t)^{\beta}} + \varsigma \int_0^{q(y)} \zeta(t)dt \int_t^{Q(t)} \frac{(y-s)^{\beta-1}ds}{(t-q(s))^{\beta}(s-t)^{\beta}} +$$

$$+ \varsigma \int_{q(y)}^y \zeta(t)dt \int_t^y \frac{(t-q(s))^{-\beta}ds}{(y-s)^{1-\beta}(s-t)^{\beta}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^y \frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}},$$

или

$$\int_0^{q(y)} M_1(t,y)\mu(t)dt + \varsigma \int_0^{q(y)} M_2(t,y)\zeta(t)dt + \varsigma \int_{q(y)}^y M_3(t,y)\zeta(t)dt = \frac{1}{\gamma}\int_0^y \frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}}, \qquad (5)$$

где

$$M_1(t,y) = \int_{Q(t)}^y \frac{(s-t)^{-\beta}ds}{(y-s)^{1-\beta}(q(s)-t)^{\beta}},\ M_2(t,y) = \int_t^{Q(t)} \frac{(y-s)^{\beta-1}ds}{(t-q(s))^{\beta}(s-t)^{\beta}},$$

$$M_3(t,y) = \int_t^y \frac{(t-q(s))^{-\beta}ds}{(y-s)^{1-\beta}(s-t)^{\beta}}.$$

Обозначив $\Xi = Q(t) + (y-Q(t))\tau$, первое ядро представим в виде

$$M_1(t,y) = \int_0^1 \left(\frac{q(\Xi)-t}{y-Q(t)}\right)^{-\beta} \frac{(1-\tau)^{\beta-1}d\tau}{(\Xi-t)^{\beta}},$$

откуда следует, что

$$M_1(q(y),y) = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)} \frac{(q'(y))^{-\beta}}{(y-q(y))^{\beta}}.$$

Далее, обозначив также $Z = (y-Q(t))/(Q(t)-t)$, представим ядро в виде

$$M_1(t,y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{Z}+\tau\right)^{-\beta} (q(\Xi)-t)^{-\beta} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\beta}},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,y) = \beta \int_0^1 \left(\frac{1}{Z}+\tau\right)^{-\beta} (q(\Xi)-t)^{-\beta} \left(\frac{1}{1+Z\tau}\frac{1}{y-Q(t)} - \frac{\pi q'(\Xi)}{q(\Xi)-t}\right) \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\beta}}.$$

Делая замену $w = (1-\tau)/(1+Z\tau)$, как при доказательстве формулы автотрансформации для гипергеометрической функции ([153], с. 10), получаем:

$$\Xi = Q(t) + (y-Q(t))(1-w)/(1+Zw),$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,\,y)=\beta Z^{\beta}\int_0^1\left(\frac{1}{t-y}+\frac{1}{y-Q(t)}-\frac{1-w}{(1+Zw)^2}\,\frac{q'(\Xi)}{q(\Xi)-t}\right)\frac{w^{\beta-1}dw}{(q(\Xi)-t)^{\beta}},$$

или

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,\,y)=\frac{\beta(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{1}{t-y}\int_0^1(1+r_1(t,\,y,\,w))\frac{w^{\beta-1}(1-w)^{1-\beta}dw}{(1+Zw)^{1-\beta}},$$

где

$$r_1(t,\,y,\,w)=\left(1+\frac{1}{1-w}\,\frac{t-y}{y-Q(t)}\left(1-q'(\Xi)\frac{\Xi-Q(t)}{q(\Xi)-t}\right)\right)\left(Q'(t)\frac{q(\Xi)-t}{\Xi-Q(t)}\right)^{-\beta}-1,$$

или

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,\,y)=\frac{\pi\beta(1-\beta)(Q'(t))^{\beta}}{\sin(\pi\beta)(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{F(\beta,1-\beta,2;-Z)}{t-y}+\frac{\beta(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{1}{t-y}\int_0^1 r_1(t,\,y,\,w)\frac{w^{\beta-1}(1-w)^{1-\beta}dw}{(1+Zw)^{1-\beta}}.$$

В силу свойств функции q:

$$q(x)=q(x_0)+q'(x_0)(x-x_0)+O\left((x-x_0)^{1+\delta}\right),\ q'(x)=q'(x_0)+O\left((x-x_0)^{\delta}\right),$$

$$r_1(t,\,y,\,w)=\frac{1}{1-w}\,\frac{t-y}{y-Q(t)}O\left(\left((y-Q(t))\frac{1-w}{1+Zw}\right)^{\delta}\right)+O\left(\left((y-Q(t))\frac{1-w}{1+Zw}\right)^{\delta}\right).$$

Запишем $\partial M_1/\partial y$ в виде

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,\,y)=\frac{\pi\beta(1-\beta)(Q'(t))^{\beta}}{\sin(\pi\beta)(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{F(\beta,1-\beta,2;-Z)}{t-y}+N_1(t,\,y),$$

$$N_1(t,\,y)=\frac{\beta(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{1}{t-y}\int_0^1 r_1(t,\,y,\,w)\frac{w^{\beta-1}(1-w)^{1-\beta}\,dw}{(1+Zw)^{1-\beta}}.$$

Докажем регулярность $N_1(t,\,y)$.

$$\Xi(t,\,Q(t)+s)=Q(t)+s(1-w)/\left(1+\frac{sw}{Q(t)-t}\right)\sim Q(t)+s(1-w),$$

$$r_1(t,\,Q(t)+s,\,w)=\left(1+\frac{t-Q(t)-s}{s(1-w)}\left(1-q'(\Xi)\frac{\Xi-Q(t)}{q(\Xi)-t}\right)\right)\left(Q'(t)\frac{q(\Xi)-t}{\Xi-Q(t)}\right)^{-\beta}-1,$$

$$r_1(t,\,Q(t)+s,\,w)\sim\left(1+\frac{t-Q(t)-s}{s(1-w)}\left(\frac{O\left((s(1-w))^{\delta}\right)}{q'(Q(t))+O\left((s(1-w))^{\delta}\right)}\right)\right)\left(1+O\left((s(1-w))^{\delta}\right)\right)^{-\beta}-1,$$

$$r_1(t,\,Q(t)+s,\,w)\sim O\left((s(1-w))^{\delta-1}\right).$$

$$N_1(t,\,y)\sim\frac{\beta(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\,\frac{1}{t-y}\int_0^1 O\left((s(1-w))^{\delta-1}\right)\frac{w^{\beta-1}(1-w)^{1-\beta}\,dw}{(1+Zw)^{1-\beta}}=O\left(s^{\delta-1}\right).$$

Регулярность $N_1(t,\,y)$ доказана.

Второе ядро преобразуем следующим образом:

$$M_2(t,y)=\int_0^1\left(\frac{y-t}{Q(t)-t}-\tau\right)^{\beta-1}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(t-q(t+(Q(t)-t)\tau))^{\beta}}=\int_0^1\frac{(Z+\tau)^{\beta-1}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{\beta}},$$

$$M_2(t,y)=\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)-t}\right)^{\beta}\int_0^1\frac{(Z+\tau)^{\beta-1}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta}}+\int_0^1\frac{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{-\beta}-(q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau)^{-\beta}}{(Z+\tau)^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}d\tau,$$

$$M_2(t,y)=\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)-t}\right)^{\beta}\left(\int_0^1\frac{u^{-\beta}du}{(1+u)^{1-\beta}}+\int_1^{1/Z}\frac{du}{u}+\int_1^{1/Z}\left(\frac{u^{-\beta}}{(1+u)^{1-\beta}}-\frac{1}{u}\right)du+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau^{\beta}(Z+\tau)^{1-\beta}}d\tau\right)+$$

$$+\int_0^1\frac{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{-\beta}-(q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}},$$

$$M_2(t,y)=\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)-t}\right)^{\beta}\left(\int_1^{+\infty}\frac{(1+u)^{\beta-1}du}{u}+\int_Z^1\frac{du}{u}+\int_Z^1\frac{(1+u)^{\beta-1}-1}{u}du+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau^{\beta}(Z+\tau)^{1-\beta}}d\tau\right)+$$

$$+\int_0^1\frac{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{-\beta}-(q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}.$$

Таким образом,

$$M_2(t,y)=\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)-t}\right)^{\beta}\ln\frac{1}{Z}+M_{20}(t,y)+M_{21}(t,y),$$

где

$$M_{20}(t,y)=\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)-t}\right)^{\beta}\left(\int_Z^{+\infty}\frac{(1+u)^{\beta-1}du}{u}-\int_Z^1\frac{du}{u}+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau^{\beta}(Z+\tau)^{1-\beta}}d\tau\right),$$

$$M_{21}(t,y)=\int_0^1\frac{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{-\beta}-(q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau)^{-\beta}}{(Z+\tau)^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}d\tau.$$

Заметим, что

$$M_{20}(q(y),y)=(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\left(\int_1^{+\infty}\frac{(1+u)^{\beta-1}du}{u}+\int_0^1\frac{(1+u)^{\beta-1}-1}{u}du+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau}d\tau\right),$$

$$M_{21}(q(y),y)=\int_0^1\frac{(q(y)-q(y-(y-q(y))\tau))^{-\beta}-(q'(y)(y-q(y))\tau)^{-\beta}}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}d\tau.$$

Для дифференцирования используем представление

$$M_2(t,y)=\int_0^1\left(\frac{y-t}{Q(t)-t}-\tau\right)^{\beta-1}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(t-q(t+(Q(t)-t)\tau))^{\beta}}=\int_0^1\frac{(Z+\tau)^{\beta-1}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{\beta}},$$

тогда

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,y)=\frac{\beta-1}{Q(t)-t}\int_0^1\frac{(Z+\tau)^{\beta-2}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau))^{\beta}},$$

или

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}+$$

$$+\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau)}{q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau}\right)^{-\beta}-1\right)\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}.$$

Так как

$$\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}=(1+Z)^{\beta-2}\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(1-\tau/(1+Z))^{2-\beta}}=$$

$$=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}(1+Z)^{\beta-2}F\left(1-\beta,2-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1+Z)^{\beta-1}}{Z}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right),$$

то

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1+Z)^{\beta-1}}{Z}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+$$

$$+\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau)}{q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau}\right)^{-\beta}-1\right)\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}.$$

Итак,

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1+Z)^{\beta-1}}{Z}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+$$

$$+\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}r_2(t,\,y,\,\tau)d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}},$$

где

$$r_2(t,\,y,\,\tau)=\left(\frac{t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau)}{q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau}\right)^{-\beta}-1.$$

Или $r_2(t,\,y,\,\tau)=\tilde{r}_2(Q(t),\,y,\,\tau)$, где

$$\tilde{r}_2(t,\,y,\,\tau)\equiv r_2(q(t),\,y,\,\tau)=\left(\frac{q(t)-q(t-(t-q(t))\tau)}{q'(t)(t-q(t))\tau}\right)^{-\beta}-1.$$

Запишем $\partial M_2/\partial y$ в виде

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{2\beta-1}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(y-t)^{\beta-1}}{y-Q(t)}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+N_2(t,\,y),$$

$$N_2(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}r_2(t,\,y,\,\tau)d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}.$$

Докажем регулярность $N_2(t,\,y)$.

$$N_2(t,\,y)=\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\,\tilde{N}_2(t,\,y),$$

$$\tilde{N}_2(t,\,y)=\int_0^1\left(\frac{y-Q(t)}{Q(t)-t}+\tau\right)^{\beta-2}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left(\left(\frac{t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau)}{q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau}\right)^{-\beta}-1\right).$$

$$\tilde{N}_2(t,\,Q(t)+s)=\int_0^1\left(\frac{s}{Q(t)-t}+\tau\right)^{\beta-2}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left(\left(\frac{t-q(Q(t)-(Q(t)-t)\tau)}{q'(Q(t))(Q(t)-t)\tau}\right)^{-\beta}-1\right),$$

или, подставляя $t=q(v)$:

$$\tilde{N}_2(q(v),\,v+s)=\int_0^1\left(\frac{s}{\eta(v)}+\tau\right)^{\beta-2}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left(\left(\frac{q(v)-q(v-\eta(v)\tau)}{q'(v)\eta(v)\tau}\right)^{-\beta}-1\right).$$

Исследуем поведение при $t\to q(y)-0$, т.е. при $s\to+0$:

$$\tilde{N}_2(q(v),\,v+s)=\int_0^1\left(\frac{s}{\eta(v)}+\tau\right)^{\beta-2}\frac{\tau^{-\beta}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left((1+O(\tau^{\delta}))^{-\beta}-1\right)\sim\int_0^1\left(\frac{s}{\eta(v)}+\tau\right)^{\beta-2}O(\tau^{\delta-\beta})d\tau\sim$$

$$\sim s^{\delta-1}\int_0^{1/s}(w+1/\eta(v))^{\beta-2}O(w^{\delta-\beta})dw=O(s^{\delta-1}).$$

Регулярность $N_2(t,\,y)$ доказана.

Третье ядро запишем так:

$$M_3(t,\,y)=\int_0^1\frac{(t-q(t+(y-t)\tau))^{-\beta}d\tau}{(1-\tau)^{1-\beta}\tau^{\beta}}=\int_0^1\frac{(t-q(y-(y-t)\tau))^{-\beta}d\tau}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}.$$

Из последнего представления немедленно находим:

$$M_3(y,\,y)=\int_0^1\frac{(t-q(y-(y-t)\tau))^{-\beta}d\tau}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}\bigg|_{t=y}=\int_0^1\frac{(y-q(y))^{-\beta}d\tau}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}=\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}(y-q(y))^{-\beta}.$$

Далее,

$$M_3(t,\,y)=(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1\left(\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)}+\tau\right)^{-\beta}\frac{\tau^{\beta-1}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}+$$

$$+(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta}\right)\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}}.$$

В обозначении $W=(t-q(y))/(q'(y)(y-t))$:

$$M_3(t,y)=(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1(W+\tau)^{-\beta}\frac{\tau^{\beta-1}d\tau}{(1-\tau)^{\beta}}+$$

$$+(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1\left(\left(W\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{(t-q(y))\tau}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{W}{\tau}\right)^{-\beta}\right)\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}},$$

$$M_3(t,y)=(q'(y)(y-t))^{-\beta}\left(\int_0^1\frac{u^{\beta-1}du}{(1+u)^{\beta}}+\int_1^{1/W}\frac{du}{u}+\int_1^{1/W}\left(\frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{\beta}}-\frac{1}{u}\right)du+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau^{1-\beta}(W+\tau)^{\beta}}d\tau\right)+$$

$$+(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{W}{\tau}\right)^{-\beta}\right)\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}}.$$

Таким образом,

$$M_3(t,y)=-(q'(y)(y-t))^{-\beta}\ln W+M_{30}(t,y)+M_{31}(t,y),$$

$$M_{30}(t,y)=(q'(y)(y-t))^{-\beta}\left(\int_1^{+\infty}\frac{du/u}{(1+u)^{\beta}}+\int_W^1\left((1+u)^{-\beta}-1\right)\frac{du}{u}+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau^{1-\beta}(W+\tau)^{\beta}}d\tau\right).$$

$$M_{31}(t,y)=(q'(y)(y-t))^{-\beta}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{W}{\tau}\right)^{-\beta}\right)\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}}.$$

Заметим, что

$$M_{30}(q(y),y)=(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\left(\int_1^{+\infty}\frac{du/u}{(1+u)^{\beta}}+\int_0^1\left((1+u)^{-\beta}-1\right)\frac{du}{u}+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau}d\tau\right),$$

$$M_{31}(q(y),y)=(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\int_0^1\left(\left(\frac{q(y)-q(y-(y-q(y))\tau)}{q'(y)(y-q(y))\tau}\right)^{-\beta}-1\right)\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}}.$$

Для дифференцирования используем представление

$$M_3(t,y)=\int_0^1\frac{(t-q(y-(y-t)\tau))^{-\beta}d\tau}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}},$$

тогда

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\beta\int_0^1q'(y-(y-t)\tau)\frac{(t-q(y-(y-t)\tau))^{-\beta-1}d\tau}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}}.$$

Далее преобразуем по той же схеме:

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\beta(q'(y)(y-t))^{-\beta-1}\int_0^1q'(y-(y-t)\tau)\left(\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{\tau^{-2}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}},$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\beta(q'(y)(y-t))^{-\beta-1}q'(y)\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{\tau^{-2}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}}+$$

$$+\beta\left(q'(y)(y-t)\right)^{-\beta-1}\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)-q'(y)}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2}d\tau+$$

$$+\beta\left(q'(y)(y-t)\right)^{-\beta-1}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q\left(y-(y-t)\tau\right)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}-\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\right)\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2}d\tau.$$

Так как

$$\int_0^1\left(1+\frac{W}{\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{\tau^{-2}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}}=\int_0^1\frac{(\tau+W)^{-\beta-1}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{1-\beta}}=\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{1-\beta}d\tau}{(1-\tau+W)^{1+\beta}}=\frac{1}{(1+W)^{1+\beta}}\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{1-\beta}d\tau}{(1-\tau/(1+W))^{1+\beta}}=$$

$$=\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}(1+W)^{-\beta-1}F\left(2-\beta,1+\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)=\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right),$$

то

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\beta\left(q'(y)(y-t)\right)^{-\beta-1}q'(y)\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)+$$

$$+\beta\left(q'(y)(y-t)\right)^{-\beta-1}\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)-q'(y)}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2}d\tau+$$

$$+\beta\left(q'(y)(y-t)\right)^{-\beta-1}\int_0^1\left(\left(\frac{t-q\left(y-(y-t)\tau\right)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}-\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\right)\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2}d\tau.$$

Или:

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\frac{\beta\left(q'(y)\right)^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)+$$

$$+\frac{\beta\left(q'(y)\right)^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\left(\left(\frac{t-q\left(y-(y-t)\tau\right)}{t-q(y)+q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)}{q'(y)}-1\right)\frac{\tau^{-2}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}}.$$

Итак,

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\frac{\beta\left(q'(y)\right)^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)+$$

$$+\frac{\beta\left(q'(y)\right)^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{r_3(t,y,\tau)d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2},$$

$$r_3(t,y,\tau)=\left(\frac{t-q\left(y-(y-t)\tau\right)}{t-q(y)+q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{q'\left(y-(y-t)\tau\right)}{q'(y)}-1.$$

Запишем $\partial M_3/\partial y$ в виде

$$\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)=\frac{\beta(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{q'(y)}{t-q(y)}\left(t-q(y)+q'(y)(y-t)\right)^{-\beta}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)+N_3(t,y),$$

$$N_3(t,\,y)=\frac{\beta(q'(y))^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\int_0^1\left(1+\frac{W}{\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{r_3(t,\,y,\,\tau)d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2},$$

$$r_3(t,\,y,\,\tau)=\left(\left(W+\frac{q(y)-q(y-(y-t)\tau)}{q'(y)(y-t)}\right)/(W+\tau)\right)^{-\beta-1}\frac{q'(y-(y-t)\tau)}{q'(y)}-1.$$

Или:

$$N_3(t,\,y)=\frac{\beta(q'(y))^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\,\tilde N_3(t,\,y),$$

$$\tilde N_3(t,\,y)=\int_0^1\left[\left(\frac{t-q(y-(y-t)\tau)}{t-q(y)+\tau q'(y)(y-t)}\right)^{-\beta-1}\frac{q'(y-(y-t)\tau)}{q'(y)}-1\right]\left(\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)}+\tau\right)^{-\beta-1}\frac{\tau^{\beta-1}d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}}.$$

Докажем регулярность второго слагаемого в представлении для $\partial M_3/\partial y$ (первое слагаемое имеет особенность первого порядка при $t=q(y)$).

Очевидно, выражение $N_3(t,\,y)$ регулярно при $t>q(y)$ (и, в частности, при $t\to y-0$), поэтому нужно исследовать его поведение лишь при $t\to q(y)+0$.Обозначим $\eta(y)=y-q(y)$:

$$\tilde N_3(q(y)+s,\,y)\sim\int_0^1\left[\left(1+\frac{O\left((\eta(y)\tau)^{1+\delta}\right)}{s+\tau q'(y)\eta(y)}\right)^{-\beta-1}\frac{q'(y-\eta(y)\tau)}{q'(y)}-1\right]\left(\frac{s}{q'(y)\eta(y)}+\tau\right)^{-\beta-1}\tau^{\beta-1}d\tau\sim$$

(используем тривиальную оценку $\tau/(s+\tau)\le 1$)

$$\sim\int_0^1\left[\left(1+O(\tau^\delta)\right)^{-\beta-1}\left(1+O(\tau^\delta)\right)-1\right]\left(\tau+\frac{s}{q'(y)\eta(y)}\right)^{-\beta-1}\tau^{\beta-1}d\tau\sim$$

$$\sim\int_0^1 O(\tau^\delta)\left(\tau+\frac{s}{q'(y)\eta(y)}\right)^{-\beta-1}\tau^{\beta-1}d\tau=s^{\delta-1}\int_0^{1/s}O(w^\delta)\left(w+\frac{1}{q'(y)\eta(y)}\right)^{-\beta-1}w^{\beta-1}dw=O\left(s^{\delta-1}\right),$$

так как

$$\int_0^{+\infty}\left(w+\frac{1}{q'(y)\eta(y)}\right)^{-\beta-1}w^{\delta+\beta-1}dw<+\infty\ \text{ при }\ 0<\delta<1.$$

Регулярность $N_3(t,\,y)$ доказана.

Теперь мы можем продифференцировать обе части уравнения (5). С учетом равенства

$$M_2(q(y),\,y)-M_3(q(y),\,y)=M_{20}(q(y),\,y)+M_{21}(q(y),\,y)-M_{30}(q(y),\,y)-M_{31}(q(y),\,y)=$$

$$=(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\left(\int_1^{+\infty}\frac{(1+u)^{\beta-1}du}{u}+\int_0^1\frac{(1+u)^{\beta-1}-1}{u}du+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau}d\tau\right)+$$

$$+\int_0^1 \frac{(q(y)-q(y-(y-q(y))\tau))^{-\beta}-(q'(y)(y-q(y))\tau)^{-\beta}}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}d\tau+$$

$$+\left(-(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\right)\left(\int_1^{+\infty}\frac{du/u}{(1+u)^{\beta}}+\int_0^1\left((1+u)^{-\beta}-1\right)\frac{du}{u}+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{-\beta}-1}{\tau}d\tau\right)+$$

$$+\int_0^1 \frac{(q'(y)(y-q(y))\tau)^{-\beta}-(q(y)-q(y-(y-q(y))\tau))^{-\beta}}{\tau^{1-\beta}(1-\tau)^{\beta}}d\tau=$$

$$=(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}\int_0^{+\infty}\frac{(1+u)^{\beta-1}-(1+u)^{-\beta}}{u}du=-\pi\operatorname{ctg}(\pi\beta)(q'(y)(y-q(y)))^{-\beta}$$

получаем:

$$q'(y)M_1(q(y),y)\mu(q(y))+\int_0^{q(y)}\frac{\partial M_1}{\partial y}(t,y)\mu(t)dt+\varsigma q'(y)(M_2(q(y),y)-M_3(q(y),y))\zeta(q(y))+$$

$$+\varsigma\int_0^{q(y)}\frac{\partial M_2}{\partial y}(t,y)\zeta(t)dt+\varsigma M_3(y,y)\zeta(y)+\varsigma\int_{q(y)}^{y}\frac{\partial M_3}{\partial y}(t,y)\zeta(t)dt=\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}},$$

или

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-q(y))^{\beta}}\mu(q(y))+\int_0^{q(y)}\frac{(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\frac{\beta(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}F(\beta,1-\beta,2;-Z)\frac{\mu(t)dt}{t-y}+$$

$$+\int_0^{q(y)}\frac{\beta(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\frac{\mu(t)dt}{t-y}\int_0^1 r_1(t,y,w)\frac{w^{\beta-1}(1-w)^{1-\beta}dw}{(1+Zw)^{1-\beta}}-\frac{\pi}{2\sin(\pi\beta)}\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-q(y))^{\beta}}\zeta(q(y))+$$

$$+\varsigma\int_0^{q(y)}\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1+Z)^{\beta-1}}{Z}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)\zeta(t)dt+$$

$$+\varsigma\int_0^{q(y)}\zeta(t)dt\frac{(\beta-1)(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\int_0^1\frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta}r_2(t,y,\tau)d\tau}{(Z+\tau)^{2-\beta}}+\frac{\pi}{\sin(2\pi\beta)}(y-q(y))^{-\beta}\zeta(y)+$$

$$+\varsigma\int_{q(y)}^{y}\frac{\beta(q'(y))^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\frac{(1-\beta)\pi}{\sin(\pi\beta)}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)\zeta(t)dt+$$

$$+\varsigma\int_{q(y)}^{y}\zeta(t)dt\frac{\beta(q'(y))^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\int_0^1\left(1+\frac{t-q(y)}{q'(y)(y-t)\tau}\right)^{-\beta-1}\frac{r_3(t,y,\tau)d\tau}{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^2}=\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}}. \qquad (6)$$

Отметим также, что сумма пятого и восьмого слагаемых в уравнении (6) образует сингулярный интеграл от непрерывной функции в силу соотношений

$$\frac{1-\beta}{(1+Z)^{1-\beta}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)\Bigg|_{Z=0}=1,$$

$$\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)\Bigg|_{W=0}=\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}.$$

II. Выведем теперь основное уравнение относительно функции $\zeta(y)$.

Согласно [153, с. 133], справедливо следующее соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное из подобласти D^+:

$$\tau(x)=-\chi_1\int_0^1\left(|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right)\nu(t)dt-\int_0^1 H_1(t,x)\nu(t)dt+f(x),$$

где

$$f(x)=-\int_0^{\ell}\varphi(s)\rho_1(s;x,0)ds,\ \chi_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}$$

[153, с. 56], $H_1(t,x)$ и $\rho_1(s;x,0)$ – функции, связанные с решением т.н. задачи N в области D^+ для уравнения (1). Функция $H_1(t,x)$ характеризует отклонение дуги Γ от нормальной кривой.

Лемма 1. При $0<x<1,\ 0<t<1$ справедливо представление

$$\partial H_1(t,x)/\partial x=C(x,t)(x+t-2xt)^{-2\beta},$$

где $C(x,t)$ – непрерывная в замкнутом квадрате $0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1$ функция, зависящая только от области D^+.

Утверждение леммы вытекает из рассуждений, приведенных в [153, с. 133].

Используя тождество ([153], с. 26)

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}\int_0^1\left(|\xi-t|^{-2\beta}-|\xi+t-2\xi t|^{-2\beta}\right)\nu(t)dt=$$

$$=\pi\,\mathrm{tg}(\pi\beta)\nu(x)+\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)dt,$$

и формулу

$$\mu(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},$$

получаем:

$$\nu(x)+\frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)dt=\frac{2F(x)}{1+\sin(\pi\beta)},$$

$$\widetilde{f}(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},\ \widetilde{H}_1(x,t)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{H_1(t,s)ds}{(x-s)^{1-2\beta}},$$

$$F(x)=-\frac{\zeta(x)}{2}-\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\gamma\pi}\int_0^1\widetilde{H}_1(x,t)\nu(t)dt+\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\gamma\pi}\widetilde{f}(x).$$

Согласно [153, с. 137],

$$\widetilde{H}_1(t,x)=\int_0^x \frac{\partial H_1(t,s)}{\partial s}\frac{ds}{(x-s)^{1-2\beta}}.$$

Лемма 2 ([153, с. 138]). Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, причем $|\varphi(s)|\le C(\ell-s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)|\le \widetilde{C}s$, то $|f'(x)|\le C_0\left(x^{-(2\beta)^2}+(1-x)^{-2\beta}\right)$.

Лемма 3 ([153, с. 139]). Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 2, то $\widetilde{f}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta+\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{\varepsilon}>0$, при $0<x<1$.

Обращая последнее соотношение согласно [153, сс. 47, 141] в том же классе функций, получаем:

$$\nu(x)=F(x)-\frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\left(\frac{s(1-s)}{x(1-x)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x-2xs}\right)F(s)ds,$$

или

$$\nu(x)+\int_0^1 K(x,t)\nu(t)dt=$$

$$=-\frac{\zeta(x)}{2}+\frac{\cos(\pi\beta)}{2\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\left(\frac{s(1-s)}{x(1-x)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x-2xs}\right)\zeta(s)ds+g(x),$$

$$K(x,t)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\gamma}\left(\widetilde{H}_1(x,t)-\frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\widetilde{H}_1(s,t)\left(\frac{s(1-s)}{x(1-x)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x-2xs}\right)ds\right),$$

$$g(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\gamma}\left(\widetilde{f}(x)-\frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\left(\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\widetilde{f}(t)dt\right).$$

Лемма 4. $K(x,t)=C_1(x,t)(1-x)^{\beta-1/2}$; $g(x)=C_2(x,t)(1-x)^{\beta-1/2}$, где $C_1(x,t)$ и $C_2(x,t)$ – непрерывные функции в замкнутом квадрате $0\le x\le 1$, $0\le t\le 1$.

Утверждение леммы вытекает из рассуждений, приведенных в [153, с. 141].

Следовательно,

$$\mu(x)+\int_0^1 K(x,t)\mu(t)dt=$$

$$=\frac{\zeta(x)}{2}+\frac{\cos(\pi\beta)}{2\pi(1+\sin(\pi\beta))}\int_0^1\left(\frac{s(1-s)}{x(1-x)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x-2xs}\right)\zeta(s)ds+\int_0^1 K(x,t)\zeta(t)dt+g(x).$$

Вместе с (6) это соотношение дает основную систему уравнений. Выделим главные члены, воспользовавшись следующим утверждением (предварительно перейдя к полупрямой с помощью стандартной замены $x=e^{-u}$, $t=e^{-v}$).

Лемма 5 ([157, с. 35]). Пусть

$$(K\varphi)(t_0)=\int_R k(t_0,t)f(t_0-t)\varphi(t)dt\ ,\ t_0\in \mathrm{R}\,,$$

– интегральный оператор типа свертки, рассматриваемый в пространстве $C^\sigma(\mathrm{R})$, и

а) $k\in C^\sigma(\mathrm{R}\times\mathrm{R}),\ \ f\in L(\mathrm{R})$. Тогда оператор K ограничен в пространстве $C^\sigma(\mathrm{R})$ и его операторная норма допускает оценку $\|K\|\le 2\|k\|_{C^\sigma}\|f\|_L$, где

$$\|\varphi\|_{C^\sigma}=\sup_{x\in\mathrm{R}}|\varphi(x)|+\sup_{x_1\ne x_2}\frac{|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|}{|x_1-x_2|^\sigma}.$$

б) $f\in L(\mathrm{R}),\ \ k\in C^{\sigma+\varepsilon}(\mathrm{R}\times\mathrm{R})$ с некоторым $\varepsilon>0$ и для каждого $n=1,2,\ldots$ $\lim\limits_{t\to\infty,\,|t-t_0|\le n}k(t_0,t)=0$. Тогда оператор K компактен в пространстве $C^\sigma(\mathrm{R})$.

Следствие. Пусть $\sigma<\alpha<1,\ \ \rho(x_0,x)\in C^{\sigma+\varepsilon}([0,1]\times[0,1])$ с некоторым $\varepsilon>0$, $\rho(x_0,x_0)=0$ и

$$(K\varphi)(x_0)=\int_0^1\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha\frac{\rho(x_0,x)}{x-x_0}\varphi(x)dx,\ 0<x_0<1.$$

Тогда оператор K компактен в пространстве $C^\sigma[0,1]$.

Подставляя выражение $\mu(x)$ через $\zeta(x)$ в уравнение (6) и отбрасывая регулярные, в силу следствия из леммы 5, члены, получаем основное уравнение:

$$\frac{1-\sin(\pi\beta)}{\pi}\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-q(y))^\beta}\int_0^1\left(\frac{s(1-s)}{q(y)(1-q(y))}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-q(y)}-\frac{1}{s+q(y)-2q(y)s}\right)\zeta(s)ds+$$

$$+\beta(1-\beta)\cos(\pi\beta)\int_0^{q(y)}\frac{(Q'(t))^\beta}{(Q(t)-t)^\beta}F(\beta,1-\beta,2;-Z)\frac{\zeta(t)dt}{t-y}+\frac{\zeta(y)}{(y-q(y))^\beta}+$$

$$+\frac{1-\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1\zeta(s)ds\int_0^{q(y)}\left(\frac{s(1-s)}{t(1-t)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-t}-\frac{1}{s+t-2ts}\right)\frac{\beta(1-\beta)F(\beta,1-\beta,2;-Z)dt}{(Q'(t))^{-\beta}(Q(t)-t)^\beta(t-y)}+$$

$$+\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{q(y)}\frac{(\beta-1)(Q'(t))^\beta}{(Q(t)-t)^{\beta+1}}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1+Z)^{\beta-1}}{Z}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)\zeta(t)dt+$$

$$+\int_{q(y)}^y\frac{(q'(y))^{-\beta}}{(y-t)^{1+\beta}}\frac{(1+W)^{-\beta}}{W}\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right)\zeta(t)dt=\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi\gamma}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}}+$$

$$+(-2\cos(\pi\beta))\left(\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-q(y))^\beta}g(q(y))+\beta(1-\beta)\int_0^{q(y)}\frac{(Q'(t))^\beta}{(Q(t)-t)^\beta}F(\beta,1-\beta,2;-Z)\frac{g(t)dt}{t-y}\right).\quad(7)$$

Заметим, что ([153, с. 11])

$$\frac{Z}{1+Z}F(\beta,1-\beta,2;-Z)=\frac{\Gamma(1-2\beta)(1+Z)^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(1-\beta)}F\left(\beta,\beta-1,2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(2\beta-1)(1+Z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\beta)}F\left(-\beta,1-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right),$$

поэтому

$$\frac{\beta(1-\beta)\cos(\pi\beta)}{1+1/Z}F(\beta,1-\beta,2;-Z)+\frac{\sin(\pi\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\beta)}{\pi\Gamma(2-2\beta)(1+Z)^{1-\beta}}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)=$$

$$=\cos(\pi\beta)\frac{\beta\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(1+Z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-1,2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+$$

$$+\cos(\pi\beta)\frac{(1-\beta)(-\Gamma(2\beta-1))}{\Gamma^2(\beta)}(1+Z)^{\beta-1}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right).$$

Таким образом, уравнение (7) можно переписать в следующем виде:

$$(y-q(y))^{-\beta}\zeta(y)+\int_0^y P_1(y,t)\zeta(t)dt+\int_0^1 P_2(y,s)\zeta(s)ds=\tilde{g}(y), \qquad (8)$$

где

$$P_1(y,t)=\cos(\pi\beta)\frac{(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}\frac{P_{10}(y,t)}{Q(t)-y},\ 0<t<q(y),$$

$$P_{10}(y,t)=\frac{\beta\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(1+Z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-1,2\beta;\frac{1}{1+Z}\right)+$$

$$+\frac{(\beta-1)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}(1+Z)^{\beta-1}F\left(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\frac{1}{1+Z}\right),$$

$$P_1(y,t)=\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-t)^{\beta}}\frac{(1+W)^{-\beta}}{t-q(y)}\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1}{1+W}\right),\ q(y)<t<y;$$

$$P_2(y,s)=\frac{1-\sin(\pi\beta)}{\pi}\frac{(q'(y))^{1-\beta}}{(y-q(y))^{\beta}}\left(\frac{s(1-s)}{q(y)(1-q(y))}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-q(y)}-\frac{1}{s+q(y)-2q(y)s}\right)+$$

$$+\frac{1-\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{q(y)}\left(\frac{s(1-s)}{t(1-t)}\right)^{1/2-\beta}\left(\frac{1}{s-t}-\frac{1}{s+t-2ts}\right)\frac{\beta(1-\beta)F(\beta,1-\beta,2;-Z)dt}{(Q'(t))^{-\beta}(Q(t)-t)^{\beta}(t-y)};$$

$$\tilde{g}(y)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi\gamma}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\psi(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}}+$$

$$+(-2\cos(\pi\beta))\left(\frac{(q'(y))^{1-\beta}g(q(y))}{(y-q(y))^{\beta}}+\beta(1-\beta)\int_0^{q(y)}\frac{(Q'(t))^{\beta}}{(Q(t)-t)^{\beta}}F(\beta,1-\beta,2;-Z)\frac{g(t)dt}{t-y}\right).$$

III. Докажем однозначную разрешимость уравнения (8). Опираясь на результаты [156], выделим главные члены операторов в уравнении (8). Обозначим $l=q'(0)=(1-\alpha'(0))/(1+\alpha'(0))$, тогда $0<l<1$. В окрестности нуля $q(y)\sim ly$, $Q(y)\sim y/l$,

поэтому $Z \sim (ly/t-1)/(1-l)$, $W \sim (1/l - y/t)/(y/t-1)$, и (8) эквивалентно следующему уравнению:

$$\zeta(y) + \int_0^y K_1(t/y)\zeta(t)dt/t + \int_0^1 K_2(s/y)\zeta(s)ds/s = \bar{g}(y), \tag{9}$$

где

$$K_1(x) = \cos(\pi\beta)\frac{x^{1-\beta}l}{x-l}V\left(\frac{(1-l)x}{l(1-x)}\right),\ 0<x<l,$$

$$V(z) = \frac{\beta\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}z^{\beta}F(\beta,\beta-1,2\beta;z) - \frac{(1-\beta)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}z^{1-\beta}F(1-\beta,-\beta,2-2\beta;z),$$

$$K_1(x) = \frac{x^{1-\beta}l}{x-l}\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{l(1-x)}{x(1-l)}\right),\ l<x<1;$$

$$K_2(x) = \frac{1-\sin(\pi\beta)}{\pi x^{\beta}}\left(\frac{2(lx)^{3/2}}{x^2-l^2} - \int_0^l \frac{2x\sqrt{x\tau}}{x^2-\tau^2}\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-l/\tau}{1-l}\right)\frac{d\tau}{1-\tau}\right);$$

$$\bar{g}(y) = (1-l)^{\beta}y^{\beta}\tilde{g}(y).$$

В силу требований к решению задачи ([153, с. 129]) мы должны искать решение уравнения (9) в классе гельдеровых функций, удовлетворяющих условию $\zeta(y) = o(y^{2\beta-1})$ при $y \to +0$.

Сделав замену $t = e^{-s}$, $y = e^{-x}$ и обозначив $\varphi(x) = e^{(2\beta-1)x}\zeta(e^{-x})$, $h(x) = e^{(2\beta-1)x}\bar{g}(e^{-x})$, получим уравнение Винера-Хопфа [29, с. 55], решение которого ищем в классе функций, исчезающих на бесконечности. После стандартного продолжения на отрицательную полуось и перехода к образам Фурье получаем задачу сопряжения

$$(1+M(p))F^+(p) = F^-(p) + H^+(p), \tag{10}$$

$$M(p) = \int_0^1 x^{ip+2\beta-2}K_1(x)dx + \int_0^{+\infty} x^{ip+2\beta-2}K_2(x)dx.$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $1+M(p) \neq 0$ на вещественной прямой (в противном случае слегка изменим весовой показатель, сдвинув тем самым вещественную прямую).

Показатель гельдеровости будет определяться шириной полосы аналитического продолжения коэффициента в нижнюю полуплоскость. А именно, пусть $1+M(z) \neq 0$ и $1+l^{iz+\beta}\chi_{\beta}(z) \neq 0$ при $-\varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq 0$, тогда будем искать решение $\zeta(y)$ в классе $C^{\varepsilon}_{1-2\beta}[0,1]$.

В дальнейшем нам понадобится два различных представления функции $M(p)$.

Воспользовавшись формулой ([136, с. 298])

$$\chi_\beta(p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^{ip+\beta-1/2}dt}{t^2-1}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(ip+\beta-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{-\cos(\pi\beta)+i\,\mathrm{sh}(\pi p)}{\sin(\pi\beta)+\mathrm{ch}(\pi p)}$$

(заметим, что $|\chi_\beta(p)|<1$), выделим в коэффициенте $M(p)$ слагаемое, не исчезающее на бесконечности, и представим коэффициент в следующем специальном виде:

$$M(p)=(1-W_0^-(p))l^{ip+\beta}\chi_\beta(p)+W_1^-(p)+W_2(p),$$

где

$$W_m^-(p)=\int_0^1 x^{ip+\beta-1}w_m(x)dx,\ m=0,1,$$

$$w_0(x)=\frac{\beta(1-\beta)(1-\sin(\pi\beta))}{1-lx}F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-1/x}{1-l}\right);$$

$$w_1(x)=\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}2l\sqrt{lx}\left(\frac{1}{l^2-x^2}-\frac{x^{1-2\beta}}{1-l^2x^2}\right)+x^{\beta-1}K_1(x),\ 0<x<l,$$

$$w_1(x)=\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}2l\sqrt{lx}\left(\frac{1}{l^2-x^2}-\frac{1}{1-l^2x^2}\right)+x^{\beta-1}K_1(x),\ l<x<1;$$

$$W_2(p)=2\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\left(\int_0^1\frac{l^{3/2}x^{ip+\beta-1/2}}{1-l^2x^2}dx-\int_1^{+\infty}\frac{l^{3/2}x^{ip-\beta+1/2}}{x^2-l^2}dx\right)=\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4l^{2k+3/2}p}{(2k+1/2+\beta)^2+p^2}.$$

В дальнейшем нам будет удобно представить функцию $M(p)$ и в другом виде.

Выделим в $K_1(x)$ сингулярную часть в специальном виде:

$$a_l=\lim_{x\to l}(x-l)K_1(l)=l^{2-\beta}\beta(1-\beta)F(\beta,1-\beta,2;1)=l^{2-\beta}\sin(\pi\beta)/\pi,$$

$$K_1(x)=\frac{2l^{\beta-1/2}a_l x^{3/2-\beta}}{x^2-l^2}+K_{reg}(x),$$

$$\int_0^1 x^{ip+2\beta-2}K_1(x)dx=2l^{\beta-1/2}a_l\int_0^1\frac{x^{ip+\beta-1/2}}{x^2-l^2}dx+\int_0^1 x^{ip+2\beta-2}K_{reg}(x)dx=$$

$$=2l^{ip+\beta}\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{1/l}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt+R^-(p).$$

Далее,

$$\frac{\pi}{1-\sin(\pi\beta)}\int_0^{+\infty}x^{ip+2\beta-2}K_2(x)dx=$$

$$=2l^{ip+\beta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt-2l^{ip+\beta}\int_0^{+\infty}dt\int_0^1\frac{t^{ip+\beta-1/2}\sqrt{s}}{t^2-s^2}\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-1/s}{1-l}\right)\frac{ds}{1-ls}=$$

$$=2l^{ip+\beta}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt-\int_0^1\beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-1/s}{1-l}\right)\frac{s^{ip+\beta-1}ds}{1-ls}\int_0^{+\infty}\frac{u^{ip+\beta-1/2}}{u^2-1}du\right)=$$

$$= \pi l^{ip+\beta}\chi_\beta(p)\left(1-\int_0^1 \beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-1/s}{1-l}\right)\frac{s^{ip+\beta-1}ds}{1-ls}\right).$$

Итак,

$$\int_0^{+\infty} x^{ip+2\beta-2}K_2(x)dx = (1-\sin(\pi\beta))l^{ip+\beta}\chi_\beta(p)\left(1-\int_0^1 \beta(1-\beta)F\left(\beta,1-\beta,2;\frac{1-1/s}{1-l}\right)\frac{s^{ip+\beta-1}ds}{1-ls}\right),$$

или

$$\int_0^{+\infty} x^{ip+2\beta-2}K_2(x)dx = (1-\sin(\pi\beta))l^{ip+\beta}\chi_\beta(p) - l^{ip+\beta}\chi_\beta(p)W_0^-(p).$$

Таким образом,

$$M(p) = (1-\sin(\pi\beta)-W_0^-(p))l^{ip+\beta}\chi_\beta(p) + l^{ip+\beta}\sin(\pi\beta)\frac{2}{\pi}\int_0^{1/l}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt + R^-(p).$$

$$W_0^-(p) = \beta(1-\beta)(1-\sin(\pi\beta))\int_0^1 \frac{x^{ip+\beta-1}}{1-lx}F\left(1-\beta,\beta,2;\frac{1-1/x}{1-l}\right)dx.$$

$$W_0^-(p) = (1-\beta)(1-\sin(\pi\beta))\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{ip+\beta-1}}{1-lx}dx\int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^\beta\left(1-t\frac{1-1/x}{1-l}\right)^{-\beta}dt.$$

$$W_0^-(p) = (1-\beta)(1-\sin(\pi\beta))\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{ip+2\beta-1}}{1-lx}dx\int_0^1 \frac{(1-l)^\beta t^{-\beta}(1-t)^\beta}{((1-l)x+t-tx)^\beta}dt.$$

$$\int_0^{1/l}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt = \int_0^1\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt + \int_l^1\frac{t^{-ip-\beta+1/2}}{1-t^2}dt = -\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{ip+\beta+1/2+2k} + \sum_{k=0}^\infty\frac{1-l^{-ip-\beta+3/2+2k}}{-ip-\beta+3/2+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty\frac{2ip+2\beta-1}{(2k+1)^2-(1/2-ip-\beta)^2} - \sum_{k=0}^\infty\frac{l^{-ip-\beta+3/2+2k}}{2k+3/2-\beta-ip} = E(p).$$

Или:

$$\int_0^{1/l}\frac{t^{ip+\beta-1/2}}{t^2-1}dt = \int_0^{+\infty} - \int_{1/l}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\chi_\beta(p) - \int_0^l\frac{t^{-ip-\beta+1/2}}{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2}\chi_\beta(p) - \sum_{k=0}^\infty\frac{l^{-ip-\beta+3/2+2k}}{-ip-\beta+3/2+2k}.$$

Заметим, что функция $E(z)$ не имеет особенностей в нижней полуплоскости и определена как сумма сходящегося ряда.

$$E(-iy) = \sum_{k=0}^\infty\frac{2y+2\beta-1}{(2k+1)^2-(1/2-y-\beta)^2} - \sum_{k=0}^\infty\frac{l^{2k+3/2-\beta-y}}{2k+3/2-\beta-y}.$$

Лемма 6. $W_0^-(-iy) \le 1-\sin(\pi\beta)$ при $y \ge 0$.

Доказательство. Пусть

$$Q(y,l,\beta) = \int_0^1\frac{s^{y+2\beta-1}ds}{1-ls}\int_0^1\frac{(1-l)^\beta t^{-\beta}(1-t)^\beta dt}{((1-l)s+t(1-s))^\beta} = \frac{\pi W_0^-(-iy)}{(1-\beta)(1-\sin(\pi\beta))\sin(\pi\beta)},$$

тогда

$$Q(y,l,\beta)=\{\varepsilon=1-l\}=\varepsilon^{\beta}\int_0^1\frac{s^{y+2\beta-1}ds}{1-s+\varepsilon s}\int_0^1\frac{t^{-\beta}(1-t)^{\beta}dt}{(\varepsilon s+t(1-s))^{\beta}}=$$

$$=\varepsilon^{\beta}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{y}u^{2\beta-1}\frac{(1+u)^{-\beta}du}{1+\varepsilon u}\int_0^1\frac{t^{-\beta}(1-t)^{\beta}dt}{(\varepsilon u+t)^{\beta}}=\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{\beta}r^{2\beta-1}dr}{(\varepsilon r+1)^{\beta}}\int_0^1\left(\frac{tr}{1+tr}\right)^{y}\frac{(1-t)^{\beta}dt}{(1+\varepsilon tr)(1+tr)^{\beta}}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{v^{2\beta-1}dv}{(v+1)^{\beta}}\int_0^1\left(\frac{tv}{\varepsilon+tv}\right)^{y}\frac{(1-t)^{\beta}dt}{(1+tv)(\varepsilon+tv)^{\beta}}\le\int_0^{+\infty}\frac{v^{\beta-1}dv}{(v+1)^{\beta}}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-\beta}\frac{dt}{1+tv}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{v^{\beta-1}dv}{(v+1)^{\beta}}\int_0^{+\infty}\frac{w^{-\beta}dw}{(1+w)(1+(1+v)w)}=\int_0^{+\infty}\frac{v^{\beta-2}dv}{(v+1)^{\beta}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{(1+v)w^{-\beta}dw}{1+(1+v)w}-\int_0^{+\infty}\frac{w^{-\beta}dw}{1+w}\right)=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{v^{\beta-2}dv}{(v+1)^{\beta}}\left((1+v)^{\beta}-1\right)\int_0^{+\infty}\frac{w^{-\beta}dw}{1+w}=\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}\int_0^{+\infty}\left(1-(1+v)^{-\beta}\right)v^{\beta-2}dv=$$

$$=\frac{\pi\beta}{\sin(\pi\beta)}\int_0^{+\infty}(1+v)^{-\beta-1}\frac{v^{\beta-1}dv}{1-\beta}=\frac{\pi\beta}{\sin(\pi\beta)}\int_0^1\frac{t^{\beta-1}dt}{1-\beta}=\frac{\pi/(1-\beta)}{\sin(\pi\beta)},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Замечание. Очевидно, оценка $W_0^-(z)\le 1-\sin(\pi\beta)$ справедлива во всей нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z\le 0$.

Лемма 7. На каждом интервале вида $(-i(2n-\beta-1/2),-i(2n-\beta+3/2))$, $n=1,2,\ldots$, мнимой оси существует по крайней мере один нуль функции $1+M(z)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что все слагаемые функции $1+M(z)$ действительны на мнимой оси.

Рассмотрим функцию $P(z)=\left(1-\sin(\pi\beta)-W_0^-(z)\right)l^{iz+\beta}\chi_{\beta}(z)$ на интервале $(-i(2n-\beta-1/2),-i(2n-\beta+3/2))$ мнимой оси. В силу леммы 6 функция $P(z)$ равна минус бесконечности на левом конце этого интервала и плюс бесконечности – на его правом конце; отсюда, в силу ограниченности функции

$$l^{iz+\beta}\sin(\pi\beta)\frac{2}{\pi}\int_0^{1/l}\frac{t^{iz+\beta-1/2}}{t^2-1}dt+R^-(z)$$

в нижней полуплоскости, вытекает, что на этом интервале существует по крайней мере один корень уравнения $1+M(z)=0$, что и доказывает лемму.

Лемма 8. Индекс Коши (т.е. деленное на 2π приращение аргумента) функции $(1+M(p))/(1+l^{ip+\beta}\chi_{\beta}(p))$ по вещественной прямой неположителен.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник Π_n с вершинами $\pm A$, $\pm A - i(2n - \beta + 1)$, где A – достаточно большое положительное, n – достаточно большое натуральное число.

Функция $\chi_\beta(-iy) = \mathrm{tg}(\pi(y + \beta - 1/2)/2)$ монотонно возрастает на каждом интервале вида $(2n - \beta - 1/2, 2n - \beta + 3/2)$, $n = 1, 2, \ldots$, причем $\chi_\beta(-i(2n - \beta + 1)) > 0$, поэтому, начиная с некоторого n, на каждом подынтервале $(2n - \beta - 1/2, 2n - \beta + 1)$ существует корень уравнения $M(-iy) = -1$. На нижней стороне прямоугольника Π_n функция $M(z)$, очевидно, стремится к нулю с ростом n. Отсюда, с учетом результата леммы 7, вытекает, что, начиная с некоторого n, разность между количеством нулей и количеством полюсов в каждом прямоугольнике Π_n неотрицательна, что и доказывает лемму.

Следствие. Возможна факторизация $(1 + M(p))/(1 + l^{ip+\beta}\chi_\beta(p)) = X^-(p)/X^+(p)$, где $X^\pm(z)$ – пара т.н. канонических функций .

Поделив на $X^-(p)$ обе части уравнения (10), запишем задачу сопряжения (10) в виде

$$(1 + l^{ip+\beta}\chi_\beta(p))\Phi^+(p) = \Phi^-(p) + \mathrm{H}(p). \qquad (11)$$

Лемма 9. Задача сопряжения (11) однозначно разрешима.

Справедливость этой леммы вытекает из результатов § 2 гл. 3.

Следствие. Исходная задача эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Таким образом, существование решения исходной задачи вытекает из его единственности, что и доказывает основную теорему.

§ 2. ЗАДАЧА С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЛИНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается задача для уравнения Геллерстедта в области, часть границы которой в гиперболической области параллельна линии вырождения.

Рассмотрим уравнение Геллерстедта (1.1) в области D, ограниченной при $y \geq 0$ нормальной кривой

$$\Gamma = \left\{(x, y): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}, 0 \leq x \leq 1\right\} \qquad (1)$$

с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками

$$AC_1 = \left\{ (x, y): \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,\ 0 < x \le \frac{1}{4} \right\},$$

$$BC_2 = \left\{ (x, y): \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,\ \frac{3}{4} \le x < 1 \right\}$$

уравнения (1.1) и отрезком

$$C_1C_2 = \left\{ (x, y): \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4},\ y = -\left(\frac{m+2}{8}\right)^{\frac{2}{m+2}} \right\}.$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, через C – середину отрезка AB, через CC_1 и CC_2 – характеристики уравнения (1.1), соединяющие C с C_1 и C_2.

Задача. В области D найти функцию

$$u = u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1\left((D \cup C_1C_2) \setminus (\overline{CC_1 \cup CC_2})\right) \cap C^2\left((D^+ \cup D^-) \setminus (\overline{CC_1 \cup CC_2})\right),$$

удовлетворяющую уравнению (1.1) и краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s),\ u|_{AC_1} = \psi(\eta),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C_1C_2} = \chi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(s)$, $\psi(\eta)$, $\chi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. В дальнейшем будем полагать, что эти функции представимы в следующем виде: $\varphi(s) = \varphi_1(x) = y^2\overline{\varphi}_1(x)$, $(x, y) \in \Gamma$, $\overline{\varphi}_1(x) \in C[0,1]$; $\psi(\eta) = \eta^2\tilde{\psi}(\eta)$, $\tilde{\psi}(\eta) \in C^2[0,1] \cap C^{2,\delta}[0,1)$; $\chi(x) \in C^{1,\delta}(1/4, 3/4)$, причем на концах интервала $(1/4, 3/4)$ функция $\chi(x)$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1/4 + \beta/2$, $\beta = m/(2(m+2))$.

Замечание [153, с. 138]. Так как функция $a + bx + cy + dxy$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.1) при любых значениях постоянных a, b, c, d, то без ограничения общности можно считать, что $u(A) = u(B) = 0$.

Основная теорема. Решение задачи существует и единственно.

Единственность решения задачи устанавливается тем же методом, что и в § 1. Построив область $D' \subset D$ так же, как в § 1, удалим из нее малые подобласти, ограниченные участками характеристик

$$(C_1C)_{\varepsilon}^{\pm}:\ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon,\ (C_2C)_{\varepsilon}^{\pm}:\ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Эти участки дадут дополнительный вклад в сумму интегралов по границе, равный

$$I_\varepsilon = -\int\limits_{(C_1C)_\varepsilon^- \cup (CC_1)_\varepsilon^+} b(du/dy)^2\,dy - \int\limits_{(C_2C)_\varepsilon^- \cup (CC_2)_\varepsilon^+} b(du/dy)^2\,dy.$$

В силу непрерывности функции $u(x, y)$ скачок дифференциала du, взятого вдоль характеристики, при переходе через характеристику равен нулю, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$$

в силу непрерывности коэффициента $b(x, y)$. Вклад удаленных подобластей в двойной интеграл, очевидно, также будет малым. В остальном рассуждения те же.

Доказательство существования решения задачи разбивается на пять основных этапов.

I. Используя первые два из краевых условий (2), формулы решения задачи N в области D^+ и задачи Коши в области D^- (см. [153, с. 129-133]), получаем при $0 < x < 1/2$ хорошо известное уравнение на нормальную производную на отрезке AB, которую, как обычно, обозначаем через $\nu(x)$:

$$\nu(x) + \frac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)dt = F(x), \qquad (3)$$

где $F(x)$ – известная функция.

II. Используя формулу решения задачи Коши в области D^-, третье краевое условие (2) и вводя вспомогательные функции $\mu_\Lambda(x)$ и $\mu_\Pi(x)$, связанные с нормальной производной $\nu(x)$ соотношениями

$$\nu(x) \equiv \nu_\Lambda(x) = \int\limits_x^{1/2} \frac{\mu_\Lambda(s)ds}{(s-x)^{1-\beta}},\ 0 < x < \frac{1}{2},\ \nu(x) \equiv \nu_\Pi(x) = \int\limits_{1/2}^x \frac{\mu_\Pi(s)ds}{(x-s)^{1-\beta}},\ \frac{1}{2} < x < 1, \qquad (4)$$

получаем соотношение между $\mu_\Lambda(\xi)$ и $\mu_\Pi(\eta)$, $\xi = x - 1/4$, $\eta = x + 1/4$, $1/4 < x < 3/4$:

$$\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\mu_\Lambda(\xi) + \int\limits_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta\left(\frac{1}{\xi-s} - \frac{1}{\xi+s-2\xi s}\right)\mu_\Lambda(s)ds - \int\limits_\xi^{1/2}\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\eta-s} + R_\Lambda[\mu_\Lambda(\xi)] +$$

$$+\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\mu_\Pi(\eta) + \int\limits_{1/2}^1\left(\frac{1-s}{1-\eta}\right)^\beta\left(\frac{1}{s-\eta} - \frac{1}{s+\eta-2s\eta}\right)\mu_\Pi(s)ds - \int\limits_{1/2}^\eta\frac{\mu_\Pi(s)ds}{s-\xi} +$$

$$+ R_\Pi[\mu_\Pi(\eta)] = N(\eta), \qquad (5)$$

где R_Λ и R_Π – регулярные интегральные операторы, $N(\mu)$ – известная функция.

III. Подставляя (4) в (3) и выражая $\mu_\Lambda(\xi)$ через $\mu_\Pi(\eta)$, получаем второе соотношение между $\mu_\Lambda(\xi)$ и $\mu_\Pi(\eta)$, $0 < \xi < 1/2$:

$$\mu_{\Lambda}(\xi)=g_{\mu}(\xi)-\frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1}(\sigma(s,\xi))^{\omega+\beta}\frac{\mu_{\Pi}(s)ds}{s-\xi}+\int\limits_{1/2}^{1}J_{\mu}(\xi,s)\mu_{\Pi}(s)ds,\qquad(6)$$

где $\omega=1/4-\beta/2$, $\left|J_{\mu}(\xi,s)\right|\le C(1/2-\xi)^{-\omega-\beta}$, $g_{\mu}(\xi)$ – известная функция и для упрощения записи здесь и ниже используется обозначение $\sigma(t,z)=(t-1/2)/(1/2-z)$.

IV. Подставляя (6) в (5), получаем уравнение относительно $\mu_{\Pi}(\eta)$, $1/2<\eta<1$:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\omega\mu_{\Pi}(\eta)+\int\limits_{1/2}^{1}\left(\frac{1-s}{1-\eta}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{s-\eta}-\frac{1}{\eta+s-2\eta s}\right)\mu_{\Pi}(s)ds-\int\limits_{1/2}^{\eta}\frac{\mu_{\Pi}(s)ds}{s-\eta+1/2}+$$
$$+\int\limits_{1/2}^{1}\left[\operatorname{tg}\pi\omega\left(\frac{s}{\eta-1/2}\right)^{\beta}-\frac{1}{\cos\pi\omega}\left(\frac{s-1/2}{1-\eta}\right)^{\omega+\beta}\right]\frac{\mu_{\Pi}(s)ds}{s-\eta+1/2}+$$
$$+\operatorname{tg}\pi\omega\int\limits_{1/2}^{1}\left[(-\sigma(s,\eta))^{\omega+\beta}-1\right]\frac{\mu_{\Pi}(s)ds}{s-\eta}+\int\limits_{1/2}^{1}k(\eta,s)\mu_{\Pi}(s)ds+R_{\Pi}[\mu_{\Pi}(\eta)]+h_{\mu}(\eta)=N(\eta),\qquad(7)$$

где $h_{\mu}(\eta)$ – известная функция, $k(\eta,s)$ – регулярное ядро.

V. После регуляризации (7) переходит в следующее уравнение, $1/2<\eta<1$:

$$\mu_{\Pi}(\eta)+\frac{\sin^{2}\pi\omega}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1}\left[(-\sigma(t,\eta))^{\omega+\beta}-(-\sigma(t,\eta))^{-\omega}\right]\frac{\mu_{\Pi}(t)dt}{t-\eta}+T[\mu_{\Pi}(\eta)]=N_{1}(\eta),\qquad(8)$$

где через T обозначен регулярный интегральный оператор, к которому применима теория Фредгольма, $N_{1}(\eta)$ – известная функция. Уравнение (8) путем стандартной замены переменных и введения новой функции сводится к одностороннему (по терминологии [29, с. 55]) уравнению (или уравнению Винера-Хопфа) с нулевым индексом, поэтому существование решения уравнения, а значит, и всей задачи, вытекает из единственности решения задачи.

Перейдем теперь к подробному доказательству указанных соотношений.

I. Введем традиционные обозначения:

$$\tau(x)=u(x,0),\ \nu(x)=\lim_{y\to0}\partial u(x,0)/\partial y,\ 0<x<1.$$

Решая задачу N ([153, с. 133]) в области D^{+}, получаем первое соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на интервале $(0,1)$:

$$\tau(x)=-k_{1}\int\limits_{0}^{1}\left[\left|x-t\right|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]\nu(t)dt+\Phi(x),\qquad(9)$$

$$k_{1}=\frac{1}{4\pi}(2-4\beta)^{2\beta}\frac{\Gamma^{2}(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

$$\Phi(x)=-\int_0^l \varphi(s)\rho_1(s;\,x,\,0)ds=2k_1\beta(1-2\beta)^{-2\beta}x(1-x)\int_0^1 \frac{[t(1-t)]^{\beta-1/2}\varphi_1(t)dt}{[x^2+(1-2x)t]^{1+\beta}},\ \varphi_1(t)=\varphi(s).$$

Теперь рассмотрим задачу в области D^-. Согласно [153, с. 103], общее решение задачи Коши с заданными на интервале $(0,1)$ функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ имеет вид

$$u(x,\,y)=\gamma_1\int_0^1 \frac{\tau[x+\bar{y}(2t-1)]}{t^{1-\beta}(1-t)^{1-\beta}}dt+(2-4\beta)^{1-2\beta}\gamma_2 y\int_0^1 \frac{\nu[x+\bar{y}(2t-1)]}{t^{\beta}(1-t)^{\beta}}dt,$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2=\frac{1}{2}(2-4\beta)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},\ \bar{y}=(1-2\beta)(-y)^{(m+2)/2},$$

или с учетом обозначения $\gamma_3=(2-4\beta)^{1-2\beta}\gamma_2$,

$$u(x,\,y)=\gamma_1\int_0^1 \frac{\tau[x+\bar{y}(2t-1)]}{t^{1-\beta}(1-t)^{1-\beta}}dt+\gamma_3 y\int_0^1 \frac{\nu[x+\bar{y}(2t-1)]}{t^{\beta}(1-t)^{\beta}}dt. \qquad (10)$$

Приравнивая решение заданной граничной функции $\psi(\eta)$ на AC_1, после стандартных преобразований ([153], с. 129) с помощью (9) получаем (3), причем

$$F(x)=\frac{\sin 2\pi\beta}{\gamma\pi(1+\sin\pi\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},\ \gamma=\frac{1}{2}(2-4\beta)^{2\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)},\ f(x)=\Phi(x)-\psi_1(x),$$

$$\psi_1(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}\int_0^x t^{2\beta}x^{-\beta}(x-t)^{-\beta}\left(\psi'(t)+\beta\frac{\psi(t)}{t}\right)dt.$$

II. Теперь необходимо найти нормальную производную функции $u(x,\,y)$ на C_1C_2 и приравнять ее заданной функции $\chi(x)$, для чего сначала подставим (9) в (10). После простых преобразований получим

$$u(x,\,y)=-k_1\int_0^{x-\bar{y}} \frac{\nu(t)dt}{\left[(x-t)^2-\bar{y}^2\right]^{\beta}}-k_1\frac{1+\sin\pi\beta}{\cos\pi\beta}\int_{x-\bar{y}}^{x+\bar{y}} \frac{\nu(t)dt}{\left[\bar{y}^2-(x-t)^2\right]^{\beta}}-$$

$$-k_1\int_{x+\bar{y}}^1 \frac{\nu(t)dt}{\left[(x-t)^2-\bar{y}^2\right]^{\beta}}+k_1\int_0^1 \frac{(1-2t)^{-2\beta}\nu(t)dt}{\left|\bar{y}^2-\left((x+t-2xt)/(1-2t)\right)^2\right|^{\beta}}+\Phi_1(x,\,\bar{y}), \qquad (11)$$

$$\Phi_1(x,\,\bar{y})=\gamma_1\int_0^1 \frac{\Phi(x+\bar{y}(2t-1))}{t^{1-\beta}(1-t)^{1-\beta}}dt.$$

Замечание. Согласно [153, с. 46], поведение функции $\Phi(x)$ вблизи $x=0$ и $x=1$ одинаково, причем вблизи $x=0$ $\Phi'(x)=O(x^{1-4\beta})$. Из представления

$$\frac{\partial\Phi_1(x,\,\bar{y})}{\partial\bar{y}}=\gamma_1\int_0^1 \frac{(2t-1)\Phi'(x+\bar{y}(2t-1))}{t^{1-\beta}(1-t)^{1-\beta}}dt$$

вытекает ограниченность $\partial\Phi_1(x,\,\bar{y})/\partial\bar{y}$.

Для вычисления нормальной производной введем обозначения: $\xi = x - \bar{y}$, $\eta = x + \bar{y}$ и воспользуемся тем, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}\frac{d\bar{y}}{dy},\ \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \eta - \xi\big|_{C_1C_2} = \bar{y}\big|_{C_1C_2} = 1/4.$$

Разобьем интегралы в (11) на содержащие $\nu_\Lambda(t)$ и $\nu_\Pi(t)$ (см. (4)) и рассмотрим сначала первую группу. Пусть

$$I = \int_0^{x-\bar{y}} \frac{\nu(t)dt}{\left[(x-t)^2 - \bar{y}^2\right]^\beta},\ J = \int_{x-\bar{y}}^{1/2} \frac{\nu(t)dt}{\left[(x-t)^2 - \bar{y}^2\right]^\beta},\ K = \int_0^{1/2} \frac{(1-2t)^{-2\beta}\nu(t)dt}{\left|\bar{y}^2 - \left((x+t-2xt)/(1-2t)\right)^2\right|^\beta}. \quad (12)$$

Тогда, используя (4):

$$I = \int_0^\xi \frac{\nu(t)dt}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta} = \int_0^\xi \frac{dt}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta}\int_t^{1/2}\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{(s-t)^{1-\beta}} = \int_0^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_0^{\min(\xi,s)}\frac{(s-t)^{\beta-1}dt}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta} =$$

$$= \int_0^\xi \mu_\Lambda(s)ds\int_0^s \frac{(s-t)^{\beta-1}dt}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta} + \int_\xi^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_0^\xi\frac{(s-t)^{\beta-1}dt}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta}.$$

Делая замену $z = (s-t)/(\xi-t)$, получаем

$$I = \int_0^\xi \mu_\Lambda(s)ds\int_0^{s/\xi}\frac{z^{\beta-1}dz}{(1-z)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^\beta} + \int_\xi^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_{s/\xi}^{+\infty}\frac{z^{\beta-1}dz}{(z-1)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^\beta},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} = \mu_\Lambda(\xi)\pi\operatorname{ctg}\pi\beta(\eta-\xi)^{-\beta} + \int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{s-\xi}\eta^{-\beta} +$$

$$+\int_0^\xi \mu_\Lambda(s)ds\int_0^{s/\xi}\frac{z^{\beta-1}dz(-\beta)z/(1-z)}{(1-z)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}} + \int_\xi^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_{s/\xi}^{+\infty}\frac{z^{\beta-1}dz(-\beta)z/(1-z)}{(z-1)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = \int_0^\xi \mu_\Lambda(s)ds\int_0^{s/\xi}\frac{(-\beta)z^{\beta-1}dz}{(1-z)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}} +$$

$$+\int_\xi^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_{s/\xi}^{+\infty}\frac{(-\beta)z^{\beta-1}dz}{(z-1)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial I}{\partial \eta} - \frac{\partial I}{\partial \xi} = -\mu_\Lambda(\xi)\pi\operatorname{ctg}\pi\beta(\eta-\xi)^{-\beta} + \tilde{R}_I,$$

где

$$\tilde{R}_I = -\int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{s-\xi}\eta^{-\beta} + \int_0^\xi\mu_\Lambda(s)ds\int_0^{s/\xi}\frac{z^{\beta-1}dz(-\beta)(1-z/(1-z))}{(1-z)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}} +$$

$$+\int_\xi^{1/2}\mu_\Lambda(s)ds\int_{s/\xi}^{+\infty}\frac{z^{\beta-1}dz(-\beta)(1-z/(1-z))}{(z-1)(\eta-(s-\xi z)/(1-z))^{\beta+1}},$$

или, возвращаясь к старым переменным,

$$\widetilde{R}_I = \int_0^{1/2} \left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta} \frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\xi - s} \eta^{-\beta} + \int_0^{1/2} \mu_\Lambda(s)ds \int_0^{\min(s,\xi)} \frac{(s-t)^{\beta-1}(-\beta)(\xi + t - 2s)dt}{(\xi - s)(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}}.$$

Докажем, что $\widetilde{R}_I$ можно представить в виде

$$\widetilde{R}_I = \int_0^{1/2} \left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta} \frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\xi - s} (\eta - \xi)^{-\beta} \left[1 + O\left(|\xi - s|^{\beta}\right)\right].$$

Замечание. Здесь и далее под $O(f(x))$ будем понимать произведение $f(x)$ и некоторой ограниченной функции; символом C будем обозначать произвольную положительную постоянную.

Действительно,

$$\widetilde{R}_I = \int_0^{1/2} \frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\xi - s} R_I,$$

где

$$R_I = \left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta} \eta^{-\beta} + \int_0^{\min(s,\xi)} \frac{(s-t)^{\beta-1}(-\beta)(\xi + t - 2s)dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}} = R_1 + R_2,$$

$$R_1 = \left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta} \eta^{-\beta} - \int_0^{\min(s,\xi)} \left(\frac{s-t}{\xi - t}\right)^{\beta} \frac{(-\beta)dt}{(\eta - t)^{\beta+1}},\ R_2 = (\xi - s) \int_0^{\min(s,\xi)} \frac{(s-t)^{\beta-1}(-\beta)dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}}.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$R_2 = (\xi - s)\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta} I_2,\ I_2 = \int_0^{\min(s,\xi)} \left(\frac{\xi}{s}\right)^{\beta} \frac{(s-t)^{\beta-1}(-\beta)dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}}.$$

Тогда для $\xi < s$

$$|I_2| < \int_0^{\xi} \frac{(s-t)^{\beta-1}\beta dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}} < \frac{(s-\xi)^{\beta-1}\beta}{(\eta - \xi)^{\beta+1}} \int_0^{\xi} \frac{dt}{(\xi - t)^{\beta}} < C(s - \xi)^{\beta-1},$$

для $\xi > s$

$$|I_2| < \int_0^{s} \left(\frac{\xi}{s}\right)^{\beta} \frac{(s-t)^{\beta-1}\beta dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta+1}} < \left(\frac{\xi}{s}\right)^{\beta} \frac{\beta}{(\xi - s)^{\beta}(\eta - s)^{\beta+1}} \int_0^{s} (s-t)^{\beta-1} dt =$$

$$= \frac{\xi^{\beta}}{(\xi - s)^{\beta}(\eta - s)^{\beta+1}} < C(\xi - s)^{-\beta} < C(\xi - s)^{\beta-1}.$$

Следовательно, $R_2 = (s/\xi)^{\beta} O\left(|\xi - s|^{\beta}\right)$.

Теперь рассмотрим R_1. Так как

$$\eta^{-\beta}-(\eta-\xi)^{-\beta}=\int_0^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-\xi)^{\beta+1}},$$

то

$$R_1=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}+\overline{R}_1,\ \overline{R}_1=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}-\int_0^{\min(s,\xi)}\left(\frac{s-t}{\xi-t}\right)^{\beta}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}},$$

и для $\xi<s$

$$\overline{R}_1=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}-\int_0^{\xi}\left(\frac{s-t}{\xi-t}\right)^{\beta}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}\overline{R}_{10},$$

$$\overline{R}_{10}=1-\left(\frac{\xi}{s}\right)^{\beta}\left(\frac{s-t}{\xi-t}\right)^{\beta}=\frac{(\xi s-st)^{\beta}-(\xi s-\xi t)^{\beta}}{(\xi s-st)^{\beta}},\ \left|\overline{R}_{10}\right|\le C\frac{\left|\xi t-st\right|^{\beta}}{(\xi s-st)^{\beta}}=C\frac{t^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}}{s^{\beta}(\xi-t)^{\beta}},$$

$$\left|\overline{R}_1\right|\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\xi}\frac{\beta dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}\frac{t^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}}{s^{\beta}(\xi-t)^{\beta}}\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\frac{\beta\left|\xi-s\right|^{\beta}}{(\eta-\xi)^{\beta+1}}\int_0^{\xi}\frac{dt}{(\xi-t)^{\beta}}\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}.$$

Оценим $\overline{R}_1$ для $\xi>s$:

$$\overline{R}_1=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}-\int_0^{s}\left(\frac{s-t}{\xi-t}\right)^{\beta}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{s}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}+\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_s^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}-$$

$$-\int_0^{s}\left(\frac{s-t}{\xi-t}\right)^{\beta}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}=\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{s}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}\overline{R}_{10}+\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_s^{\xi}\frac{(-\beta)dt}{(\eta-t)^{\beta+1}},$$

$$\left|\overline{R}_1\right|\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{s}\frac{\beta dt}{(\eta-t)^{\beta+1}}\frac{t^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}}{s^{\beta}(\xi-t)^{\beta}}+C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}\le$$

$$\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{s}\frac{\left|\xi-s\right|^{\beta}dt}{(\xi-t)^{\beta}}+C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}\le C\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\left|\xi-s\right|^{\beta}.$$

Следовательно, $R_1=(s/\xi)^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}+(s/\xi)^{\beta}O\left(\left|\xi-s\right|^{\beta}\right)$, и искомое представление $\tilde{R}_1$ доказано.

Таким образом,

$$\frac{\partial I}{\partial\overline{y}}=-\pi\operatorname{ctg}\pi\beta(\eta-\xi)^{-\beta}\mu_{\Lambda}(\xi)+\int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta}\frac{\mu_{\Lambda}(s)ds}{s-\xi}(\eta-\xi)^{-\beta}\left[1+O\left(\left|\xi-s\right|^{\beta}\right)\right].$$

Теперь рассмотрим второй интеграл из (12), записав его в виде

$$J=\int_{\xi}^{1/2}\frac{\nu(t)dt}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\beta}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial J}{\partial \eta} - \frac{\partial J}{\partial \xi} = \int_{\xi}^{1/2} \frac{\nu(t)dt(-\beta)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\beta+1}} - \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{\xi}^{1/2} \frac{\nu(t)dt}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\beta}}.$$

Изменяя порядок интегрирования и применяя замену $t = \xi + (s-\xi)\tau$, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = \int_{\xi}^{1/2} \frac{dt(-\beta)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\beta+1}} \int_{t}^{1/2} \frac{\mu_{\Lambda}(s)ds}{(s-t)^{1-\beta}} = \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(-\beta)d\tau}{(\eta-\xi-(s-\xi)\tau)^{\beta+1}},$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{\xi}^{1/2} \frac{dt}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\beta}} \int_{t}^{1/2} \frac{\mu_{\Lambda}(s)ds}{(s-t)^{1-\beta}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau}{(\eta-\xi-(s-\xi)\tau)^{\beta}} =$$

$$= -\mu_{\Lambda}(\xi)\int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau}{(\eta-\xi)^{\beta}} + \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(-\beta)(\tau-1)d\tau}{(\eta-\xi-(s-\xi)\tau)^{\beta+1}} =$$

$$= -\mu_{\Lambda}(\xi)\frac{\pi}{\sin \pi\beta}(\eta-\xi)^{-\beta} + \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(-\beta)(\tau-1)d\tau}{(\eta-\xi-(s-\xi)\tau)^{\beta+1}},$$

откуда

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{y}} = \mu_{\Lambda}(\xi)\frac{\pi}{\sin \pi\beta}(\eta-\xi)^{-\beta} + \tilde{R}_J,$$

$$\tilde{R}_J = \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(-\beta)(2-\tau)d\tau}{(\eta-\xi-(s-\xi)\tau)^{\beta+1}} = \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds R_J,$$

$$R_J = (\eta-\xi)^{-\beta-1}(-\beta)\int_{0}^{1} \frac{\tau^{-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(2-\tau)d\tau}{(1-z\tau)^{\beta+1}},\ z = \frac{s-\xi}{\eta-\xi}.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = (1-\tau)/(1-z\tau)$:

$$R_J = (\eta-\xi)^{-\beta-1}(-\beta)\int_{0}^{1} \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}}{(1-tz)^{-\beta}}\left(2-\frac{1-t}{1-tz}\right)\frac{dt}{1-z} \equiv (\eta-\xi)^{-\beta-1}(-\beta)\frac{\theta(z)}{1-z}.$$

Нетрудно доказать, что $\theta(z) = \theta(1) + O\left((1-z)^{\beta}\right)$. Отсюда следует, что

$$R_J = (\eta-\xi)^{-\beta}(\eta-s)^{-1}(-\beta\theta(z)) = (\eta-\xi)^{-\beta}(\eta-s)^{-1}\left[-1+O\left(((\eta-s)/(\eta-\xi))^{\beta}\right)\right],$$

$$\tilde{R}_J = \int_{\xi}^{1/2} \mu_{\Lambda}(s)ds \frac{(\eta-\xi)^{-\beta}}{\eta-s}\left[-1+O\left(\left(\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\right)^{\beta}\right)\right].$$

Теперь рассмотрим третий интеграл из (12). Сделаем в нем замену переменной $t = \tau/(2\tau-1)$:

$$K = \int_{-\infty}^{0} \frac{(1-2\tau)^{2\beta-2}\nu(\tau/(2\tau-1))d\tau}{\left[(x-\tau)^2-\bar{y}^2\right]^{\beta}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{(1-2\tau)^{2\beta-2}d\tau}{\left[(x-\tau)^2-\bar{y}^2\right]^{\beta}} \int_{\tau/(2\tau-1)}^{1/2} \frac{\mu_{\Lambda}(s)ds}{(s-\tau/(2\tau-1))^{1-\beta}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{(1-2\tau)^{2\beta-2}d\tau}{\left[(x-\tau)^2-\bar{y}^2\right]^{\beta}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu_{\Lambda}(\zeta/(2\zeta-1))d\zeta}{(\tau-\zeta)^{1-\beta}(1-2\tau)^{\beta-1}(1-2\zeta)^{\beta+1}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mu_{\Lambda}(\zeta/(2\zeta-1))d\zeta}{(1-2\zeta)^{\beta+1}} R_K,$$

$$R_K = \int_\zeta^0 \frac{(1-2\tau)^{\beta-1}(\tau-\zeta)^{\beta-1}d\tau}{\left[(x-\tau)^2-\bar{y}^2\right]^\beta} = \int_\zeta^0 \frac{(1-2\tau)^{\beta-1}(\tau-\zeta)^{\beta-1}d\tau}{(\xi-\tau)^\beta(\eta-\tau)^\beta}.$$

Тогда

$$\frac{\partial R_K}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial R_K}{\partial \eta} - \frac{\partial R_K}{\partial \xi} = \int_\zeta^0 \frac{(1-2\tau)^{\beta-1}(\tau-\zeta)^{\beta-1}\beta(\eta-\xi)d\tau}{(\xi-\tau)^{\beta+1}(\eta-\tau)^{\beta+1}}.$$

Сделаем замену переменной $\tau = (t-1)/(t/\xi - 1/\zeta)$:

$$\frac{\partial R_K}{\partial \eta} - \frac{\partial R_K}{\partial \xi} = \left(-\frac{\zeta}{\xi}\right)^\beta \frac{\beta(\eta-\xi)}{\xi-\zeta}\int_0^1 \left(1-2\zeta\frac{1-t}{1-\zeta t/\xi}\right)^{\beta-1}\left(\eta-\zeta\frac{1-t}{1-\zeta t/\xi}\right)^{-\beta-1} t^{\beta-1}dt.$$

Обозначим интеграл из правой части последнего равенства через $\tilde{R}_K$, тогда при $\zeta \to 0-0$

$$\tilde{R}_K = \int_0^1 \frac{1+O(\zeta)}{(\eta-\xi)^{\beta+1}}\left(1+\frac{\xi-\zeta(1-t)/(1-\zeta t/\xi)}{\eta-\xi}\right)^{-\beta-1} t^{\beta-1}dt =$$

$$= \frac{1+O(\zeta)}{(\eta-\xi)^{\beta+1}}\int_0^1 \left(1+O\left(\xi-\zeta\frac{1-t}{1-\zeta t/\xi}\right)\right)t^{\beta-1}dt = \frac{1+O(\zeta)+O(\xi-\zeta)}{\beta(\eta-\xi)^{\beta+1}}.$$

При $\zeta \to -\infty$ сделаем в интеграле замену $x = (1-t)/(1-\zeta t/\xi)$:

$$\tilde{R}_K = \left(1-\frac{\zeta}{\xi}\right)\int_0^1 \frac{((1-2\zeta x)/(\eta-\zeta x))^\beta (1-x)^{\beta-1}dx}{(1-2\zeta x)(\eta-\zeta x)(1-\zeta x/\xi)^{\beta+1}} \le$$

$$\le C\left(1-\frac{\zeta}{\xi}\right)\int_0^1 \frac{\xi^{\beta+1}(1-x)^{\beta-1}dx}{(1-2\zeta x)(\eta-\zeta x)(\xi-\zeta x)^{\beta+1}} = C\left(1-\frac{\zeta}{\xi}\right)\left\{\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1\right\} \le$$

$$\le C\left(1-\frac{\zeta}{\xi}\right)\left\{\frac{C_1\xi^{\beta+1}}{|\zeta|}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+2y)(\eta+y)(\xi+y)^{\beta+1}} + \frac{C_2\xi^{\beta+1}}{|\zeta|^{3+\beta}}\right\} \le \frac{C(\xi-\zeta)}{|\zeta|}.$$

Объединяя полученные оценки, получаем

$$\frac{\partial R_K}{\partial \eta} - \frac{\partial R_K}{\partial \xi} = \frac{(-\zeta/\xi)^\beta}{(\eta-\xi)^\beta}\left[\frac{1}{\xi-\zeta} + O\left(\frac{1}{1+|\zeta|}\right)\right].$$

Подставим эту формулу в интеграл K и вернемся к переменной $s = \zeta/(2\zeta-1)$:

$$\frac{\partial K}{\partial \bar{y}} = \int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta \mu_\Lambda(s)ds(\eta-\xi)^{-\beta}\left[\frac{1}{\xi+s-2\xi s} + O(1)\right].$$

Таким образом, интегралы в (11), содержащие $\nu_\Lambda(x)$, могут быть приведены к виду

$$\pi \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\mu_\Lambda(\xi) + \int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta\left(\frac{1}{\xi-s}-\frac{1}{\xi+s-2\xi s}\right)\mu_\Lambda(s)ds - \int_\xi^{1/2}\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\eta-s} + R_\Lambda[\mu_\Lambda(\xi)],$$

$$R_\Lambda = \int_\xi^{1/2} O\left(|\eta - s|^{\beta-1}\right)\mu_\Lambda(s)ds + \int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta (\eta-\xi)^{-\beta} O\left(|\xi - s|^{\beta-1}\right)\mu_\Lambda(s)ds +$$

$$+ \int_0^{1/2}\left(\frac{s}{\xi}\right)^\beta (\eta-\xi)^{-\beta} O(1)\mu_\Lambda(s)ds\,.$$

Нетрудно заметить, что интегралы с $\nu_\Pi(x)$ в (11) симметричны интегралам с $\nu_\Lambda(x)$, поэтому преобразования для интегралов с $\nu_\Pi(x)$ выполняются аналогично, и мы приходим к уравнению (5), в котором

$$N(\eta) = N\left(x+\frac{1}{4}\right) = -\frac{(\eta-\xi)^\beta}{k_1}\left[\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{y}}\right]\Bigg|_{\bar{y}=1/4} = -\frac{2^{-\beta}}{k_1}\left[-\left(4(1-2\beta)\right)^{2\beta}\chi(x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{y}}\Bigg|_{\bar{y}=1/4}\right].$$

III. Рассмотрим уравнение (3) как соотношение между $\nu_\Lambda(x)$ и $\nu_\Pi(x)$ и разрешим его относительно $\nu_\Lambda(x)$. Перейдем для удобства к другим переменным: $\nu_l(x) = \nu(x/2)$, $\nu_r(x) = \nu((x+1)/2)$, $0 < x < 1$,

$$\nu_l(x) + \frac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-xt}\right)\nu_l(t)dt = g(x), \qquad (13)$$

где

$$g(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)}\int_0^1\left(\frac{t+1}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{1+t-x} - \frac{1}{1+t-xt}\right)\nu_r(t)dt\,.$$

Считая правую часть $g(x)$ известной функцией, решим это сингулярное уравнение ([153, с. 152], [104, с. 122-134]):

$$\nu_l(x) = \frac{1+\sin\pi\beta}{2}g(x) - \frac{\cos\pi\beta}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2\omega}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\omega}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-xt}\right)g(t)dt\,,$$

где здесь и далее $\omega = 1/4 - \beta/2$.

Замечание. Решение не содержит слагаемого с произвольной постоянной, поскольку это слагаемое не принадлежит классу допустимых функций.

Меняя в этом уравнении порядок интегрирования, окончательно получаем

$$\nu_l(x) = g_1(x) - \frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int_0^1\left(\frac{s}{1-x}\right)^{\omega}\left(\frac{s+1}{x}\right)^{2\omega}\left(\frac{1}{1+s-x} - \frac{1}{1+s-sx}\right)\nu_r(s)ds\,, \qquad (14)$$

$$g_1(x) = \frac{1+\sin\pi\beta}{2}F\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\pi\beta}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2\omega}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\omega}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-xt}\right)F\left(\frac{t}{2}\right)dt\,.$$

Теперь в этом выражении перейдем к функциям $\mu_\Lambda(x)$ и $\mu_\Pi(x)$. Рассмотрим

$$\nu_l(x)\equiv\nu\left(\frac{x}{2}\right)=\int\limits_{x/2}^{1/2}\frac{\mu_\Lambda(t)dt}{(t-x/2)^{1-\beta}}=\int\limits_{x}^{1}\frac{2^{-\beta}\mu_\Lambda(\zeta/2)d\zeta}{(\zeta-x)^{1-\beta}}.$$

Пусть $2^{-\beta}\mu_\Lambda(\zeta/2)=\mu_l(x)$, тогда

$$\nu_l(x)=\int\limits_{x}^{1}\frac{\mu_l(\zeta)d\zeta}{(\zeta-x)^{1-\beta}}.$$

Следовательно,

$$\mu_l(\zeta)=-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}M'(\zeta),\ M(\zeta)=\int\limits_{\zeta}^{1}\frac{\nu_l(x)dx}{(x-\zeta)^{\beta}}.$$

Подставляя в выражение для $M(\zeta)$ правую часть из формулы (14), получаем

$$M(\zeta)=g_2(\zeta)-\frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int\limits_0^1 s^{\omega}(s+1)^{2\omega}\nu_r(s)ds\int\limits_{\zeta}^{1}\frac{(1-x)^{-\omega}x^{-2\omega}}{(x-\zeta)^{\beta}}\left[\frac{1}{1+s-x}-\frac{1}{1+s-sx}\right]dx,$$

$$g_2(\zeta)=\int\limits_{\zeta}^{1}\frac{g_1(x)dx}{(x-\zeta)^{\beta}}.$$

Обозначим

$$L(\zeta,z)=\int\limits_{\zeta}^{1}\frac{(1-x)^{-\omega}x^{-2\omega}dx}{(x-\zeta)^{\beta}(z-x)},\ z>1,\ \tilde{L}(\zeta,s)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[L(\zeta,1+s)-\frac{1}{s}L\left(\zeta,\frac{1+s}{s}\right)\right],$$

тогда

$$M'(\zeta)=g_2'(\zeta)-\pi^{-1}\sin\pi\omega\int\limits_0^1 s^{\omega}(s+1)^{2\omega}\nu_r(s)\tilde{L}(\zeta,s)ds.$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\nu_r(s)$ (см. (4) и (13)) и обозначая $\mu_r(t)=2^{-\beta}\mu_\Pi((1+t)/2)$, получаем

$$M'(\zeta)=g_2'(\zeta)-\pi^{-1}\sin\pi\omega\int\limits_0^1 J_M(\zeta,t)\mu_r(t)dt,\ J_M(\zeta,t)=\int\limits_{t}^{1}\frac{s^{\omega}(1+s)^{2\omega}}{(s-t)^{1-\beta}}\tilde{L}(\zeta,s)ds.$$

Можно доказать, что для $L(\zeta,z)$ справедлива формула

$$\frac{\partial L(\zeta,z)}{\partial\zeta}=\frac{l(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{\beta(z-1)}{(1-\zeta)(\zeta-z)}L(\zeta,z),$$

где $l(\zeta)=(1-\zeta)^{-\omega-\beta}(\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\omega)/\Gamma(1-\omega-\beta))F(1-\omega,2\omega,1-\omega-\beta;1-\zeta)$,

$F(a,b,c;z)\equiv{}_2F_1(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция.

Замечание. Отсюда следует, что ядро $\tilde{L}(\zeta,s)$ ограничено при $\zeta\to 0$.

В интеграле $J_M(\zeta,t)$ выделим главную часть $J_0(\zeta,t)$, которая после ряда преобразований будет иметь вид

$$J_0(\zeta,t)=t^{\omega+\beta-1}\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta)^{1-\omega-\beta}\,j_0(\zeta,t),\ \ j_0(\zeta,t)=\int_0^1\int_0^1\frac{\tau^{-\omega-\beta}(1-\tau)^{\beta-1}s^{-\omega}(1-s)^{-\beta}}{1+(1-\zeta)\tau s/t}\,d\tau ds\,.$$

Так как

$$j_0(\zeta,t)=\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\left(\frac{1-\zeta}{t}\right)^{\omega+\beta-1}\int_0^{(1-\zeta)/t}\frac{s^{-\omega-\beta}ds}{1+s}\,,$$

то

$$J_0(\zeta,t)=\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{(1-\zeta)/t}\frac{s^{-\omega-\beta}ds}{1+s}=-\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\left(\frac{1-\zeta}{t}\right)^{-\omega-\beta}\frac{1}{1+t-\zeta}\,.$$

Можно доказать, что $\left|J_M(\zeta,t)-J_0(\zeta,t)\right|\le C(1-\zeta)^{-\omega-\beta}$; возвращаясь к старым переменным, окончательно получаем

$$\mu_\Lambda(\xi)=g_\mu(\xi)-\frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int_{1/2}^1(\sigma(s,\xi))^{\omega+\beta}\frac{\mu_\Pi(s)ds}{s-\xi}+\int_{1/2}^1J_\mu(\xi,s)\mu_\Pi(s)ds\,,\ 0<\xi<1/2\,,\quad(15)$$

где $g_\mu(\xi)$ – известная функция, $\left|J_\mu(\xi,x)\right|\le C(1/2-\xi)^{-\omega-\beta}$.

IV. Подставляя выражение (15) для $\mu_\Lambda(\xi)$ в (5), получаем несколько интегралов, в которых необходимо изменить порядок интегрирования и оценить ядро. Рассмотрим эти операции на примере одного из них:

$$-\int_\xi^{1/2}\frac{\mu_\Lambda(s)ds}{\eta-s}=J_1+J_2+J_3\,,$$

$$J_1=-\int_\xi^{1/2}\frac{g_\mu(s)ds}{\eta-s}\,,\ J_2=\frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int_\xi^{1/2}\frac{ds}{\eta-s}\int_{1/2}^1(\sigma(t,s))^{\omega+\beta}\frac{\mu_\Pi(t)dt}{t-s}\,,\ J_3=-\int_\xi^{1/2}\frac{ds}{\eta-s}\int_{1/2}^1J_\mu(s,t)\mu_\Pi(t)dt\,.$$

Интеграл J_1 содержит известные из условия функции. Интеграл J_2 представим в следующем виде:

$$J_2=\frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int_\xi^{1/2}(t-1/2)^{\omega+\beta}\mu_\Pi(t)K_{J_2}(\xi,\eta,t)dt\,,$$

$$K_{J_2}(\xi,\eta,t)=\int_\xi^{1/2}\frac{(1/2-s)^{-\omega-\beta}ds}{(\eta-s)(t-s)}=\frac{k_0(\xi,\eta)-k_0(\xi,t)}{t-\eta}\,,\ k_0(\xi,z)=\int_\xi^{1/2}\frac{(1/2-s)^{-\omega-\beta}ds}{z-s}\,,\ z>1/2\,.$$

$$k_0(\xi,z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)^{-\omega-\beta}\int_0^{\sigma(\xi,z)}\frac{t^{-\omega-\beta}dt}{1+t}=\frac{\pi}{\sin\pi(\omega+\beta)}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{-\omega-\beta}+k_r(\xi,z),$$

$$k_r(\xi,z)=-\left(z-\frac{1}{2}\right)^{-\omega-\beta}\int_{\sigma(\xi,z)}^{+\infty}\frac{t^{-\omega-\beta}dt}{1+t}=-\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{-\omega-\beta}\int_0^1\frac{y^{\omega+\beta-1}dy}{1+\sigma(\xi,z)y}\,.$$

Так как

$$k_r(\xi,\eta)-k_r(\xi,t)=\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{-\omega-\beta}\int_0^1\frac{y^{\omega+\beta}dy(\eta-t)}{(1/2-\xi+(\eta-1/2)y)(1+\sigma(t,\xi)y)},\ \eta-\frac{1}{2}=\xi,$$

то

$$|k_r(\xi,\eta)-k_r(\xi,t)|=\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{-\omega-\beta}\int_0^1\frac{y^{\omega+\beta}dy|\eta-t|}{1/2-\xi+\xi y}=\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{-\omega-\beta}\int_0^1\frac{y^{\omega+\beta}dy|\eta-t|}{(1/2-\xi)(1-y)+y/2}\le$$

$$\le(1/2-\xi)^{-\omega-\beta}|\eta-t|\int_0^1 2y^{\omega+\beta-1}dy\le C(1/2-\xi)^{-\omega-\beta}|\eta-t|.$$

Отсюда следует, что

$$K_{J_2}(\xi,\eta,t)=\frac{\pi}{\sin\pi(\omega+\beta)}\frac{(\eta-1/2)^{-\omega-\beta}-(t-1/2)^{-\omega-\beta}}{t-\eta}+K_r(\xi,\eta,t),$$

$$|K_r(\xi,\eta,t)|\le C(1/2-\xi)^{-\omega-\beta},$$

$$J_2=\operatorname{tg}\pi\omega\int_{1/2}^1\left[\frac{(-\sigma(t,\eta))^{\omega+\beta}-1}{t-\eta}+O\left((\sigma(t,\eta))^{\omega+\beta}\right)\right]\mu_{\Pi}(t)dt.$$

Далее,

$$J_3=\int_{1/2}^1 K_3(\xi,\eta,t)\mu_{\Pi}(t)dt,\ K_3(\xi,\eta,t)=-\int_{\xi}^{1/2}\frac{ds}{\eta-s}J_{\mu}(s,t).$$

Так как $|J_{\mu}(s,t)|\le C(1/2-\xi)^{-\omega-\beta}$, то

$$|K_3(\xi,\eta,t)|=C\int_{\xi}^{1/2}\frac{(1/2-s)^{-\omega-\beta}ds}{\eta-s}=C\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{1-\omega-\beta}\int_0^1\frac{\tau^{-\omega-\beta}d\tau}{(1/2-\xi)\tau+\xi}=C\int_0^{(1/2-\xi)/\xi}\frac{\xi^{-\omega-\beta}t^{-\omega-\beta}dt}{1+t},$$

откуда следует, что $|K_3(\xi,\eta,t)|\le C(1/2-\xi)^{1-\omega-\beta}\xi^{-\omega-\beta}$.

Производя аналогичные вычисления для остальных интегралов, получаем уравнение (7), причем, последовательно рассматривая цепочку преобразований, можно доказать, что $h_{\mu}(\eta)=O\left((\eta-1/2)^{-\beta}(1-\eta)^{-\omega-\beta}\right)$, а $k(\eta,s)$ – регулярное ядро.

V. Оставив в левой части уравнения (7) первые два слагаемых, запишем его так:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\omega\mu_{\Pi}(\eta)+\int_{1/2}^1\left(\frac{1-s}{1-\eta}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{s-\eta}-\frac{1}{\eta+s-2\eta s}\right)\mu_{\Pi}(s)ds=W(\eta).$$

Решим это сингулярное интегральное уравнение:

$$\mu_{\Pi}(\eta)=\frac{\sin 2\pi\omega}{2\pi}W(\eta)-\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi^2}\int_{1/2}^1(-\sigma(\eta,t))^{\omega}\left(\frac{1-\eta}{1-t}\right)^{-1/2}\left[\frac{1}{t-\eta}-\frac{1}{t+\eta-2\eta t}\right]W(t)dt+$$
$$+A\eta(\eta-1/2)^{\omega-1}(1-\eta)^{-1/2}.$$

Отсюда следует, что уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\mu_{\Pi}(\eta)+\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1}\left[\left(-\sigma(t,\eta)\right)^{\omega+\beta}-\left(-\sigma(t,\eta)\right)^{-\omega}\right]\frac{\mu_{\Pi}(t)dt}{t-\eta}+T\left[\mu_{\Pi}(\eta)\right]=$$

$$=N_1(\eta)+A\eta(\eta-1/2)^{\omega-1}(1-\eta)^{-1/2},$$

где через T обозначен регулярный интегральный оператор, к которому применима теория Фредгольма. Последнее слагаемое в правой части не принадлежит допустимому классу функций при $A\neq 0$, поэтому необходимо положить $A=0$, и мы приходим к уравнению (8).

Рассмотрим связанное с (8) вспомогательное уравнение

$$w(x)+\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1}\left[\left(-\sigma(t,x)\right)^{\omega+\beta}-\left(-\sigma(t,x)\right)^{-\omega}\right]\frac{w(t)dt}{t-x}=f(x),\ \frac{1}{2}<x<1.$$

Перейдем к новым функциям $w_1(y)=y^{3/4-\omega}w\left((y+1)/2\right)$, $f_1(y)=y^{3/4-\omega}f\left((y+1)/2\right)$:

$$w_1(y)+\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{w_1(s)ds/s}{(s/y)^{1/4}+(y/s)^{1/4}}=f_1(y),\ 0<y<1.$$

Введя новые переменные $y=\exp(-z)$, $s=\exp(-v)$ и обозначив $w_2(z)=w_1\left(e^{-z}\right)$, $f_2(z)=f_1\left(e^{-z}\right)$, $q(z)=\sin^2\pi\omega/\left(2\pi\operatorname{ch}(z/4)\right)$, получим уравнение Винера-Хопфа

$$w_2(z)+\int\limits_{0}^{\infty}q(v-z)w_2(v)dv=g(z),\ 0<z<\infty.$$

Так как

$$\hat{q}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-izx)q(z)dz=\frac{2\sin^2\pi\omega}{\operatorname{ch}2\pi x}>0,$$

то индекс выражения $1+\hat{q}(x)=1+2\sin^2\pi\omega/\operatorname{ch}2\pi x$ равен нулю ([29, с. 50]); отсюда и из единственности решения задачи вытекает однозначная разрешимость уравнения (8), а значит, и всей задачи.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [45] была рассмотрена задача на собственные значения для оператора Лапласа в единичном круге D с наклонной производной на границе:

$$\Delta u + \mu^2 u = 0,\ (r,\theta) \in D,$$

$$\left(r u_r + k u_\theta\right)\Big|_{\partial D} = 0,$$

где k – ненулевое вещественное число, и было доказано, что спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\{\mu : |\operatorname{Im}\mu| \le \text{const}\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D),\ q > 1$.

В [89], [90] изучалось расположение спектра смешанных задач, в которых на части границы задается условие с наклонной производной, в областях, примыкающих к вещественной оси.

В этой главе рассматриваются краевые и спектральные задачи с краевыми условиями, содержащими наклонную производную, в областях на плоскости.

§ 1. ЗАДАЧА С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КРУГЕ

В этом параграфе рассматривается задача с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в круге. Задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно производной граничного значения искомой функции. Компактный оператор в этом уравнении оказывается сжимающим при определенных ограничениях на параметр, что позволяет доказать однозначную разрешимость задачи при определенных ограничениях на параметр и выписать решение в виде ряда Неймана.

Пусть (r,θ) – полярные координаты, $D = \{(r,\theta) \mid r < 1\}$. Требуется найти функцию $u(r,\theta) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющую в D уравнению Гельмгольца

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\mu = \xi + i\eta = \rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma \in (-\pi/2, \pi/2)$, и на границе D – краевому условию с наклонной производной

$$\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - k(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\Bigg|_{r=1} = h(\theta), \tag{2}$$

где $k(\theta)\in C^2[0,2\pi]$ – вещественная знакоопределенная функция, $k(0)=k(2\pi)$, $k'(0)=k'(2\pi)$; $h(\theta)\in C[0,2\pi]$, $h(0)=h(2\pi)$.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $h(\theta)$ можно считать зависящей от μ; коэффициент $k(\theta)$, напротив, не должен зависеть от μ.

Вместо $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ будем писать $\sum_{n}$.

Обозначим

$$\psi(\theta)=\sum_n \psi_n e^{in\theta}.$$

Решение задачи Дирихле в D для уравнения (1) с краевым условием $u(1,\theta)=\psi(\theta)$ имеет вид

$$u(r,\theta)=\sum_n \psi_n \frac{I_{|n|}(\mu r)}{I_{|n|}(\mu)} e^{in\theta},$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя ([22, с. 91]).

Временно предположим, что заданные в (2) функции имеют на единицу больший порядок гладкости (итоговое уравнение будет интегральным и не будет содержать «лишних» производных).

В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических вместе со своими производными до второго порядка включительно функций определим операторы:

$$f=\sum_n f_n e^{in\theta},\ Lf=\sum_n \frac{\mu I'_{|n|}(\mu)}{I_{|n|}(\mu)} f_n e^{in\theta},\ Bf=\sum_n f_n\sqrt{\mu^2+n^2}\,e^{in\theta},\ E=L-B,\ Uf=\sum_{n\neq 0}\frac{f_n}{in}e^{in\theta}.$$

Тогда краевое условие (2) можно записать в виде

$$L\psi=k\psi'+h. \qquad (3)$$

Так как

$$E\psi=B^{-1}EB\psi=B^{-1}Ek\psi'-B^{-1}E^2\psi+B^{-1}Eh,$$

то (3) можно переписать в виде

$$B\psi=\left(k-B^{-1}Ek\right)\psi'+B^{-1}E^2\psi+\left(I-B^{-1}E\right)h.$$

Подействовав оператором B на обе части этого уравнения и обозначив коммутатор $[B,k]=Bk-kB$, с учетом (3) запишем:

$$B^2\psi=[B,k]\psi'+kk'\psi'+k^2\psi''-\left(kE+Ek\right)\psi'+E^2\psi+\left(B-E\right)h+kh'.$$

Так как $B^2\psi = \mu^2\psi - \psi''$, то, обозначая

$$q(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{1+k^2(t)}},\ q' = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ q'' = -\frac{kk'}{\left(\sqrt{1+k^2}\right)^3},\ q_0 = \frac{q(2\pi)}{2},$$

перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\psi'' - \left((\mu q')^2 + \mu q''\right)\psi = -(q')^2 g,$$

$$g = (G + kk')\psi' + E^2\psi_0 - \mu kk'q'\psi + (L - 2E)h + kh',$$

$$G = [B, k] - kE - Ek + E^2U.$$

Решим это уравнение: $\Delta \equiv q(\theta) - q(t) + q_0 \operatorname{sgn}(t-\theta)$,

$$\psi'(\theta) = \frac{q'(\theta)}{2\operatorname{sh}(\mu q_0)} \int_0^{2\pi} \operatorname{sh}(\mu\Delta) g(t) dq(t).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\psi' = A\psi' + \psi_0 w + Ph, \tag{4}$$

$$(A_{\pm} f)(\theta) = \frac{q'(\theta)}{4\operatorname{sh}(\mu q_0)} \int_0^{2\pi} \left(e^{\mu\Delta} \pm e^{-\mu\Delta}\right) f(t) dq(t),\ A = A_-(G - kk') - A_+\left(\left((k'q')^2 + kk''\right)U + kk'\right),$$

$$w = -A_+\left((k'q')^2 + kk''\right),\ P = -k(q')^2 + A_-\left(L - 2E - k'(q')^2\right) + \mu A_+ kq'.$$

Оценим нормы операторов, входящих в эти выражения. Запись вида $C(\varsigma) = A \vee B$ будет означать, что $C(\varsigma) = A$ при $|\varsigma| \le \pi/4$ и $C(\varsigma) = B$ при $\pi/4 < |\varsigma| < \pi/2$.

Теорема 1. Существуют $C_I(\varsigma)$ и $C_*(\varsigma)$ такие, что при $\nu \ge 0$, $\mu \in D_* = \{(\xi, \varsigma) | \xi > C_*(\varsigma)\}$ справедливо представление

$$\frac{\mu I_\nu'(\mu)}{I_\nu(\mu)} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - \frac{\mu^2}{2(\mu^2 + \nu^2)} + \frac{\Xi(\mu, \nu)}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}},$$

где $|\Xi(\mu, \nu)| \le C_I(\varsigma)$, причем $C_*(0) = 0$, $C_I(0) = 15/8$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

Лемма 1. При $\nu \ge 0$, $0 \le x \le 2$ справедливы неравенства

$$\nu + \frac{x^2}{2(\nu+2)} \le \frac{xI_\nu'(x)}{I_\nu(x)} \le \nu + \frac{x^2}{2(\nu+1)}.$$

Доказательство. Согласно определению модифицированной функции Бесселя ([22, с. 91]),

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)},\ \frac{xI_\nu'(x)}{I_\nu(x)} = \nu + \frac{x^2}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+2)}\right) \Big/ \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\right).$$

Для доказательства первого неравенства заметим, что

$\Gamma(\nu+m+2)\ge(\nu+1)\Gamma(\nu+m+1)$ (таким образом, оно справедливо при $x\ge 0$).

Для доказательства второго неравенства перепишем его в виде

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(x/2)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{1}{\nu+2}-\frac{1}{\nu+m+1}\right)\le\frac{1}{\Gamma(\nu+3)}$$

и заметим, что при $0\le x\le 2$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+3)(x/2)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{1}{\nu+2}-\frac{1}{\nu+m+1}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2)(x/2)^{2m}}{(m-2)!m\Gamma(\nu+m+2)}\le\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}<1.$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим $R=\sqrt{\nu^2+x^2}$.

Следствие 1. При $\nu\ge 0$, $0\le x\le 1$ справедлива оценка $0\le R-xI'_\nu(x)/I_\nu(x)\le 1$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$\frac{x^2}{\nu+R}-\frac{x^2}{2(\nu+1)}\le R-\frac{xI'_\nu(x)}{I_\nu(x)}\le\frac{x^2}{\nu+R}-\frac{x^2}{2(\nu+2)}.$$

Неравенство

$$\frac{x^2}{\nu+R}-\frac{x^2}{2(\nu+1)}\ge 0$$

сводится к неравенству $x^2\le 4\nu+4$, а неравенство

$$\frac{x^2}{\nu+R}-\frac{x^2}{2(\nu+2)}\le 1$$

– к неравенству

$$\frac{x^2}{\nu+R}-\frac{x^2}{2(\nu+2)}\le\frac{x^2}{\nu+R}=R-\nu\le 1.$$

Следствие 1 доказано.

Обозначим $z=\mu$, $f(z)=zI'_\nu(z)/I_\nu(z)$, $Z=\sqrt{\nu^2+z^2}=X+iY$. Так как $z^2I''_\nu(z)+zI'_\nu(z)-Z^2I_\nu(z)=0$ ([22, с. 91]), то $f(z)$ удовлетворяет нелинейному уравнению $zf'=Z^2-f^2$ и начальному условию $f(0)=\nu$. Приравняв члены одного порядка малости при $z\to\infty$, будем искать решение этого уравнения в виде $f=Z-g$, тогда $zg'=z^2/Z-2Zg+g^2$.

Рассмотрим вначале случай вещественного $z=x\ge 0$:

$$xg'=x^2/R-2Rg+g^2, \qquad (5)$$

в этом случае g – также вещественная функция, причем в силу следствия 1 справедлива оценка $0\le g\le 1$ при $0\le x\le 1$.

Лемма 2. $0 \le g \le 1$ при $x \ge 0$.

Доказательство. Четверть дискриминанта квадратного трехчлена из левой части уравнения (5) равна $\zeta = R^2 - x^2/R$. Если $\zeta \ge 0$ при $x \ge 0$, то будем рассматривать уравнение (5) на луче $x > 0$, иначе – на луче $x > x_0$, где x_0 – наибольший корень ζ (очевидно, $x_0 \le 1$). Обозначим корни квадратного трехчлена через $g_\pm = R \pm \sqrt{\zeta}$. Заметим, что $1/2 \le g_- \le 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_- = 1/2$. В первом случае $g(0) = 0$, поэтому $g' > 0$ и $0 < g < g_-$ при $x > 0$; во втором случае $g(x_0) < g_-(x_0)$ (в силу леммы 1 и равенства $g_-(x_0) = R = x_0^{2/3}$ данное неравенство сводится к очевидному неравенству $(\nu + 4 - R)R^2 < (2\nu + 4)(\nu + R)$), поэтому $g' > 0$ и $0 < g < g_-$ при $x > x_0$. С учетом неравенства $g_- \le 1$ и следствия 1 получаем требуемую оценку, причем $g - g_- \to 0$ при $x \to +\infty$. Лемма 2 доказана.

Вернемся к общему случаю комплексного z. Вновь приравняв члены одного порядка (на бесконечности), будем искать решение в виде $g = z^2/(2Z^2) + h$, тогда h удовлетворяет уравнению

$$zh' = -2Zh + \frac{z^2}{Z^2}h + \frac{5z^4}{4Z^4} - \frac{z^2}{Z^2} + h^2$$

и начальному условию $h(0) = 0$.

Принимая во внимание, что член h^2 в этом уравнении предположительно имеет более высокий порядок малости на бесконечности по сравнению с остальными членами, решим уравнение относительно главных членов:

$$h' + \left(2\frac{Z}{z} - \frac{z}{Z^2}\right)h = -\frac{z}{Z^2} + \frac{5z^3}{4Z^4} + \frac{h^2}{z},$$

$$h(z) = \int_0^z \frac{\sqrt{z^2+\nu^2}}{\sqrt{t^2+\nu^2}} \left(\frac{\nu + \sqrt{z^2+\nu^2}}{\nu + \sqrt{t^2+\nu^2}}\right)^{2\nu} \left(\frac{t}{z}\right)^{2\nu} e^{2\sqrt{t^2+\nu^2} - 2\sqrt{z^2+\nu^2}} \left(-\frac{t}{t^2+\nu^2} + \frac{5t^3}{4(t^2+\nu^2)^2} + \frac{h^2(t)}{t}\right) dt.$$

Или, в обозначении

$$T = \sqrt{t^2+\nu^2},\ Q(Z) = Z + \frac{\nu}{2}\ln\left(\frac{Z-\nu}{Z+\nu}\right),\ Q'(Z) = \frac{Z^2}{Z^2-\nu^2},\ h\left(\sqrt{Z^2-\nu^2}\right) = Ze^{-2Q(Z)}H(Z):$$

$$H(Z) = F(Z) + \int_\nu^Z e^{-2Q(T)}H^2(T)\,dQ, \tag{6}$$

$$F(Z) = \int_\nu^Z e^{2Q(T)}\left(1 - \frac{5\nu^2}{T^2}\right)\left(1 - \frac{\nu^2}{T^2}\right)\frac{dQ}{4T^2} =$$

$$=\left(1-\frac{5\nu^2}{Z^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{Z^2}\right)\frac{e^{2Q(Z)}}{8Z^2}+\frac{1}{4}\int_{\nu}^{Z}e^{2Q(T)}\left(1-\frac{12\nu^2}{T^2}+\frac{15\nu^4}{T^4}\right)\frac{dT}{T^3}.$$

Определим контур интегрирования условиями $\operatorname{Re}Q(T)=\operatorname{Re}Q(Z)$, $\operatorname{Re}T\ge X$; точку пересечения этого контура с вещественной осью обозначим через X_*, а сам контур – через ZX_*. Тогда

$$H(Z)-H(X_*)=F(Z)-F(X_*)+\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}H^2(T)dQ.$$

В обозначении

$$W(Z)=H(Z)-H(X_*),\ G(Z)=F(Z)-F(X_*)+H^2(X_*)\left(e^{-2Q(X_*)}-e^{-2Q(Z)}\right)/2:$$

$$W(Z)=G(Z)+2H(X_*)\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}W(T)dQ+\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}W^2(T)dQ.$$

Докажем несколько оценок.

Лемма 3. $\left|\arg Z\right|\le\varsigma$.

Доказательство. Так как

$$Z^2=\mu^2+\nu^2=\rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2+i\rho^2\sin 2\varsigma,$$

то

$$\arg\left(Z^2\right)=\operatorname{arctg}\frac{\rho^2\sin 2\varsigma}{\rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2}\in(-2\varsigma,2\varsigma)\ \text{при}\ \rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2>0,$$

$$\arg\left(Z^2\right)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\ \text{при}\ \rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2=0,$$

$$\arg\left(Z^2\right)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\rho^2\sin 2\varsigma}{\left|\rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2\right|}\in(\pi/2,2\varsigma)\ \text{при}\ \rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2<0,\ \varsigma>\pi/4,$$

$$\arg\left(Z^2\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{\rho^2\sin 2\varsigma}{\left|\rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2\right|}\in(-2\varsigma,-\pi/2)\ \text{при}\ \rho^2\cos 2\varsigma+\nu^2<0,\ \varsigma<-\pi/4,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Следствие 2. $X\ge\left|Z\right|\cos\varsigma$.

Лемма 4. $X\ge\xi$.

Доказательство. Так как $X^2-Y^2+2iXY=\xi^2-\eta^2+\nu^2+2i\xi\eta$, то $Y=\xi\eta/X$,

$$X^4-\left(\xi^2-\eta^2+\nu^2\right)X^2-(\xi\eta)^2=0,$$

$$2X^2=f(a)\equiv a+\sqrt{a^2+b^2},\ a=\xi^2-\eta^2+\nu^2,\ b=2\xi\left|\eta\right|.$$

Так как $f'(a)\ge 0$, то $f(a)\ge f\left(\xi^2-\eta^2\right)$, т.е. $2X^2\ge\xi^2-\eta^2+\sqrt{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}=2\xi^2$.

Следствие 3. $X \ge C_1(\varsigma)\nu$, $C_1(\varsigma)=1\vee|\sin 2\varsigma|$.

В самом деле,

$$2\left(\frac{X}{\nu}\right)^2 = 1+\frac{\xi^2-\eta^2}{\nu^2}+\sqrt{1+2\frac{\xi^2-\eta^2}{\nu^2}+\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{\nu^2}\right)^2}\,.$$

При $|\varsigma|\le\pi/4$ $\xi\ge|\eta|$, так что $2(X/\nu)^2\ge 2$; при $\pi/4<|\varsigma|<\pi/2$

$$2\left(\frac{X}{\nu}\right)^2 = f\left(\frac{\eta^2-\xi^2}{\nu^2}\right),\ f(x)=1-x+\sqrt{1-2x+\frac{x^2}{\cos^2 2\varsigma}} \ge f\left(2\cos^2 2\varsigma\right)=2\sin^2 2\varsigma\,.$$

Лемма 5. $|Z|\ge C_2(\varsigma)\nu$, $C_2(\varsigma)=1\vee\sqrt{|\sin 2\varsigma|}$.

Доказательство. Так как

$$|Z|^4=\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+2\left(\xi^2-\eta^2\right)\nu^2+\nu^4,$$

то искомое неравенство принимает вид

$$\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+2\left(\xi^2-\eta^2\right)\nu^2+\left(1-C_2^4\right)\nu^4\ge 0\,.$$

При $|\varsigma|\le\pi/4$ $\xi\ge|\eta|$, и достаточно положить $C_2=1$; при $\pi/4<|\varsigma|<\pi/2$ условие неположительности дискриминанта приводит к неравенству

$$C_2^4\le 1-\left(\xi^2-\eta^2\right)^2\left(\xi^2+\eta^2\right)^{-2}=\sin^2 2\varsigma\,.$$

Лемма 6. $X_*>\nu$.

Доказательство. Обозначим $Z=\nu\zeta=\nu(x+iy)$, $T=\nu(u+iv)$, тогда условие, определяющее контур ZX_*, принимает вид

$$v^2=f(u),\ f(u)=4u/\left(1-e^{-4(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2\right)-(u+1)^2,\ u\ge x\,.$$

Очевидно, достаточно исследовать случай $x<1$. Покажем сначала, что $f(u)>0$ при $x\le u\le 1$. В силу неравенства $|\zeta-1|<|\zeta+1|$ достаточно доказать, что

$$4u-(u+1)^2\left(1-e^{-4(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2\right)=(u+1)^2e^{-4u}\left(e^{4x}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2-e^{4u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2\right)>0$$

на указанном отрезке, но это вытекает из того, что функция

$$\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2e^{4u}=e^{4(\operatorname{th}\tau-\tau)}$$

монотонно убывает на этом отрезке и

$$e^{4x}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2-e^{4x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=\frac{4xy^2e^{4x}}{(x+1)^2+y^2}>0.$$

Покажем теперь, что $f'(u)<0$ при $u\ge 1$. Так как

$$\frac{f'(u)}{4}=\left(1-(1+4u)e^{-4(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2\right)\left(1-e^{-4(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2\right)^{-2}-\frac{u+1}{2},$$

то искомое неравенство сводится к очевидному неравенству

$$u+6ue^{-4(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^2+(u+1)e^{-8(u-x)}\left|\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right|^4>1.$$

Следовательно, $f(u)$ монотонно убывает при $u\ge 1$, $f(1)>0$, $f(+\infty)=-\infty$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Лемма 7. $|\operatorname{Im}Q(Z)|\le C_3(\varsigma)|Z|$, $C_3(\varsigma)=1+\pi/(2C_2(\varsigma))$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\operatorname{Im}Q(Z)=Y+\frac{\nu}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{Y}{X-\nu}-\operatorname{arctg}\frac{Y}{X+\nu}\right),\ |\operatorname{Im}Q(Z)|\le|Z|+\pi\nu/2,$$

и воспользоваться леммой 5.

Лемма 8. $|H(X_*)|\le C_4X_*^{-2}e^{2Q(X_*)}$, $C_4=15/8$.

Доказательство. Сначала оценим функцию F на вещественной оси. Так как $e^{2Q(T)}T^{-3}$ монотонно возрастает при $T>\nu$, $|1-12s+15s^2|\le 4$ при $0\le s\le 1$, то

$$|F(R)|\le\left|1-\frac{5\nu^2}{R^2}\right|\left|1-\frac{\nu^2}{R^2}\right|\frac{e^{2Q(R)}}{8R^2}+\frac{1}{4}\int_\nu^R e^{2Q(T)}\left|1-\frac{12\nu^2}{T^2}+\frac{15\nu^4}{T^4}\right|\frac{dQ}{T^3}\le\frac{3e^{2Q(R)}}{2R^2}.$$

Далее, в силу леммы 2 $-1/2\le -x^2/(2R^2)\le h(x)\le 1-x^2/(2R^2)\le 1/2$, поэтому $|H(R)|\le e^{2Q(R)}/(2R)$. Из уравнения (6) получаем искомую оценку:

$$|H(X_*)|\le\frac{3e^{2Q(X_*)}}{2X_*^2}+\frac{1}{4}\int_\nu^{X_*}e^{2Q(T)}\frac{dQ}{T^2}=\frac{13e^{2Q(X_*)}}{8X_*^2}+\frac{1}{4}\int_\nu^{X_*}e^{2Q(T)}\frac{dT}{T^3}\le\frac{15e^{2Q(X_*)}}{8X_*^2}.$$

Лемма 9. $\max\limits_{T\in ZX_*}|\nu/T|=C_5(\varsigma)$, $C_5(\varsigma)=1\vee\max\left\{1/\sqrt{|\sin 2\varsigma|},\ 2/\left(\sqrt{1+16\sin^2 2\varsigma}-1\right)\right\}$.

Доказательство. Пусть $\nu C=\operatorname{Re}Q(Z)$, $T=U+iV$, тогда $|T/\nu|^2+1=2f(U/\nu)$, где $f(x)=x\operatorname{cth}(2(x-C))$, при $T\in ZX_*$. Заметим, что $x>C$; в силу следствия 3 $C_1(\varsigma)\le x\le b$, где $b^2+1=2f(b)$, $b>0$; $2f'(x)=(\operatorname{sh}(4(x-C))-4x)\operatorname{sh}^{-2}(2(x-C))$, стационарная точка определяется равенством $\operatorname{sh}(4(x_0-C))=4x_0$. Если $C\le 0$, то $f'(x)>0$ при $x>0$, и функция $f(x)$ монотонна. Если $C>0$, то при $2f(x_0)\le 1+x_0^2$ функция $f(x)$ монотонна; в

противном случае она достигает минимума в точке x_0, так что $|T/\nu|^2 \ge 2f(x_0)-1=\left(\sqrt{1+16x_0^2}-1\right)/2$. Итак,

$$\max_{T\in ZX_*}|\nu/T| = \max\left\{|\nu/Z|, |\nu/X_*|, 2/\left(\sqrt{1+16x_0^2}-1\right)\right\},$$

и осталось воспользоваться леммой 5 и следствием 3.

Лемма 10. $|G(Z)| \le C_6(\varsigma,\xi)e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}$, $C_6(\varsigma,\xi)=\widetilde{C}_6(\varsigma)+C_4^2\xi^{-2}\cos^{-2}\varsigma$,

$$\widetilde{C}_6(\varsigma)=\frac{(C_2(\varsigma)+5)(C_2(\varsigma)+1)}{8C_2^2(\varsigma)}+\frac{3}{2\cos^2\varsigma}+\left(1+12C_5^2(\varsigma)+15C_5^4(\varsigma)\right)\left(1+C_5^2(\varsigma)\right)\frac{C_3(\varsigma)}{8\cos^3\varsigma}.$$

Доказательство. В силу лемм 5, 6, 7 и 9, следствия 2 и неравенства $X_* \ge X$

$$F(Z)-F(X_*)=\left(1-\frac{5\nu^2}{T^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{T^2}\right)\frac{e^{2Q(Z)}}{8T^2}\Bigg|_{X_*}^{Z}+\frac{1}{4}\int_{X_*}^{Z}e^{2Q(T)}\left(1-\frac{12\nu^2}{T^2}+\frac{15\nu^4}{T^4}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{T^2}\right)\frac{dQ}{T^3},$$

$$|F(Z)-F(X_*)| \le \left(1+\frac{5}{C_2(\varsigma)}\right)\left(1+\frac{1}{C_2(\varsigma)}\right)\frac{e^{2Q(X_*)}}{8|Z|^2}+\frac{3e^{2Q(X_*)}}{2X^2}+$$

$$+\left(1+12C_5^2(\varsigma)+15C_5^4(\varsigma)\right)\left(1+C_5^2(\varsigma)\right)\frac{e^{2Q(X_*)}|\operatorname{Im}Q(Z)|}{8X^3} \le \widetilde{C}_6(\varsigma)\frac{e^{2Q(X_*)}}{|Z|^2}.$$

Искомая оценка вытекает из лемм 4 и 8 и неравенства

$$|G(Z)| \le |F(Z)-F(X_*)|+e^{-2Q(X_*)}H^2(X_*).$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть $W_0(Z)=G(Z)$,

$$W_n(Z)=G(Z)+2H(X_*)\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}W_{n-1}(T)dQ+\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}W_{n-1}^2(T)dQ,\ n\ge 1.$$

Пусть $\|W\|=\max_{T\in ZX_*}|W(T)|$. Докажем по индукции оценку $\|W_n\| \le C_0(\varsigma,\xi)e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}$,

$$C_0=C_6+\frac{b/\xi}{a+\sqrt{a^2-b\xi^{-2}}},\ a=\frac{1}{2C_3}-\frac{C_4}{\xi\cos\varsigma}-\frac{C_6}{\xi},\ b=\frac{2C_4C_6}{\cos\varsigma}+C_6^2.$$

При $n=0$ справедливость этой оценки вытекает из леммы 10. При $n\ge 1$, в силу лемм 4, 7, 7 и 9, следствия 2 и неравенства $X_* \ge X$,

$$\|W_n\| \le \|G\|+2|H(X_*)|e^{-2Q(X_*)}\|W_{n-1}\||\operatorname{Im}Q(Z)|+e^{-2Q(X_*)}\|W_{n-1}\|^2|\operatorname{Im}Q(Z)| \le$$

$$\le e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}\left(C_6(\varsigma,\xi)+2C_4X_*^{-2}C_3(\varsigma)|Z|C_0+|Z|^{-1}C_3(\varsigma)C_0^2\right) \le$$

$$\le e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}\left(C_6(\varsigma,\xi)+2\frac{C_3(\varsigma)C_4}{\xi\cos\varsigma}C_0+\frac{C_3(\varsigma)}{\xi}C_0^2\right)=C_0e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}.$$

Из этой оценки вытекает сходимость итерационного процесса при достаточно больших значениях ξ:

$$W_{n+1}(Z)-W_n(Z)=2H(X_*)\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}(W_n(T)-W_{n-1}(T))dQ+\int_{X_*}^{Z}e^{-2Q(T)}(W_n^2(T)-W_{n-1}^2(T))dQ,$$

$$\|W_{n+1}-W_n\|\le e^{-2Q(X_*)}(H(X_*)+\|W_n+W_{n-1}\|)|\operatorname{Im}Q(Z)|\|W_n-W_{n-1}\|,$$

$$e^{-2Q(X_*)}(H(X_*)+\|W_n+W_{n-1}\|)|\operatorname{Im}Q(Z)|\le(C_4X_*^{-2}+2C_0|Z|^{-2})C_3|Z|\le(C_4/\cos\varsigma+2C_0)C_3/\xi.$$

Следовательно, при условии $\xi>C_3(C_4/\cos\varsigma+2C_0)$ оператор сжимающий, поэтому существует $W=\lim W_n$, причем $\|W\|\le C_0(\varsigma,\xi)e^{2Q(X_*)}|Z|^{-2}$, откуда и следует утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Обозначим

$$\|f\|_2=\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2},\ \|f\|_C=\max_{0\le t\le 2\pi}|f(t)|.$$

Следствие 4. Существует функция $C_E(\varsigma)$ такая, что $\|E\|_2\le C_E(\varsigma)$ при $\mu\in D_*$.

Теорема 2. Существует функция $C_B(\varsigma)$ такая, что $\|[B,k]\|_2\le C_B(\varsigma)\|k'\|_C$.

Доказательство. Обозначим

$$\Omega(\theta)=\frac{1}{2}\sum_n\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\mu^2+n^2}}=\frac{1}{2\mu}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{\sqrt{\mu^2+n^2}}.$$

Разложим функцию

$$\sum_{k=1}^{+\infty}K_0(\mu(2\pi k-\theta))+\sum_{k=0}^{+\infty}K_0(\mu(2\pi k+\theta)),\ 0<\theta<2\pi,$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда ([22, с. 92]), в ряд Фурье. Так как ([22, с. 191])

$$K_0(\mu x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)dt}{\sqrt{\mu^2+t^2}},\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}K_0(\mu x)\cos(tx)dx=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+t^2}},$$

то

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}K_0(\mu(2\pi k-\theta))+\sum_{k=0}^{+\infty}K_0(\mu(2\pi k+\theta))\right)\cos(n\theta)d\theta=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+n^2}},$$

откуда следует формула

$$\Omega(\theta)=\sum_{k=1}^{+\infty}(K_0(\mu(2\pi k-\theta))+K_0(\mu(2\pi(k-1)+\theta))),\ 0<\theta<2\pi.$$

Далее, обозначим

$$f(\theta)=\sum_n f_ne^{in\theta},$$

тогда

$$\left(B^{-1}f\right)(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)f(s)ds\,,$$

$$(Bf)(\theta)=B^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)f(s)ds=\left(\mu^2 I-\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)f(s)ds\,.$$

Так как функция Макдональда удовлетворяет уравнению ([22, с. 91]) $K_0-K_0''=z^{-1}K_0'$, то

$$\tilde{\Omega}(\theta)\equiv B^2\Omega(\theta)=\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{K_0'\left(\mu(2\pi k-\theta)\right)}{2\pi k-\theta}+\frac{K_0'\left(\mu(2\pi(k-1)+\theta)\right)}{2\pi(k-1)+\theta}\right),\ 0<\theta<2\pi\,.$$

Докажем формулу

$$\left([B,k]f\right)(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(k(s)-k(\theta))f(s)\tilde{\Omega}\left(\left|\theta-s\right|\right)ds \qquad (7)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$(Bf)(\theta)=\mu^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)f(s)ds-\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega'\left(\left|\theta-s\right|\right)f(s)ds\,,\ \int_0^{2\pi}\Omega'\left(\left|\theta-s\right|\right)ds=0\,,$$

запишем:

$$(kBf)(\theta)=\mu^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)k(\theta)f(s)ds-k(\theta)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega''\left(\left|\theta-s\right|\right)\left(f(s)-f(\theta)\right)ds\,,$$

$$\left(B(kf)\right)(\theta)=\mu^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(\left|\theta-s\right|\right)k(s)f(s)ds-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega''\left(\left|\theta-s\right|\right)\left(k(s)f(s)-k(\theta)f(\theta)\right)ds\,,$$

откуда и следует формула (7).

Оценим L_2-норму коммутатора. Так как

$$\frac{\mu K_0'(\mu x)}{x}=-\frac{e^{2i\varsigma}}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\rho s x)ds}{\left(e^{2i\varsigma}+s^2\right)^{3/2}}\,,$$

то

$$\tilde{\Omega}(\theta)=-e^{2i\varsigma}\int_0^{+\infty}\frac{W(\theta,s)+W(2\pi-\theta,s)}{\left(e^{2i\varsigma}+s^2\right)^{3/2}}ds\,,\ W(\theta,s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\rho(2\pi k-\theta)s\right)}{(2\pi k-\theta)^2}\,.$$

Так как

$$\left|W(\theta,s)+W(2\pi-\theta,s)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2\pi(k-1)+\theta\right)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi k-\theta)^2}=\frac{1}{4\sin^2(\theta/2)}\,;$$

$$C_7(\varsigma)=\int_0^{+\infty}\frac{ds}{\left|e^{2i\varsigma}+s^2\right|^{3/2}}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+2t\cos 2\varsigma+1\right)^{3/4}}\,,$$

$$C_7(\varsigma)=F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{4};\sin^2 2\varsigma\right)\vee F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{4};\sin^2 2\varsigma\right)+\frac{|\cos 2\varsigma|}{\sqrt{|\sin 2\varsigma|}}F\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2 2\varsigma\right),$$

где $F(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция Эйлера (первая из этих формул вытекает из ([136, с. 309]), то $\left|\tilde{\Omega}(\theta)\right|\le 0{,}25C_7(\varsigma)\sin^{-2}(\theta/2)$.

Представим коммутатор в виде

$$([B,k]f)(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{b(s,\theta)f(s)ds}{\sin((\theta-s)/2)},\ b(s,\theta)=2i(k(s)-k(\theta))\sin((\theta-s)/2)\tilde{\Omega}(|\theta-s|).$$

Так как

$$(Sf)(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(s)ds}{\sin((s-\theta)/2)},\ \|S\|_2=1;$$

$$\max\left|\frac{k(s)-k(\theta)}{\sin((\theta-s)/2)}\right|=\max_{|t|\le\pi}\left|\frac{k(\theta+t)-k(\theta)}{\sin(t/2)}\right|\le\pi\|k'\|_C,\ |b(s,\theta)|\le 0{,}5\pi C_7(\varsigma)\|k'\|_C;$$

то $\|[B,k]\|_2\le 0{,}5\pi C_7(\varsigma)\|k'\|_C$. Теорема 2 доказана.

Следствие 5. Существует $C_G(\varsigma)$: $\|G\|_2\le C_G(\varsigma)$ при $\mu\in D_*$.

Теорема 3. $\|A_\pm\|_2\le\|q'\|_C^{3/2}C_8(\xi,\varsigma)/\sqrt{\xi}$, $C_8(\xi,\varsigma)=0{,}5\sqrt{(\mathrm{sh}(2\xi q_0)+|\mathrm{ctg}\,\varsigma|)/(\mathrm{ch}(2\xi q_0)-1)}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $\|A_\pm\|_2\le 0{,}5\|q'\|_C^{3/2}C_\pm/|\mathrm{sh}(\mu q_0)|$, где

$$C_\pm^2=\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{\mu\Delta}\pm e^{-\mu\Delta}}{2}\right|^2dq=\int_{-q_0}^{q_0}\left|\frac{e^{\mu s}\pm e^{-\mu s}}{2}\right|^2ds=\frac{\mathrm{sh}(2\xi q_0)}{2\xi}\pm\frac{\sin(2\eta q_0)}{2\eta},\ \frac{C_\pm^2}{|\mathrm{sh}(\mu q_0)|^2}\le\frac{\mathrm{sh}(2\xi q_0)+|\mathrm{ctg}\,\varsigma|}{\xi(\mathrm{ch}(2\xi q_0)-1)}.$$

Следствие 6. Существует $C_A(\varsigma,k)$: $\|A\|_2\le C_A(\varsigma,k)/\sqrt{\xi}$ при $\mu\in D_*$.

Обозначая $D_A=\{(\xi,\varsigma)|\sqrt{\xi}>C_A(\varsigma,k)\}$, получаем, что $\|A\|_2<1$ при $\mu\in D_*\cap D_A$, откуда и вытекает однозначная разрешимость уравнения (4).

Для нахождения коэффициента ψ_0 воспользуемся соотношением (3): если $\psi'=\psi_0\tilde{w}+\tilde{P}h$, где $\tilde{w}=(1-A)^{-1}w$, $\tilde{P}=(1-A)^{-1}P$, то

$$\psi_0=\int_0^{2\pi}(k\tilde{P}+1)hd\theta/\left(2\pi\mu I_0'(\mu)/I_0(\mu)-\int_0^{2\pi}k\tilde{w}d\theta\right).$$

Заметим, что в случае постоянного коэффициента $k(\theta)\equiv k_0$ решение исходной задачи может быть записано в точном виде:

$$u(r,\theta)=\sum_n\frac{h_nI_{|n|}(\mu r)e^{in\theta}}{\mu I_{|n|}'(\mu)-ink_0I_{|n|}(\mu)},\ h(\theta)=\sum_n h_ne^{in\theta}.$$

§ 2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛУКРУГЕ

В этом параграфе рассмотрена смешанная краевая задача с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге. Доказана однозначная разрешимость этой задачи при достаточно больших значениях параметра, причем главная часть обращающего оператора построена в явном виде.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть (r,θ) – полярные координаты, $D=\{(r,\theta)|\, r<1, 0<\theta<\pi\}$, $\Gamma=\{(r,\theta)|\, r=1, 0<\theta<\pi\}$. Требуется найти функцию $u(r,\theta)\in C^2(D)\cap C^1(D\cup\Gamma)\cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению Гельмгольца

$$\Delta u-\mu^2 u=0, \tag{1}$$

где $\mu=\xi+i\eta=\rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma\in(-\pi/2,\pi/2)$, и на границе области D – краевым условиям

$$u\big|_{\theta=0}=u\big|_{\theta=\pi}=0, \tag{2}$$

$$\left(r\frac{\partial u}{\partial r}-k\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{\Gamma}=l(\theta), \tag{3}$$

где $k\neq 0$ – вещественное число.

Относительно функции $l(\theta)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Гельдера на интервале $(0,\pi)$ и может иметь особенности порядка меньше единицы на его концах.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $l(\theta)$ можно считать также зависящей от μ.

Заметим, что нечетное продолжение искомой функции в нижнюю полуплоскость сводит задачу (1)-(3) к краевой задаче в круге с наклонной производной с разрывным коэффициентом угла наклона на границе.

Основная теорема. Существует функция $\chi_*(\varsigma)$ такая, что при $\xi>\chi_*(\varsigma)$ задача (1)-(3) однозначно разрешима, причем главный член разложения решения по параметру μ может быть найден в явном виде.

Доказательство основной теоремы проведем в несколько этапов. Обозначим

$$u\big|_{\Gamma}=\psi(\theta),\ \psi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin n\theta. \tag{4}$$

Общее решение краевой задачи (1), (2), (4) запишем в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\frac{I_n(\mu r)}{I_n(\mu)}\sin n\varphi,$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя ([22, с. 91]). Тогда условие (3) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\frac{\mu I_n'(\mu)}{I_n(\mu)}\sin n\varphi-k\psi'(\theta)=l(\theta),\ 0<\theta<\pi. \tag{5}$$

В § 1 было доказано следующее утверждение.

Лемма. Существуют функции $C_I(\varsigma)$ и $C_*(\varsigma)$ такие, что при $\nu\ge 0$, $\mu\in D_*=\{(\xi,\varsigma)|\ \xi>C_*(\varsigma)\}$ имеет место представление

$$\frac{\mu I_\nu'(\mu)}{I_\nu(\mu)}=\sqrt{\mu^2+\nu^2}-\frac{\mu^2}{2(\mu^2+\nu^2)}+\frac{\Xi(\mu,\nu)}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}},$$

где $|\Xi(\mu,\nu)|\le C_I(\varsigma)$, причем $C_*(0)=0$, $C_I(0)=15/8$.

По аналогии с § 1 определим операторы

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin n\theta,\ (Vf)(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\sin n\theta}{\sqrt{\mu^2+n^2}},\ (Df)(\theta)=f'(\theta),$$

$$(Ef)(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(\frac{\mu I_n'(\mu)}{I_n(\mu)}-\sqrt{\mu^2+n^2}\right)\sin n\theta,\ [V,D]=VD-DV,$$

тогда краевое условие (5) можно записать в виде

$$(V^{-1}-kD)\psi=l-E\psi. \tag{6}$$

Применим оператор V к обеим частям равенства (6):

$$(I-kVD)\psi=V(l-E\psi).$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\psi-k[V,D]\psi-kDV\psi=V(l-E\psi)$$

и подставим выражение $\psi=kVD\psi+V(l-E\psi)$ в последнее слагаемое в левой части:

$$(I-k^2DV^2D)\psi-k[V,D]\psi=(kDV+I)V(l-E\psi).$$

Продифференцируем последнее равенство и обозначим $\zeta(\theta)=\psi'(\theta)$:

$$((1+k^2)I-k^2\mu^2V^2)\zeta-kD[V,D]\psi=(k(\mu^2V^2-I)+DV)(l-E\psi). \tag{7}$$

Требование непрерывности решения исходной задачи порождает условие $\psi(0)=\psi(\pi)=0$, эквивалентное условию ортогональности

$$\int_0^{\pi}\zeta(\theta)d\theta=0. \tag{8}$$

Заметим теперь, что

$$(V\psi)(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\varphi\sin n\theta}{\sqrt{\mu^2+n^2}}\right)\psi(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\Omega(\theta-\varphi)-\Omega(\theta+\varphi))\psi(\varphi)d\varphi,$$

$$\Omega(\theta)=\frac{1}{2\mu}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{\sqrt{\mu^2+n^2}},$$

или (см. доказательство теоремы 2 §1)

$$\Omega(\theta)=\sum_{k=1}^{+\infty}(K_0(\mu(2\pi k-\theta))+K_0(\mu(2\pi(k-1)+\theta))),$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда ([22, с. 92]). Отсюда следует, что

$$([V,D]\psi)(\theta)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Omega(\theta+\varphi)\zeta(\varphi)d\varphi,$$

и уравнение (7) принимает вид

$$\left((1+k^2)I-k^2\mu^2V^2\right)\zeta(\theta)+\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}\Omega'(\theta+\varphi)\zeta(\varphi)d\varphi=\left(k\left(\mu^2V^2-I\right)+DV\right)(l-E\psi)(\theta),\ 0<\theta<\pi.$$

Выделяя главные члены, обозначая

$$R(\theta)=\sum_{k=2}^{+\infty}(K_0(\mu(2\pi k-\theta))+K_0(\mu(2\pi(k-1)+\theta)))$$

и учитывая, что функция $f_\zeta(\theta)=V^2\zeta(\theta)$ удовлетворяет уравнению $f_\zeta''-\mu^2 f_\zeta=-\zeta$ на интервале $(0,\pi)$ и краевым условиям $f_\zeta(0)=f_\zeta(\pi)=0$, запишем последнее уравнение в виде

$$(1+k^2)\zeta(\theta)-\frac{k^2\mu}{2}\int_0^{\pi}e^{-\mu|\varphi-\theta|}\zeta(\varphi)d\varphi+\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}(K_0'(\mu(\theta+\varphi))-K_0'(\mu(2\pi-\theta-\varphi)))\zeta(\varphi)d\varphi= \quad (9)$$

$$=\sigma_1\operatorname{sh}(\mu(\pi-\theta))+\sigma_2\operatorname{sh}(\mu\theta)+W(\theta),$$

где

$$W(\theta)=\left(k\left(\mu^2V^2-I\right)+DV\right)(l-E\psi)(\theta)-\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}R'(\theta+\varphi)\zeta(\varphi)d\varphi,$$

$$\sigma_1=-\frac{k^2\mu}{2\operatorname{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi}e^{-\mu\varphi}\zeta(\varphi)d\varphi,\ \sigma_2=-\frac{k^2\mu}{2\operatorname{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi}e^{\mu(\varphi-\pi)}\zeta(\varphi)d\varphi.$$

Обозначим $\sigma(\theta)=(1+\operatorname{sgn}\theta)/2$, $f_l(\theta)=\sigma(\pi/2-\theta)f(\theta)$, $f_r(\theta)=\sigma(\pi/2-\theta)f(\pi-\theta)$ и запишем уравнение (9) в виде системы, $0<\theta<\pi/2$:

$$(1+k^2)\zeta_l(\theta)-\frac{k^2\mu}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu|\varphi-\theta|}\zeta_l(\varphi)d\varphi+\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}K_0'(\mu(\theta+\varphi))\zeta_l(\varphi)d\varphi= \quad (10.1)$$

$$=\sigma_1\operatorname{sh}(\mu(\pi-\theta))+\sigma_2\operatorname{sh}(\mu\theta)+\tilde{W}_l(\theta),$$

$$\left(1+k^2\right)\zeta_r(\theta)-\frac{k^2\mu}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu|\varphi-\theta|}\zeta_r(\varphi)d\varphi-\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}K_0'\left(\mu(\theta+\varphi)\right)\zeta_r(\varphi)d\varphi= \tag{10.2}$$

$$=\sigma_1\,\mathrm{sh}(\mu\theta)+\sigma_2\,\mathrm{sh}\left(\mu(\pi-\theta)\right)+\widetilde{W}_r(\theta),$$

$$\sigma_1=-\frac{k^2\mu}{2\,\mathrm{sh}(\mu\pi)}\left(\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_l(\varphi)d\varphi+\int_0^{\pi/2}e^{-\mu(\pi-\varphi)}\zeta_r(\varphi)d\varphi\right)\sim-\frac{k^2\mu}{2\,\mathrm{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_l(\varphi)d\varphi,$$

$$\sigma_2=-\frac{k^2\mu}{2\,\mathrm{sh}(\mu\pi)}\left(\int_0^{\pi/2}e^{-\mu(\pi-\varphi)}\zeta_l(\varphi)d\varphi+\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_r(\varphi)d\varphi\right)\sim-\frac{k^2\mu}{2\,\mathrm{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_r(\varphi)d\varphi.$$

$$\widetilde{W}_l(\theta)=W_l(\theta)+\frac{k^2\mu}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu|\pi-\varphi-\theta|}\zeta_r(\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(K_0'\left(\mu(2\pi-\theta-\varphi)\right)\zeta_l(\varphi)+\left(K_0'\left(\mu(\pi-\theta+\varphi)\right)-K_0'\left(\mu(\pi+\theta-\varphi)\right)\right)\zeta_r(\varphi)\right)d\varphi,$$

$$\widetilde{W}_r(\theta)=W_r(\theta)+\frac{k^2\mu}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu|\pi-\varphi-\theta|}\zeta_l(\varphi)d\varphi-$$

$$-\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(K_0'\left(\mu(2\pi-\theta-\varphi)\right)\zeta_r(\varphi)+\left(K_0'\left(\mu(\pi-\theta+\varphi)\right)-K_0'\left(\mu(\pi+\theta-\varphi)\right)\right)\zeta_l(\varphi)\right)d\varphi.$$

Условие ортогональности (8) принимает вид

$$\int_0^{\pi/2}\zeta_l(\theta)d\theta=-\int_0^{\pi/2}\zeta_r(\theta)d\theta. \tag{11}$$

Рассмотрим уравнение (10.1). Обозначим через χ функцию Хевисайда: $\chi(\theta)=1$ при $\theta>0$ и $\chi(\theta)=0$ при $\theta\le 0$. Стандартным образом ([29, с. 200]) перейдем к задаче сопряжения относительно образов Фурье. Продолжим неизвестную функцию и правую часть нулем на оставшуюся часть вещественной прямой:

$$\widetilde{g}(\theta)=\chi(\theta)\chi(\pi/2-\theta)\zeta_l(\theta),\ G(\theta)=\chi(\theta)\chi(\pi/2-\theta)\widetilde{W}_l(\theta),$$

$$g_-(\theta)=\left(1-\chi(\theta)\right)\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}K_0'\left(\mu|\theta+\varphi|\right)\zeta_l(\varphi)d\varphi,$$

$$g_+(\theta)=\left(1-\chi(-\theta)\right)\frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi/2}K_0'\left(\mu|\theta+\pi/2+\varphi|\right)\zeta_l(\varphi)d\varphi.$$

Тогда уравнение (10.1) примет вид

$$\left(1+k^2\right)\widetilde{g}(\theta)-\frac{k^2\mu}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu|\varphi-\theta|}\widetilde{g}(\varphi)d\varphi+\frac{2k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K_0'\left(\mu|\theta+\varphi|\right)\widetilde{g}(\varphi)d\varphi=$$

$$=\chi(\theta)\chi(\pi/2-\theta)\left(\sigma_1\,\mathrm{sh}\left(\mu(\pi-\theta)\right)+\sigma_2\,\mathrm{sh}(\mu\theta)\right)+G(\theta)+g_-(\theta)+g_+(\theta-\pi/2),\ \theta\in\mathrm{R}.$$

Выполнив преобразование Фурье:

$$\hat{g}(p)=\int_0^{\pi/2} e^{ip\theta}\tilde{g}(\theta)d\theta,\ \hat{G}(p)=\int_0^{\pi/2} e^{ip\theta}G(\theta)d\theta,$$

придем к уравнению

$$\frac{\mu^2+(1+k^2)p^2}{\mu^2+p^2}\hat{g}(p)-\frac{2ikp}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\hat{g}(-p)=\Sigma(p)+\hat{G}(p)+\hat{g}_-(p)+e^{\pi ip/2}\hat{g}_+(p),\ p\in\mathrm{R},$$

где

$$\Sigma(p)=\frac{\sigma_1}{2}\left(e^{\pi\mu}\frac{e^{(ip-\mu)\pi/2}-1}{ip-\mu}-e^{-\pi\mu}\frac{e^{(ip+\mu)\pi/2}-1}{ip+\mu}\right)+\frac{\sigma_2}{2}\left(\frac{e^{(ip+\mu)\pi/2}-1}{ip+\mu}-\frac{e^{(ip-\mu)\pi/2}-1}{ip-\mu}\right).$$

Так как

$$\sigma_1\sim-\frac{k^2\mu}{2\mathrm{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_l(\varphi)d\varphi=-\frac{k^2\mu}{2\mathrm{sh}(\mu\pi)}\tilde{g}(i\mu),\ \sigma_2\sim-\frac{k^2\mu}{2\mathrm{sh}(\mu\pi)}\int_0^{\pi/2}e^{-\mu\varphi}\zeta_r(\varphi)d\varphi,$$

$$\Sigma(p)\sim\frac{\sigma_1}{2}e^{\pi\mu}\frac{e^{(ip-\mu)\pi/2}-1}{ip-\mu}\sim-\frac{k^2\mu}{2}\tilde{g}(i\mu)\frac{e^{(ip-\mu)\pi/2}-1}{ip-\mu},$$

то главные члены последнего уравнения, в обозначении $H(z)=\hat{G}(z)+e^{\pi iz/2}\hat{g}_+(z)$, дают соотношение ($p\in\mathrm{R}$)

$$\frac{\mu^2+(1+k^2)p^2}{\mu^2+p^2}\hat{g}(p)-\frac{2ikp}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\hat{g}(-p)=-\frac{k^2\mu}{2}\tilde{g}(i\mu)\frac{e^{(ip-\mu)\pi/2}-1}{ip-\mu}+H(p)+\hat{g}_-(p).\quad(12)$$

Определим функцию

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{\mu^2+(1+k^2)z^2}{\mu^2+z^2}\hat{g}(z)+\dfrac{k^2\mu}{2}\tilde{g}(i\mu)\dfrac{e^{(iz-\mu)\pi/2}-1}{iz-\mu}-H(z),\ \mathrm{Im}\,z>0,\\ \dfrac{2ikz}{\sqrt{\mu^2+z^2}}\hat{g}(-z)+\hat{g}_-(z),\ \mathrm{Im}\,z<0.\end{cases}\quad(13)$$

В силу соотношения (12) функция $\Phi(z)$ является аналитической во всей плоскости, за исключением разреза $L=\{z\,|\,z=i\mu t,\ t\in(-\infty,-1]\}$ и простого полюса $z=i\mu$, и исчезает на бесконечности. Следовательно,

$$\Phi(z)=\frac{A_0}{z-i\mu}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\eta_0(\tau)d\tau}{\tau-z},\ A_0=\frac{i\mu k^2}{2}\hat{g}(i\mu),\ \eta_0(\tau)=\frac{4k\tau}{\sqrt{-\mu^2-\tau^2}}\hat{g}(-\tau).$$

Отсюда в силу (13) получаем уравнение для определения функции $\hat{g}(z),\ z\in(-L)$:

$$\frac{\mu^2+(1+k^2)z^2}{\mu^2+z^2}\hat{g}(z)+\frac{k^2\mu}{2}\tilde{g}(i\mu)\frac{e^{(iz-\mu)\pi/2}-1}{iz-\mu}-H(z)=\frac{i\mu k^2\hat{g}(i\mu)}{2(z-i\mu)}+\frac{2k}{\pi i}\int_L\frac{\hat{g}(-\tau)}{\tau-z}\frac{\pi d\tau}{\sqrt{-\mu^2-\tau^2}},$$

или, в обозначении

$$z = i\mu x,\ \hat{g}(i\mu x) = f(x),\ \varepsilon(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1-e^{-\mu(x+1)\pi/2}}{x+1},$$

$$\frac{(1+k^2)x^2-1}{x^2-1} f(x) - \frac{2k}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{f(s)}{s+x}\frac{sds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{k^2 f(1)}{2}\varepsilon(x) + H(i\mu x),\ x>1.$$

В дальнейшем всегда будем полагать, что $x>1$. Обозначив

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ b = \frac{2k}{1+k^2},\ Q(x) = \frac{x^2-1}{x^2-a^2},\ h(x) = a^2 Q(x)\left(\frac{k^2 f(1)}{2}\varepsilon(x) + H(i\mu x)\right),\ \rho(x) = \sqrt{x^2-1},$$

приходим к основному уравнению

$$f(x) - Q(x)\frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(s)}{s+x}d\rho(s) = h(x). \qquad (14)$$

Заметим теперь, что в силу (13)

$$\Phi(i\mu a) = \frac{k^2}{2}\frac{f(1)}{a-1} + \frac{2k}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(s)}{s+a}d\rho(s) = \frac{k^2}{2} f(1)\frac{1-e^{-\mu(a+1)\pi/2}}{a+1} - H(i\mu a),$$

$$\frac{k^2}{2} f(1) = -\frac{1}{\varepsilon(a)}\left(\frac{2k}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(s)}{s+a}d\rho(s) + H(i\mu a)\right),$$

откуда следует, что правую часть уравнения (14) можно представить в виде

$$h(x) = \tilde{h}(x) - \frac{a^2-1}{x^2-a^2}\frac{2+(x-1)e^{-\mu(x+1)\pi/2}}{2+(a-1)e^{-\mu(a+1)\pi/2}}\frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(s)}{s+a}d\rho(s),$$

$$\tilde{h}(x) = a^2 Q(x)\left(H(i\mu x) - H(i\mu a)\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon(a)}\right).$$

Или, пренебрегая малыми членами:

$$h(x) = \tilde{h}(x) + \frac{C_h}{x^2-a^2},\ C_h = \frac{(1-a^2)b}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(s)}{s+a}d\rho(s). \qquad (15)$$

Подставляя в (14), приходим к альтернативной форме записи основного уравнения:

$$f(x) - \frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(1 + \frac{1-a^2}{(x+a)(s+a)}\right)\frac{f(s)}{s+x}d\rho(s) = \tilde{h}(x). \qquad (16)$$

Заметим, что уравнение (16) можно вывести и напрямую из (12), несколько иначе определив аналитическое продолжение (13).

Уравнение (16) – это особое интегральное уравнение с переменными коэффициентами. Представление (14) и специальное соотношение между параметрами позволяют решить это уравнение в квадратурах.

Перейдем к операторной форме записи. Обозначив

$$(S_{\pm} f)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{f(s)}{s \pm x} d\rho(s), \tag{17}$$

запишем уравнение (14) в виде

$$(I - ibQS_{+}) f = h. \tag{18}$$

Применим оператор повторно:

$$f = h + ibQS_{+}(h + ibQS_{+} f) = h + ibQS_{+}h - b^2 QS_{+}^2 Qf - b^2 QS_{+}[Q, S_{+}] f\ . \tag{19}$$

Равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} \frac{ds}{s - x} = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} \frac{ds}{s + x}$$

позволяет выразить оператор S_{+}^2 через оператор S_{-}^2: в классе функций, обращающихся в единице в нуль, в силу формулы Пуанкаре-Бертрана справедливо соотношение $S_{-}^2 = (\rho')^2 I + S_{+}^2$. Таким образом, (19) можно переписать в виде

$$\left(1 - b^2 (\rho')^2 Q^2\right) f - (ibQS_{-})(ibS_{-}Q) f = h + ibQS_{+}h - b^2 QS_{+}[Q, S_{+}] f\ . \tag{20}$$

Заметим теперь, что

$$1 - b^2 (\rho'(x))^2 Q^2(x) = A^2(x),\ A(x) = \frac{(1 - 2a^2)x^2 + a^2}{x^2 - a^2};$$

это соотношение позволяет факторизовать левую часть уравнения (20) так, чтобы оператор в правой части оказался конечномерным:

$$(AI + i|b|QS_{-})(AI - i|b|S_{-}Q) f = h + ibQS_{+}h - b^2 QS_{+}[Q, S_{+}] f + i|b|(QS_{-}A - AS_{-}Q) f\ ,$$

$$(AI + i|b|QS_{-})(AI - i|b|S_{-}Q) f = w, \tag{21}$$

$$w = w_1 + ibQS_{+}w_2\ ,\ w_1 = h + i|b|(QS_{-}A - AS_{-}Q) f\ ,\ w_2 = h + ib[Q, S_{+}] f\ ,$$

или, в развернутой форме,

$$w_1(x) = h(x) - |b| \frac{c_0 x + c_1}{x^2 - a^2},\ w_2(x) = h(x) + b \frac{c_0 x - c_1}{x^2 - a^2},\ c_k = \frac{1 - a^2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{s^k f(s)}{s^2 - a^2} d\rho(s),\ k = \overline{0,1}. \tag{22}$$

Последовательно обратим сингулярные интегральные операторы, стоящие в левой части уравнения (21). Запишем его в виде

$$(A + i|b|QS_{-}) g = w, \tag{23.1}$$

$$(A - i|b|S_{-}Q) f = g\ . \tag{23.2}$$

Решим уравнение (23.1). В силу свойств правой части уравнения (14) правая часть уравнения (23.1) исчезает на бесконечности. Решение уравнения (23.1) также будем искать в классе функций, исчезающих на бесконечности. Обозначим

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{g(s)}{s-z}d\rho(s),$$

тогда по формуле Сохоцкого-Племеля $F^+(x)-F^-(x)=2\rho'(x)g(x)$.

Стандартным образом ([28, с. 176]) перейдем к задаче сопряжения:

$$F^+(x)=\frac{1}{D(x)}F^-(x)+\frac{2xw(x)}{\sqrt{x^2-1}A(x)+i|b|xQ(x)},\ D(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}A(x)+i|b|xQ(x)}{\sqrt{x^2-1}A(x)-i|b|xQ(x)}.$$

Обозначим

$$\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln D(+\infty)=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{k^2-1+2i|k|}{k^2+1}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{|k|},\ 0<\gamma<1.$$

Определим каноническую функцию данной задачи как $1/X(z)$, где $X^+(x)/X^-(x)=D(x)$.

Отметим некоторые свойства канонической функции, которые будут играть важную роль в дальнейших рассуждениях:

$$X(z)=\frac{X_0(z)}{(1-z)^\gamma}=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{D'(t)}{D(t)}\ln\frac{1}{t-z}dt\right),\ X_0(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\ln\left(e^{-2\pi i\gamma}D(t)\right)\frac{dt}{t-z}\right),\ X_0(\infty)=1.$$

$$X^\pm(x)=D^{\pm1/2}(x)X(x),\ X(x)=(x-1)^{-\gamma}X_0(x).$$

$$X^+(x)+X^-(x)=2A(x)X(x),\ 1/X^+(x)+1/X^-(x)=2A(x)/X(x).$$

$$X^+(x)-X^-(x)=2i|b|\rho'(x)Q(x)X(x),\ 1/X^+(x)-1/X^-(x)=-2i|b|\rho'(x)Q(x)/X(x).$$

Рассмотрим выражение $\left(1-2a^2\right)z^2+a^2-|b|z\sqrt{1-z^2}$ (выбираем ветвь $\sqrt{1}=1$). В точке $z=a$ оно имеет нуль кратности два, поэтому функция

$$\delta(z)=\left(\left(1-2a^2\right)z^2+a^2-|b|z\sqrt{1-z^2}\right)(z-a)^{-2}$$

– аналитическая во всей комплексной плоскости с разрезами вдоль лучей $|\operatorname{Re}z|>1$, не обращается в нуль и бесконечность и ограничена. На разрезах она удовлетворяет условиям $\delta^+(x)/\delta^-(x)=D(x)$, $\delta^+(-x)/\delta^-(-x)=D(-x)$, поэтому по теореме Лиувилля $\delta(z)=CX(z)/X(-z)$. Константу находим по значению в нуле: $C=\delta(0)=1$. Окончательно, $X(-z)=X(z)/\delta(z)$. В частности,

$$X(-x)=\frac{x-a}{x+a}X(x) \qquad (24)$$

(напомним, что $x>1$).

Решая неоднородную задачу сопряжения, находим

$$F(z)=Y(z)/X(z),\ Y^+(x)-Y^-(x)=2\rho'(x)w(x)X(x),$$

$$g(x)=A(x)w(x)-Q(x)\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{X(t)}{X(x)}\frac{w(t)}{t-x}d\rho(t). \qquad (25)$$

Отметим, что $g(x)=O\left(x^{\gamma-1}\right)$ при $x\to+\infty$.

В силу свойств канонической функции однородная задача сопряжения не имеет нетривиальных решений, поэтому формула (25) задает и общее решение уравнения (23.1).

Рассмотрим теперь уравнение (23.2). Аналогично предыдущему, определим

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{Q(s)f(s)}{s-z}d\rho(s),\ F^+(x)-F^-(x)=2Q(x)\rho'(x)f(x).$$

Задача сопряжения:

$$F^+(x)=D(x)F^-(x)+\frac{2xQ(x)g(x)}{\sqrt{x^2-1}A(x)-i|b|xQ(x)}.$$

Каноническая функция: $X(z)$. Неоднородная задача сопряжения: $F(z)=X(z)Y(z)$,

$$Y^+(x)-Y^-(x)=2\rho'(x)Q(x)g(x)/X(x). \qquad (26)$$

В силу свойств канонической функции, в этом случае задачу о скачке (26) нужно решать в классе функций, растущих с порядком меньше γ на бесконечности.

Дальнейшие рассуждения проводятся по-разному в зависимости от соотношения между значением $|k|$ и единицей; рассмотрим каждый случай поочередно, опуская громоздкие промежуточные выкладки. Буквами C с возможными индексами будем обозначать константы.

1^0. Пусть $|k|>1$, тогда $\gamma<1/2$. Обозначим $c=ia/\sqrt{1-2a^2}$. Решение задачи о скачке (26), с учетом формулы (25), записывается так:

$$Y(z)=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{A(s)Q(s)}{X(s)}w(s)-\frac{Q^2(s)}{X^2(s)}\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}X(t)w(t)\frac{d\rho(t)}{t-s}\right)\frac{d\rho(s)}{s-z}.$$

Общее решение задачи сопряжения:

$$F(z)=X(z)\left(C_F+Y(z)\right).$$

Вычисляя интегралы с помощью свойств канонической функции, находим решение уравнения (21). Например, промежуточный интеграл

$$I(x)=-\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{Q^2(s)}{X^2(s)}\frac{d\rho(s)}{s-x}\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{X(t)w(t)}{t-s}d\rho(t)$$

вычисляется так:

$$I(x)+\frac{i|b|x^2Q^2(x)X(x)w(x)}{\left(x^2-1\right)X^2(x)}=\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}X(t)w(t)d\rho(t)\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{Q^2(s)}{X^2(s)}\frac{1}{s-t}\frac{d\rho(s)}{s-x}=$$

$$= -\frac{1}{4\pi i}\int_1^{+\infty} X(t)w(t)d\rho(t)\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{Q(s)}{A(s)}\left(\left(\frac{1}{X^2(s)}\right)^+ - \left(\frac{1}{X^2(s)}\right)^-\right)\frac{1}{s-t}\frac{ds}{s-x} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\left(A^2(x)-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{X^2(x)}\frac{Q(x)}{A(x)} - \left(A^2(t)-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{X^2(t)}\frac{Q(t)}{A(t)}\right)\frac{X(t)w(t)}{t-x}d\rho(t) +$$

$$+ c^3\frac{1-a^2}{4a^4\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{X^{-2}(c)}{(c-t)(c-x)} - \frac{X^{-2}(-c)}{(c+t)(c+x)}\right)X(t)w(t)d\rho(t).$$

В итоге находим общее решение уравнения (21):

$$f(x) = i|b|C_F X(x) + w(x) + \frac{Q(x)}{A(x)}\frac{|b|}{2\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{X(x)}{X(t)} - \frac{X(t)}{X(x)}\right)w(t)\frac{d\rho(t)}{t-x} +$$

$$+ \frac{|b|c(c^2-1)}{a^2}\frac{X(x)}{4\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{(t-c)(x-c)}\left(\frac{1}{X(t)} + \frac{X(t)}{X^2(c)}\right) - \frac{1}{(t+c)(x+c)}\left(\frac{1}{X(t)} + \frac{X(t)}{X^2(-c)}\right)\right)w(t)d\rho(t).$$

Представим его в виде

$$f(x) = \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2}{x^2 - c^2}X(x) + w(x) + \frac{Q(x)}{A(x)}\frac{|b|}{2\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{X(x)}{X(t)} - \frac{X(t)}{X(x)}\right)w(t)\frac{d\rho(t)}{t-x}.$$

Подставляя из (22) выражение для правой части, находим общий вид решения уравнения (14):

$$f(x) = f_0(x) + (\Lambda h)(x),$$

$$f_0(x) = \frac{C_0^+ + C_1^+ x + C_2^+ x^2 + C_3^+ x^3}{(x^2 - c^2)(x+a)}X(x) + \frac{C_0^- + C_1^- x + C_2^- x^2}{(x^2 - c^2)(x-a)}\frac{1}{X(x)},$$

$$(\Lambda h)(x) = h(x) + \frac{Q(x)}{A(x)}\frac{|b|}{2\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{X(x)}{X(t)} - \frac{X(t)}{X(x)}\right)h(t)\frac{d\rho(t)}{t-x} + \frac{Q(x)}{A(x)}\frac{b}{2\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{X(x)}{X(-t)} + \frac{X(-t)}{X(x)}\right)h(t)\frac{d\rho(t)}{t+x}.$$

Подставив в $(\Lambda h)(x)$ выражение для правой части уравнения (14) из соотношения (15), находим общий вид решения уравнения (16) (сохраняем прежние обозначения для констант):

$$f(x) = f_0(x) + (\Lambda\tilde{h})(x). \qquad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (16), приравнивая подобные члены и учитывая, что

$$i\frac{a-c}{a+c}X^2(c) = |X(c)|^2,$$

находим константы из системы линейных алгебраических уравнений:

а) $k > 0$:

$$C_1^- = 0,\ C_2^- = -C_0^-,\ -C_0^+ = C_2^+ = \frac{bc^2}{\pi a}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde{h}(t)}{X(t)}\frac{d\rho(t)}{t-a},$$

$$C_1^+ = -a^2\frac{1-c^2}{ic|X(c)|^2}C_0^- - \frac{bc^2}{\pi a^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{t^2-a^2c^2}{t-a}\frac{1}{X(t)} - \frac{a^2tX(t)}{t+a}\frac{1-c^2}{ic|X(c)|^2}\right)\frac{\tilde{h}(t)d\rho(t)}{t^2-c^2},$$

$$C_3^+ = \frac{1-c^2}{ic|X(c)|^2}C_0^- + \frac{bc^2}{\pi a^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{t^2-1}{t-a}\frac{1}{X(t)} - \frac{tX(t)}{t+a}\frac{1-c^2}{ic|X(c)|^2}\right)\frac{\tilde{h}(t)d\rho(t)}{t^2-c^2};$$

б) $k<0$:

$$C_0^+ = C_1^+ = C_2^+ = C_3^+ = 0,\ C_0^- = -C_2^- = \frac{bc^2}{\pi a}\int_1^{+\infty}X(t)\tilde{h}(t)\frac{d\rho(t)}{t+a},$$

$$C_1^- = \frac{(1-c^2)b}{\pi a^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{ict}{t-a}\frac{(a^2-c^2)|X(c)|^2}{X(t)} - c^2(t-a)X(t)\right)\frac{\tilde{h}(t)d\rho(t)}{t^2-c^2}.$$

Итак, при $k>0$ в системе один свободный параметр C_0^-, а при $k<0$ система однозначно разрешима. Так как уравнения (10.1), (10.2) отвечают противоположным знакам коэффициента, то наличие свободного параметра позволяет удовлетворить условию ортогональности: при $k>0$

$$f(0) = \upsilon C_0^- + \tilde{h}(0) + \frac{b}{\pi a X(0)}\int_1^{+\infty}\frac{X(t)}{t+a}\frac{\tilde{h}(t)dt}{\sqrt{t^2-1}},\ \upsilon = -\frac{1}{ac^2X(0)} \neq 0, \tag{28}$$

и в силу последнего неравенства параметр C_0^- определяется условием (11) однозначно.

2^0. Пусть $|k|<1$, тогда $\gamma > 1/2$. Обозначим $c = a/\sqrt{2a^2-1}$. Выделяя в правой части задачи о скачке (26) слагаемое, растущее на бесконечности, представим ее в виде

$$Y^+(x) - Y^-(x) = 2\rho'(x)\left(\frac{A(x)Q(x)}{X(x)}w(x) - \frac{|b|iC_*Q^2(x)}{X^2(x)(x-1)} - \frac{Q^2(x)}{X^2(x)}\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{x-1}X(t)w(t)\frac{d\rho(t)}{t-x}\right),$$

$$C_* = -\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}X(t)w(t)d\rho(t). \tag{29}$$

Тогда, с учетом равенства $D(c) = -1$, решение можно представить в виде

$$Y(z) = C_*Y_1(z) + Y_2(z), \tag{30}$$

$$Y_1(z) = -\frac{c^2}{2a^2}\frac{z+1}{z^2-c^2}X^{-2}(z) - \frac{c}{4a^2}\left(\frac{c+1}{z-c}X^{-2}(c) + \frac{c-1}{z+c}X^{-2}(-c)\right),$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{A(s)Q(s)}{X(s)}w(s) - \frac{Q^2(s)}{X^2(s)}\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{s-1}X(t)w(t)\frac{d\rho(t)}{t-s}\right)\frac{d\rho(s)}{s-z}.$$

В результате вычислений получаем, что, как и в п. 1^0, решение представимо формулой (27). Аналогично п. 1^0 находим константы в (27), с учетом равенств

$$X^+(c)+X^-(c)=0,\ \frac{1}{X^+(c)}+\frac{1}{X^-(c)}=0,\ \operatorname{Im}X(-c)=0:$$

а) $k>0$:

$$C_1^-=0,\ C_2^-=-C_0^-,\ -C_0^+=C_2^+=\frac{bc^2}{\pi a}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde h(t)}{X(t)}\frac{d\rho(t)}{t-a},$$

$$C_1^+=-C_0^-\frac{a-c}{(a+c)^2}a^2\frac{c^2-1}{cX^2(-c)}-\frac{bc}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{a-c}{a+c}\frac{c^2-1}{t+a}\frac{tX(t)}{X^2(-c)}+\frac{t^2-a^2c^2}{t-a}\frac{c}{a^2X(t)}\right)\frac{\tilde h(t)d\rho(t)}{t^2-c^2},$$

$$C_3^+=C_0^-\frac{a-c}{(a+c)^2}\frac{c^2-1}{cX^2(-c)}+\frac{bc}{\pi a^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{a-c}{a+c}\frac{c^2-1}{t+a}\frac{tX(t)}{X^2(-c)}+\frac{t^2-1}{t-a}\frac{c}{X(t)}\right)\frac{\tilde h(t)d\rho(t)}{t^2-c^2};$$

б) $k<0$:

$$C_0^+=C_1^+=C_2^+=C_3^+=0,\ C_0^-=-C_2^-=\frac{bc^2}{\pi a}\int_1^{+\infty}X(t)\tilde h(t)\frac{d\rho(t)}{t+a},$$

$$C_1^-=\frac{(c^2-1)bc}{\pi a^2}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde h(t)d\rho(t)}{t^2-c^2}\left((c^2-at)X(t)-(a+c)\frac{t^2+ac}{t-a}\frac{X^2(-c)}{X(t)}\right).$$

Условию ортогональности удовлетворяем так же, как в п. 1^0; формула (28) остается справедливой.

3^0. Пусть $|k|=1$, тогда $\gamma=1/2$, $a=1/\sqrt{2}$, $|b|=1$, $Q(x)/A(x)=2(x^2-1)$. Как и в п. 2^0, представим задачу о скачке (26) в виде (29). Учитывая, что $X^2(z)=X_0^2(z)/(1-z)$,

$$X_0^2(z)=1+\frac{\tilde a}{1-z}+O\left(\frac{\ln z}{z^2}\right),\ z\to\infty,$$

$$\tilde a=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{2it\sqrt{t^2-1}+1}{2it\sqrt{t^2-1}-1}\right)dt=1-\frac{4}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{(2t^2-1)d\rho(t)}{1+4t^2(t^2-1)}=1-\sqrt{2}=1-2a$$

(значение $\tilde a$ можно найти и из формулы (24)), находим, что в формуле (30)

$$Y_1(z)=(z+1)(X^{-2}(z)+z-2a).$$

Общий вид решения уравнения (21):

$$f(x)=i|b|C_F X(x)+i|b|C_*(x+1)\left((x-2a)X(x)-\frac{1}{X(x)}\right)+w(x)+$$

$$+\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\left((t+1)\left(\frac{1}{X^2(t)}-(t-2a)\right)-(x+1)\left(\frac{1}{X^2(x)}-(x-2a)\right)\right)\frac{X(x)X(t)(t-1)}{t-x}w(t)d\rho(t).$$

Общий вид решения уравнения (16) определяется, как и в пп. 1^0-2^0, формулой (27), где

$$f_0(x)=\frac{C_0^++C_1^+x}{x+a}X(x)+(C_0^-+C_1^-x)\left((x-2a)X(x)-\frac{1}{X(x)}\right)+\frac{C_0}{(x-a)X(x)},$$

$$\left(\Lambda\widetilde{h}\right)(x)=\widetilde{h}(x)+$$

$$+\frac{|b|}{\pi}\int_1^{+\infty}\left((t+1)\left(\frac{1}{X^2(t)}-(t-2a)\right)-(x+1)\left(\frac{1}{X^2(x)}-(x-2a)\right)\right)\frac{X(x)X(t)}{t-x}(t-1)\widetilde{h}(t)d\rho(t)+$$

$$+\frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\left((t-1)\left(\frac{1}{X^2(-t)}-(t+2a)\right)-(x+1)\left(\frac{1}{X^2(x)}-(x-2a)\right)\right)\frac{X(x)X(-t)}{t+x}(t+1)\widetilde{h}(t)d\rho(t).$$

Константы:

а) $k>0$:

$$C_0^+=aC_1^--\frac{2a}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{X(t)}-\left(t-2a+\frac{1}{t+a}\right)X(t)\right)\frac{t^2-1}{t-a}\widetilde{h}(t)d\rho(t),$$

$$C_1^+=C_1^--\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{X(t)}-\left(t-2a+\frac{1}{t+a}\right)X(t)\right)\frac{t^2-1}{t-a}\widetilde{h}(t)d\rho(t),$$

$$C_0^-=aC_1^-+\frac{2(a-1)}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{tX(t)}{t+a}\widetilde{h}(t)d\rho(t),$$

$$C_0=\frac{4(3a-2)X^2(1)+1}{2}C_1^-+\frac{4(7a-5)X^2(1)+1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{tX(t)}{t+a}\widetilde{h}(t)d\rho(t);$$

б) $k<0$:

$$C_0^+=-\frac{1}{5\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{t}{t-a}\frac{1}{X(t)}-\frac{t^2-4a+3}{t+a}X(t)\right)\widetilde{h}(t)d\rho(t),\ C_1^+=2aC_0^+,$$

$$C_0^-=-\frac{2}{5\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{t}{t-a}\frac{1}{X(t)}-\frac{t^2+a-2}{t+a}X(t)\right)\widetilde{h}(t)d\rho(t),\ C_1^-=0,$$

$$C_0=\frac{2a}{5\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{t}{t-a}\frac{1}{X(t)}-\frac{t^2+6a-7}{t+a}X(t)\right)\widetilde{h}(t)d\rho(t).$$

Условию ортогональности удовлетворяем так же, как в пп. 1^0-2^0. Роль свободного параметра при $k>0$ играет C_1^-. Формула (28) принимает вид

$$f(0)=\upsilon C_1^-+\widetilde{h}(0)-\frac{1}{\pi a}\int_1^{+\infty}\left(\left(4(7a-5)X^2(1)+2\right)t-\frac{1}{t}\right)\frac{X(t)}{X(0)}\frac{\widetilde{h}(t)d\rho(t)}{t+a},\ \upsilon=-\frac{1+2(3a-2)X^2(1)}{aX(0)}\neq 0.$$

Основная теорема доказана.

§ 3. РАСПОЛОЖЕНИЕ СПЕКТРА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУКРУГЕ

В этом параграфе изучена спектральная задача для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями в полукруге. Доказано, что спектр задачи не принадлежит карлемановской параболе $|\operatorname{Im}\lambda| \le \text{const}$.

Пусть открытая область D на плоскости ограничена полуокружностью Γ, $\Gamma = \{(x,y): x^2+y^2=1,\ y>0\}$, и отрезком AB, $A(-1,0)$, $B(1,0)$. Рассмотрим следующую спектральную задачу (за (r,φ) обозначены полярные координаты):

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0,\ (x,y)\in D, \tag{1}$$

$$u|_{AB} = 0, \tag{2}$$

$$(ru_r - ku_\varphi)|_\Gamma = 0,\ k\ne 0, k\in \mathrm{R}, \tag{3}$$

где $u = u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D}\setminus\{A,B\}) \cap C^2(D)$.

Основная теорема. Собственные значения задачи (1)-(3) не лежат в карлемановской параболе $|\operatorname{Im}\lambda| \le C$ ни при каком C; точнее, существует последовательность собственных значений $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ такая, что $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$, $\beta_n/\alpha_n \to 0$.

Основные этапы доказательства.

1. Исходная задача сводится к интегральному уравнению типа свертки на конечном отрезке $-\pi < \theta < \pi$ относительно неизвестной функции $\psi(\varphi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(kJ_0\left(\lambda\left|2\sin\left((\theta-\varphi)/2\right)\right|\right)\psi'(\varphi)\operatorname{sgn}\varphi - \lambda\left|\sin\left((\theta-\varphi)/2\right)\right|J_0'\left(\lambda\left|2\sin\left((\theta-\varphi)/2\right)\right|\right)\psi(\varphi)\right)d\varphi = 0,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя.

2. Уравнение типа свертки сводится к уравнению Фредгольма второго рода.

3. Уравнение Фредгольма второго рода сводится к легко решаемому уравнению с двумерным ядром.

Доказательство. Обозначим $\lambda = \alpha + i\beta$. Считаем $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha >> \beta$. Возьмем нетривиальное решение уравнения (1), обращающееся в нуль на отрезке AB. Пусть $\rho_\pm(R,\theta;r,\varphi) = \sqrt{R^2 - 2Rr\cos(\theta\mp\varphi) + r^2}$, тогда в качестве такого решения возьмем $G(\lambda;R,\theta;r,\varphi) = J_0(\lambda\rho_+) - J_0(\lambda\rho_-)$, где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя ([22, с. 51]). Применяя формулу Грина, в силу ограниченности $J_0(z)$ при $z\to 0$ получаем:

$$\int_0^{\pi} \left(u_r(r,\varphi)G(\lambda;1,\theta;r,\varphi) - G_r(\lambda;1,\theta;r,\varphi)u(r,\varphi)\right)_{r=1} d\varphi = 0,\ 0<\theta<\pi. \tag{4}$$

Обозначим

$$F_0(\lambda,x)=J_0\left(\lambda\left|2\sin(x/2)\right|\right),\ F_1(\lambda,x)=\lambda\left|\sin(x/2)\right|J_0'\left(\lambda\left|2\sin(x/2)\right|\right)$$

(заметим, что обе эти функции четные по второму аргументу). Тогда

$$G(\lambda;1,\theta;1,\varphi)=F_0(\lambda,\theta-\varphi)-F_0(\lambda,\theta+\varphi),\ G_r(\lambda;1,\theta;1,\varphi)=F_1(\lambda,\theta-\varphi)-F_1(\lambda,\theta+\varphi).$$

Кроме того, обозначим $\psi(\theta)=u(1,\theta)$. Так как $u(A)=u(B)=0$, то $\psi(\theta)\in C_0^{0,\delta}[0,\pi]\cap C^{1,\delta}(0,\pi)$.

В силу (3) мы можем переписать соотношение (4) в следующем виде, $0<\theta<\pi$:

$$\int_0^{\pi}\left(k\left[F_0(\lambda,\theta-\varphi)-F_0(\lambda,\theta+\varphi)\right]\psi'(\varphi)-\left[F_1(\lambda,\theta-\varphi)-F_1(\lambda,\theta+\varphi)\right]\psi(\varphi)\right)d\varphi=0. \qquad (5)$$

Это уравнение типа свертки на конечном отрезке, не решаемое в квадратурах ([29, с. 201]), эквивалентное исходной задаче. Целью дальнейших рассуждений будет получение «регулярного» интегрального уравнения относительно образа Фурье искомой функции и доказательство наличия у этого уравнения нетривиальных решений при сколь угодно большом β.

Продолжим $\psi(\theta)$ нечетно на $[-\pi;0]$: $\psi(-\theta)=-\psi(\theta),\ \theta\in[-\pi,\pi]$. В этом случае (5) переходит в следующее соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(kF_0(\lambda,\theta-\varphi)\psi'(\varphi)\operatorname{sgn}\varphi-F_1(\lambda,\theta-\varphi)\psi(\varphi)\right)d\varphi=0,\ -\pi<\theta<\pi. \qquad (6)$$

Выполним дискретное преобразование Фурье: умножим обе части (6) на $e^{in\theta}$, $n\in\mathrm{Z}$, и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π. Обозначим

$$V(z)=\int_0^{\pi}e^{iz\theta}\psi(\theta)d\theta.$$

Очевидно, функция $V(z)$ – целая, причем из свойств $\psi(\theta)$ вытекает, что

$$V(z)=-(iz)^{-1}\int_0^{\pi}e^{iz\theta}\psi'(\theta)d\theta,\ \lim_{|\operatorname{Im}z|\to\infty}zV(z)e^{-\pi|\operatorname{Im}z|}=0.$$

Используя формулу

$$\int_0^{\pi}J_0(2\lambda\sin\varphi)\cos(2n\varphi)d\varphi=\pi\left[J_n(\lambda)\right]^2,\ n=0,1,2,\ldots$$

([7, с. 58, (13)]), которая в силу свойства

$$J_{-n}(\lambda)=(-1)^nJ_n(\lambda)$$

([22, с. 24]) справедлива и при отрицательных n, и равенство

$$F_1(\lambda, p) = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial F_0(\lambda, p)}{\partial \lambda},$$

получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi'(\varphi)\operatorname{sgn}\varphi\, e^{in\varphi} d\varphi = -in\big(V(n)+V(-n)\big),\ \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi = V(n)-V(-n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_0(\lambda,\varphi)\, e^{in\varphi} d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} J_0(2\lambda\sin\varphi)\cos(2n\varphi) d\varphi = 2\pi\big[J_n(\lambda)\big]^2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_1(\lambda,\varphi)\, e^{in\varphi} d\varphi = 2\pi\lambda J_n(\lambda) J_n'(\lambda).$$

Таким образом, (6) переходит в следующее соотношение:

$$2\pi k\big(J_n(\lambda)\big)^2(-in)\big(V(n)+V(-n)\big) - 2\pi\lambda J_n(\lambda)J_n'(\lambda)\big(V(n)-V(-n)\big) = 0,\ n\in \mathrm{Z}.$$

Так как $\lambda \notin \mathrm{R}$, то $J_n(\lambda) \neq 0,\ n\in \mathrm{Z}$ ([22, с. 530]), и, сокращая на $-2\pi J_n'(\lambda)$, получаем соотношение

$$\big(iknJ_n(\lambda) + \lambda J_n'(\lambda)\big)V(n) + \big(iknJ_n(\lambda) - \lambda J_n'(\lambda)\big)V(-n) = 0,\ n\in \mathrm{Z}. \qquad (7)$$

Замечание. Соотношение (7) можно получить и по-другому, если искать решение задачи (1)-(3) в виде ряда:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda r)}{J_n(\lambda)} b_n \sin n\varphi,\ u(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(1,\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda J_n'(\lambda r)}{J_n(\lambda)} b_n \sin n\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda J_n'(\lambda)}{J_n(\lambda)} b_n \sin n\varphi,$$

и (3) эквивалентно условию

$$\frac{\lambda J_n'(\lambda)}{J_n(\lambda)} b_n = -ikna_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\Lambda^+ = \{z : z = i\lambda s,\ 0 \le s < +\infty\}$, $\Lambda^- = \{z : z = i\lambda s,\ -\infty < s \le 0\}$, $\Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Будем считать, что движение по этим разрезам происходит в направлении возрастания s. Прямая Λ делит комплексную плоскость на две части; обозначим ту из них, которая остается слева при движении по Λ, за C^+, а другую – за C^-. Очевидно, C^- содержит положительную полуось. Обозначим за $z_1, \ldots, z_m$ лежащие в C^- корни $J_z(\lambda)$ как функции от z. Как известно ([22, с. 546, 567]), этих корней конечное число, причем они не попадают на действительную прямую. Обозначим также

$$P(z) = \begin{cases} V(z), \operatorname{Im} z \ge 0, \\ V(-z), \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}\quad J(z) = \frac{\partial J_z(\lambda)}{\partial \lambda} / J_z(\lambda) \equiv \frac{\partial \ln J_z(\lambda)}{\partial \lambda},\ A_{\pm}(z) = ikz \pm \lambda J(z),$$

$$\nu(z)=\frac{A_+(z)V(z)+A_-(z)V(-z)}{\sin(\pi z)},\ a_j=\operatorname*{Res}_{z_j}\nu(z)\equiv\lim_{z\to z_j}(z-z_j)\nu(z),\ j=\overline{1,m}. \qquad (8)$$

Тогда функция

$$\Phi(z)=\nu(z)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{z-z_j}$$

в силу соотношения (7) и свойств функции $V(z)$ будет аналитической и ограниченной в C^- и будет исчезать при $z\to\infty,\ z\in\mathrm{C}^-$. Продолжив ее четно в C^+: $\Phi(-z)=\Phi(z),\ z\in\mathrm{C}$, получим, что $\Phi(z)\in A(\mathrm{C}\setminus\Lambda),\ \Phi(\infty)=0$. Это позволяет рассмотреть следующую задачу Римана-Гильберта относительно $\Phi(z)$ на разрезе Λ (здесь и далее придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [29]) и, решив ее, выразить $\nu(z),\ z\in\mathrm{C}^-$, через $P(z),\ z\in\Lambda$, и $z_j, a_j,\ j=\overline{1,m}$:

$$\Phi^+(z)=G(z)\Phi^-(z)+H(z),\ z\in\Lambda,$$

где

$$G(z)=\begin{cases}-A_+(-z)/A_-(z), & z\in\Lambda^+,\\ -A_-(-z)/A_+(z), & z\in\Lambda^-;\end{cases}$$

$$H(z)=\frac{2ikz(1-G(z))P(z)}{\sin(\pi z)}+G(z)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{z-z_j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{z+z_j}.$$

Заметим, что $G(-z)G(z)=1$. Поведение функции $G(z)$ рассмотрено в Приложении, согласно которому можно, не ограничивая общности, считать индекс функции $G(z)$ равным 0, что и будет предполагаться в дальнейшем. Таким образом, допустима факторизация: $G(z)=X^+(z)/X^-(z)$, причем $X^+(-z)=X^-(z)$, и задача однозначно разрешима в рассматриваемом классе функций:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{H(t)dt}{X^+(t)(t-z)}.$$

Следовательно,

$$\nu(z)=X^-(z)(Y(z)+S(z)),\ z\in\mathrm{C}^-, \qquad (9)$$

где

$$Y(z)=-\frac{k}{\pi}\int_\Lambda\frac{tP(t)dt}{\sin(\pi t)X^-(t)}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t+z}\right),\ S(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{X^-(z_j)}\left(\frac{1}{z-z_j}-\frac{1}{z+z_j}\right),$$

причем функции $Y(z)$ и $S(z)$ определены и в C^+ и $Y(-z)=Y(z),\ S(-z)=S(z)$.

Получим на основе (9) уравнение относительно $P(z)$. Для этого поставим и решим еще одну задачу сопряжения; соответствующие функции будем помечать индексом R.

В силу соотношений (8) и (9) при $x > 0$ справедливо равенство:

$$A_+(x)V(x) + A_-(x)V(-x) = \sin(\pi x)X^-(x)(Y(x) + S(x)). \qquad (10)$$

Определим функцию $\Phi_R(z)$ при $z \in \mathrm{C}^-$:

$$\Phi_R(z) = \begin{cases} A_+(z)V(z) + 0{,}5ie^{i\pi z}X^-(z)(Y(z) + S(z)), \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -A_-(z)V(-z) + 0{,}5ie^{-i\pi z}X^-(z)(Y(z) + S(z)), \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

В силу соотношения (10)

$$\Phi_R(z) \in A\left(\mathrm{C}^- \setminus \{z_j\}_{j=1}^m\right).$$

Обозначим

$$b_j = \operatorname*{Res}_{z_j} \Phi_R(z), \ j = \overline{1,m}.$$

Продолжим функцию $\Phi_R(z)$ четно в C^+, тогда при $z \in \mathrm{C}^+$:

$$\Phi_R(z) = \begin{cases} -A_-(-z)V(z) + 0{,}5ie^{i\pi z}X^+(z)(Y(z) + S(z)), \operatorname{Im} z \geq 0, \\ A_+(-z)V(-z) + 0{,}5ie^{-i\pi z}X^+(z)(Y(z) + S(z)), \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Обозначив

$$T(z) = \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{X^-(z_j)(z - z_j)}, \ z \in \mathrm{C}^-, \ F_R(z) = \begin{cases} \Phi_R(z) - X^-(z)T(z), z \in \mathrm{C}^-, \\ \Phi_R(z) - X^+(z)T(-z), z \in \mathrm{C}^+, \end{cases}$$

получим, что $F_R(z) \in A(C \setminus \Lambda)$, $F_R(\infty) = 0$. Выпишем условие сопряжения для $F_R(z)$ на Λ, используя равенства

$$Y^{\pm}(z) = Y(z) \pm \frac{ikzP(z)(1/G(z) - 1)}{\sin(\pi z)X^-(z)}, \ z \in \Lambda.$$

Рассмотрим отдельно Λ^+ и Λ^-.

$z \in \Lambda^+$: пусть

$$B_+^-(z) = A_+(z) + \frac{kze^{i\pi z}(1/G(z) - 1)}{2\sin(\pi z)}, \ B_+^+(z) = -A_-(-z) + \frac{kze^{i\pi z}(G(z) - 1)}{2\sin(\pi z)},$$

тогда

$$\frac{e^{i\pi z}}{2i}(Y(z) + S(z)) = \frac{B_+^-(z)V(z) - \Phi_R^-(z)}{X^-(z)} = \frac{B_+^+(z)V(z) - \Phi_R^+(z)}{X^+(z)}.$$

$z \in \Lambda^-$: пусть

$$B_-^-(z) = -A_-(z) + \frac{kze^{-i\pi z}(1/G(z) - 1)}{2\sin(\pi z)}, \ B_-^+(z) = A_+(-z) + \frac{kze^{-i\pi z}(G(z) - 1)}{2\sin(\pi z)},$$

тогда

$$\frac{e^{-i\pi z}}{2i}(Y(z) + S(z)) = \frac{B_-^-(z)V(-z) - \Phi_R^-(z)}{X^-(z)} = \frac{B_-^+(z)V(-z) - \Phi_R^+(z)}{X^+(z)}.$$

Следовательно, при $z \in \Lambda$:

$$F_R^+(z) = G(z)F_R^-(z) + H_R(z),\ H_R(z) = C(z)P(z) + X^+(z)(T(z) - T(-z)),$$

$$C(z) = \begin{cases} C_+(z) = B_+^+(z) - G(z)B_+^-(z),\ z \in \Lambda^+, \\ C_-(z) = B_-^+(z) - G(z)B_-^-(z),\ z \in \Lambda^-. \end{cases}$$

Или:

$$C_+(z) = -A_-(-z) - G(z)A_+(z) + \frac{kze^{i\pi z}(G(z)-1)}{\sin(\pi z)},\ z \in \Lambda^+,$$

$$C_-(z) = A_+(-z) + G(z)A_-(z) + \frac{kze^{-i\pi z}(G(z)-1)}{\sin(\pi z)},\ z \in \Lambda^-.$$

Поскольку коэффициент $G(z)$ получился таким же, как и в первой задаче сопряжения, и $F_R(z)$ принадлежит тому же классу функций, что и решение первой задачи сопряжения, $\Phi(z)$, получаем, что данная задача однозначно разрешима:

$$F_R(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{H_R(t)dt}{X^+(t)(t-z)}.$$

Из равенства

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{H_R(t)dt}{X^+(t)(t-z)} = \frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{C(t)P(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + T(z) + T(-z)$$

получаем искомое уравнение относительно $P(z)$ на Λ:

$$D(z)P(z) - \frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{E(t)P(t)dt}{t-z} = f(z), \tag{11}$$

где

$$D(z) = \begin{cases} A_+(z)/X^-(z) - A_-(-z)/X^+(z),\ z \in \Lambda^+, \\ -A_-(z)/X^-(z) + A_+(-z)/X^+(z),\ z \in \Lambda^-, \end{cases}$$

$$E(z) = \begin{cases} -A_+(z)/X^-(z) - A_-(-z)/X^+(z),\ z \in \Lambda^+, \\ A_-(z)/X^-(z) + A_+(-z)/X^+(z),\ z \in \Lambda^-, \end{cases}$$

$$S_b(z) = T(z) + T(-z),\ \hat{z} = z\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, z),$$

$$f(z) = \frac{k}{\pi i}\int_\Lambda \left(\frac{e^{i\pi\hat{t}} - e^{i\pi\hat{z}}}{t-z}\right)\frac{t(G(t)-1)P(t)}{\sin(\pi t)X^+(t)}dt - ie^{i\pi\hat{z}}S(z) + 2S_b(z).$$

Регуляризуем уравнение (11) стандартным образом – путем решения задачи сопряжения, функции которой будем помечать индексом Λ. Пусть

$$F_\Lambda(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{E(t)P(t)dt}{t-z},$$

тогда

$$F_\Lambda(z)\in A(\mathrm{C}\setminus\Lambda),\ \ F_\Lambda(\infty)=0$$

и

$$F_\Lambda^+(z)=G_\Lambda(z)F_\Lambda^-(z)+H_\Lambda(z),$$

$$G_\Lambda(z)=\frac{D(z)+E(z)}{D(z)-E(z)}=\begin{cases}-A_-(-z)/(A_+(z)G(z)),\ z\in\Lambda^+,\\ -A_+(-z)/(A_-(z)G(z)),\ z\in\Lambda^-,\end{cases}$$

$$H_\Lambda(z)=\frac{2E(z)f(z)}{D(z)-E(z)}=\frac{2ikz(1-G(z))}{G(z)}\,f(z)\cdot\begin{cases}1/A_+(z),\ z\in\Lambda^+,\\ 1/A_-(z),\ z\in\Lambda^-.\end{cases}$$

Как и в случае функции $G(z)$, из представления функции $G_\Lambda(z)$ вытекает, что, не ограничивая общности, можно считать индекс функции $G_\Lambda(z)$ равным 0. Таким образом, допустима факторизация $G_\Lambda(z)=X_\Lambda^+(z)/X_\Lambda^-(z)$, откуда следует, что

$$F_\Lambda(z)=\frac{X_\Lambda(z)}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{H_\Lambda(t)dt}{X_\Lambda^+(t)(t-z)},$$

$$P(z)=\frac{F_\Lambda^+(z)-F_\Lambda^-(z)}{2E(z)},\ z\in\Lambda,$$

или

$$P(z)=\left(\frac{H_\Lambda(z)D(z)}{2E(z)}+\frac{X_\Lambda^+(z)}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{H_\Lambda(t)dt}{X_\Lambda^+(t)(t-z)}\right)/(D(z)+E(z)),\ z\in\Lambda. \qquad (12)$$

Как следствие, получаем аналитическое продолжение $P(z)$ в $\mathrm{C}\setminus\mathrm{R}$:

$$P(z)=\begin{cases}\left(f(z)+\dfrac{X_\Lambda^+(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_\Lambda\frac{H_\Lambda(t)dt}{X_\Lambda^+(t)(t-z)}\right)/(D(z)+E(z)),\ z\in\mathrm{C}^+,\\ \left(f(z)+\dfrac{X_\Lambda^-(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_\Lambda\frac{H_\Lambda(t)dt}{X_\Lambda^-(t)(t-z)}\right)/(D(z)-E(z)),\ z\in\mathrm{C}^-,\end{cases}$$

где

$$D(z)+E(z)=\begin{cases}-2A_-(-z)/X^+(z),\ z\in\mathrm{C}^+\cap\{\mathrm{Im}\,z\ge 0\},\\ 2A_+(-z)/X^+(z),\ z\in\mathrm{C}^+\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\},\end{cases}$$

$$D(z)-E(z)=\begin{cases}2A_+(z)/X^-(z),\ z\in\mathrm{C}^-\cap\{\mathrm{Im}\,z\ge 0\},\\ -2A_-(z)/X^-(z),\ z\in\mathrm{C}^-\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\}.\end{cases}$$

Заменим уравнение (12) на приближенное уравнение с точностью $O(\beta^{-1})$.

Прежде всего, заметим, что дробь $t/\sin(\pi t)$ ограничена на Λ (очевидно, это свойство выполняется равномерно на рассматриваемом множестве допустимых Λ), дробь

$\left(e^{i\pi\hat{t}} - e^{i\pi\hat{z}}\right)/(t-z)$ равномерно ограничена при всех комплексных t и z, разность $G(z)-1$ равномерно по λ ограничена на Λ, поэтому интеграл

$$\frac{k}{\pi i}\int_{\Lambda}\left(\frac{e^{i\pi\hat{t}} - e^{i\pi\hat{z}}}{t-z}\right)\frac{t(G(t)-1)P(t)}{\sin(\pi t)X^{+}(t)}dt$$

дает вклад порядка $O(1)$, а не $O(\lambda)$, и им можно пренебречь. Аналогично, в силу ограниченности произведения $te^{i\pi\hat{t}}$ на Λ можно пренебречь интегралом, содержащим функцию $S(t)$. Таким образом, обозначая за $S_{\Sigma}(z)$ оставшиеся слагаемые, не содержащие экспоненциального множителя, получим:

$$V(z)\approx\begin{cases}X^{+}(z)\left(e^{i\pi z}S(z)-S_{\Sigma}(z)\right)/(-2iA_{-}(-z)),\ z\in \mathrm{C}^{+},\\ X^{-}(z)\left(e^{i\pi z}S(z)-S_{\Sigma}(z)\right)/(2iA_{+}(z)),\ z\in \mathrm{C}^{-}.\end{cases}$$

Далее, в силу свойств функций $A_{+}(z)$ и $A_{-}(z)$ можно записать, что при $z\in \mathrm{C}^{-}$:

$$V(z)\approx X^{-}(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{S\left(z_k^{+}\right)}{2iA_{+}'\left(z_k^{+}\right)}\frac{e^{i\pi z}-e^{i\pi z_k^{+}}}{z-z_k^{+}},\ V(-z)\approx -X^{-}(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{S\left(z_k^{-}\right)}{2iA_{-}'\left(z_k^{-}\right)}\frac{e^{-i\pi z}-e^{-i\pi z_k^{-}}}{z-z_k^{-}},$$

где $\left\{z_k^{\pm}\right\}$ – нули функции $A_{\pm}(z)$ в C^{-}.

Пусть P – простой замкнутый контур, целиком лежащий в C^{-} и охватывающий все нули функции $A_{-}(z)$, тогда

$$V(-z)\approx\frac{-X^{-}(z)}{2\pi i}\int_{P}\frac{S(\xi)}{2iA_{-}(\xi)}\frac{e^{-i\pi z}-e^{-i\pi\xi}}{z-\xi}d\xi\,.$$

Пусть L – простой замкнутый контур, целиком лежащий в C^{-} и охватывающий все полюсы функции $A_{-}(z)$, т.е. нули $J_z(\lambda)$ как функции от z, тогда

$$S(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\nu(t)dt}{X^{-}(t)}\left(\frac{1}{\xi-t}-\frac{1}{\xi+t}\right),\ \xi\notin L\cup\operatorname{int}L\,.$$

В силу леммы 1, доказанной в Приложении, можно считать, что контур L находится на расстоянии $O(\beta)$ от вещественной оси, поэтому $\sin\pi t\approx 0{,}5ie^{-i\pi t}$ при $t\in L$ и

$$S(\xi)\approx\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{A_{-}(t)V(-t)dt}{0{,}5ie^{-i\pi t}X^{-}(t)}\left(\frac{1}{\xi-t}-\frac{1}{\xi+t}\right).$$

Таким образом, обозначая $W(z)=e^{i\pi z}V(-z)/X^{-}(z)$, получаем следующее уравнение относительно $W(z)$:

$$W(z)\approx\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{P}\frac{1-e^{i\pi(z-\xi)}}{z-\xi}\frac{d\xi}{A_{-}(\xi)}\int_{L}A_{-}(t)\left(\frac{1}{\xi-t}-\frac{1}{\xi+t}\right)W(t)dt,\ z\in L\,.\qquad(13)$$

Это уравнение Фредгольма второго рода с конечномерным ядром, и спектр исходной задачи будут доставлять, с точностью $O(\beta^{-1})$, нули соответствующего определителя, который есть функция от λ. Очевидно, можно считать $W(z)$ произвольной аналитической функцией.

В силу свойств нулей бесселевых функций можно считать контуры P и L такими, что на них можно с точностью $O(\beta^{-1})$ заменить функцию $A_{-}(z)$ ее приближенным представлением $ikz - i\sqrt{\lambda^2 - z^2}\,\mathrm{th}\,U(\lambda, z)$, где

$$U(\lambda, z) = i\sqrt{\lambda^2 - z^2} - z\ln\left((z/\lambda) + i\sqrt{1-(z/\lambda)^2}\right) - i\pi/4.$$

Далее, согласно Приложению, функцию $\mathrm{th}\,U(\lambda, z)$ можно приближенно заменить кусочно-постоянной функцией, равной 1 при z, лежащих выше N, и -1 при z, лежащих ниже N, где N – разрез, расположенный в C^{-} и соединяющий точки $i\lambda a$ и λ, $a = \mathrm{sh}\,t_f \approx 2\beta/(\pi\alpha)$. Поскольку контуры P и L проходят только через концы разреза N, можно считать N отрезком. Таким образом, (13) переходит в уравнение, которое мы для удобства запишем в виде системы (используем уже знак точного равенства):

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{1-e^{i\pi(z-\xi)}}{z-\xi}\frac{Z(\xi)d\xi}{\rho(\xi)},\ Z(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t\rho(t)}{\xi^2 - t^2}W(t)dt,$$

где

$$\rho(z) = \begin{cases} kz - \sqrt{\lambda^2 - z^2}, & z \text{ выше } N, \\ kz + \sqrt{\lambda^2 - z^2}, & z \text{ ниже } N. \end{cases}$$

Стягивая сначала контур P, а затем контур L к разрезу N и обозначая $b = (1+k^2)^{-1/2}$, $\xi_0 = \lambda b$, получаем:

$$W(z) = -\frac{b^2}{\pi i}\int_N \frac{1-e^{i\pi(z-\xi)}}{z-\xi}\frac{\sqrt{\lambda^2-\xi^2}}{\xi^2-\xi_0^{\,2}}Z(\xi)d\xi + \chi(k)\frac{1-e^{i\pi(z-\xi_0)}}{z-\xi_0}Z(\xi_0),\ \chi(k) = \begin{cases} 0, k>0; \\ kb^{-2}, k<0, \end{cases}$$

$$Z(\xi) = \frac{2}{\pi i}\int_N \frac{t\sqrt{\lambda^2-t^2}}{\xi^2-t^2}W(t)dt - k\xi W(\xi),\ z \in N, \text{ при } k<0:\ Z(\xi_0) = \frac{2}{\pi i}\int_N \frac{t\sqrt{\lambda^2-t^2}}{\xi_0^2-t^2}W(t)dt.$$

Не ограничивая общности, будем считать $k>0$, тогда при $z \in N$:

$$W(z) = -\frac{b^2}{\pi i}\int_N \frac{1-e^{i\pi(z-\xi)}}{z-\xi}\frac{\sqrt{\lambda^2-\xi^2}}{\xi^2-\xi_0^{\,2}}Z(\xi)d\xi,\ Z(\xi) = \frac{2}{\pi i}\int_N \frac{t\sqrt{\lambda^2-t^2}}{\xi^2-t^2}W(t)dt - k\xi W(\xi). \quad (14)$$

Сделаем замену $z = \lambda u, \xi = \lambda v, W(z) = g(u), Z(z) = \lambda h(v)$:

$$g(u)=-\frac{b^2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{1-e^{i\pi\lambda(u-v)}}{u-v}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}h(v)dv,\ h(v)=\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{v^2-s^2}W(s)ds-kvg(u),\ z\in N/\lambda.$$

Замена $x=(u-ia)/(1-ia), y=(v-ia)/(1-ia)$ переводит отрезок N/λ в отрезок $[0,1]$, на котором в силу леммы 2 (см. Приложение) можно приближенно заменить ядро $\left(1-e^{i\pi\lambda(1-ia)(x-y)}\right)/(x-y)$ главным членом $1+e^{i\pi\lambda(1-ia)(x-y)}$ (здесь существенно, что $\operatorname{Im}\lambda(1-ia)=O^*(\beta)$). Таким образом, систему (14) можно приближенно заменить на следующую:

$$g(u)\sim a_+e^{i\pi\lambda(u-ia)}+a_-,\ h(v)\sim a_+f_+(v)+a_-f_-(v),$$

$$a_+=-\frac{b^2}{\pi i}\int_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}h(v)dv,\ a_-=-\frac{b^2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}h(v)dv,$$

$$f_+(v)=\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{v^2-s^2}e^{i\pi\lambda(s-ia)}ds-kve^{i\pi\lambda(v-ia)},\ f_-(v)=\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{v^2-s^2}ds-kv.$$

Следовательно, для нетривиальной разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0,$$

$$a_{11}=\pi i\left(1+k^2\right)+\int_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}f_+(v)dv,\ a_{12}=\int_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}f_-(v)dv,$$

$$a_{21}=\int_{ia}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}f_+(v)dv,\ a_{22}=\pi i\left(1+k^2\right)+\int_{ia}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}f_-(v)dv.$$

Коэффициенты $a_{ij}, i,j=\overline{1,2}$, вычислены в Приложении. Условие $a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$ приобретает следующий вид:

$$\frac{(\pi i)^3C_0}{1+k^2}-\frac{(\pi i)^3\sqrt{2}ae^{-i\mu}}{\sqrt{\pi}k^2(-i\mu)^{5/2}}\sim\left(\frac{\ln(a/(-i\pi\lambda))}{(-i\pi\lambda)}+\frac{\sqrt{\pi}(2-k\pi i)e^{-i\mu}}{\sqrt{2}k^2(-i\pi\lambda)^{3/2}}\right)\left(\frac{-\ln(-i\pi\lambda a)}{(-i\pi\lambda)}-\frac{\sqrt{2\pi}ae^{i\mu}}{(-i\pi\lambda)^{3/2}}\right),$$

$$\mu=\pi\lambda(1-ia),\ C_0=1+k+\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{\left(k+\sqrt{1+k^2}\right)k}+\pi i\left(1+k^2+\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Упрощая, получаем:

$$\frac{e^{-i\mu}\ln(-i\pi\lambda a)}{(-i\pi\lambda)^{5/2}}\sim C=\frac{-(\pi i)^3\sqrt{2}k^2C_0}{\left(1+k^2\right)\sqrt{\pi}(2-k\pi i)}.$$

Легко видеть, что $C\neq 0$ в силу $\operatorname{Im}C_0>0$. Отсюда вытекает, что $\alpha^{-5/2}e^{\pi\beta+i(-\pi\alpha+2\beta)}\ln\beta\sim C=re^{i\varphi}$, и последовательность главных членов β_n состоит из

решений уравнения $\left(r^{-1}e^{\pi\beta_n}\ln\beta_n\right)^{2/5}+2\pi^{-1}\beta_n=\varphi+2\pi n$, $\alpha_n=\left(r^{-1}e^{\pi\beta_n}\ln\beta_n\right)^{2/5}$, $n\in\mathrm{N}$, $n\to\infty$, что и доказывает основную теорему.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Свойства выражений, содержащих бесселевы функции.

Напомним, что $\lambda=\alpha+i\beta$, $\alpha>>\beta>>0$.

Пусть t^* - положительный корень уравнения $t=\mathrm{cth}t$ (заметим, что $t^*\approx 1{,}2$). Разобьем Λ на три части:

$$\Lambda_1=\left\{z: z=i\lambda\,\mathrm{sh}\,t,\ -\infty<t<-t^*\right\},\ \Lambda_3=\left\{z: z=i\lambda\,\mathrm{sh}\,t,\ t^*<t<+\infty\right\},\ \Lambda_2=\Lambda\setminus\left(\Lambda_1\cup\Lambda_3\right).$$

Обозначим $U(\lambda,z)=i\sqrt{\lambda^2-z^2}-z\ln\left((z/\lambda)+i\sqrt{1-(z/\lambda)^2}\right)-i\pi/4$. Согласно ([22, с. 293]), при $z\in\Lambda$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$J_z(\lambda)=\begin{cases}\sqrt{1/(2\pi)}\left(\lambda^2-z^2\right)^{-1/4}e^{-U}\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_1,\\ \sqrt{2/\pi}\left(\lambda^2-z^2\right)^{-1/4}(\mathrm{ch}\,U)\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_2,\\ \sqrt{1/(2\pi)}\left(\lambda^2-z^2\right)^{-1/4}e^{U}\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_3,\end{cases}$$

причем его можно дифференцировать по λ. Как следствие, получаем:

$$J(z)=\begin{cases}-i\sqrt{1-(z/\lambda)^2}\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_1,\\ i\sqrt{1-(z/\lambda)^2}\,(\mathrm{th}\,U)\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_2,\\ i\sqrt{1-(z/\lambda)^2}\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_3.\end{cases}$$

Если $z=i\lambda\,\mathrm{sh}\,t$, $t\in\mathrm{R}$, то $U(\lambda,z)=h(\lambda,t)=0{,}5\pi\lambda\,\mathrm{sh}\,t+i\lambda(\mathrm{ch}\,t-t\,\mathrm{sh}\,t)-0{,}25i\pi$ и

$$J(z)=\begin{cases}-i\,\mathrm{ch}\,t\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_1,\\ i\,\mathrm{ch}\,t(\mathrm{th}\,h)\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_2,\\ i\,\mathrm{ch}\,t\left(1+O\left(\beta^{-1}\right)\right),\ z\in\Lambda_3.\end{cases}$$

Изучим поведение функции $h(\lambda,t)$ при $-t^*\le t\le t^*$. Пусть

$$f(t)\equiv\mathrm{Re}\,h=0{,}5\pi\alpha\,\mathrm{sh}\,t-\beta(\mathrm{ch}\,t-t\,\mathrm{sh}\,t),\ g(t)\equiv\mathrm{Im}\,h=0{,}5\pi\beta\,\mathrm{sh}\,t+\alpha(\mathrm{ch}\,t-t\,\mathrm{sh}\,t)-0{,}25\pi,$$

тогда

$$f(\pm t^*)=\pm 0{,}5\pi\alpha\,\mathrm{sh}\,t^*,\ \ f(0)=-\beta,\ f'(t)=(0{,}5\pi\alpha+\beta t)\mathrm{ch}\,t,\ g'(t)=(0{,}5\pi\beta-\alpha t)\mathrm{ch}\,t.$$

Так как $\alpha>>\beta$, то $f'(t)>0$ на отрезке $\left[-t^*,t^*\right]$, поэтому $f(t)$ имеет ровно один корень $t_f\approx 2\beta/(\pi\alpha)$ на этом отрезке. Функция $g(t)$ достигает максимума в точке $t_0=0{,}5\pi\beta/\alpha$; легко видеть, что $f(t_0)\approx(0{,}25\pi^2-1)\beta>0$ и $0<t_f<t_0$. Таким образом, $\mathrm{th}\,h\approx -1$ при $t<0$ и $\mathrm{th}\,h\approx 1$ при $t>t_0$.

Рассмотрим теперь, например, функцию $G(z)$. При $\operatorname{Im} z > 0$:

$$G(z) = -A_+(-z)/A_-(z) \approx (ikz - \lambda J(-z))/(ikz - \lambda J(z)),$$

$$G(i\lambda \operatorname{sh} t) \approx (ik \operatorname{th} t - \operatorname{th} h(-t))/(ik \operatorname{th} t - \operatorname{th} h(t)).$$

Если $t \in (0, t_0)$, то $G(i\lambda \operatorname{sh} t) \approx 1/(ikt - \operatorname{th} h(t))$, и $\operatorname{Re} G(i\lambda \operatorname{sh} t) = 0 \Leftrightarrow f(t) \approx 0$. Таким образом, при изменении t от 0 до $+\infty$ траектория движения $G(z)$ начинается в 1, достигает значения, близкого к -1, при $z = i\lambda \operatorname{sh} t_0$ и затем устремляется к $(ik+1)/(ik-1)$, причем при $t \in [0, t_0]$ мнимая ось пересекается только один раз при некотором $z^{\#}$; знак ординаты точки пересечения равен знаку $\operatorname{Im} G(z^{\#})$ и меняется при незначительных модификациях контура Λ (т.е. когда контур "захватывает" или "выпускает" нуль или полюс соответствующей функции). Аналогично рассматриваются и другие случаи. Таким образом, индекс $G(z)$ можно сделать равным 0 путем незначительной модификации контура Λ.

Докажем еще следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta > 0$, тогда лежащие в C^- нули $\{z_k\}$ функции $J_z(\lambda)$ как функции от индекса z отделены от вещественной прямой, а именно,

$$\inf_{\operatorname{Im}\lambda \ge \beta > 0} \left(\beta^{-1} \min_{k=1,m} \operatorname{Im} z_k \right) > 0.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей формулой ([22, с. 148, (7)]):

$$\int^z \{(k^2 - l^2)z - (\mu^2 - \nu^2)z^{-1}\} \mathrm{E}_\mu(kz) \tilde{\mathrm{E}}_\nu(lz) dz = z\{\mathrm{E}_\mu(kz)(d\tilde{\mathrm{E}}_\nu(lz)/dz) - \tilde{\mathrm{E}}_\nu(lz)(d\mathrm{E}_\mu(kz)/dz)\},$$

где $\mathrm{E}_\mu(z)$, $\tilde{\mathrm{E}}_\nu(z)$ – произвольные цилиндрические функции, k, l – произвольные числа.

Пусть $J_\mu(\lambda) = 0$, тогда $J_{\bar{\mu}}(\bar{\lambda}) = 0$. Положим в указанной формуле $k = \lambda$, $l = \bar{\lambda}$, $\mu = \xi + i\eta$, $\nu = \bar{\mu}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 1:

$$\int_0^1 \{\alpha\beta t - \xi\eta t^{-1}\} J_\mu(\lambda t) J_{\bar{\mu}}(\bar{\lambda} t) dt = 0.$$

Выражение в фигурных скобках меняет знак при переходе через $t_0 = \sqrt{(\xi\eta)/(\alpha\beta)}$. Поскольку произведение $t^{-1} J_\mu(\lambda t) J_{\bar{\mu}}(\bar{\lambda} t)$ положительно и ограничено, значение t_0 должно быть отделено от нуля. Из свойств нулей функции Бесселя вытекает, что отношение ξ/α равномерно ограничено, следовательно, $\eta/\beta \ge c > 0$. Лемма 1 доказана.

II. Лемма 2. Если $\operatorname{Im}\lambda = \beta$ велико, то функцию $f(x) = x^{-1} \sin(\lambda x)$ на отрезке $[-1,1]$ можно разложить в асимптотический ряд с главным членом $i\cos(\lambda x)$.

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ нулем вне отрезка $[-1,1]$ и рассмотрим ее преобразование Фурье:

$$\hat{f}(p)=\int_{\mathrm{R}} e^{ipx} f(x)dx=\int_{-1}^{1} e^{ipx}x^{-1}\sin(\lambda x)dx=\int_{p-\lambda}^{p+\lambda}\tau^{-1}\sin\tau d\tau=\int_{p-\lambda}^{+\infty-i\beta}\tau^{-1}\sin\tau d\tau-\int_{p+\lambda}^{+\infty+i\beta}\tau^{-1}\sin\tau d\tau=$$

$$=\frac{\cos(p-\lambda)}{p-\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)-\frac{\cos(p+\lambda)}{p+\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)=$$

$$==\frac{e^{-i\lambda}}{2}\left(\frac{e^{ip}}{p-\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)-\frac{e^{-ip}}{p+\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)\right).$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{-ipx}\hat{f}(p)dp=i\cos(\lambda x)\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right).$$

Лемма 2 доказана.

III. Вычисление коэффициентов для системы уравнений (14).

Нам понадобятся следующие интегралы:

$$Y_1(a,z)=\int_{ia}^{1}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{z^2-v^2}dv=\sqrt{1+a^2}+\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-z^2}}+\sigma(z)\right),$$

$$Y_2(a,z)=\int_{ia}^{1}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}\left(z^2-v^2\right)}=\frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}\left(\ln\frac{(z-ia)\left(1+iaz+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-z^2}\right)}{(z+ia)\left(1-iaz+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-z^2}\right)}+\sigma(z)\right),$$

где $\sigma(z)=0$, если z лежит на отрезке, соединяющем точки ia и 1, и $\sigma(z)=\pi i$, если z – действительное число, $0<z<1$.

Вычислим главные члены коэффициентов a_{ij}, $i,j=\overline{1,2}$, с учетом того, что $\alpha\to+\infty$, $\beta\to+\infty$, $a\sim 2\beta/(\pi\alpha)\to 0$. Обозначим $\mu=\pi\lambda(1-ia)$.

Вычислим a_{11}:

$$a_{11}=\pi i\left(1+k^2\right)+I_1+I_2,\ I_1=\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{v^2-s^2}e^{i\pi\lambda(s-ia)}ds,\ I_2=-k\int_{ia}^{1}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv.$$

Рассмотрим

$$I_1=\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\int_{ia}^{1}e^{i\pi\lambda(s-v)}\frac{s\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-v^2}}{\left(v^2-b^2\right)\left(v^2-s^2\right)}dsdv.$$

Сделаем замену $s=ia+(1-ia)(\xi+\eta)$, $v=ia+(1-ia)\eta$:

$$I_1=-\frac{2(1-ia)}{\pi i}\int_{-1}^{1}e^{i\mu\xi}\frac{J(\xi)}{\xi}d\xi,$$

$$J(\xi)=\begin{cases} -1<\xi<0:\ \int\limits_{-\xi}^{1} g(\xi,\eta)d\eta, \\ 0<\xi<1:\ \int\limits_{0}^{1-\xi} g(\xi,\eta)d\eta, \end{cases} \qquad g(\xi,\eta)=\left.\frac{s\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-v^2}}{(v^2-b^2)(v+s)}\right|_{\substack{s=ia+(1-ia)(\xi+\eta)\\ v=ia+(1-ia)\eta}}.$$

Следовательно, при $\xi\to -1$ (учитываем, что $a\to 0$):

$$J(\xi)\sim \frac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2}}{(1-b^2)(1+ia)}\int\limits_{-\xi}^{1}(ia+(1-ia)(\xi+\eta))\sqrt{1-(ia+(1-ia)\eta)}d\eta\sim C_-\left(\frac{2}{3}ia(1+\xi)^{3/2}+\frac{4}{15}(1-ia)(1+\xi)^{5/2}\right),$$

$$C_-=\frac{\sqrt{2}(1-ia)}{(1-b^2)\sqrt{1+ia}};$$

при $\xi\to 1$:

$$J(\xi)\sim C_+\frac{2}{3}(1-\xi)^{3/2},\ C_+=-\frac{\sqrt{2}(1-ia)}{(a^2+b^2)\sqrt{1+ia}};$$

кроме того,

$$J(0)=\frac{1}{2(1-ia)}\int\limits_{ia}^{1}\frac{1-s^2}{s^2-b^2}ds=-\frac{1}{2}+\frac{1-b^2}{4b(1-ia)}\ln\frac{(1-b)(ia+b)}{(1+b)(ia-b)}\sim -\frac{1}{2}+\frac{1-b^2}{4b}\left(\ln\frac{1-b}{1+b}-\pi i\right),$$

поэтому

$$I_1\sim -\frac{2(1-ia)}{\pi i}\left(C_-e^{-i\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{ia}{(-i\mu)^{5/2}}+\frac{1-ia}{(-i\mu)^{7/2}}\right)+\pi i J(0)-C_+e^{i\mu}\frac{\sqrt{\pi}(-i)^3}{2(-i\mu)^{5/2}}\right).$$

Так как $a\mu\sim 2\beta\to+\infty$, то

$$I_1\sim\frac{-ae^{-i\mu}}{(-i\mu)^{5/2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1-b^2)}+1-\frac{1-b^2}{2b}\left(\ln\frac{1-b}{1+b}-\pi i\right);$$

$$I_2=kY_1(a,b)\sim k\left(1+\frac{\sqrt{1-b^2}}{2}\left(\ln\frac{1-\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-b^2}}+\pi i\right)\right).$$

Таким образом,

$$a_{11}\sim C_0-\frac{\sqrt{2}(1+k^2)ae^{-i\mu}}{\sqrt{\pi}k^2(-i\mu)^{5/2}},\ C_0=1+k+\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{(k+\sqrt{1+k^2})k}+\pi i\left(1+k^2+\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Теперь вычислим a_{12}:

$$a_{12}=J_1+J_2,\ J_1=\frac{2}{\pi i}\int\limits_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}Y_1(a,v)dv,\ J_2=-k\int\limits_{ia}^{1}e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv.$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}\left(\sqrt{1+a^2}+\frac{\sqrt{1-v^2}}{2}\ln\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-v^2}}\right)dv \sim$$

$$\sim -\frac{1+a^2}{\pi i\left(-a^2-b^2\right)}\int_{-\infty}^{ia} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\ln\left(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-v^2}\right)dv + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}}{\pi i\left(1-b^2\right)}\int_{-\infty}^{1} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\sqrt{1-v}dv \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi i b^2}\int_{0}^{+\infty} e^{i\pi\lambda s}\ln\left(2ias-s^2\right)ds + \frac{2\sqrt{2}}{\pi i\left(1-b^2\right)}e^{-i\mu}\int_{0}^{+\infty} e^{i\pi\lambda s}\sqrt{s}ds \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi i b^2}\left(a\ln\left(a^2\right)\int_{0}^{+\infty} e^{i\pi\lambda at}dt + a\int_{0}^{+\infty} e^{i\pi\lambda at}\ln t dt\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi i\left(1-b^2\right)}e^{-i\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}} \sim$$

$$\sim \frac{\ln\left(a/\left(-i\pi\lambda\right)\right)}{\pi i b^2\left(-i\pi\lambda\right)} + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}\left(1-b^2\right)}\frac{e^{-i\mu}}{\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}};$$

$$J_2 = -k\int_{ia}^{1} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv \sim -k\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{a^2+b^2}\int_{-\infty}^{ia} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}vdv + \frac{\sqrt{2}}{1-b^2}\int_{-\infty}^{1} e^{-i\pi\lambda(v-ia)}\sqrt{1-v}dv\right) \sim$$

$$\sim -k\left(\frac{1}{b^2}\left(\frac{ia}{-i\pi\lambda}-\frac{1}{\left(-i\pi\lambda\right)^2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{1-b^2}e^{-i\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}}\right) \sim -k\left(\frac{ia}{\left(-i\pi\lambda\right)b^2}+\frac{\sqrt{\pi}e^{-i\mu}}{\sqrt{2}\left(1-b^2\right)\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}}\right).$$

Следовательно,

$$a_{12} \sim \frac{1+k^2}{\pi i}\left(\frac{\ln\left(a/\left(-i\pi\lambda\right)\right)}{\left(-i\pi\lambda\right)}+\frac{\sqrt{\pi}\left(2-k\pi i\right)e^{-i\mu}}{\sqrt{2}k^2\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}}\right).$$

Вычислим a_{21} (учитывая, что $b^{-1}\sqrt{1-b^2}=k$):

$$a_{21} = \frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(s-ia)}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{v^2-s^2}ds - k\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(v-ia)}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv =$$

$$= \frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(s-ia)}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{b^2-s^2}\left(\left(1-s^2\right)Y_2(a,s)-\left(1-b^2\right)Y_2(a,b)\right)ds - k\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(v-ia)}\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v^2-b^2}dv =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(s-ia)}\frac{1-s^2}{b^2-s^2}\ln\frac{(s-ia)\left(1+ias+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-s^2}\right)}{(s+ia)\left(1-ias+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-s^2}\right)}ds +$$

$$+\frac{(-k)}{\pi i}\ln\frac{(b-ia)\left(1+iab+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-b^2}\right)}{(b+ia)\left(1-iab+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-b^2}\right)}\int_{ia}^{1} e^{i\pi\lambda(s-ia)}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{b^2-s^2}ds \sim$$

$$\sim \frac{a}{\pi i b^2}\int_{0}^{+\infty} e^{i\pi\lambda at}\ln t dt - \frac{2ik^2a^2}{\left(-i\pi\lambda\right)\pi b^2} - \frac{i\sqrt{2}\left(1+k^2\right)ae^{i\mu}}{\sqrt{\pi}\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}} \sim \frac{1+k^2}{\pi i}\left(\frac{-\ln\left(-i\pi\lambda a\right)}{\left(-i\pi\lambda\right)}-\frac{\sqrt{2\pi}ae^{i\mu}}{\left(-i\pi\lambda\right)^{3/2}}\right).$$

Наконец,

$$a_{22} = \pi i\left(1+k^2\right)+\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1} s\sqrt{1-s^2}ds\int_{ia}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}dt}{\left(t^2-b^2\right)\left(t^2-s^2\right)} - k\int_{ia}^{1}\frac{t\sqrt{1-t^2}dt}{t^2-b^2} =$$

$$= \pi i\left(1+k^2\right)+\frac{2}{\pi i}\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{b^2-s^2}\left(\left(1-s^2\right)Y_2(a,s)-\left(1-b^2\right)Y_2(a,b)\right)ds+kY_1(a,b)\sim$$

$$\sim \pi i\left(1+k^2\right)-\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\int_{ia}^{1}\frac{s\sqrt{1-s^2}}{b^2-s^2}ds+kY_1(a,b)=\pi i\left(1+k^2\right).$$

§ 4. РАСПОЛОЖЕНИЕ СПЕКТРА И ОТСУТСТВИЕ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ У СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ НАКЛОНА

В этом параграфе результаты работы [45] распространяются на случай переменного непрерывного невырождающегося коэффициента угла наклона производной. Рассмотрена задача на собственные значения для оператора Лапласа в круге с наклонной производной с переменным углом наклона. Доказано, что корневые функции задачи не образуют базиса ни в одном из пространств Лебега с индексом, большим единицы.

Как уже упоминалось во Введении к этой главе, в [45] была рассмотрена задача на собственные значения для оператора Лапласа в единичном круге D с наклонной производной на границе:

$$\Delta u+\mu^2 u=0,\ (r,\theta)\in D, \tag{1}$$

$$\left(ru_r+ku_\theta\right)\big|_{\partial D}=0, \tag{2}$$

где k – ненулевое вещественное число, и было доказано, что спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\left\{\mu:|\operatorname{Im}\mu|\le \text{const}\right\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D),\ q>1$.

Пусть теперь вместо (2) поставлено краевое условие

$$\left(ru_r+k(\theta)u_\theta\right)\big|_{\partial D}=0, \tag{3}$$

где $k(\theta)$ – непрерывная 2π-периодическая положительная функция.

Следуя общим идеям [5], рассмотрим функции с переменной фазой. Обозначим

$$\frac{1}{k_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{k(t)}.$$

Пусть $\Omega_0(\theta)$ – такая 2π-периодическая функция, $\Omega_0(0)=\Omega_0(2\pi)=0$, что $1+\Omega_0'(\theta)=k_0/k(\theta)$; тогда

$$\Omega_0(\theta)=\int_0^{\theta}\left(\frac{k_0}{k(t)}-1\right)dt.$$

Функция $\Omega(\theta)=\theta+\Omega_0(\theta)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,2\pi]$, причем $\Omega(0)=0$, $\Omega(2\pi)=2\pi$; таким образом, $\Omega(\theta)$ – диффеоморфизм отрезка $[0,2\pi]$ на себя с сохранением ориентации. Следовательно, соотношение $\theta+\Omega_0(\theta)=\varphi$ обратимо; обратную функцию запишем в виде $\varphi+\Gamma_0(\varphi)=\theta$.

Обозначим

$$\psi_n(\theta)=\exp\bigl(in(\theta+\Omega_0(\theta))\bigr)=\sum_m \psi_m^n e^{im\theta}$$

(суммирование по всем целочисленным значениям),

$$\chi_n(\varphi)=\exp\bigl(in(\varphi+\Gamma_0(\varphi))\bigr)=\sum_m \chi_m^n e^{im\varphi}\,.$$

Отметим, что

$$e^{in\theta}=\sum_m \psi_m^n \chi_m(\theta)=\sum_l \chi_l^n \psi_l(\theta), \tag{4}$$

откуда следует равенство

$$\sum_l \psi_m^l \chi_l^n=\delta_m^n \tag{5}$$

(δ_m^n – символ Кронекера).

Обозначим

$$u(1,\theta)\equiv U(\theta)=\sum_n u_n e^{in\theta}\,.$$

Пусть $\operatorname{Im}\mu\neq 0$, тогда

$$u(r,\theta)=\sum_n u_n \frac{J_n(\mu r)}{J_n(\mu)}e^{in\theta}\,,\ u_r(1,\theta)=\sum_n u_n \frac{\mu J_n'(\mu)}{J_n(\mu)}e^{in\theta}\,.$$

С другой стороны,

$$u(r,\theta)=\sum_l\left(\sum_m \chi_l^m u_m \frac{J_m(\mu r)}{J_m(\mu)}\right)\psi_l(\theta),\ u_\theta(1,\theta)=\frac{k_0}{k(\theta)}\sum_l\left(\sum_m \chi_l^m u_m\right) il\,\psi_l(\theta).$$

Таким образом, краевое условие (3) принимает вид

$$\mu\sum_n u_n \frac{J_n'(\mu)}{J_n(\mu)}e^{in\theta}+ik_0\sum_l\left(\sum_m \chi_l^m u_m\right) l\,\psi_l(\theta)=0\,,$$

или, в силу соотношения (5),

$$\left(\mu\frac{J_n'(\mu)}{J_n(\mu)}+ik_0 n\right)u_n+ik_0\sum_m \rho_n^m u_m=0\,,\ n\in\mathrm{Z}\,,\ \rho_n^m=\sum_l (l-m)\chi_l^m\psi_n^l\,.$$

Дифференцируя соотношение (4), получаем

$$n\bigl(1+\Gamma_0'(\theta+\Omega_0(\theta))\bigr)e^{in\theta}=\sum_{l=-\infty}^{\infty} l\chi_l^n\psi_l(\theta)=\sum_{l,\,m=-\infty}^{\infty} l\chi_l^n\psi_m^l e^{im\theta}\,,$$

откуда следует, что

$$\rho_n^m = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_0'(t+\Omega_0(t))e^{i(m-n)t}dt = mr_{n-m},$$

и условие (3) окончательно записывается в виде

$$\left(\frac{\mu J_n'(\mu)}{J_n(\mu)} + ik_0 n\right)u_n + ik_0\sum_m r_{n-m}mu_m = 0,\ n\in \mathrm{Z}. \qquad (6)$$

Таким образом, по сравнению со случаем постоянного угла наклона, появляется дополнительное слагаемое с некомпактным дискретным оператором типа свертки, не зависящим от спектрального параметра.

Перейдем к образам Фурье, умножив каждое из уравнений (6) на $ie^{in\theta}$ и сложив:

$$i\int_0^{2\pi}E(t)U(\theta-t)dt + 2\pi\left(1+i\tilde{k}_0(\theta)\right)U'(\theta) = 0,\ \theta\in[0,2\pi], \qquad (7)$$

$$E(\theta) = \sum_n\left(\frac{\mu J_n'(\mu)}{J_n(\mu)} - n\right)e^{in\theta},\ \tilde{k}_0(\theta) = \left(1+\sum_n r_n e^{in\theta}\right)k_0 = \left(1+\Gamma_0'(\theta+\Omega_0(\theta))\right)k_0.$$

Будем искать асимптотическое решение этого уравнения в виде

$$U(\theta) = \exp\left(i\omega_\mu(\theta)\right),\ \omega_\mu(\theta)\sim(\mathrm{Re}\,\mu)\lambda(\theta)+\ldots.$$

В этом случае

$$U(\theta-t) = U(\theta)e^{-i\omega_\mu'(\theta)t+\ldots},$$

и уравнение (7) переходит в следующее уравнение (относительно главного члена):

$$iU(\theta)\int_0^{2\pi}E(t)e^{-i\omega_\mu'(\theta)t}dt + 2\pi\left(1+i\tilde{k}_0(\theta)\right)U'(\theta) = 0.$$

Так как при больших значениях ν справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E(t)e^{-i\nu t}dt \sim \frac{\mu J_\nu'(\mu)}{J_\nu(\mu)} - \nu$$

(становящееся точным при $\nu\in\mathrm{Z}$), то в итоге приходим к следующему основному соотношению:

$$P\left(\omega_\mu'(\theta)\right) + i\tilde{k}_0(\theta) = 0, \qquad (8)$$

где $P(\nu) = \mu J_\nu'(\mu)/(\nu J_\nu(\mu))$.

Условием на спектр будет периодичность фазы по модулю 2π:

$$\omega_\mu(2\pi) - \omega_\mu(0) = \int_0^{2\pi}\omega_\mu'(\theta)d\theta = 0\ (\mathrm{mod}\,2\pi). \qquad (9)$$

Отметим, что в случае постоянного угла наклона [45] основное соотношение (8) принимает вид $P\left(\omega'_{\mu}(\theta)\right)+ik_0=0$, откуда, с учетом условия (9), следует $\omega'_{\mu}(\theta)=m\in N$.

Разрешимость уравнения (8) вытекает из результатов работы [45]. Зададим последовательности $\theta_n\in[0,2\pi]$ и $\nu_n\in[n,n+1)$. В силу результатов [45] существует последовательность $\{\mu_n\}$ такая, что соотношение (8) выполняется в точке $\theta=\theta_n$ при $\omega'_{\mu_n}(\theta_n)=\nu_n$, причем

$$\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta_n)}\left(\nu_n+i\varsigma_n\ln\nu_n+\xi_n\right)=\mu_n,\ \varsigma_n,\xi_n\in\mathrm{R},\ \ \varsigma_n=1/\left(2\tilde{k}_0(\theta_n)\right)+o(1),\ |\xi_n|=O(1).$$

Решим теперь (8) как неявное уравнение при $\mu=\mu_n$ относительно $\omega'_{\mu_n}(\theta)$ на отрезке $[0,2\pi]$ для каждого n, тогда решение будет удовлетворять соотношению

$$\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta_n)}\left(\omega'_{\mu_n}(\theta)+i\Theta_n(\theta)\ln\omega'_{\mu_n}(\theta)+\Xi_n(\theta)\right)=\mu_n,\ \theta\in[0,2\pi],\qquad(10)$$

где $\Theta_n(\theta)=1/\left(2\tilde{k}_0(\theta)\right)+o(1)$, $|\Xi_n(\theta)|=O(1)$, $\Theta_n(\theta_n)=\varsigma_n$, $\Xi_n(\theta_n)=\xi_n$, причем (это также вытекает из рассуждений, приведенных в [45]) эти оценки будут равномерными по n и θ.

Обращая равенство (10), получаем

$$\omega'_{\mu_n}(\theta)=\mu_n/\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta)}-i\Theta_n(\theta)\ln\left(\mu_n/\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta)}\right)-\Xi_n(\theta)+\ldots,$$

так что

$$\mathrm{Re}\,\omega'_{\mu_n}(\theta)=\nu_n\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta_n)}/\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta)}+\ldots\ ,\qquad(11)$$

$$\mathrm{Im}\,\omega'_{\mu_n}(\theta)=\left(\varsigma_n\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta_n)}/\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta)}-\mathrm{Re}\,\Theta_n(\theta)\right)\ln\nu_n+\ldots\ .$$

Таким образом, условие (9) превращается в следующие два равенства:

$$\nu_n\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta_n)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\tilde{k}_0^2(\theta)}}=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{1+h^2(\theta_n)}}{\sqrt{1+h^2(\theta)}}-1\right)h(\theta)d\theta=0,\ h(\theta)=1/\tilde{k}_0(\theta),$$

откуда, очевидно, вытекает возможность подбора надлежащих значений θ_n и ν_n.

Сопряженной к (1), (3) будет задача

$$\Delta u+\bar{\mu}^2u=0,\ (r,\theta)\in D,\qquad(12)$$

$$\left(ru_r-\left(k(\theta)u\right)_{\theta}\right)\Big|_{\partial D}=0.\qquad(13)$$

В рассматриваемом случае краевое условие (13) асимптотически эквивалентно следующему:

$$\left(ru_r - k(\theta)u_\theta\right)\big|_{\partial D} \sim 0\,.$$

Таким образом, для построения асимптотического решения $v(r,\theta)$ сопряженной задачи (12)-(13) достаточно заменить $k(\theta)$ на $-k(\theta)$ и μ на $\overline{\mu}$ в решении исходной задачи. Взяв комплексно-сопряженное к (8), получим $v_n(1,\theta) \sim \exp\left(i\,\overline{\omega_{\mu_n}(\theta)}\right)$.

В силу результатов [45] остается лишь доказать, что произведение L_2-норм решений основной и сопряженной задач растет быстрее, чем их скалярное произведение (предполагаем, что имеет место т.н. «случай общего положения», т.е. что собственные значения простые).

Разложив краевые значения в ряды Фурье, получим:

$$u_n(r,\theta) = \sum_m u_m^n \frac{J_m(\mu_n r)}{J_m(\mu_n)} e^{im\theta}\,,\ u_m^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left(\omega_{\mu_n}(t) - mt\right)} dt\,.$$

$$v_n(r,\theta) = \sum_m v_m^n \frac{J_m(\overline{\mu}_n r)}{J_m(\overline{\mu}_n)} e^{im\theta}\,,\ v_m^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left(\overline{\omega_{\mu_n}(t)} - mt\right)} dt\,.$$

Обозначим $\operatorname{Re}\mu_n = a_n$, $\operatorname{Im}\mu_n = b_n$. Отметим, что в силу (11)

$$C_1 e^{C_u b_n}/b_n \le \left\|u_n(1,\theta)\right\| \le C_2 e^{C_u b_n}\,,\ C_1 e^{C_v b_n}/b_n \le \left\|v_n(1,\theta)\right\| \le C_2 e^{C_v b_n}\,;$$

кроме того, при $|m| \ge a_n / A$

$$C_1 e^{C_u b_n}/(mb_n) \le \left\|u_m^n\right\| \le C_2 e^{C_u b_n}/m\,,\ C_1 e^{C_v b_n}/(mb_n) \le \left\|v_m^n\right\| \le C_2 e^{C_v b_n}/m\,,$$

где C_u, C_v, C_1, C_2 – положительные константы, $A > 1$ и достаточно близко к единице. Следовательно,

$$0 < c_1 \le \sum_{|m| \le a_n / A} \left|u_m^n\right|^2 / \left\|u_n(1,\theta)\right\|^2 \le c_2 < +\infty\,,\ 0 < c_1 \le \sum_{|m| \le a_n / A} \left|v_m^n\right|^2 / \left\|v_n(1,\theta)\right\|^2 \le c_2 < +\infty\,.$$

Используя формулу $J_{-n}(\mu) = (-1)^n J_n(\mu)$ ([22, с. 24]), формулы для вычисления интегралов от произведений бесселевых функций ([7, с. 105, (9), (10)]) и оценки из доказанной ниже леммы, оценим квадраты норм решений и скалярное произведение решений основной и сопряженной задач:

$$\left\|u_n(r,\theta)\right\|^2 = \sum_m \frac{2\pi\left|u_m^n\right|^2}{J_{|m|}(\mu_n)J_{|m|}(\overline{\mu}_n)}\int_0^1 rJ_{|m|}(\mu_n r)J_{|m|}(\overline{\mu}_n r)dr =$$

$$= \frac{2\pi}{\overline{\mu}_n^2 - \mu_n^2}\sum_m \left|u_m^n\right|^2 \left(\overline{\mu}_n \frac{J_{|m|+1}(\overline{\mu}_n)}{J_{|m|}(\overline{\mu}_n)} - \mu_n \frac{J_{|m|+1}(\mu_n)}{J_{|m|}(\mu_n)}\right) \ge$$

$$\geq \frac{2\pi}{\overline{\mu}_n^2-\mu_n^2}\sum_{|m|\leq a_n/A}\left|u_m^n\right|^2\left(\overline{\mu}_n\frac{J_{|m|+1}(\overline{\mu}_n)}{J_{|m|}(\overline{\mu}_n)}-\mu_n\frac{J_{|m|+1}(\mu_n)}{J_{|m|}(\mu_n)}\right)=\frac{4\pi i}{\mu_n^2-\overline{\mu}_n^2}\sum_{|m|\leq a_n/A}\left|u_m^n\right|^2\operatorname{Im}\left(\mu_n\frac{J_{|m|+1}(\mu_n)}{J_{|m|}(\mu_n)}\right)\geq$$

$$\geq\left(\widetilde{C}/b_n\right)\sum_{|m|\leq a_n/A}\left|u_m^n\right|^2\geq C\left\|u_n(1,\theta)\right\|^2/b_n,\ C>0;$$

аналогично,

$$\left\|v_n(r,\theta)\right\|^2\geq C\left\|v_n(1,\theta)\right\|^2/b_n;$$

$$(u_n(r,\theta),v_n(r,\theta))=\sum_m\frac{2\pi u_m^n\overline{v}_m^n}{J_{|m|}^2(\mu_n)}\int_0^1 rJ_{|m|}^2(\mu_n r)dr=$$

$$=\pi u_0^n\overline{v}_0^n\left(1+\frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n)}\right)+\pi\sum_{m\neq 0}u_m^n\overline{v}_m^n\left(1-\frac{J_{|m|+1}(\mu_n)J_{|m|-1}(\mu_n)}{J_{|m|}^2(\mu_n)}\right)\sim\pi\left(\sum_{1\leq|m|\leq a_n/A}+\sum_{|m|\approx a_n}+\sum_{|m|\geq a_nA}\right)\sim$$

$$\sim\pi\left(\sum_{1\leq|m|\leq a_n/A}u_m^n\overline{v}_m^n/a_n^\rho+\sum_{|m|=a_n-O\left(a_n^{1/3}\right)}u_m^n\overline{v}_m^n/b_n+\ldots\right)\leq C_1'\left\|u_n(1,\theta)\right\|\left\|v_n(1,\theta)\right\|a_n^{-\rho}+C_2'a_n^{1/3}e^{(C_u+C_v)b_n}/\left(a_n^2b_n\right)\leq$$

$$\leq C'\left\|u_n(1,\theta)\right\|\left\|v_n(1,\theta)\right\|a_n^{-\rho},\ 0<\rho\leq 1,\ C'>0.$$

Следовательно, $\left\|u_n\right\|\left\|v_n\right\|/(u_n,v_n)\to+\infty$.

Обобщение на случай $L_q(D),\ q>1$, проводится точно так же, как в [45].

Лемма. Пусть $\mu=a+ib,\ a>>0,\ 0<c_1\leq b/\ln a\leq c_2<+\infty,\ A>1$, тогда справедливы следующие асимптотические соотношения:

$1\leq p\leq a/A$:

$$J_{p\pm1}(\mu)/J_p(\mu)=e^{\pm i\operatorname{arctg}\sqrt{(\mu/p)^2-1}}\left(1+O\left(a^{-\rho}\right)\right),\ J_{p+1}(\mu)J_{p-1}(\mu)/J_p^2(\mu)=1+O\left(a^{-\rho}\right),\ 0<\rho\leq 1;$$

$p=a-ra^{1/3}+\ldots,\ r>0$:

$$J_{p\pm1}(\mu)/J_p(\mu)=1+O\left(b^{-1}\right),\ J_{p+1}(\mu)J_{p-1}(\mu)/J_p^2(\mu)=1+O\left(b^{-1}\right);$$

$p\approx a,\ p\neq a-ra^{1/3}+\ldots$:

$$J_{p\pm1}(\mu)/J_p(\mu)=1+O\left(a^{-1}\right),\ J_{p+1}(\mu)J_{p-1}(\mu)/J_p^2(\mu)=1+O\left(a^{-1}\right);$$

$p\geq aA$:

$$J_{p\pm1}(\mu)/J_p(\mu)=e^{\mp\operatorname{Arth}\sqrt{1-(\mu/p)^2}}\left(1+O\left(a^{-1}\right)\right),\ J_{p+1}(\mu)J_{p-1}(\mu)/J_p^2(\mu)=1+O\left(a^{-1}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим поочередно диапазоны изменения индекса. Пусть $\delta=\pm1,\ \varepsilon$ – достаточно малое положительное число.

I. $1\leq p\leq a$: обозначим $w(\mu,p)=\sqrt{(\mu/p)^2-1},\ z(\mu,p)=p(w-\operatorname{arctg}w)$.

1) $1 \le p \le a/\sqrt{1+\varepsilon^2}$: на этом интервале мы хотим воспользоваться формулой ([22, с. 271, 291])

$$J_p(\mu) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt[4]{\mu^2 - p^2}} \left(\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu^2 - p^2}\right)\right) + \frac{\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\mu^2 - p^2}}\left(B_1 + O\left(\frac{1}{\mu^2 - p^2}\right)\right)\right), \quad (14)$$

$$B_1 = \frac{1}{8} + \frac{5p^2}{24\left(\mu^2 - p^2\right)}.$$

Заметим, что

$$\sqrt{\mu^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - p^2} + \frac{iab - b^2/2}{\sqrt{a^2 - p^2}} + \frac{(ab)^2}{2\left(a^2 - p^2\right)\sqrt{a^2 - p^2}} + o\left(\frac{b^2}{a}\right),$$

$$w(\mu, p) = \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - 1} + \frac{iab - b^2/2}{p\sqrt{a^2 - p^2}} + \frac{(ab)^2}{2p\left(a^2 - p^2\right)\sqrt{a^2 - p^2}} + o\left(\frac{b^2}{ap}\right) \sim x + iy,$$

$$x = \sqrt{(a/p)^2 - 1},\ y = ab/\left(p\sqrt{a^2 - p^2}\right).$$

Формула (14) применима, если $u\operatorname{ctg} u + v\operatorname{th} v < 1$, где $u + iv = \operatorname{arctg} w$.

Заметим, что $\varepsilon \le x \le 1,\ y = b(x + 1/x)/a$. Далее, $\operatorname{tg} u = x/(1 - y\operatorname{th} v) = (y - \operatorname{th} v)/(x\operatorname{th} v)$, $y\operatorname{th}^2 v - \left(x^2 + y^2 + 1\right)\operatorname{th} v + y = 0$. Так как

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{y} = \frac{a}{b}\frac{a^2 - p^2 + b^2}{p\sqrt{a^2 - p^2}} \ge \frac{a}{b}\frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{p} \ge \frac{a}{b}\varepsilon,$$

то

$$\operatorname{th} v \sim y/\left(x^2 + y^2 + 1\right),\ v \sim y/\left(x^2 + y^2 + 1\right).$$

Следовательно, $\operatorname{tg} u \sim x\left(x^2 + y^2 + 1\right)/\left(x^2 + 1\right) \ge \varepsilon$. Учитывая, что $0 < u < \pi/2$, получаем неравенство $u\operatorname{ctg} u + v\operatorname{th} v \le \operatorname{arctg}\varepsilon/\varepsilon + \left(b/(a\varepsilon)\right)^2 < 1$.

Таким образом, асимптотическое разложение (14) справедливо. Запишем его в виде

$$J_p(\mu) = \frac{e^{-iz(\mu, p) + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\mu^2 - p^2}}\left(1 + \frac{iB_1}{\sqrt{\mu^2 - p^2}} - e^{2iz(\mu, p)}\left(i + \frac{B_1}{\sqrt{\mu^2 - p^2}}\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2 - p^2}\right)\right).$$

Очевидно, это разложение будет справедливо и при $0 \le p \le a/\sqrt{1+\varepsilon^2}$.

Оценим мнимую часть $z(\mu, p)$:

$$\operatorname{Im} z(\mu, p) = \operatorname{Im}\sqrt{\mu^2 - p^2} - pv \sim \frac{ab}{\sqrt{a^2 - p^2}} - \frac{b}{a}\frac{p^2\sqrt{a^2 - p^2}}{a^2 - p^2 + b^2} = b\frac{\left(a^2 - p^2\right)^2 + a^2b^2}{a\sqrt{a^2 - p^2}\left(a^2 - p^2 + b^2\right)}.$$

Пусть $p = a\sqrt{1 - s^2}$, $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/\sqrt{1+\varepsilon^2} \le s \le 1$, тогда

$$\operatorname{Im} z = h(s) = b\frac{s^4 + b^2/a^2}{s\left(s^2 + b^2/a^2\right)}.$$

Так как $h'(s) \neq 0$ при $\tilde{\varepsilon} \le s \le 1$ (все корни многочлена $\tau^3 + 3c\tau^2 - 3c\tau - c^2$ суть $O\left(\sqrt{c}\right)$ или $O(c)$ при $c \to +0$), то $b\tilde{\varepsilon} \sim h(\tilde{\varepsilon}) \le h(s) \le h(1) = b$.

Итак, $0 < C_1 \le \operatorname{Im} z(\mu,\ p)/b \le C_2 < +\infty$.

Оценим теперь разность между соседними значениями $z(\mu,\ p)$. Так как

$$\operatorname{arctg} w(\mu,\ p+\delta) - \operatorname{arctg} w(\mu,\ p) = \operatorname{arctg} \Delta,$$

$$\Delta = \frac{w(\mu,\ p+\delta) - w(\mu,\ p)}{1 + w(\mu,\ p+\delta)w(\mu,\ p)} = -\frac{\delta p^2/\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - p^2}} - \frac{\delta\sqrt{\mu^2 - p^2}}{\mu^2} + O\left(a^{-2}\right),$$

то

$$z(\mu,\ p+\delta) - z(\mu,\ p) = -\delta \operatorname{arctg} w(\mu,\ p) + O\left(a^{-1}\right).$$

Таким образом, существует $\rho > 0$ такое, что

$$J_p(\mu) = \frac{e^{-iz(\mu,\ p)+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\mu^2 - p^2}}\left(1 - ie^{2iz(\mu,\ p)} + O\left(a^{-1}\right)\right) = \frac{e^{-iz(\mu,\ p)+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\mu^2 - p^2}}\left(1 + O\left(a^{-\rho}\right)\right),$$

откуда, с учетом вышеприведенных соотношений, и следуют утверждения леммы.

2) $a/\sqrt{1+\varepsilon^2} \le p \le a$: на этом множестве воспользуемся равномерным разложением Лангера ([7, с. 103], [200]):

$$J_p(\mu) \sim \sqrt{1 - \operatorname{arctg} w/w}\,G(z) + \ldots,\ G(z) = J_{1/3}(z)\cos\pi/6 - Y_{1/3}(z)\sin\pi/6.$$

Разобьем сегмент на подмножества в зависимости от поведения w и z. Обозначим $p = a/t$, $1 \le t \le \sqrt{1+\varepsilon^2}$, тогда $w = \sqrt{(1+ib/a)^2 t^2 - 1} \sim \sqrt{t^2 - 1 + 2ibt/a}$.

Рассмотрим четыре возможных случая:

а) $t^2 - 1 << b/a$: $w \sim \sqrt{2ibt/a}\left(1 + a\left(t^2-1\right)/(2ibt) + \ldots\right)$, $z(\mu,\ p) \sim pw^3/3 \sim (2ib)^{3/2}\sqrt{t/a}$, $p + \delta = a/(t+\Delta)$, $\Delta \sim -\delta/a$, $z(\mu,\ p+\delta) \sim (2ib)^{3/2}\sqrt{t/a}\left(1 + \Delta/(2t)\right)$.

Следовательно,

$$J_p(\mu) \sim wG(z)/\sqrt{3} \sim \sqrt{2ibt/a}\,G\left((2ib)^{3/2}\sqrt{t/a}\right)/\sqrt{3} \sim (2ibt)^{1/3}/\left(3a^{2/3}\Gamma(2/3)\right).$$

$$J_{p+\delta}(\mu)/J_p(\mu) \sim (1+\Delta/t)^{1/3} \sim 1 + O\left(a^{-1}\right).$$

б) $t^2 - 1 \approx b/a$: $w \sim e^{i\pi/8}\sqrt{b/a}$, $z \sim pw^3/3 \sim Ce^{i3\pi/8}b^{3/2}/\sqrt{a}$, $C \in \mathrm{R}$. Дальнейшие выкладки аналогичны случаю а).

в) $p = a - ra^{1/3} + \ldots$: $\mu^2 - p^2 \sim 2ra^{4/3}\left(1 + iba^{-1/3}/r + \ldots\right)$, $w \sim a^{-1/3}\sqrt{2r}$, $z \sim pw^3/3 \sim \sqrt{8}r^{3/2}/3 + iba^{-1/3}\sqrt{2r} + \ldots$, т.е. $0 < C_1 \le |z| \le C_2 < +\infty$.

Следовательно, $J_p(\mu) \sim a^{-1/3}\sqrt{2r/3}G(z)+\ldots$.

Далее, $p+\delta = a-(r-\Delta)a^{1/3}+\ldots$, $\Delta = \delta a^{-1/3}$,

$$J_{p+\delta}(\mu) \sim a^{-1/3}\sqrt{2r/3}(1-\Delta/(2r)+\ldots)\left(G(z)-G'(z)\Delta\sqrt{2r}+\ldots\right),$$

$$J_{p+\delta}(\mu)/J_p(\mu) \sim 1+BO(\Delta),\ B = G'(z)/G(z).$$

«Наихудшим» будет случай, когда $G(\operatorname{Re} z) \sim 0$; тогда

$$B = O\left(\left(iba^{-1/3}\sqrt{2r}\right)^{-1}\right),\ J_{p+\delta}(\mu)/J_p(\mu) \sim 1+\delta O\left(b^{-1}\right).$$

г) $t^2-1 >> b/a$: $w \sim \sqrt{t^2-1}+ibt/\left(a\sqrt{t^2-1}\right)+\ldots$,

$$z \sim \frac{a}{t}\left(\sqrt{t^2-1}+\frac{ibt/a}{\sqrt{t^2-1}}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-1}+\frac{ibt/a}{\sqrt{t^2-1}}\right)\right);$$

таким образом, $\operatorname{Im} z \sim Cb$, откуда и следуют утверждения леммы.

II. $p > a$: обозначим $w = \sqrt{1-\mu^2/p^2}$, $z = p(\operatorname{Arth} w - w)$.

В случае $p \approx a$ воспользуемся равномерным асимптотическим разложением Лангера ([7, с. 103], [200]):

$$J_p(\mu) = \pi^{-1}\sqrt{1-\operatorname{arctg} w/w}K_{1/3}(z)+\ldots;$$

в случае $p \geq a/\sqrt{1-\varepsilon^2}$, рассуждая аналогично п. I, убедимся, что применима формула

$$J_p(\mu) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{p^2-\mu^2}}\left(1+O\left(a^{-1}\right)\right)$$

([22, с. 269]). Дальнейшие рассуждения в обоих случаях аналогичны п. I.

ГЛАВА 3
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе рассматриваются некоторые задачи, связанные с интегральными преобразованиями и решениями интегральных уравнений.

§ 1. АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С ОБРАЗОМ ЯДРА – ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

I. Введение.

В [230], [113] изучалась асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядром

$$K(x)=|x|^{-\alpha},\ 0<\alpha<1.$$

В [150] рассмотрена асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов.

В этом параграфе рассмотрен интегральный оператор свертки на конечном интервале с ядром, образ Фурье которого имеет две конечные точки разрыва. Найдена асимптотика собственных значений и собственных функций оператора.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}K(x-t)\varphi(t)dt,\ x\in[-1,1], \tag{1}$$

где $K(x)=(\pi x)^{-1}\sin(lx)$, $l>0$, λ – спектральный параметр.

Лемма 1. Интегральный оператор K, задаваемый правой частью уравнения (1), неотрицателен в пространстве $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Обозначая

$$\hat{\varphi}(s)=\int_{-1}^{1}e^{ist}\varphi(t)dt,$$

получим

$$\mathrm{K}\varphi=\int_{-1}^{1}K(x-t)\varphi(t)dt=\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt\,\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}e^{i(t-x)s}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}e^{-ixs}\hat{\varphi}(s)ds,$$

откуда следует, что

$$(\mathrm{K}\varphi,\varphi)=\int_{-1}^{1}\mathrm{K}\varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx=(2\pi)^{-1}\int_{-l}^{l}\hat{\varphi}(s)\overline{\hat{\varphi}(s)}ds\geq 0.$$

Кроме того,

$$(\mathrm{K}\varphi,\varphi)\le\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}}|\hat{\varphi}(s)|^2\,ds=\int_{-1}^{1}|\varphi(t)|^2\,dt=(\varphi,\varphi).$$

Следовательно, $\lambda\ge 1$.

В дальнейшем будем считать, что λ положительно и достаточно велико.

Отметим, что по теореме Мерсера собственные значения удовлетворяют равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=2K(0)=\frac{2l}{\pi}.$$

Отметим, что в силу гладкости ядра собственные функции являются бесконечно гладкими.

Лемма 2. Собственные функции задачи либо четные, либо нечетные.

Для доказательства достаточно заменить компактное ядро конечномерным с нужной точностью:

$$K(x)=\frac{l}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(lx)^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

и убедиться в том, что соответствующая система линейных уравнений распадается на две подсистемы, одна из которых отвечает четной, а другая – нечетной собственной функции.

II. Сведение к задаче сопряжения.

Рассмотрим вначале случай нечетной собственной функции. Продолжая (1) на всю вещественную прямую и полагая

$$\varphi(x)=0,\ |x|>1;\ \psi(x-1)=-\lambda\int_{-1}^{1}K(x-t)\varphi(t)dt,\ x\ge 1;\ \psi(x)=0,\ x<0;$$

получим

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\mathrm{R}}K(x-t)\varphi(t)dt+\psi(x-1)-\psi(-1-x),\ x\in\mathrm{R}.$$

Переходя к образам Фурье

$$\hat{\varphi}(p)=\int_{R}e^{ipx}\varphi(x)dx=\int_{-1}^{1}e^{ipx}\varphi(x)dx,\ \hat{\psi}(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{ipx}\psi(x)dx,\ \hat{K}(p)=\begin{cases}1, -l<p<l,\\ 0, |p|>l,\end{cases}$$

получим уравнение

$$\left(1-\lambda\hat{K}(p)\right)\hat{\varphi}(p)=e^{ip}\hat{\psi}(p)-e^{-ip}\hat{\psi}(-p),\ p\in\mathrm{R}.$$

Отметим, что функция $\hat{\psi}(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и исчезает на бесконечности.

Обозначим $T=\{x\in\mathrm{R}\,|\,|x|>l\}$,

$$\Phi(z)=\begin{cases}e^{iz}(1-\lambda)\hat{\varphi}(z)-e^{2iz}\hat{\psi}(z), \operatorname{Im}z>0,\\ -\hat{\psi}(-z), \operatorname{Im}z<0.\end{cases}$$

Функция $\Phi(z)$ – аналитическая во всей комплексной плоскости с разрезом T, может иметь особенности не выше логарифмического порядка в точках $\pm l$ и исчезает на бесконечности. Следуя ([29, с. 200]), получим условие сопряжения $\Phi^{\pm}$ на T. Так как при $x \in T$

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = e^{ix}(1-\lambda)\hat{\varphi}(x) - e^{2ix}\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(-x) = -\lambda e^{ix}\hat{\varphi}(x),$$

то

$$\Phi(z) = -\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{L}\frac{e^{it}\hat{\varphi}(t)}{t-z}\,dt,$$

откуда следует, что

$$\Phi^{+}(x) = e^{ix}(1-\lambda)\hat{\varphi}(x) - e^{2ix}\hat{\psi}(x) = \frac{\lambda-1}{\lambda}\left(\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)\right) + e^{2ix}\Phi^{-}(-x),$$

$$\Phi^{+}(x) = (1-\lambda)\Phi^{-}(x) + \lambda e^{2ix}\Phi^{-}(-x),\ x \in T. \qquad (2)$$

III. Вывод основного уравнения.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $x \in T$. Обозначим

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\ln(\lambda - 1),\ \nu = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Будем искать решение задачи сопряжения (2) в виде

$$\Phi(z) = \sqrt{l^2 - z^2}\left(\frac{l-z}{l+z}\right)^{i\mu} Y(z).$$

В силу (2) функция $Y(z)$ удовлетворяет на разрезе T соотношению

$$Y^{+}(x) - Y^{-}(x) = -\nu e^{2ix}\left(\frac{x+l}{x-l}\right)^{2i\mu} Y^{-}(-x),$$

а также условиям

$$Y(z) = O\left(\ln\left(z^2 - l^2\right)/\sqrt{z^2 - l^2}\right),\ z \to \pm l,$$

$$\lim_{x\to\infty} xY^{\pm}(x) = 0. \qquad (3)$$

Решая эту задачу о скачке [28, с. 106], получаем

$$Y(z) = -\frac{\nu}{2\pi i}\int_{T} e^{2it}\left(\frac{t+l}{t-l}\right)^{2i\mu}\frac{Y^{-}(-t)dt}{t-x}.$$

Устремляя z к вещественной оси из нижней полуплоскости и обозначая

$$\Theta(x) = e^{2ix}\left(\frac{x+l}{x-l}\right)^{2i\mu},$$

приходим к основному уравнению относительно функции $Y(z)$:

$$Y^-(x)=\frac{\nu}{2}\Theta(x)Y^-(-x)-\frac{\nu}{2\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)Y^-(-t)dt}{t-x}. \qquad (4)$$

Те же рассуждения в случае четной собственной функции приводят к уравнению

$$Y^-(x)=-\frac{\nu}{2}\Theta(x)Y^-(-x)+\frac{\nu}{2\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)Y^-(-t)dt}{t-x}, \qquad (4')$$

отличающемуся от уравнения (4) знаком ν.

В дальнейшем вместо $Y^-(x)$ будем писать $Y(x)$.

Отметим, что если $Y(x)$ – решение уравнения (4), то и $\overline{Y(-x)}$ – также решение этого уравнения.

IV. Вычисление сингулярного интеграла от осциллирующей функции.

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)dt}{t-x} \qquad (5)$$

Обозначим $\chi(z)=z+\mu\ln\left((z+l)/(z-l)\right)$, тогда $\Theta(x)=\exp(2i\chi(x))$. Положительную стационарную точку показателя обозначим

$$p_0=\sqrt{2\mu l+l^2}:\ \chi'(\pm p_0)=0,\ \chi_0=\chi(p_0)\sim 2p_0.$$

Обозначим $E=R\cap\left\{l<|x|<p_0-\sqrt{p_0}\right\}$, $S=R\cap\left\{|x|>p_0+\sqrt{p_0}\right\}$, $P=T\setminus(E\cup S)$. Для вычисления интеграла (5) на подмножестве $E\cup S$ воспользуемся методом стационарной фазы. Рассмотрим контур $ABCBD$, расположенный в правой полуплоскости и определяемый условием

$$\operatorname{Re}\chi(z)=x+\frac{\mu}{2}\ln\frac{(x+l)^2+y^2}{(x-l)^2+y^2}=\chi_0,\ \text{или}\ y^2=-x^2-l^2+2lx\operatorname{cth}\frac{\chi_0-x}{\mu}.$$

Этот контур целиком лежит в полосе $0<x<\chi_0$, причем прямая $x=\chi_0$ служит его вертикальной асимптотой, и пересекает ось Ox в точках $x=p_0$ и $x=p_*\sim l\chi_0/(2\mu)\sim 2l^2/p_0$.

Обозначим $A(\chi_0-0+i\infty)$, $B(p_0)$, $C(p_*)$, $D(\chi_0-0-i\infty)$. Часть $ABCB$ контура $ABCBD$ обозначим через Γ_+.

Продолжим аналитически функцию $\chi(z)$ сначала с луча вещественной оси $\operatorname{Re}z>\chi_0$ на часть AB контура Γ_+, а затем непрерывно на петлю BCB при ее обходе в направлении по часовой стрелке; при таком обходе выражение $\arg\left((z+l)/(z-l)\right)$ получает приращение 2π.

Отметим, что $\operatorname{Im}\chi(z)\to+\infty$ при $z\to A,\ z\in\Gamma_+$.

Будем считать, что обход контура Γ_+ осуществляется в последовательности $BCBA$ с обходом петли BCB в направлении против часовой стрелки. Обозначая

$$I_M(x)=\begin{cases}1,\ x\in M,\\ 0,\ x\notin M,\end{cases}$$

запишем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{BCB}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=\frac{(\lambda-1)^2-1}{(\lambda-1)^2}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l}^{p}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}+\frac{(\lambda-1)^2+1}{(\lambda-1)^2}I_{\{l<x<p\}}(x)\Theta(x),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{p}^{+\infty}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{BA}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}+I_{\{x>p\}}(x)\Theta(x),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l}^{p}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=\frac{e^{2\pi\mu}}{2\operatorname{sh}(2\pi\mu)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{BCB}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}-\operatorname{cth}(2\pi\mu)I_{\{l<x<p\}}(x)\Theta(x),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l}^{+\infty}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=I_{\{x>p\}}(x)\Theta(x)-\operatorname{cth}(2\pi\mu)I_{\{l<x<p\}}(x)\Theta(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{BA}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}+\frac{e^{2\pi\mu}}{2\operatorname{sh}(2\pi\mu)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{BCB}\frac{\Theta(t)dt}{t-x},$$

или

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l}^{+\infty}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=I_{\{x>p\}}(x)\Theta(x)-\operatorname{cth}(2\pi\mu)I_{\{l<x<p\}}(x)\Theta(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Обозначим $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-$, где Γ_- – контур, симметричный контуру Γ_+ относительно оси Oy. Симметрично продолжая на Γ_- функцию $\chi(z)$, получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{T}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=I_{\{|x|>p\}}(x)\Theta(x)-\operatorname{cth}(2\pi\mu)I_{\{l<|x|<p\}}(x)\Theta(x)+\Omega(x),\ \Omega(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Theta(t)dt}{t-x}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Заметим, что $\Omega(x)=O\left(1/\sqrt{p_0}\right)$.

Теперь рассмотрим интеграл (5) на подмножестве P. В окрестности положительной стационарной точки введем «безразмерную» переменную $y=(x-p_0)/\sqrt{p_0}\in[-1,1]$:

$$\chi\left(p_0+y\sqrt{p_0}\right)=p_0+y\sqrt{p_0}+\frac{p_0^2}{p_0+y\sqrt{p_0}}+O\left(\frac{1}{p_0}\right)=2p_0+y^2-\frac{y^3}{\sqrt{p_0}}+O\left(\frac{1}{p_0}\right),$$

$$\int\limits_{p_0-\sqrt{p_0}}^{p_0+\sqrt{p_0}}\frac{\Theta(t)}{\Theta(x)}\frac{dt}{t-x}=\int\limits_{-1}^{1}e^{2i\left(s^2-y^2\right)}\frac{ds}{s-y}+O\left(\frac{1}{\sqrt{p_0}}\right)=f\left(\frac{x-p_0}{\sqrt{p_0}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{p_0}}\right),$$

где $f(y)$ не зависит от λ.

Ограниченные бесконечно гладкие неосциллирующие функции, представимые в виде $f_{\pm}\left((x\pm p_0)/\sqrt{p_0}\right)$ при $|x\pm p_0|\le\sqrt{p_0}$, где функции $f_{\pm}\in C^{\infty}[-1,1]$ и не зависят от λ, будем называть регулярными.

Таким образом, доказана следующая

Лемма 3. Интеграл (5) представим в виде

$$\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)dt}{t-x}=\Lambda(x)\Theta(x)+\Omega(x) \tag{6}$$

где $\Lambda(x)$ – регулярная функция, $\Lambda(-x)=\overline{\Lambda(x)}$, $\Lambda(x)=-\mathrm{cth}(2\pi\mu)$ при $x\in E$, $\Lambda(x)=1$ при $x\in S$; $\Omega(x)=O\left(1/\sqrt{p_0}\right)$, $\Omega(\infty)=0$.

V. Факторизация сингулярного интегрального оператора.

Применяя оператор из уравнения (4) повторно, с помощью формулы (6) получаем уравнение

$$Y(x)=\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T\left((1-\Lambda(x))\frac{\Theta(x)}{\Theta(t)}-(1-\Lambda(t))\right)\frac{Y(t)dt}{t-x}+\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T\frac{\Omega(t)-\Omega(x)}{t-x}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)}. \tag{7}$$

К уравнению (7) приводит и уравнение (4’).

Для выделения осциллирующих членов в решении факторизуем сингулярную часть уравнения (7), т.е. представим ее в виде суперпозиции интегральных операторов, допускающих обращение в явном виде.

Рассмотрим пару сингулярных интегральных операторов

$$L_-u(x)\equiv u(x)-\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(x)}{\Theta(t)}\frac{B(x)u(t)dt}{t-x},\ L_+u(x)\equiv u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(t)u(t)dt}{t-x},$$

где $B(x)$ – функция, которую определим ниже.

В силу (6) суперпозиция этих операторов равна

$$L_-L_+u(x)=(1-B^2(x))u(x)-\frac{1}{\pi i}\int_T\left((1+B(t)\Lambda(-t))B(x)\frac{\Theta(x)}{\Theta(t)}-(1+B(x)\Lambda(-x))B(t)\right)\frac{u(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_T\Theta(x)B(x)B(t)\frac{\Omega(-x)-\Omega(-t)}{t-x}u(t)dt.$$

Выберем теперь функцию $B(x)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{B(x)(1+B(x)\Lambda(-x))}{1-B^2(x)}=\frac{\nu^2}{4}(1-\Lambda(x)). \tag{8}$$

Выбирая подходящее решение этого квадратного уравнения, положим

$$B(x)=\frac{\nu^2(1-\Lambda(x))/2}{1+\sqrt{1+\nu^2(1-\Lambda(x))(\Lambda(-x)+\nu^2(1-\Lambda(x))/4)}}. \tag{9}$$

Лемма 4. $B(x)\neq\pm1$.

Доказательство. Если $B(x)=\pm1$, то в силу (8) $1+B(x)\Lambda(-x)=0$, стало быть, $\Lambda(x)=\overline{\Lambda(-x)}=\mp1$. Если $\Lambda(x)=1$, то в силу (9) $B(x)=0$; если $\Lambda(x)=-1$, то в силу (9) $B(x)=\nu^2/(2+\nu^2)\neq1$.

Следствие. Индекс Коши выражения $(1+B(x))/(1-B(x))$ определен.

Заметим, что

$$B(x)=\frac{\lambda}{\lambda-2},\ x\in E;\ B(x)=0,\ x\in S.$$

В этом случае суперпозицию операторов можно переписать в виде

$$L_-L_+Y(x)=W(x), \tag{10}$$

$$W(x)=\frac{1+B(x)\Lambda(-x)}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{\Theta(x)B(x)}{\pi i}\int_T\frac{B(x)\Lambda(-x)-B(t)\Lambda(-t)}{t-x}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)}+$$

$$+(1-B^2(x))\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T\frac{\Omega(t)-\Omega(x)}{t-x}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)}-\frac{\Theta(x)B(x)}{\pi i}\int_T\frac{\Omega(-t)-\Omega(-x)}{t-x}B(t)Y(t)dt\ .$$

Замечание. В рассматриваемом классе функций $W(x)=O^*(1/x)$ при $x\to\infty$.

VI. Обращение сингулярных интегральных операторов.

Обратим теперь сингулярные интегральные операторы стандартным методом сведения к задаче сопряжения Римана ([28, с. 176]).

Обозначим $f(x)=u(x)/\Theta(x)$, $g(x)=v(x)/\Theta(x)$, тогда уравнение $L_-u(x)=v(x)$ принимает вид

$$f(x)-\frac{B(x)}{\pi i}\int_T\frac{f(t)dt}{t-x}=g(x).$$

Будем искать решение этого уравнения в (наиболее широком) классе функций, которые могут иметь особенности интегрируемого порядка в точках $\pm l$. Пусть

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{f(t)dt}{t-z},$$

тогда последнее уравнение сводится к задаче сопряжения Римана на T

$$F^+(x)=G(x)F^-(x)+\frac{2g(x)}{1-B(x)},\ G(x)=\frac{1+B(x)}{1-B(x)}.$$

Так как $\Lambda(-x)=\overline{\Lambda(x)}$, то и $G(-x)=\overline{G(x)}$. Кроме того, $G(x)=1-\lambda$, $\ln G(x)=i\pi\operatorname{sgn}x+2\pi\mu,\ x\in E;\ G(x)=1,\ x\in S$. В силу следствия из леммы 4 $\operatorname{Ind}G(x)=0$.

Таким образом, каноническая функция $X_-(z)$, удовлетворяющая соотношению $X_-^+ = GX_-^-$ на разрезе T и имеющая особенности интегрируемого порядка в точках $\pm l$, имеет вид

$$X_-(z) = \frac{1}{l+z}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_T \ln G(t)\frac{dt}{t-z}\right).$$

При небольших по модулю значениях z удобно пользоваться представлением

$$X_-(z) = \frac{1}{\sqrt{l^2-z^2}}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{E\cup P} \ln\left(-G(t)\right)\frac{dt}{t-z}\right).$$

Так как функция $X_-(z)$ убывает на бесконечности с первым порядком, то однородная задача сопряжения имеет одно линейно независимое решение, а неоднородная задача – при правой части, убывающей на бесконечности с первым порядком – всегда разрешима и ее общее решение определяется с точностью до одного линейного независимого слагаемого – решения однородной задачи.

$$Y^+ = Y^- + \frac{2g/X_-^+}{1-B},\ F(z) = CX_-(z) + \frac{X_-(z)}{\pi i}\int_T \frac{g(t)}{(1-B(t))X_-^+(t)}\frac{dt}{t-z},$$

$$f(x) = F^+(x) - F^-(x) = C_-\frac{B(x)X_-^+(x)}{1+B(x)} + \frac{g(x)}{1-B^2(x)} + \frac{B(x)}{1+B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_-^+(x)}{X_-^+(t)}\frac{g(t)}{1-B(t)}\frac{dt}{t-x}.$$

Таким образом, общее решение уравнения $L_-u(x) = v(x)$ записывается в виде

$$u(x) = C_-\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)} + \frac{v(x)}{1-B^2(x)} + \frac{B(x)}{1+B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{\Theta(x)X_-^+(x)}{\Theta(t)X_-^+(t)}\frac{v(t)}{1-B(t)}\frac{dt}{t-x}.$$

Следствие.

$$\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)X_-^+(t)}{1+B(t)}\frac{dt}{t-x} = \frac{X_-^+(x)}{1+B(x)}, \qquad (11\text{-})$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)X_-^+(t)}{1+B(t)}dt = -1.$$

Аналогично, решая уравнение $L_+u(x) = v(x)$ в том же классе функций, получаем

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)f(t)dt}{t-z},\ GF^+ = F^- + \frac{2Bg}{1-B}.$$

$$X_+(z) = \frac{1}{l-z}\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_T \ln G(t)\frac{dt}{t-z}\right) = \frac{1}{\sqrt{l^2-z^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{E\cup P} \ln\left(-G(t)\right)\frac{dt}{t-z}\right),$$

$$Y^+ = Y^- + \frac{2Bg/X_+^+}{1+B},\ F(z) = CX_+(z) + \frac{X_+(z)}{\pi i}\int_T \frac{B(t)g(t)}{(1+B(t))X_+^+(t)}\frac{dt}{t-z},$$

$$u(x)=C_+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}+\frac{v(x)}{1-B^2(x)}-\frac{1}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{X_+^+(x)}{X_+^+(t)}\frac{B(t)v(t)}{1+B(t)}\frac{dt}{t-x}.$$

Следствие.

$$\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(t)X_+^+(t)}{1-B(t)}\frac{dt}{t-x}=-\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}, \qquad (11+)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(t)X_+^+(t)}{1-B(t)}dt=-1.$$

Замечание. $X_-(z)X_+(z)=1/\left(l^2-z^2\right)$,

$$X_-^+(x)X_+^+(x)=1/\left(l^2-x^2\right). \qquad (12)$$

VII. Вычисление вспомогательных интегралов.

Сначала вычислим интеграл

$$K_1(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)X_-^+(t)}{1+B(t)}\frac{dt}{t-x}.$$

В силу формул (11-) и (6)

$$K_1(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)dt}{t-x}\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)}{1+B(s)}\frac{X_-^+(s)ds}{s-t}=\Theta(x)\frac{B(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}+L_1(x),$$

$$L_1(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)}{1+B(s)}\frac{X_-^+(s)ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t-s}\right)\Theta(t)dt=$$

$$=\frac{\Lambda(x)\Theta(x)}{1+B(x)}X_-^+(x)-B(x)\Lambda(x)K_1(x)-\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)\Lambda(s)-B(x)\Lambda(x)}{s-x}\frac{\Theta(s)X_-^+(s)ds}{1+B(s)}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}\frac{\Omega(x)-\Omega(s)}{s-x}ds,$$

откуда следует, что

$$K_1(x)=\frac{1}{1+B(x)\Lambda(x)}\left(\frac{B(x)+\Lambda(x)}{1+B(x)}\Theta(x)X_-^+(x)-K_{r1}(x)\right), \qquad (13\text{-}1)$$

$$K_{r1}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(t)\Lambda(t)-B(x)\Lambda(x)}{t-x}\frac{\Theta(t)X_-^+(t)dt}{1+B(t)}+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(t)X_-^+(t)}{1+B(t)}\frac{\Omega(t)-\Omega(x)}{t-x}dt.$$

Замечание.

$$\frac{B(x)+\Lambda(x)}{1+B(x)\Lambda(x)}=-\frac{1}{B(x)},\ x\in E.$$

Аналогичным приемом, на этот раз – с помощью формулы (11+), вычисляются интегралы

$$K_2(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)X_+^+(-t)}{1-B(-t)}\frac{dt}{t-x}:$$

$$K_2(x)=\frac{1}{1+\Lambda(x)B(-x)}\left(\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1-B(-x)}\Theta(x)X_+^+(-x)-K_{r2}(x)\right), \qquad (13\text{-}2)$$

$$K_{r2}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Lambda(t)B(-t)-\Lambda(x)B(-x)}{t-x}\frac{\Theta(t)X_+^+(-t)dt}{1-B(-t)}+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(-t)X_+^+(-t)}{1-B(-t)}\frac{\Omega(t)-\Omega(x)}{t-x}dt;$$

и

$$K_3(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)X_+^+(-t)}{1-B(-t)}\frac{\Xi(-t)dt}{t-x},\ \Xi(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(t)X_-^+(t)}{X_+^+(t)}\left(\frac{B(t)}{1+B(t)}\right)^2\frac{dt}{t-x}:$$

$$K_3(-x)=-\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(-t)X_+^+(t)}{1-B(t)}\frac{dt}{t-x}\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(s)X_-^+(s)}{X_+^+(s)}\left(\frac{B(s)}{1+B(s)}\right)^2\frac{ds}{s-t}=$$

$$=-\frac{X_-^+(x)}{1-B(x)}\left(\frac{B(x)}{1+B(x)}\right)^2+K_2(x)\Xi(-x)-L_3(x),$$

$$L_3(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(s)X_-^+(s)}{X_+^+(s)}\left(\frac{B(s)}{1+B(s)}\right)^2\frac{K_2(-s)}{s+x}ds=\frac{B(-x)}{1-B(-x)}\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\frac{X_-^+(-x)}{(1+B(-x))^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}\left(\frac{B(s)}{1-B^2(s)}\frac{B(s)+\Lambda(-s)}{1+\Lambda(-s)B(s)}-\frac{B(-x)}{1-B^2(-x)}\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\right)\frac{ds}{s+x}+$$

$$+\frac{(-K_{r2}(x))\Xi(-x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}-\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(s)X_-^+(s)}{X_+^+(s)}\left(\frac{B(s)}{1+B(s)}\right)^2\left(\frac{K_{r2}(-s)}{1+\Lambda(-s)B(s)}-\frac{K_{r2}(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\right)\frac{ds}{s+x}=$$

$$=\frac{B(-x)}{1-B(-x)}\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\frac{X_-^+(-x)}{(1+B(-x))^2}-\frac{\Xi(-x)K_{r2}(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}+K_{r3}(x),$$

$$K_{r3}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}\left(\frac{B(s)}{1-B^2(s)}\frac{B(s)+\Lambda(-s)}{1+\Lambda(-s)B(s)}-\frac{B(-x)}{1-B^2(-x)}\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\right)\frac{ds}{s+x}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(s)X_-^+(s)}{X_+^+(s)}\left(\frac{B(s)}{1+B(s)}\right)^2\left(\frac{K_{r2}(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}-\frac{K_{r2}(-s)}{1+\Lambda(-s)B(s)}\right)\frac{ds}{s+x},$$

$$K_3(x)=\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}\frac{\Theta(x)X_+^+(-x)}{1-B(-x)}\Xi(-x)+ \qquad (13\text{-}3)$$

$$+\frac{X_-^+(-x)}{1-B(-x)}\frac{B(-x)}{(1+B(-x))^2}\left(-\frac{B(-x)+\Lambda(x)}{1+\Lambda(x)B(-x)}-B(-x)\right)-K_{r3}(x).$$

VIII. Регуляризация сингулярного интегрального оператора и получение общего представления решения уравнения (7).

Последовательно обратим теперь (10). Обращая первое интегральное уравнение, получаем:

$$L_-^{(-1)}W(x)=C_-\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}+\frac{W(x)}{1-B^2(x)}-\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}\left(D_0x+D_1+\left(x^2-l^2\right)J(x)\right),$$

$$D_j = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{t^j X_+^+(t)}{\Theta(t)}\frac{W(t)dt}{1-B(t)},\ j=\overline{0,1}$$

(интегралы, как обычно, понимаем в смысле главного значения),

$$J(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(t)}{\Theta(t)}\frac{W(t)}{1-B(t)}\frac{dt}{t-x} = \sum_{m=1}^{8} J_m(x),$$

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{1+B(s)\Lambda(-s)}{1-B(s)}\frac{ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)Y(t)dt}{t-s},$$

$$J_2(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{1+B(s)\Lambda(-s)}{1-B(s)}\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}\frac{ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-s},$$

$$J_3(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B^2(s)\Lambda(-s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{1}{t-s}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$J_4(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)\Lambda(-t)}{t-s}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$J_5(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}(1+B(s))\frac{ds}{s-x}\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T \frac{\Omega(t)}{t-s}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$J_6(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}(1+B(s))\frac{ds}{s-x}\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T \frac{\Omega(s)}{t-s}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$J_7(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{\Omega(-t)}{t-s}B(t)Y(t)dt,$$

$$J_8(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{\Omega(-s)}{t-s}B(t)Y(t)dt.$$

В силу малости Ω последними четырьмя интегралами можно пренебречь.

В силу формулы (8)

$$J_1(x) = \frac{\nu^2}{4}(1-\Lambda(x))(1+B(x))\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}Y(x) - \frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T \frac{Z_1(t)-Z_1(x)}{t-x}B(t)Y(t)dt,$$

$$J_2(x) = -\frac{\nu^2}{4}(1-\Lambda(x))(1+B(x))\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}Y(x) + \frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T \frac{Z_2(t)-Z_2(x)}{t-x}(1-\Lambda(t))Y(t)dt,$$

$$J_3(x) = \frac{B^2(x)\Lambda(-x)}{1-B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}Y(x) - \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{Z_3(t)-Z_3(x)}{t-x}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$J_4(x) = -\frac{B^2(x)\Lambda(-x)}{1-B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}Y(x) + \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{Z_4(t)-Z_4(x)}{t-x}B(t)\Lambda(-t)\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)},$$

$$Z_1(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{1-\Lambda(s)}{B(s)}\frac{1+B(s)}{s-x}ds,\ Z_2(x) = \frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{1+B(s)}{s-x}ds,$$

$$Z_3(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B^2(s)\Lambda(-s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x},\ Z_4(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(s)}{1-B(s)}\frac{X_+^+(s)ds}{s-x}.$$

В силу формул (11+), (13-1)-(13-3)

$$Z_1(x)=-\frac{1-\Lambda(x)}{B(x)}\left(1-B^2(x)\right)K_2(-x)+\frac{4}{\nu^2}Z_{r1}(x),$$

$$Z_{r1}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{B(s)\Lambda(-s)-B(x)\Lambda(-x)}{s-x}\frac{ds}{1-B(s)},$$

$$Z_1(x)=\frac{4}{\nu^2}\left(-\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1-B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}+K_{r2}(-x)+Z_{r1}(x)\right);$$

$$Z_2(x)=-\left(1-B^2(x)\right)K_2(-x)+\frac{4}{\nu^2}Z_{r2}(x),\ Z_{r2}(x)=-\frac{\nu^2}{4\pi i}\int_T \frac{X_+^+(s)}{\Theta(s)}\frac{B^2(s)-B^2(x)}{s-x}\frac{ds}{1-B(s)},$$

$$Z_2(x)=\frac{4}{\nu^2}\left(-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1-B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}+\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}K_{r2}(-x)+Z_{r2}(x)\right);$$

$$Z_3(x)=-\frac{B(x)\Lambda(-x)}{1-B(x)}X_+^+(x)+Z_{r3}(x),\ Z_{r3}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(s)X_+^+(s)}{1-B(s)}\frac{B(s)\Lambda(-s)-B(x)\Lambda(-x)}{s-x}ds;$$

$$Z_4(x)=-\frac{1}{1-B(x)}X_+^+(x).$$

Следовательно, сумма первых четырех интегралов равна

$$\sum_{k=1}^4 J_k(x)=\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1-B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}-\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{B(t)\Lambda(-t)-B(x)\Lambda(-x)}{t-x}\frac{Y(t)dt}{\Theta(t)}+\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{R(t,x)Y(t)dt}{t-x},$$

$$R(t,x)=\left(B(t)-\frac{1-\Lambda(t)}{1-\Lambda(x)}B(x)\right)K_{r2}(-x)-B(t)\left(Z_{r1}(t)-Z_{r1}(x)\right)+Z_{r2}(t)-Z_{r2}(x)-\frac{Z_{r3}(t)-Z_{r3}(x)}{\Theta(t)}.$$

Обозначая через $\{\Omega\}$ малые члены, зависящие от Ω, получаем:

$$L_-^{(-1)}W(x)=(C_- -D_0x-D_1)\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}+\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}(l^2-x^2)\frac{1}{\pi i}\int_T \frac{R(t,x)Y(t)dt}{t-x}+\{\Omega\}.$$

Теперь обратим второе интегральное уравнение.

$$L_+^{(-1)}L_-^{(-1)}W(x)=\frac{C_+X_+^+(x)}{1-B(x)}+\frac{C_- -D_0x-D_1}{1-B^2(x)}\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}+$$

$$+\frac{1}{1-B^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{1}{1-B^2(x)}\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}\left(l^2-x^2\right)\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R(t,x)Y(t)dt}{t-x}+$$

$$+M(x)-\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1+B(t)}\right)^2(C_--D_0t-D_1)\frac{\Theta(t)X_-^+(t)}{X_+^+(t)}\frac{dt}{t-x}+$$

$$+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(s)}{1+B(s)}\right)^2\frac{ds}{s-x}\frac{\Theta(s)X_-^+(s)}{X_+^+(s)}\left(l^2-s^2\right)\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R(t,s)Y(t)dt}{s-t}+\{\Omega\},$$

где

$$M(x)=-\frac{1}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{X_+^+(x)}{X_+^+(s)}\frac{B(s)}{1+B(s)}\frac{ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-s}=$$

$$=\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}(E_0x+E_1)-\frac{1}{1-B(x)}\frac{L(x)}{X_-^+(x)},$$

$$E_k=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}s^kds\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-s},\ k=\overline{0,1},$$

$$L(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}\frac{ds}{s-x}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-s}=$$

$$=\frac{X_-^+(x)}{1+B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{Z_{r5}(t)-Z_{r5}(x)}{t-x}(1-\Lambda(t))Y(t)dt,$$

$$Z_{r5}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}\left(\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{ds}{s-x}.$$

С учетом равенств

$$E_0=\frac{1}{\pi i}\int_T(1-\Lambda(t))Y(t)Z_{5r}(t)dt,$$

$$E_1=\frac{1}{\pi i}\int_T(1-\Lambda(t))Y(t)(tZ_{r5}(t)+F_E(t))dt,\ F_E(t)=\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(s)}{1-\Lambda(s)}-\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}\right)\frac{B(s)X_-^+(s)}{1+B(s)}ds$$

получаем

$$M(x)=\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(F_E(t)+\frac{\left(t^2-l^2\right)Z_{r5}(t)-\left(x^2-l^2\right)Z_{r5}(x)}{t-x}\right)(1-\Lambda(t))Y(t)dt+$$

$$+\frac{1}{B^2(x)-1}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1-\Lambda(t)}-\frac{B(x)}{1-\Lambda(x)}\right)\frac{(1-\Lambda(t))Y(t)dt}{t-x}.$$

Итак, в обозначении

$$Z_{r6}(x)=C_--D_0x-D_1+\left(l^2-x^2\right)\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R(t,x)Y(t)dt}{t-x}$$

$$L_+^{(-1)}L_-^{(-1)}W(x)=\frac{Z_{6r}(x)}{1-B^2(x)}\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}-\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(\frac{B(t)}{1+B(t)}\right)^2 Z_{6r}(t)\frac{\Theta(t)X_-^+(t)}{X_+^+(t)}\frac{dt}{t-x}+$$

$$+\frac{C_+X_+^+(x)}{1-B(x)}+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\frac{1}{\pi i}\int_T\left(F_E(t)+\frac{\left(t^2-l^2\right)Z_{5r}(t)-\left(x^2-l^2\right)Z_{5r}(x)}{t-x}\right)(1-\Lambda(t))Y(t)dt+\{\Omega\}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (7) представимо в виде

$$Y(x)=\frac{B(x)\Theta(x)X_-^+(x)}{1+B(x)}R_1(x)+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}R_2(x)+\frac{X_+^+(x)}{1-B(x)}\Xi(x)R_3(x),$$

где $R_j(x),\ j=\overline{1,3},$ – регулярные функции.

IX. Вывод общего представления решения основного уравнения.

Подставим полученное представление в уравнение (4). Результат вычисления интеграла

$$\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{\Theta(-t)dt}{t-x}\left(\frac{B(t)\Theta(t)X_-^+(t)}{1+B(t)}R_1(t)+\frac{X_+^+(t)}{1-B(t)}R_2(t)+\frac{X_+^+(t)}{1-B(t)}\Xi(t)R_3(t)\right)=$$

$$=R_1(x)\frac{X_-^+(x)}{1+B(x)}+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R_1(t)-R_1(x)}{t-x}X_-^+(t)\frac{B(t)dt}{1+B(t)}-R_2(x)\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}\frac{\Theta(-x)X_+^+(x)}{1-B(x)}+$$

$$+\frac{R_2(x)K_2(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R_2(t)-R_2(x)}{t-x}\frac{X_+^+(t)}{\Theta(t)}\frac{dt}{1-B(t)}-R_3(x)\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}\frac{\Theta(-x)X_+^+(x)}{1-B(x)}\Xi(x)+$$

$$+\frac{R_3(x)X_-^+(x)B(x)}{(1-B(x))(1+B(x))^2}\left(\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}+B(x)\right)+R_3(x)K_3(-x)+\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{R_3(t)-R_3(x)}{t-x}\frac{X_+^+(t)}{\Theta(t)}\frac{\Xi(t)dt}{1-B(t)}$$

дает соотношение на главные (осциллирующие) слагаемые:

$$\frac{2}{\nu}\frac{X_-^+(-x)}{\Theta(x)}R_1(-x)\frac{B(-x)}{1+B(-x)}+\frac{2}{\nu}\frac{X_+^+(-x)}{1-B(-x)}R_2(-x)+\frac{2}{\nu}\frac{X_+^+(-x)\Xi(-x)}{1-B(-x)}R_3(-x)=$$

$$=R_1(x)X_-^+(x)+\frac{1-\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}R_2(x)+\frac{1-\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}\Xi(x)R_3(x)+$$

$$+\frac{R_3(x)X_-^+(x)B(x)}{(1-B(x))(1+B(x))^2}\left(\frac{B(x)+\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}+B(x)\right).$$

Отсюда следует, что $R_3(x)=0,$

$$\frac{2}{\nu}\frac{X_+^+(-x)}{1-B(-x)}R_2(-x)=R_1(x)X_-^+(x),\ \frac{2}{\nu}\frac{X_-^+(-x)}{\Theta(x)}R_1(-x)\frac{B(-x)}{1+B(-x)}=\frac{1-\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}\frac{X_+^+(x)}{\Theta(x)}R_2(x).$$

Из равенства

$$\frac{1}{1-B(x)}\frac{B(-x)}{1+B(-x)}=\frac{\nu^2}{4}\frac{1-\Lambda(-x)}{1+\Lambda(-x)B(x)}$$

получаем

$$R_1(x)=\frac{2/\nu}{1-B(-x)}\frac{X_+^+(-x)}{X_-^+(x)}R_2(-x).$$

Итак, доказана

Теорема 1. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$Y(x)=\frac{2}{\nu}\frac{B(x)}{1+B(x)}\frac{\Theta(x)X_+^+(-x)R(-x)}{1-B(-x)}+\frac{X_+^+(x)R(x)}{1-B(x)}, \qquad (14)$$

где $R(x)$ – регулярная функция.

X. Вывод условия на спектр.

Условие (3) принимает вид

$$\int_T \Theta(t)Y(-t)dt=0.$$

Подставляя в это условие выражение (14), получаем условие, определяющее первую серию собственных значений:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2}{\nu}C_1+\Theta(p_0)C_2\right)=0,$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от λ.

Рассматривая аналогично случай четной собственной функции, получаем вторую серию собственных значений. Тем самым, доказана

Теорема 2. Спектр задачи (1) состоит из двух перемежающихся последовательностей вида

$$\lambda_n^+=\exp\left(\pi l^{-1}(\pi n/4+\vartheta_++...)^2\right),\ n=1,3,...;\ \lambda_n^-=\exp\left(\pi l^{-1}(\pi n/4+\vartheta_-+...)^2\right),\ n=2,4,...,$$

где $\vartheta_\pm$ – некоторые постоянные.

XI. Заключение.

В заключение приведем несколько начальных собственных значений при $l=1$, вычисленных Н.П. Савенковой и В.П. Ильютко ($\sigma_n=8\pi^{-3/2}\sqrt{l\ln(\lambda_n-1)}$):

n	λ_n	σ_n
1	1,75	
2	15,92	2,361915234
3	808	3,716944627
4	108685	4,892412014
5	26897274	5,942359230
6	10536228577	6,901842857

§ 2. РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ

Сингулярные интегральные операторы с некарлемановским сдвигом играют важную роль в теории краевых задач с отходом от характеристики для уравнений смешанного типа ([2], [20, с. 345]). Свойства таких операторов изучались в [156], [157].

В этом параграфе рассматривается модельное уравнение, тесно связанное с задачей, рассмотренной в § 1 гл. 1.

Пусть

$$(Sf)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{f(t)dt}{t-x},\ 0<x<1,$$

– классический одномерный сингулярный интегральный оператор,

$$(Wf)(x)=f(lx),$$

где $0<l<1$ – фиксированное число, – оператор некарлемановского сдвига.

Рассмотрим уравнение

$$(I-\lambda WS)f=h, \tag{1}$$

или, в обычном виде,

$$f(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\frac{f(t)dt}{t-lx}=h(x),\ 0<x<1.$$

Определение. Через $C^\delta[0,1],\ 0<\delta\le 1$, будем обозначать пространство гёльдеровых функций, заданных на отрезке $[0,1]$, с обычной нормой

$$\|f\|_\delta=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+\sup_{\substack{x',x''\in[0,1],\\ x'\ne x''}}\frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\delta}.$$

Определение. Через $C_\gamma^\delta[0,1]$, $0<\delta\le 1$, $0<\gamma<1$, будем обозначать весовое пространство: $g(x)\in C_\gamma^\delta[0,1]$, если $f(x)=x^\gamma g(x)\in C^\delta[0,1]$, с нормой $\|g\|_{\delta,\gamma}=\|f\|_\delta$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda\ne 0$, $1/2<\gamma<1$, $0<\delta\le 2\gamma-1$ (в частности, $\delta<\gamma$). Кроме того, будем предполагать соблюдение неравенства

$$|\lambda|l^{-\gamma}\max\{|\operatorname{ctg}(\pi\gamma)|,1\}<1; \tag{2}$$

в частности,

$$|\lambda|l^{-\gamma}<1. \tag{3}$$

В дальнейшем через C будем обозначать постоянную, не обязательно одну и ту же в различных выражениях.

Теорема 1. Оператор WS, действующий в пространстве $C_\gamma^\delta[0,1]$, ограничен.

Доказательство. Пусть $g(x)\in C_\gamma^\delta[0,1]$, $f(x)=x^\gamma g(x)$, тогда обозначим

$$M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,\ N=\sup_{\substack{x',x''\in[0,1],\\ x'\neq x''}}\frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\delta}.$$

Рассмотрим вначале оператор S:

$$u(x)\equiv x^\gamma Sg(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)dt}{t-x}.$$

$$u(x)=\frac{f(x)}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x)}{t-x}dt=$$

$$=\operatorname{ctg}(\pi\gamma)f(x)-\frac{x^\gamma f(x)}{\pi}\int_0^1\frac{t^{\gamma-1}dt}{1-xt}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x)}{t-x}dt.$$

Сначала оценим саму функцию:

$$|u(x)|\le\operatorname{ctg}(\pi\gamma)M+\frac{M}{\pi\gamma(1-q(1))}+\frac{N}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma|t-x|^{\delta-1}dt\le\operatorname{ctg}(\pi\gamma)M+\frac{M}{\pi\gamma(1-q(1))}+\frac{N}{\pi}C,$$

так как

$$\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^\gamma|t-x|^{\delta-1}dt=x^\delta\int_0^{1/x}s^{-\gamma}|s-1|^{\delta-1}ds\le\int_0^{+\infty}s^{-\gamma}|s-1|^{\delta-1}ds=\int_0^1\frac{s^{-\gamma}+s^{\gamma-\delta-1}}{(1-s)^{1-\delta}}ds=C.$$

Теперь оценим разность, предполагая, что $x'<x''$:

$$\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)dt}{t-x'}-\int_0^1\left(\frac{x''}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)dt}{t-x''}=f(x')\left(\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{dt}{t-x'}-\int_0^1\left(\frac{x''}{t}\right)^\gamma\frac{dt}{t-x''}\right)+$$

$$+\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x')}{t-x'}dt-\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x')}{t-x''}dt-\int_0^1\frac{(x'')^\gamma-(x')^\gamma}{t^\gamma}\frac{f(t)-f(x')}{t-x''}dt.$$

Представим это выражение в виде суммы шести слагаемых и оценим их по отдельности:

$$\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)dt}{t-x'}-\int_0^1\left(\frac{x''}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)dt}{t-x''}=$$

$$=f(x')\left(\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{dt}{t-x'}-\int_0^1\left(\frac{x''}{t}\right)^\gamma\frac{dt}{t-x''}\right)-\int_0^1\frac{(x'')^\gamma-(x')^\gamma}{t^\gamma}\frac{f(t)-f(x')}{t-x''}dt+$$

$$+\int_0^{x'+\varepsilon}\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x')}{t-x'}\frac{x'-x''}{t-x''}dt+\int_{x'+\varepsilon}^{x''-\varepsilon}\left(\frac{x'}{t}\right)^\gamma\frac{f(t)-f(x')}{t-x'}\frac{x'-x''}{t-x''}dt+$$

$$+\int_{x''-\varepsilon}^{1}\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}\frac{f(t)-f(x'')}{t-x''}\frac{x'-x''}{t-x'}dt+\left(f(x'')-f(x')\right)\int_{x''-\varepsilon}^{1}\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}\frac{x'-x''}{t-x''}\frac{dt}{t-x'}.$$

Первое слагаемое оценивается так:

$$\int_0^1\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{t-x'}-\int_0^1\left(\frac{x''}{t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{t-x''}=\int_{1/x''}^{1/x'}\frac{s^{-\gamma}ds}{s-1}=\int_{x'}^{x''}\frac{s^{\gamma-1}ds}{1-s}\le\frac{(x'')^{\gamma}-(x')^{\gamma}}{\gamma(1-q(1))}\le C(x''-x')^{\gamma}.$$

Оценка второго слагаемого очевидно вытекает из ограниченности, доказанной выше.

Оценим третье слагаемое:

$$\left|\int_0^{x'+\varepsilon}\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}\frac{f(t)-f(x')}{t-x'}\frac{x''-x'}{x''-t}dt\right|\le N\int_0^{x'+\varepsilon}\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}|t-x'|^{\delta-1}\frac{x''-x'}{x''-t}dt=N\int_{-x'}^{\varepsilon}\left(\frac{x'}{\tau+x'}\right)^{\gamma}|\tau|^{\delta-1}\frac{(x''-x')d\tau}{x''-x'-\tau}.$$

Если $2x'<x''-x'$, то положим $\varepsilon=x'$:

$$N\int_{-x'}^{\varepsilon}\left(\frac{x'}{\tau+x'}\right)^{\gamma}|\tau|^{\delta-1}\frac{x''-x'}{x''-x'-\tau}d\tau=N|x'|^{\delta}\int_{-1}^{1}\frac{|s|^{\delta-1}ds}{(1+s)^{\gamma}}\frac{x''-x'}{x''-x'-x's}\le 2N|x'|^{\delta}\int_{-1}^{1}\frac{|s|^{\delta-1}ds}{(1+s)^{\gamma}}\le C|x''-x'|^{\delta}.$$

Если же $2x'\ge x''-x'$, то положим $\varepsilon=(x''-x')/2$:

$$N\int_{-x'}^{\varepsilon}\left(\frac{x'}{\tau+x'}\right)^{\gamma}|\tau|^{\delta-1}\frac{x''-x'}{x''-x'-\tau}d\tau=N(x''-x')^{\delta}\int_{-x'/(x''-x')}^{1/2}\left(1+\frac{x''-x'}{x'}s\right)^{-\gamma}|s|^{\delta-1}\frac{ds}{1-s}\le C|x''-x'|^{\delta}$$

в силу следующего утверждения:

Утверждение. Пусть $0<\gamma<1$, $f(x)\in L(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$, тогда интеграл

$$\int_0^y(1-t/y)^{-\gamma}f(t)dt$$

равномерно ограничен при $y>0$.

Доказательство. Пусть $|tf(t)|\le\varepsilon$ при $t\ge y/2$, тогда

$$\int_0^y(1-t/y)^{-\gamma}f(t)dt=\int_0^{y/2}+\int_{y/2}^{y},$$

$$\left|\int_0^{y/2}(1-t/y)^{-\gamma}f(t)dt\right|\le 2^{\gamma}\int_0^{y/2}|f(t)|dt\le 2^{\gamma}\int_0^{+\infty}|f(t)|dt,$$

$$\left|\int_{y/2}^{y}(1-t/y)^{-\gamma}f(t)dt\right|\le\varepsilon\int_{y/2}^{y}(1-t/y)^{-\gamma}dt/t=\varepsilon\int_{1/2}^{1}(1-s)^{-\gamma}ds/s.$$

Утверждение доказано.

Четвертое слагаемое присутствует только в случае $2x'<x''-x'$, когда $\varepsilon=x'$. Оценим его:

$$\left|\int_{x'+\varepsilon}^{x''-\varepsilon}\left(\frac{x'}{t}\right)^{\gamma}\frac{f(t)-f(x')}{t-x'}\frac{x'-x''}{t-x''}dt\right|\le N\int_{2x'}^{x''-x'}\left(\frac{t}{x'}\right)^{-\gamma}(t-x')^{\delta-1}\frac{x''-x'}{x''-t}dt=$$

$$=N\int_{x'}^{x''-2x'}\left(\frac{x'+\tau}{x'}\right)^{-\gamma}\tau^{\delta-1}\frac{(x''-x')d\tau}{x''-x'-\tau}=N(x''-x')^{\delta}\int_{x'/(x''-x')}^{1-x'/(x''-x')}\left(1+\frac{x''-x'}{x'}s\right)^{-\gamma}\frac{s^{\delta-1}ds}{1-s}=$$

$$=N(x''-x')^{\delta}I\left(\frac{x'}{x''-x'}\right)\le C(x''-x')^{\delta},$$

поскольку при $0<y<1/2$ справедлива оценка:

$$I(y)=\int_{y}^{1-y}\left(1+\frac{s}{y}\right)^{-\gamma}\frac{s^{\delta-1}ds}{1-s}=\int_{y}^{1/2}\left(\frac{y}{s+y}\right)^{\gamma}\frac{s^{\delta-1}ds}{1-s}+\int_{1/2}^{1-y}\left(\frac{y}{s+y}\right)^{\gamma}\frac{s^{\delta-1}ds}{1-s}\le$$

$$\le 2y^{\gamma}\int_{y}^{1/2}\frac{s^{\delta-1}ds}{(s+y)^{\gamma}}+2^{1-\delta+\gamma}y^{\gamma}\int_{1/2}^{1-y}\frac{ds}{1-s}=2y^{\delta}\int_{1}^{1/(2y)}\frac{u^{\delta-1}du}{(1+u)^{\gamma}}+y^{\gamma}\ln\frac{1}{2y}<+\infty.$$

Пятое слагаемое оценивается аналогично третьему. Оценка шестого слагаемого тривиальна.

Ограниченность оператора сдвига очевидна. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве $C_{\gamma}^{\delta}[0,1]$.

Доказательство. Обозначим $\varpi=-\ln l$, $x^{\gamma}f(x)=\bar{f}(x)$, $x^{\gamma}h(x)=\bar{h}(x)$.

Прежде всего, покажем, что, не ограничивая общности, можно считать $\bar{h}(0)=0$ и искать решение в подклассе функций таких, что $\bar{f}(0)=0$. В самом деле, пусть $\bar{h}(x)=1+\tilde{h}(x)$, $\tilde{h}(0)=0$, тогда будем искать решение в виде $\bar{f}(x)=f_0+\tilde{f}(x)$. Подставляя в уравнение, получим:

$$f_0+\tilde{f}(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma}\frac{f_0+\tilde{f}(t)}{t-lx}dt=1+\tilde{h}(x),\ 0<x<1.$$

Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{t-lx}=l^{-\gamma}\operatorname{ctg}(\pi\gamma)-\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{t-lx}=l^{-\gamma}\operatorname{ctg}(\pi\gamma)-\frac{x^{\gamma}}{\pi}\int_0^1\frac{s^{\gamma-1}ds}{1-lxs}$$

и

$$\frac{x^{\gamma}}{\pi}\int_0^1\frac{s^{\gamma-1}ds}{1-lxs}\in C^{\delta}[0,1],$$

то, полагая $f_0=1/\left(1-\lambda l^{-\gamma}\operatorname{ctg}(\pi\gamma)\right)$ и записывая уравнение в виде

$$\tilde{f}(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma}\frac{\tilde{f}(t)}{t-lx}dt=\tilde{h}(x)-\frac{\lambda f_0x^{\gamma}}{\pi}\int_0^1\frac{s^{\gamma-1}ds}{1-lxs},\ 0<x<1,$$

получаем требуемое.

Покажем, что основное уравнение может быть решено в квадратурах, аналогично обычному уравнению типа свертки.

Стандартным образом перейдем к уравнению Винера-Хопфа [29, с. 55]. Доопределив функции $\bar{f}(x)$ и $\bar{h}(x)$ нулем при $x>1$, продолжим уравнение на положительную полуось:

$$\bar{f}(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma}\frac{\bar{f}(t)dt}{t-lx}=\bar{g}(x)+\bar{h}(x),\ x>0,$$

где $\bar{g}(x)\equiv 0$ при $0<x<1$.

Сделаем теперь замену $x=e^{-y}$, $t=e^{-s}$:

$$\bar{f}\left(e^{-y}\right)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(y-s)\bar{f}\left(e^{-s}\right)ds=\bar{g}\left(e^{-y}\right)+\bar{h}\left(e^{-y}\right),\ y\in \mathrm{R},$$

где $K(y)=e^{\varpi/2+(1/2-\gamma)y}/\left(2\,\mathrm{sh}\left((\varpi+y)/2\right)\right)$.

Обозначив

$$F^{+}(p)=\int_0^{+\infty}e^{ipy}\bar{f}\left(e^{-y}\right)dy,\ F^{-}(p)=\int_{-\infty}^{0}e^{ipy}\bar{g}\left(e^{-y}\right)dy,\ H^{+}(p)=\int_0^{+\infty}e^{ipy}\bar{h}\left(e^{-y}\right)dy$$

и перейдя к образам Фурье, получим задачу сопряжения Римана

$$D(p)F^{+}(p)=F^{-}(p)+H^{+}(p),\ D(p)=1-i\lambda l^{ip-\gamma}\,\mathrm{cth}\left(\pi(p+i\gamma)\right),\ p\in \mathrm{R}.$$

Коэффициент $D(p)$ на вещественной оси ограничен в силу условия (2), но не имеет предела на бесконечности; несмотря на это, общая схема решения задач сопряжения остается применимой.

Лемма 1. Интеграл

$$\int_R\frac{\ln D(t)dt}{t-z}$$

существует и ограничен на комплексной плоскости (интеграл, как обычно, понимаем в смысле главного значения).

Доказательство. Так как при $p\to\infty$

$$D(p)=1-i\lambda l^{ip-\gamma}\,\mathrm{sgn}\ p+O\left(e^{-\pi|p|}\right),$$

то в силу неравенства (3) достаточно доказать утверждение леммы для интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(1+ae^{it}\chi(t)\right)\frac{dt}{t-z},\ |a|<1,$$

где $\chi(t)\in C^1(\mathrm{R}),\ \chi(t)=\mathrm{sgn}\,t$ при $|t|\ge 2\pi$. В свою очередь, для этого, в силу равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1+ae^{it}\right)\frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 2\pi i \ln\left(1+ae^{iz}\right), \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}, \ |a|<1,$$

достаточно доказать существование и ограниченность при $\operatorname{Re} z \ge 0$ интеграла

$$\int\limits_{2\pi}^{+\infty} \ln\left(1+ae^{it}\right)\frac{dt}{t+z}.$$

Прежде всего, отметим, что для любого действительного b

$$\int\limits_{b}^{b+2\pi} \ln\left(1+ae^{it}\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-a)^k}{k}\int\limits_{b}^{b+2\pi} e^{ikt}dt = 0.$$

Далее,

$$\int\limits_{2\pi}^{+\infty} \ln\left(1+ae^{it}\right)\frac{dt}{t+z} = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \ln\left(1+ae^{it}\right)\left(\frac{1}{t+z}-\frac{1}{2\pi k+z}\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \ln\left(1+ae^{is}\right)ds\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-s}{(s+2\pi k+z)(2\pi k+z)},$$

$$\left|\int\limits_{2\pi}^{+\infty} \ln\left(1+ae^{it}\right)\frac{dt}{t-z}\right| \le \int\limits_{0}^{2\pi}\left|\ln\left(1+ae^{is}\right)\right|ds\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi}{(2\pi k+\operatorname{Re} z)^2} \le \frac{C}{2\pi+\operatorname{Re} z}.$$

Лемма 1 доказана.

Для изучения особенностей функции $D(z)$ обозначим $Z = \pi(iz-\gamma) = X+iY$, $a = l^{-1/\pi} > 1$, тогда $D(z) = Q(Z) \equiv 1+\lambda a^{-Z}\operatorname{ctg} Z$.

Следующая лемма доказывается стандартным образом (доказательство опускаем).

Лемма 2. Функция $Q(Z)$ – мероморфная, все ее нули, за исключением, быть может, конечного числа, простые и имеют следующую асимптотику:

$$Z_n^{(1)} = \pi n - \lambda a^{-\pi n} + \ldots, \ n \to +\infty;$$

$$Z_n^{(2)} = -\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\lambda}a^{-\pi n+\pi/2} + \ldots, \ n \to +\infty;$$

$$Z_n^{(3)} = \left(2\pi i n + \ln(i\lambda) + 2e^{(-4\pi n+2i\ln(i\lambda))/\ln a} + \ldots\right)/\ln a, \ n \to +\infty;$$

$$Z_n^{(4)} = \left(-2\pi i n + \ln(-i\lambda) + 2e^{(-4\pi n-2i\ln(-i\lambda))/\ln a} + \ldots\right)/\ln a, \ n \to +\infty.$$

Функция $Q(Z)$ не имеет нулей в полосе $-\pi\gamma \le X \le \pi(\gamma-1)$.

Количество нулей и полюсов функции $Q(Z)$ в каждой полосе $L \le X \le \pi n + \pi/2$, где $L = \ln|\lambda|/\ln a < -\pi\gamma$, одинаково для всех натуральных n, начиная с некоторого.

Обозначим через a_n, $n = 1, 2, \ldots$, нули, а через $b_n = -i(n-\gamma)$, $n = 1, 2, \ldots$, – полюсы функции $D(z)$, расположенные в нижней полуплоскости. Тогда в силу леммы 2 все они

простые, других нулей и полюсов у $D(z)$ в нижней полуплоскости нет и бесконечное произведение

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-z/b_n}{1-z/a_n}$$

существует в силу оценки $|a_n-b_n|\le Ca^{-\pi n}$; кроме того, $P(z)\to 1$ при $z\to\infty$ вне некоторой полуполосы, содержащей мнимую отрицательную полуось.

Таким образом, функция

$$\ln X(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{\ln D(t)dt}{t-z}$$

доставляет решение задачи факторизации, т.е. представления коэффициента задачи сопряжения в виде $D(p)=X^-(p)/X^+(p)$, где $X^+(z)$ и $X^-(z)$ – пара функций, первая из которых определена в верхней, а вторая – в нижней полуплоскости, аналитических, ограниченных и не обращающихся в нуль. Кроме того, $X^+(z)=P(z)$.

Отсюда следует, что однородная задача сопряжения $D(p)F^+(p)=F^-(p)$ (а стало быть, и уравнение (1)) не имеет нетривиальных решений. В самом деле, записав последнее соотношение в виде $F^+(p)/X^+(p)=F^-(p)/X^-(p)$ и определив $\Phi(z)=F^+(z)/X^+(z)$ при $\operatorname{Im} z>0$ и $\Phi(z)=F^-(z)/X^-(z)$ при $\operatorname{Im} z<0$, получим, что $\Phi(z)$ – целая функция, исчезающая на бесконечности, поэтому по теореме Лиувилля $\Phi(z)\equiv 0$.

Стандартным образом построим решение задачи сопряжения. Обозначим через w_k, $k=1,2,\ldots$, нули функции $D(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Решая задачу о скачке $F^+/X^+=F^-/X^-+H^+/X^-$, получаем

$$F(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_R\frac{H^+(t)dt}{X^-(t)(t-z)},$$

$$F^+(p)=\frac{H^+(p)}{D(p)}+\frac{X^+(p)}{2\pi i}\int_{R+i0}\frac{H^+(t)dt}{X^-(t)(t-p)}=\frac{H^+(p)}{D(p)}+\frac{P(p)}{2\pi i}\int_{R+i0}\frac{H^+(t)dt}{D(t)P(t)(t-p)},$$

$$F^+(p)=\frac{H^+(p)}{D(p)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P(p)H^+(w_k)}{P(w_k)(p-w_k)}\operatorname*{Res}_{z=w_k}\frac{1}{D(z)}.$$

Для выделения главной части представим коэффициент в виде $1/D=G_0+G_r$, где

$$G_0(p)=\frac{1+i\lambda l^{ip-\gamma}\operatorname{cth}(\pi(p+i\gamma))}{1+\lambda^2 l^{2ip-2\gamma}}=(1+i\lambda l^{ip-\gamma}\operatorname{cth}(\pi(p+i\gamma)))\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda^2)^k l^{2ikp-2k\gamma},$$

$$G_r(p)=-\frac{\lambda^2 l^{2ip-2\gamma}\operatorname{sh}^{-2}(\pi(p+i\gamma))}{(1+\lambda^2 l^{2ip-2\gamma})(1-i\lambda l^{ip-\gamma}\operatorname{cth}(\pi(p+i\gamma)))}.$$

В силу леммы 2 функция G_r соответствует регулярному слагаемому.

Представляя теперь решение задачи сопряжения в виде

$$F^+(p)=G_0(p)H^+(p)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^+(\tilde{w}_k)}{p-\tilde{w}_k}\operatorname*{Res}_{z=\tilde{w}_k}G(z)+F_r^+(p),$$

где $\tilde{w}_k$, $k=1,2,\ldots$, – полюсы функции $G_0(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, и возвращаясь к исходным функциям, получаем

$$f(x)=u(x)+\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\frac{u(t)dt}{t-lx}+\int_0^1 R(x,t)f(t)dt,\ u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(i\lambda)^{2n}h(l^{2n}x),\ 0<x<1,$$

где $R(x,t)$ – регулярное ядро.

В силу условия (3) ряд сходится и $u(x)\in C_\gamma^\delta[0,1]$. По теореме 1 $f(x)\in C_\gamma^\delta[0,1]$.

Теорема 2 доказана.

Покажем, что в более широком классе функций уравнение (1) может иметь нетривиальные решения, а в более узком – может стать условно разрешимым. Из предыдущих рассуждений вытекает, что это связано с расположением корней функции $W(z)=1-\lambda l^{-z}\operatorname{ctg}(\pi z)$. Корни этой функции, расположенные в полосе $\gamma<\operatorname{Re}z<1$, дают нетривиальные решения в классе интегрируемых функций, не принадлежащие классу $C_\gamma^\delta[0,1]$, а корни, расположенные в полосе $0\le\operatorname{Re}z\le 1/2$, порождают условия ортогональности, при соблюдении которых решение принадлежит более узкому классу $C^\delta[0,1]$.

Как и прежде, предполагаем условие (2) (и, в частности, условие (3)) выполненным.

Теорема 3. Если $|\lambda|>l$, то в полосе $\gamma<\operatorname{Re}z<1$ лежит бесконечно много корней функции $W(z)$.

Утверждение теоремы вытекает из того, что $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\to\pm\infty}\operatorname{ctg}(\pi z)=\mp i$.

Пусть $[x]_+=\max\{m\,|\,m\le x, m\in\mathrm{Z}\}$, $[x]_-=\max\{m\,|\,m<x, m\in\mathrm{Z}\}$, $\chi(x)=1$ при $x>0$ и $\chi(x)=0$ при $x\le 0$, $\lambda=|\lambda|e^{i\psi}$.

Теорема 4. Если $|\lambda|<l$, то в полосе $\gamma<\operatorname{Re}z<1$ лежит конечное число корней функции $W(z)$, равное

$$\left[-\frac{\ln l}{4\pi^2}\ln\frac{l+|\lambda|}{l-|\lambda|}-\frac{1}{4}-\frac{\psi}{2\pi}\right]_--\left[-\frac{1}{4}-\frac{\psi}{2\pi}\right]_+ +$$

$$+\left[-\frac{\ln l}{4\pi^2}\ln\frac{l+|\lambda|}{l-|\lambda|}-\frac{1}{4}+\frac{\psi}{2\pi}\right]_--\left[-\frac{1}{4}+\frac{\psi}{2\pi}\right]_++\chi(-\cos\psi).$$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник с вершинами $\gamma \pm iA$, $1 \pm iA$, где $A >> 0$. Удалим из него полукруг $|z-1| \le \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \le 1$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Обозначим $y_* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{l+|\lambda|}{l-|\lambda|}$, тогда $\operatorname{cth}(\pi y_*) = l/|\lambda|$. Если $W(1+iy_*) = 0$, то из прямоугольника удалим также полукруг $|z-1-iy_*| \le \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \le 1$; если $W(1-iy_*) = 0$, то – полукруг $|z-1+iy_*| \le \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \le 1$. Полученную область обозначим через Ω.

Заметим, что $W(1+iy) = 1 - |\lambda| l^{-1} \operatorname{cth}(\pi y) e^{i(\psi - \pi/2 - y \ln l)}$. Приращение аргумента функции $W(z)$ при обходе $\partial\Omega$ в положительном направлении будет равно умноженному на 2π количеству κ точек пересечения графика функции $w(z) = \lambda l^{-z} \operatorname{ctg}(\pi z)$, $z \in \partial\Omega$, с лучом $\operatorname{Re} w > 1$, $\operatorname{Im} w = 0$. Следовательно, $\kappa = \kappa_- + \kappa_+ + \upsilon$, где κ_- – количество точек вида $(\pi/2 + \psi + 2\pi n)/\ln l$, $n \in \mathrm{Z}$, принадлежащих интервалу $(-y_*, 0)$, κ_+ – количество точек вида $(-\pi/2 + \psi + 2\pi n)/\ln l$, $n \in \mathrm{Z}$, принадлежащих интервалу $(0, y_*)$, а υ равно единице, если $\operatorname{Im} e^{i(\psi - \pi/2)} > 0$, и нулю в противном случае.

Количество целых точек, принадлежащих интервалу (a, b), равно $[b]_- - [a]_+$, поэтому

$$\kappa = \left[\frac{-y_* \ln l - \pi/2 - \psi}{2\pi}\right]_- - \left[\frac{-\pi/2 - \psi}{2\pi}\right]_+ + \left[\frac{-y_* \ln l - \pi/2 + \psi}{2\pi}\right]_- - \left[\frac{-\pi/2 + \psi}{2\pi}\right]_+ + \upsilon,$$

что и доказывает теорему 4.

Теорема 5. В полосе $0 \le \operatorname{Re} z \le 1/2$ лежит не более одного корня функции $W(z)$.

Утверждение теоремы вытекает из того, что в полосе $-1/2 \le \operatorname{Re} z \le 1/2$ лежит ровно один корень функции $W(z)$.

§ 3. РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе приведено решение в квадратурах одного нестандартного сингулярного интегрального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$f(x) - \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a(x+t)}}{x+t} f(t)dt = g(x), \; x > 0. \qquad (1)$$

Здесь a и λ – комплексные постоянные, $\operatorname{Re} a > 0$. Это уравнение не принадлежит классу уравнений типа свертки, рассмотренных в [29]; несмотря на это, методы, рассмотренные в [29], позволяют решить (1) в явном виде.

Будем предполагать, что правая часть уравнения (1) принадлежит следующему классу функций:

$1^0.\ g(x) \in L(0,+\infty)$;

$2^0.\ |g(x)| \le Ce^{-x\operatorname{Re} a}$ при $x \to +\infty$, C – некоторая постоянная;

$3^0.\ u(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\xi x} g(x)dx \in L_q(1,+\infty),\ q > 1$.

Решение уравнения (1) будем искать в том же классе.

Продолжим обе части уравнения (1) на всю вещественную ось, введя следующие обозначения:

$$K(x) = \frac{e^{-a|x|}}{x},\ f^+(x) = \begin{cases} f(x),\ x > 0, \\ 0,\ x < 0; \end{cases} \quad g^+(x) = \begin{cases} g(x),\ x > 0, \\ 0,\ x < 0, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0,\ x > 0, \\ -\lambda \int\limits_0^{+\infty} K(x+t) f(t)dt,\ x < 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в виде

$$f^+(x) - \lambda \int\limits_{\mathrm{R}} K(x+t) f^+(t)dt = f^-(x) + g^+(x),\ x \in \mathrm{R}.$$

Переходя к образам Фурье

$$\hat{f}(p) = \int\limits_{\mathrm{R}} e^{ipx} f(x)dx,$$

получим следующую задачу сопряжения относительно пары функций $F^+(p), F^-(p)$, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскости и обращающихся в нуль на бесконечности:

$$F^+(p) - \lambda \hat{K}(p) F^+(-p) = F^-(p) + G^+(p), \tag{2}$$

$$\hat{K}(p) = \ln \frac{ia - p}{ia + p},\ F^{\pm}(p) = \overset{\wedge}{f^{\pm}}(x),\ G^+(p) = \overset{\wedge}{g^+}(x).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F^+(z) - G^+(z),\ \operatorname{Im} z \ge 0, \\ \lambda \ln \dfrac{ia - p}{ia + p} F^+(-p) + F^-(p),\ \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

В силу равенства (2) функция $\Phi(z)$ – аналитическая в комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точки $-ia$ и ∞ и лежащим в нижней полуплоскости, и обращается в нуль на бесконечности. Выберем в качестве такого разреза луч $L = \{z : z = -iay, 1 < y < +\infty\}$. Обозначая через $\Phi^+(t)$ $(\Phi^-(t))$ предельное значение $\Phi(z)$ при стремлении z к L справа

(слева), получаем соотношение между $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на разрезе L: $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=2\pi i\lambda F^+(-t),\ t\in L$. Следовательно,

$$\Phi(z)=\lambda\int_L\frac{F^+(-t)dt}{t-z}.$$

Положив $z=iau$, $1<u<+\infty$, получим следующее уравнение относительно $F^+(z)$, согласно определению $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости:

$$F^+(iau)-\lambda\int_1^{+\infty}\frac{F^+(iay)}{y+u}dy=G^+(iau),\ u>1. \tag{3}$$

Поскольку правая часть уравнения (3) согласно условию 3^0 принадлежит классу $L_q(1,+\infty)$, мы должны искать решение (3) в том же классе. С учетом этого сделаем замену $y=e^\xi$, $u=e^\eta$, $\sigma(\xi)=e^{\xi/q}F^+\left(iae^\xi\right)$, $\mu(\xi)=e^{\xi/q}G^+\left(iae^\xi\right)$. Получим:

$$\sigma(\eta)-\lambda\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha(\eta-\xi)}\sigma(\xi)d\xi}{2\operatorname{ch}\left((\eta-\xi)/2\right)}=\mu(\eta),\ \eta>0. \tag{4}$$

Здесь $\alpha=0{,}5-q^{-1}$, $\mu(\eta)\in L_q(0,+\infty)$. Очевидно, $-0{,}5<\alpha<0{,}5$.

Заметим, что к уравнению (4) после аналогичной замены сводится уравнение Диксона ([173, с. 432]):

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\frac{\varphi(t)}{x+t}dt=\psi(x),\ x>0.$$

Решим уравнение (4) в квадратурах, воспользовавшись стандартным методом факторизации. Обозначим:

$$P(\eta)=\frac{e^{-\alpha\eta}}{2\operatorname{ch}(\eta/2)},\ \sigma^+(\eta)=\begin{cases}\sigma(\eta),\ \eta>0,\\ 0,\ \eta<0,\end{cases}$$

$$\mu^+(\eta)=\begin{cases}\mu(\eta),\ \eta>0,\\ 0,\ \eta<0,\end{cases}\quad \sigma^-(\eta)=\begin{cases}0,\ \eta>0,\\ -\lambda\int_0^{+\infty}P(\eta-\xi)\sigma(\xi)d\xi,\ \eta<0.\end{cases}$$

Тогда уравнение (4) может быть записано в виде:

$$\sigma^+(\eta)-\lambda\int_{\mathrm{R}}P(\eta-\xi)\sigma^+(\xi)d\xi=\sigma^-(\eta)+\mu^+(\eta),\ \eta\in\mathrm{R}.$$

Или, после перехода к образам Фурье

$$\Sigma^\pm(p)=\hat{\sigma^\pm}(\eta),\ \mathrm{M}^+(p)=\hat{\mu^+}(\eta),\ p\in\mathrm{R}:$$

$$\Sigma^+(p)=D(p)\Sigma^-(p)+H(p), \tag{5}$$

$$D(p)=\frac{1}{1-\lambda\hat{P}(p)}=\frac{\operatorname{ch}\pi(p+i\alpha)}{\operatorname{ch}\pi(p+i\alpha)-\pi\lambda},\ H(p)=D(p)\mathrm{M}^{+}(p).$$

Обозначим $\pi\lambda=\cos\pi\gamma$, $0\le\operatorname{Re}\gamma\le 1$, и представим функцию $D(p)$ в виде $D(p)=D_{+}(p)/D_{-}(p)$, где

$$D_{+}(z)=\frac{\Gamma\left((\gamma+\alpha-iz)/2\right)\Gamma\left((2-\gamma+\alpha-iz)/2\right)}{\Gamma\left((0{,}5+\alpha-iz)/2\right)\Gamma\left((1{,}5+\alpha-iz)/2\right)},$$

$$D_{-}(z)=\frac{\Gamma\left((0{,}5-\alpha+iz)/2\right)\Gamma\left((1{,}5-\alpha+iz)/2\right)}{\Gamma\left((\gamma-\alpha+iz)/2\right)\Gamma\left((2-\gamma-\alpha+iz)/2\right)},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Ниже будем придерживаться обозначений [29]. В частности, $X^{+}(z)$ всегда будет обозначать каноническую функцию задачи сопряжения, т.е. $X^{+}(z)\in A(\operatorname{Im}z\ge 0)$, $X^{+}(z)\ne 0$, $X^{+}(\infty)=1$; аналогично $X^{-}(z)$.

Из уравнения (5) вытекает, что индекс и условия разрешимости задачи определяются соотношением между значениями $\operatorname{Re}\gamma$ и α. Рассмотрим все возможные случаи (заметим, что $D(p)\ne 0$).

1. Неисключительные случаи: $D(p)$ не обращается в бесконечность ни в одной точке вещественной прямой. Это соответствует случаю $\operatorname{Re}\gamma\ne|\alpha|$.

1.1. $\operatorname{Re}\gamma>|\alpha|$. В этом случае $\operatorname{ind}D(p)=0$ и задача однозначно разрешима:

$$D(p)=\frac{X^{+}(p)}{X^{-}(p)},\ X^{+}(z)=D_{+}(z),\ X^{-}(z)=D_{-}(z),\ \frac{\Sigma^{+}(p)}{X^{+}(p)}-\frac{\Sigma^{-}(p)}{X^{-}(p)}=\frac{\mathrm{M}^{+}(p)}{X^{-}(p)},$$

$$\Sigma^{+}(z)=\frac{X^{+}(z)}{2\pi i}\int_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{M}^{+}(t)dt}{X^{-}(t)(t-z)}.$$

Вернемся к исходным функциям. Обозначим $Y^{+}(z)=\Sigma^{+}(z)/X^{+}(z)$, $Y^{-}(z)=\Sigma^{-}(z)/X^{-}(z)$, тогда [29] $Y^{+}(p)-Y^{-}(p)=\mathrm{M}^{+}(p)/X^{-}(p)=\hat{v}(p)$,

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}}e^{-itp}\frac{\mathrm{M}^{+}(p)}{X^{-}(p)}dp,\ Y^{+}(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{ipt}v(t)dt,$$

$$\sigma^{+}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}}e^{-i\eta p}\Sigma^{+}(p)dp=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}}e^{-i\eta p}X^{+}(p)Y^{+}(p)dp.$$

Преобразуем эти формулы:

$$v(t)=\mu^{+}(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}}e^{-itp}\left(\frac{1}{X^{-}(p)}-1\right)\mathrm{M}^{+}(p)dp=\mu^{+}(t)+\int_{0}^{+\infty}L_{1}(t,s)\mu^{+}(s)ds,$$

$$L_1(t,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{i(s-t)p}\left(\frac{1}{X^-(p)}-1\right)dp=\begin{cases}0,\ s<t,\\ L(s-t),\ s>t,\end{cases}\quad L(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{ixp}\left(\frac{1}{X^-(p)}-1\right)dp.$$

Аналогично,

$$\sigma^+(\eta)=\nu(\eta)+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{-i\eta p}\left(X^+(p)-1\right)Y^+(p)dp=\nu(\eta)+\int_0^{+\infty}L_2(t,s)\nu(s)ds,$$

$$L_2(\eta,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{i(s-\eta)p}\left(X^+(p)-1\right)dp=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} e^{i(s-\eta)p}\left(\frac{1}{X^-(-p)}-1\right)dp=\begin{cases}L(\eta-s),\ s<\eta,\\ 0,\ s>\eta.\end{cases}$$

Опираясь на определение $X^-(z)$, вычислим функцию $L(x)$ по теореме о вычетах:

$$L(x)=i\sum_{m=0}^{\infty}A_m e^{iz_m x},$$

где $\{z_m\}_{m=0}^{\infty}$ – нули функции $X^-(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, $A_m=\operatorname*{Res}_{z=z_m}\left(1/X^-(z)\right)$. Очевидно,

$$\{z_m\}_{m=0}^{\infty}=\{iy_m\}_{m=0}^{\infty}=\{iy'_m\}_{m=0}^{\infty}\bigcup\{iy''_m\}_{m=0}^{\infty},\ y'_m=\gamma+\alpha+2m,\ y''_m=2-\gamma+\alpha+2m.$$

Находя вычеты функции $1/X^-(z)$ в этих точках, получаем:

$$E_m(\gamma)=\frac{\Gamma(0{,}25+0{,}5\gamma+m)\Gamma(0{,}75+0{,}5\gamma+m)}{m!\,\Gamma(\gamma+m)},$$

$$A'_m=\operatorname*{Res}_{z=iy'_m}\left(1/X^-(z)\right)=(i\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\pi\gamma\,E_m(\gamma),\ A''_m=\operatorname*{Res}_{z=iy''_m}\left(1/X^-(z)\right)=-(i\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\pi\gamma\,E_m(2-\gamma),$$

$$L(x)=i\sum_{m=0}^{\infty}A_m\left(e^{-x}\right)^{y_m}=R(e^{-x}),\ R(x)=\pi^{-1}\operatorname{ctg}\pi\gamma\left[R_0(\gamma,x)-R_0(2-\gamma,x)\right],$$

$$R_0(\gamma,x)=\sum_{m=0}^{\infty}E_m(\gamma)x^{\gamma+\alpha+2m}=\frac{\Gamma(0{,}25+0{,}5\gamma)\Gamma(0{,}75+0{,}5\gamma)}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma+\alpha}F(0{,}25+0{,}5\gamma,0{,}75+0{,}5\gamma,\gamma;x^2),$$

$F(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция Эйлера ([6]).

Замечание. При $\gamma=1$ $R(x)=2\pi^{-2}\left(\partial R_0(\gamma,x)/\partial\gamma\right)_{\gamma=1}$.

Возвращаясь к исходным функциям и вводя вспомогательные функции u, v, w, окончательно получаем:

$$u(\xi)=\int_0^{+\infty}e^{-a\xi x}g(x)dx,\ v(\eta)=u(\eta)+\int_{\eta}^{+\infty}(\xi/\eta)^{1/q}R(\eta/\xi)u(\xi)\xi^{-1}d\xi,$$

$$w(y)=v(y)+\int_1^{y}(\eta/y)^{1/q}R(\eta/y)v(\eta)\eta^{-1}d\eta,\ f(x)=g(x)+\lambda\int_1^{+\infty}e^{-ayx}w(y)ady.$$

1.2. $0 \le \operatorname{Re}\gamma < \alpha < 0{,}5$. В этом случае $\operatorname{ind}\, D(p) = 1$ и существует одно (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение однородной задачи, определяемое по следующим формулам:

$$\Sigma_0^+(p) = D(p)\Sigma_0^-(p),\ D(p) = \frac{p - i(0{,}5-\gamma)}{p + i(\alpha-\gamma)}\frac{X^+(p)}{X^-(p)},\ X^+(z) = D_+(z),$$

$$X^-(z) = \frac{\Gamma\left((2{,}5-\alpha+iz)/2\right)\Gamma\left((1{,}5-\alpha+iz)/2\right)}{\Gamma\left((2+\gamma-\alpha+iz)/2\right)\Gamma\left((2-\gamma-\alpha+iz)/2\right)},\ \Sigma_0^+(z) = \frac{CX^+(z)}{z + i(\alpha-\gamma)},$$

C – произвольная постоянная,

$$f_0(x) = C\int_1^{+\infty} e^{-axt}F_0^+(iat)dt.$$

Возможны два случая:

а) $\gamma \ne 0$. Тогда $i(\alpha-\gamma) \notin \{z_m\}_{m=0}^{\infty}$ и

$$\sigma_0^+(\eta) \equiv \sigma_0^+(\alpha,\eta) = \tilde{B}e^{-(\alpha-\gamma)\eta} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m e^{-y_m\eta},\ \tilde{B} = X^+\left(-i(\alpha-\gamma)\right),\ B_m = \frac{A_m}{i(y_m - \alpha + \gamma)},$$

$$f_0(x) = \int_1^{+\infty}\left(\tilde{B}t^{-(\alpha-\gamma)} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m t^{-y_m}\right)t^{-1/q}e^{-axt}adt.$$

б) $\gamma = 0$. Тогда $i(\alpha-\gamma) = i\alpha = z_0$ и

$$\sigma_0^+(\eta) \equiv \sigma_0^+(\alpha,\eta) = \left(\tilde{B}_1\eta + \tilde{B}_0\right)e^{-\alpha\eta} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m e^{-y_m\eta},\ \tilde{B}_1 = iA_0,\ \tilde{B}_0 = 1 - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{i(\alpha+y_m)},$$

$$B_m = \frac{A_m}{i(y_m-\alpha)},\ f_0(x) = \int_1^{+\infty}\left(\left(\tilde{B}_1\ln t + \tilde{B}_0\right)t^{-\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m t^{-y_m}\right)t^{-1/q}e^{-axt}adt.$$

Неоднородная задача всегда разрешима и ее общее решение определяется по следующей формуле:

$$\Sigma^+(z) = \frac{z - i(0{,}5-\gamma)}{z + i(\alpha-\gamma)}\frac{X^+(z)}{2\pi i}\int_R \frac{\mathrm{M}^+(t)dt}{X^-(t)(t-z)} + C\frac{X^+(z)}{z + i(\alpha-\gamma)},$$

C – произвольная постоянная.

1.3. $0 \le \operatorname{Re}\gamma < -\alpha < 0{,}5$. В этом случае $\operatorname{ind}\, D(p) = -1$,

$$D(p) = \frac{p + i(0{,}5+\gamma)}{p + i(\alpha+\gamma)}\frac{X^+(p)}{X^-(p)},\ X^+(z) = \frac{\Gamma\left((2+\gamma+\alpha-iz)/2\right)\Gamma\left((2-\gamma+\alpha-iz)/2\right)}{\Gamma\left((2{,}5+\alpha-iz)/2\right)\Gamma\left((1{,}5+\alpha-iz)/2\right)},$$

$$X^-(z) = D_-(z),$$

однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная задача разрешима при выполнении дополнительного условия

$$\int_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{M}^{+}(t)dt}{(t+i(\gamma+\alpha))X^{-}(t)} = 0,$$

или

$$\int_{0}^{+\infty} Q_0(s)\mu(s)ds = 0,\ Q_0(s) = \sigma_0^{+}(-\alpha, s)$$

(см. п. 1.2), или

$$\int_{0}^{+\infty} S(x)g(x)dx = 0,\ S(x) = \int_{1}^{+\infty} \sigma_0^{+}(-\alpha, \ln t)t^{-1+1/q}e^{-axt}dt.$$

2. Исключительные случаи: у $D(p)$ есть один или два полюса на вещественной прямой. Это соответствует случаю $\operatorname{Re}\gamma = |\alpha|$. Обозначим $\beta = \operatorname{Im}\gamma$.

2.1. $\operatorname{Re}\gamma = -\alpha > 0$ (у функции $D(p)$ один простой вещественный полюс $p = \beta$). В этом случае

$$D(p) = \frac{(p+i(0{,}5+\alpha))X^{+}(p)}{(p-\beta)X^{-}(p)},\ X^{+}(z) = \frac{\Gamma((2+i\beta-iz)/2)\Gamma((2-\gamma+\alpha-iz)/2)}{\Gamma((2{,}5+\alpha-iz)/2)\Gamma((1{,}5+\alpha-iz)/2)},$$

$$X^{-}(z) = D_{-}(z),$$

однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная задача разрешима при дополнительном условии

$$\int_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{M}^{+}(t)dt}{(t+i(0{,}5+\alpha))X^{-}(t)} = 0$$

и, если это условие соблюдено, ее решение представимо в виде

$$\Sigma^{+}(z) = \frac{z+i(0{,}5+\alpha)}{2\pi i}X^{+}(z)\int_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{M}^{+}(t)dt}{(t+i(0{,}5+\alpha))X^{-}(t)(t-z)}.$$

2.2. $\operatorname{Re}\gamma = \alpha > 0$ (у функции $D(p)$ один простой вещественный полюс $p = -\beta$). В этом случае

$$D(p) = \frac{(p-i(0{,}5-\alpha))X^{+}(p)}{(p+\beta)X^{-}(p)},\ X^{-}(z) = \frac{\Gamma((2{,}5-\alpha+iz)/2)\Gamma((1{,}5-\alpha+iz)/2)}{\Gamma((2+i\beta+iz)/2)\Gamma((2-\gamma-\alpha+iz)/2)},$$

$$X^{+}(z) = D_{+}(z),$$

однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная задача всегда однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$\Sigma^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}X^{+}(z)\int_{R} \frac{\mathrm{M}^{+}(t)dt}{X^{-}(t)(t-z)}.$$

2.3. $\operatorname{Re}\gamma = \alpha = 0$ (у функции $D(p)$ два простых вещественных полюса $p = \pm\beta$, если $\beta \neq 0$, или один вещественный полюс $p = 0$ кратности два, если $\beta = 0$). В этом случае

$$D(p) = \frac{(p+0{,}5i)(p-0{,}5i)X^+(p)}{(p+\beta)(p-\beta)X^-(p)},\ X^+(z) = \frac{\Gamma\left((2+i\beta-iz)/2\right)\Gamma\left((2-i\beta-iz)/2\right)}{\Gamma\left((2{,}5-iz)/2\right)\Gamma\left((1{,}5-iz)/2\right)},$$

$$X^-(z) = 1/X^+(-z),$$

однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная задача разрешима при дополнительном условии

$$\int_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{M}^+(t)dt}{(t+0{,}5i)X^-(t)} = 0$$

и, если это условие соблюдено, ее решение представимо в виде

$$\Sigma^+(z) = \frac{z+0{,}5i}{z+\beta}\,\frac{X^+(z)}{2\pi i}\int_{\mathrm{R}} \frac{(t+\beta)\mathrm{M}^+(t)dt}{(t+0{,}5i)X^-(t)(t-z)}.$$

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА-ХОПФА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ОБРАЗАМИ ЯДЕР

В этом параграфе рассмотрена система уравнений Винера-Хопфа, зависящая от параметра $\alpha \to 1-0$ и вырождающаяся при $\alpha = 1$. Построено асимптотическое решение этой системы.

Как известно, в отличие от одного уравнения, системы уравнений Винера-Хопфа (или односторонних уравнений, [29, с. 55]) неразрешимы в замкнутой форме. Ниже рассмотрен пример построения асимптотического решения одной такой системы с кусочно-постоянными образами ядер.

Пусть $\alpha \to 1-0$. Рассмотрим на R^+ следующую систему уравнений, вырождающуюся при $\alpha = 1$:

$$f_1(x) + \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}f_1(t)dt - \frac{\alpha}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}f_2(t)dt = g_1(x),$$

$$f_2(x) - \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}f_2(t)dt + \frac{1}{i\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}f_1(t)dt = g_2(x). \qquad (1)$$

Предполагаем, что правые части абсолютно интегрируемы на любом конечном отрезке полупрямой, при $x \to +0$ имеют порядок $O\left(x^{-1/4}\right)$, а при $x \to +\infty$ ведут себя как $e^{iax}x^{-\delta}$, $\delta > 0$, $a \in \mathrm{R}$, или как линейная комбинация таких функций; решение будем искать в том же классе.

Теорема. Индекс задачи в рассматриваемом классе равен единице, т.е. однородная система имеет одно линейно независимое решение, а неоднородная система всегда разрешима и ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной.

Обозначим

$$\mathrm{E}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ I(p)=\begin{cases}1,\ p\in \mathrm{R}\setminus\overline{\mathrm{E}};\\ 0,\ p\in \mathrm{E},\end{cases}\quad J(p)=\begin{cases}0,\ p\in \mathrm{R}\setminus\overline{\mathrm{E}};\\ \operatorname{sgn} p,\ p\in \mathrm{E}.\end{cases}$$

Продолжая стандартным образом (см. [29, с. 55]) искомые функции и правую часть уравнения (1) нулем на R^- и переходя к образам Фурье, получаем следующую систему на вещественной прямой:

$$(1+\alpha I)F_1^+ - \alpha J F_2^+ = F_1^- + G_1^+,\ (1-\alpha^{-1}I)F_2^+ + \alpha^{-1}JF_1^+ = F_2^- + G_2^+. \qquad (2)$$

Здесь и далее подразумеваемые аргументы опущены.

Отсюда $F_1^+ = D_1\left(F_1^- + \alpha J F_2^+ + G_1^+\right)$, где

$$D_1=(1+\alpha I)^{-1}=X_1^+/X_1^-,\ X_1(z)=(z-1)^{\delta_1}(z+1)^{-\delta_1},\ \delta_1=(-2i\pi)^{-1}\ln(1+\alpha)\to(-2i\pi)^{-1}\ln 2,$$

следовательно,

$$F_1=\frac{X_1}{2i\pi}\int_{\mathrm{R}}\frac{\left(\alpha_{-}JF_2^+ + G_1^+\right)dt}{(t-z)X_1^-},\ z\in \mathrm{C}.$$

Заметим, что $J/X_1^- = D_1 J/X_1^+ = J/X_1^+$, поэтому

$$F_1^+=\frac{\alpha X_1^+}{2i\pi}\int_{\mathrm{R}}\frac{JF_2^+dt}{(t-p)X_1^+}+\frac{\alpha JF_2^+}{2}+\frac{X_1^+}{2i\pi}\int_{\mathrm{R}}\frac{G_1^+dt}{(t-p)X_1^-}+D_1\frac{G_1^+}{2},\ p\in \mathrm{R}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (2), получаем:

$$\left(1-\alpha^{-1}I+\frac{J^2}{2}\right)\frac{F_2^+}{X_1^+}+\frac{J}{2i\pi}\int_{\mathrm{R}}\frac{JF_2^+dt}{(t-p)X_1^+}=(1+\alpha I)\frac{F_2^-}{X_1^-}+\frac{H}{X_1^+},$$

$$H=G_2^+-\alpha^{-1}JD_1\frac{G_1^+}{2}-\frac{\alpha^{-1}JX_1^+}{2i\pi}\int_{\mathrm{R}}\frac{G_1^+dt}{(t-p)X_1^-}=G_2^+-\alpha^{-1}JG_1^+ +\frac{JX_1^+}{2i\pi(1+\alpha)}\int_{-1}^{1}\frac{G_1^+dt}{(t-p)X_1^+}.$$

Обозначая

$$\Phi(z)=\begin{cases}F_2^+/X_1^+,\ \operatorname{Im} z>0;\\ \alpha(1+\alpha)(\alpha-1)^{-1}F_2^-/X_1^-,\ \operatorname{Im} z<0,\end{cases}\quad Q(p)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)^{-1}H/X_1^+,\ p\in \mathrm{R}\setminus\overline{\mathrm{E}};\\ H/X_1^+,\ \ p\in \mathrm{E},\end{cases}$$

$c=0{,}5(1-\alpha^{-1})/(1+\alpha)\to -0$, получаем следующие уравнения относительно функции Φ:

$$\Phi^+-\Phi^-=Q,\ p\in \mathrm{R}\setminus\overline{\mathrm{E}};\ \frac{3}{2}\Phi^+ + \frac{\operatorname{sgn}}{2i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\operatorname{sgn}\Phi^+dt}{t-p}=2c\Phi^-+Q,\ p\in \mathrm{E}.$$

Таким образом, задача сводится к поиску функции $\Phi(z)\in A(\mathrm{C}\setminus\mathrm{E}),\ \Phi(\infty)=0$, удовлетворяющей на разрезе E уравнению

$$\frac{3}{2}\Phi^{+}+\frac{\operatorname{sgn}}{2i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\operatorname{sgn}\Phi^{+}dt}{t-p}=2c\Phi^{-}+\Pi\,, \tag{3}$$

$$\Pi=Q+\frac{4c-3}{4i\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Qdt}{t-p}+\frac{\operatorname{sgn}}{4\pi^{2}}\int_{\mathrm{E}}\frac{\operatorname{sgn}dt}{t-p}\int_{-1}^{1}\frac{Qds}{s-t}\,.$$

Удобнее переписать уравнение (3) так, чтобы под знаком интеграла была функция Φ^{-}. Обозначим $u=\Phi^{+}\operatorname{sgn}$, $\tilde{u}=2c\Phi^{-}\operatorname{sgn}+\Pi\operatorname{sgn}$, тогда

$$\frac{3}{2}u+\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{udt}{t-p}=\tilde{u}\,.$$

Решая это сингулярное интегральное уравнение относительно u, получаем:

$$X_{\Phi}^{+}/X_{\Phi}^{-}=1/2\,,\ X_{\Phi}(z)=\big((1-z)/(1+z)\big)^{(\ln 2)/(2i\pi)},\ u=\frac{3}{4}\tilde{u}-\frac{X_{\Phi}^{+}}{4i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\tilde{u}dt}{(t-p)X_{\Phi}^{+}}\,.$$

В обозначениях

$$F=\Phi/X_{\Phi},\ P=\frac{3\Pi}{2X_{\Phi}^{-}}-\frac{\operatorname{sgn}}{2i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\Pi\operatorname{sgn}dt}{(t-p)X_{\Phi}^{-}}$$

уравнение (3) имеет вид

$$3cF^{-}-c\frac{\operatorname{sgn}}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\operatorname{sgn}F^{-}dt}{t-p}=F^{+}-P\,,\ p\in\mathrm{E}\,. \tag{4}$$

Обозначим

$$F(z)=\frac{1}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{vdt}{t-z},\ \mathcal{S}v=\frac{\operatorname{sgn}}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\operatorname{sgn}vdt}{t-p},\ \mathcal{T}v=\frac{1}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{vdt}{t-p},$$

тогда $F^{\pm}=(\mathcal{T}\pm\mathcal{E})v$, так что уравнение (4) можно переписать в следующем виде:

$$(\mathcal{E}+c\mathcal{S})(\mathcal{E}+\mathcal{T})v=c(3\mathcal{T}-3\mathcal{E}+2\mathcal{S})v+P\,.$$

Обращая оператор $\mathcal{E}+c\mathcal{S}$, получаем, что $(\mathcal{E}+c\mathcal{S})^{-1}=(1-c^{2})^{-1}(\mathcal{E}-c\mathcal{R})$,

$$\mathcal{R}\varphi=\frac{\operatorname{sgn}}{i\pi}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\sigma}\int_{\mathrm{E}}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{\sigma}\frac{\operatorname{sgn}\varphi dt}{t-p},\ \sigma=\frac{1}{2i\pi}\ln\frac{1+c}{1-c}\,.$$

Таким образом, (4) преобразуется в следующее уравнение:

$$\big((1+3c-c^{2})\mathcal{E}+(1-3c-c^{2})\mathcal{T}-2c\mathcal{S}\big)v=w, \tag{5}$$

где $w=c^{2}\mathcal{R}(3\mathcal{E}-3\mathcal{T}-2\mathcal{S})v+(\mathcal{E}-c\mathcal{R})P$.

В дальнейшем мы докажем, что общее решение этого уравнения имеет вид $v=C_{0}v_{o}+c^{-3/2}\mathcal{U}w$, где v_{o} – частное решение однородного уравнения, C_{0} – произвольная постоянная, $\mathcal{U}$ – ограниченный оператор. Таким образом, получим уравнение

$\nu-\sqrt{c}\mathcal{U}\mathcal{R}(3\mathcal{E}-3\mathcal{T}-2\mathcal{S})\nu=C_0\nu_o+c^{-3/2}\mathcal{U}(\mathcal{E}-c\mathcal{R})P$, однозначно разрешимое в силу малости интегрального оператора.

Уравнение (5)

$$(1+3c-c^2)\nu+(1-3c-c^2)\frac{1}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\nu dt}{t-p}-2c\frac{\mathrm{sgn}}{i\pi}\int_{\mathrm{E}}\frac{\nu\,\mathrm{sgn}\,dt}{t-p}=w,\ p\in\mathrm{E},$$

решается в квадратурах. Обозначая

$$\nu_{\pm}=\nu(\pm p),\ w_{\pm}=w(\pm p),\ p>1,\ A=1+3c-c^2,\ B=1-5c-c^2,\ C=1-c-c^2,$$

запишем его в виде следующей системы ($p>1$):

$$A\nu_{+}+\frac{B}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{+}dt}{t-p}=\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}dt}{t+p}+w_{+},\ A\nu_{-}-\frac{B}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}dt}{t-p}=-\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{+}dt}{t+p}+w_{-}.$$

Решаем первое уравнение относительно ν_{+}:

$$A\nu_{+}+\frac{B}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{+}dt}{t-p}=g,\ g=\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}dt}{t+p}+w_{+}.$$

$$X_{\nu}^{+}/X_{\nu}^{-}=D=(A-B)/(A+B),\ X_{\nu}(z)=(1-z)^{\gamma},\ -1<\mathrm{Re}\,\gamma\le 0;$$

$$e^{-2i\pi\gamma}=(A-B)/(A+B)=4c+\ldots,\ \mathrm{Re}\,\gamma\to -1/2.$$

Замечание. $\mathrm{ctg}(\pi\gamma)=(1+\cos(2\pi\gamma))/\sin(2\pi\gamma)=iA/B$, $\sin^2(\pi\gamma)=\left(1-(A/B)^2\right)^{-1}$.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\nu_{+}=C_0X_{\nu}^{+}+\left(A^2-B^2\right)^{-1}\left(Ag-\frac{BX_{\nu}^{+}}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{gdt}{(t-p)X_{\nu}^{+}}\right),$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Из требований к решению исходной системы (1) вытекает, что $C_0=0$ и решение данного уравнения единственно.

Так как $A+iB\,\mathrm{ctg}(\pi\gamma)=0$, то, используя формулы

$$\int_0^{+\infty}x^{-\gamma}(x+1)^{-1}dx=\pi/\sin(\pi\gamma),\ 0<\mathrm{Re}\,\gamma<1\ ([136,\text{ с. }298,\ (2.2.5.25)]),$$

$$\int_0^{+\infty}x^{-\gamma}(x-1)^{-1}dx=\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\gamma),\ \ 0<\mathrm{Re}\,\gamma<1\ ([136,\text{ с. }298,\ (2.2.5.26)]),$$

получим:

$$A\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+p}-\frac{BX^{+}}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(t-p)X^{+}}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+t}=A\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+p}-\frac{B(p-1)^{\gamma}}{i\pi}\int_1^{+\infty}\nu_{-}(\tau)d\tau\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^{-\gamma}dt}{(t-p)(t+\tau)}=$$

$$=A\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+p}-\frac{B(p-1)^{\gamma}}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+p}\left(\frac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\gamma)}{(p-1)^{\gamma}}-\frac{\pi/\sin(\pi\gamma)}{(\tau+1)^{\gamma}}\right)=\frac{B}{i\sin(\pi\gamma)}\int_1^{+\infty}\frac{(p-1)^{\gamma}}{(\tau+1)^{\gamma}}\frac{\nu_{-}(\tau)d\tau}{\tau+p},$$

$$\nu_+(p)=\frac{\left(B^2-A^2\right)^{-1}BC}{\pi\sin(\pi\gamma)}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p-1}{t+1}\right)^{\gamma}\frac{\nu_-(t)dt}{t+p}+\tilde{g}_+(p), \qquad (6)$$

$$\tilde{g}_+(p)=\left(A^2-B^2\right)^{-1}\left(Aw_+(p)-\frac{B}{i\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p-1}{t-1}\right)^{\gamma}\frac{w_+(t)dt}{t-p}\right).$$

Далее,

$$-\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_+dt}{t+p}=\frac{i\left(B^2-A^2\right)^{-1}BC^2}{\pi^2\sin(\pi\gamma)}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_-(s)ds}{(s+1)^{\gamma}}\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^{\gamma}dt}{(t+s)(t+p)}-\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde{g}_+(t)dt}{t+p}=$$

$$=\frac{iC^2}{\pi B}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_-(s)ds}{s-p}\left(1-\left(\frac{p+1}{s+1}\right)^{\gamma}\right)-\frac{C}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde{g}_+(t)dt}{t+p}.$$

Таким образом, относительно ν_- получается следующее уравнение:

$$AB\nu_-+\frac{C^2-B^2}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_-dt}{t-p}-\frac{C^2}{i\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t+1}\right)^{\gamma}\frac{\nu_-dt}{t-p}=\tilde{g}_-,$$

$$\tilde{g}_-=Bw_--\frac{BC}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\tilde{g}_+dt}{t+p}=Bw_--\frac{C\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t-1}\right)^{\gamma}\frac{w_+dt}{t+p}.$$

Замечание. $\left|\sin(\pi\gamma)\right|=\left|B/\sqrt{B^2-A^2}\right|=O\left(|c|^{-1/2}\right).$

Зафиксируем некоторое малое $\varepsilon>0$ и сделаем замену переменных:

$p=2e^x-1,\ t=2e^y-1,\ e^{(3/4-\varepsilon)x}\nu_-\left(2e^x-1\right)=\varphi(x),\ e^{(3/4-\varepsilon)x}\tilde{g}_-\left(2e^x-1\right)=\psi(x),\ x>0.$

Из ограничений на поведение правых частей и искомых функций системы (1) вытекает, что $\varphi,\psi\in L(0,+\infty)$. Получим:

$$AB\varphi(x)-\frac{C^2-B^2}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(1/4-\varepsilon)(x-y)}\varphi(y)dy}{2\operatorname{sh}\left((x-y)/2\right)}+\frac{C^2}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(1/4+\gamma-\varepsilon)(x-y)}\varphi(y)dy}{2\operatorname{sh}\left((x-y)/2\right)}=\psi(x).$$

Это одностороннее уравнение типа свертки, или уравнение Винера-Хопфа ([29, с. 55]), которое решается стандартным образом. Продолжая искомую функцию нулем на отрицательную полупрямую и переходя к образам Фурье, получаем, используя формулу

$\int_{\mathrm{R}}\frac{e^{iax}dx}{2\operatorname{sh}(x/2)}=i\pi\operatorname{th}(\pi a),\ |\operatorname{Im}a|<1/2$ ([136, с. 467, (2.5.46.2)]):

$$F^+(p)=D(p)\left(F^-(p)+H^+(p)\right),\ p\in\mathrm{R},$$

$$F^+(p)=\int_0^{+\infty}e^{ipx}\varphi(x)dx,\ H^+(p)=\int_0^{+\infty}e^{ipx}\psi(x)dx,$$

$$1/D(p)=AB-\left(C^2-B^2\right)\operatorname{th}\left(\pi p-i\pi(1/4-\varepsilon)\right)+C^2\operatorname{th}\left(\pi p-i\pi(1/4+\gamma-\varepsilon)\right),$$

или, в обозначениях $D_0 = 1/\left(B^2 - A^2\right)$, $E_1 = \left(A^2 + B^2 - 2C^2\right)/\left(B^2 - A^2\right)$, $E_2 = A/B$:

$$D(p) = D_0\left(\mathrm{ch}\left(2\pi\left(p + i\varepsilon\right)\right) - E_2\,\mathrm{sh}\left(2\pi\left(p + i\varepsilon\right)\right) - iE_2\right)/\left(\mathrm{sh}\left(2\pi\left(p + i\varepsilon\right)\right) - iE_1\right).$$

Замечание. $E_1 = -2c + \ldots \to 0$, $E_2 = 1 + 4c + \ldots \to 1$.

Для того чтобы изучить поведение функции $D(p)$, обозначим

$$x = e^{2\pi p},\ \omega = e^{-i2\pi\varepsilon},\ D\left(\left(2\pi\right)^{-1}\ln x\right) = D_0\chi(x),$$

тогда

$$\chi(x) = \frac{\left(1 - E_2\right)x^2 - i2E_2\omega x + \left(1 + E_2\right)\omega^2}{x^2 - i2E_1\omega x - \omega^2},\ x \in (0, +\infty).$$

Далее,

$$\chi(x) = \left(1 - E_2\right)\frac{\left(x - z_3\right)\left(x - z_4\right)}{\left(x - z_1\right)\left(x - z_2\right)},$$

$$z_{1,2} = \omega\left(iE_1 \pm \sqrt{1 - E_1^{\,2}}\right) = \omega\begin{cases} 1 + iE_1 + \ldots, \\ -1 + iE_1 + \ldots. \end{cases},$$

$$z_{3,4} = -i\omega\left(-E_2 + 1\right)^{-1}\left(-E_2 \pm 1\right),\ z_3 = -i\omega,\ z_4 = -i\omega e^{2i\pi\gamma}.$$

Договоримся считать $-\pi < \arg z \le \pi$, тогда для невещественных z

$$\underset{0<x<+\infty}{\mathrm{Var}\arg}\frac{x - z}{x + 1} = -\arg\left(-z\right),$$

поэтому

$$\underset{0<x<+\infty}{\mathrm{Var}\arg}\,\chi = \sum_{k=1}^{2}\underset{0<x<+\infty}{\mathrm{Var}\arg}\frac{x - z_k}{x + 1} - \sum_{k=3}^{4}\underset{0<x<+\infty}{\mathrm{Var}\arg}\frac{x - z_k}{x + 1} = \pi - \arg\frac{1 + E_2}{1 - E_2}$$

при $\mathrm{Re}\,c < \pi\varepsilon$ в силу разложения $z_1 = \omega\left(1 + iE_1\right) = e^{-i2\pi\varepsilon}\left(1 - 2ic + \ldots\right) = 1 - i2\pi\varepsilon + 2ic + \ldots$. Следовательно, индекс задачи равен единице, т.е. однородное уравнение ($\tilde{g}_- \equiv 0$) имеет нетривиальное решение v_{o-}, а общее решение неоднородного уравнения имеет вид $v_- = C_0 v_{o-} + v_{н-}$, где C_0 – произвольная постоянная, $v_{н-}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Для факторизации $D(p)$ обозначим $z_k = e^{i2\pi\gamma_k}$, $0 \le \mathrm{Re}\,\gamma_k < 1$, $k = \overline{1,4}$, тогда $\mathrm{Re}\,\gamma_1 \to 1 - 0$, $\mathrm{Re}\,\gamma_2 \to 1/2 - 0$, $\mathrm{Re}\,\gamma_3 \to 3/4 - 0$, $\mathrm{Re}\,\gamma_4 \to 1/4 - 0$. Представим $D(p)$ в виде

$$D(p) = -iD_0\sqrt{1 - E_2^{\,2}}\,\frac{\sin\pi\left(ip + \gamma_3\right)\sin\pi\left(ip + \gamma_4\right)}{\sin\pi\left(ip + \gamma_1\right)\sin\pi\left(ip + \gamma_2\right)}.$$

В дальнейшем нам будет полезно следующее представление:

$$\chi(x)=(1-E_2)\left(1+\frac{A_1}{x-z_1}+\frac{A_2}{x-z_2}\right),\ A_1=\frac{(z_1-z_3)(z_1-z_4)}{z_1-z_2},\ A_2=\frac{(z_2-z_3)(z_2-z_4)}{z_2-z_1}.$$

$$D(p)=B_0-\sum_{k=1}^{2}B_k\,\mathrm{th}\left(\pi\left(p+i(0{,}5-\gamma_k)\right)\right),$$

$$B_0=D_0(1-E_2)\left(1-(2z_1)^{-1}A_1-(2z_2)^{-1}A_2\right)=-D_0E_2,$$

$$B_1=D_0(1-E_2)(2z_1)^{-1}A_1=D_0\left(\sqrt{1-E_1}-iE_2\sqrt{1+E_1}\right)/\left(2\sqrt{1-E_1}\right),$$

$$B_2=D_0(1-E_2)(2z_2)^{-1}A_2=D_0\left(\sqrt{1-E_1}+iE_2\sqrt{1+E_1}\right)/\left(2\sqrt{1-E_1}\right).$$

Заметим, что $B_k=O(|D_0|)=O\left(|c|^{-1}\right),\ k=\overline{0,2}$.

Обозначив $D_-=i/\left(D_0\sqrt{1-E_2{}^2}\right)$, запишем $D(p)$ в виде

$$D(p)=\frac{\Gamma(\gamma_1+ip)\Gamma(1-\gamma_1-ip)\Gamma(\gamma_2+ip)\Gamma(1-\gamma_2-ip)}{D_-\Gamma(\gamma_3+ip)\Gamma(1-\gamma_3-ip)\Gamma(\gamma_4+ip)\Gamma(1-\gamma_4-ip)},$$

откуда

$$X_0^+(p)=\frac{\Gamma(1-\gamma_1-ip)\Gamma(1-\gamma_2-ip)}{\Gamma(1-\gamma_3-ip)\Gamma(1-\gamma_4-ip)},\ X_0^-(p)=D_-\frac{\Gamma(\gamma_3+ip)\Gamma(\gamma_4+ip)}{\Gamma(\gamma_1+ip)\Gamma(\gamma_2+ip)}.$$

Замечание. $X_0^+(is)\sim s^{\gamma_3+\gamma_4-\gamma_1-\gamma_2}\to 0$ при $s\to+\infty$, так как $\mathrm{Re}(\gamma_3+\gamma_4-\gamma_1-\gamma_2)\to -1/2$.

Найдем решение однородного уравнения:

$$\varphi_o(x)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathrm{R}}e^{-ipx}X_0^+(p)dp=(2\pi)^{-1}\int_{\mathrm{R}}e^{-ipx}D(p)X_0^-(p)dp=$$

$$=-(2\pi)^{-1}\int_{\mathrm{R}}e^{-ipx}\left(B_1\,\mathrm{th}\left(\pi p+i\pi(0{,}5-\gamma_1)\right)+B_2\,\mathrm{th}\left(\pi p+i\pi(0{,}5-\gamma_2)\right)\right)X_0^-(p)dp=\varphi_{o1}(x)+\varphi_{o2}(x),$$

$$\varphi_{o1}(x)=\frac{iB_1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(1-\gamma_1+k)x}X_0^-(-i(1-\gamma_1+k))=\frac{iB_1D_-}{\pi}e^{(\gamma_1-1)x}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}\frac{\Gamma(1+\gamma_3-\gamma_1+k)\Gamma(1+\gamma_4-\gamma_1+k)}{\Gamma(1+\gamma_2-\gamma_1+k)k!}=$$

$$=iB_1\pi^{-1}D_-e^{(\gamma_1-1)x}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}\frac{\Gamma(1+\gamma_3-\gamma_1+k)\Gamma(1+\gamma_4-\gamma_1+k)}{\Gamma(1+\gamma_2-\gamma_1+k)k!}=$$

$$=\frac{iB_1\pi^{-1}D_-\Gamma(1+\gamma_2-\gamma_1)}{\Gamma(1+\gamma_3-\gamma_1)\Gamma(1+\gamma_4-\gamma_1)}e^{(\gamma_1-1)x}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}\frac{(1+\gamma_3-\gamma_1)_k(1+\gamma_4-\gamma_1)_k}{(1+\gamma_2-\gamma_1)_k k!}=$$

$$=\frac{iB_1\pi^{-1}D_-\Gamma(1+\gamma_2-\gamma_1)}{\Gamma(1+\gamma_3-\gamma_1)\Gamma(1+\gamma_4-\gamma_1)}e^{(\gamma_1-1)x}F\left(1+\gamma_3-\gamma_1,1+\gamma_4-\gamma_1,1+\gamma_2-\gamma_1;e^{-x}\right),$$

$(a)_k=\Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ - символ Похгаммера, $F(a,b,c;z)$ - гипергеометрическая функция;

$$\varphi_{o2}(x)=\frac{iB_2\pi^{-1}D_-\Gamma(1+\gamma_1-\gamma_2)}{\Gamma(1+\gamma_3-\gamma_2)\Gamma(1+\gamma_4-\gamma_2)}e^{(\gamma_2-1)x}F\left(1+\gamma_3-\gamma_2,1+\gamma_4-\gamma_2,1+\gamma_1-\gamma_2;e^{-x}\right).$$

В обозначениях $z_k/\omega = e^{i2\pi\rho_k}$, $k=\overline{1,4}$, $\gamma_1 = 1+\rho_1-\varepsilon$, $\gamma_k = \rho_k - \varepsilon$, $k=\overline{2,4}$, убирая множитель $iB_1\pi^{-1}D_-$, получим: $v_{o-} = v_{o-}^1 + v_{o-}^2$,

$$v_{o-}^1(p) = \frac{\Gamma(\rho_2-\rho_1)(2/(1+p))^{3/4-\rho_1}}{\Gamma(\rho_3-\rho_1)\Gamma(\rho_4-\rho_1)} F\left(\rho_3-\rho_1, \rho_4-\rho_1, \rho_2-\rho_1; \frac{2}{1+p}\right),$$

$$v_{o-}^2(p) = \frac{\Gamma(2+\rho_1-\rho_2)(2/(1+p))^{7/4-\rho_2}}{\Gamma(1+\rho_3-\rho_2)\Gamma(1+\rho_4-\rho_2)} F\left(1+\rho_3-\rho_2, 1+\rho_4-\rho_2, 2+\rho_1-\rho_2; \frac{2}{1+p}\right).$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения:

$$X^+(z) = (z+i(1-\gamma_1))X_0^+(z) = \frac{i\Gamma(2-\gamma_1-iz)\Gamma(1-\gamma_2-iz)}{\Gamma(1-\gamma_3-iz)\Gamma(1-\gamma_4-iz)},$$

$$X^-(z) = (z+i(1-\gamma_1))X_0^-(z) = \frac{-iD_-\Gamma(\gamma_3+iz)\Gamma(\gamma_4+iz)}{\Gamma(\gamma_1-1+iz)\Gamma(\gamma_2+iz)},\ X^-(-i(1-\gamma_1)) = 0.$$

$$F^+(p) = D(p)H^+(p) + \frac{X^+(p)}{2i\pi}\left(\int_R \frac{H^+(t)dt}{(t-p)X^-(t)}\right)^- = F_s^+(p) + F_i^+(p),$$

$$F_s^+(p) = \left[B_0 - B_1\,\mathrm{th}(\pi p + i\pi(-0{,}5-\rho_1+\varepsilon)) - B_2\,\mathrm{th}(\pi p + i\pi(0{,}5-\rho_2+\varepsilon))\right]H^+(p);$$

$$F_i^+(p) = D(p)\frac{X^-(p)}{2i\pi}\left(\int_R \frac{H^+(t)dt}{(t-p)X^-(t)}\right)^-.$$

Возвращаясь к прообразам, в силу неравенств $|\mathrm{Im}(-0{,}5-\rho_1+\varepsilon)|<1/2$, $|\mathrm{Im}(0{,}5-\rho_2+\varepsilon)|<1/2$ получаем:

$$\varphi_s(x) = B_0\psi(x) - \frac{B_1}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(1/2+\rho_1-\varepsilon)(x-y)}\psi(y)dy}{2\,\mathrm{sh}((x-y)/2)} - \frac{B_2}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1/2+\rho_2-\varepsilon)(x-y)}\psi(y)dy}{2\,\mathrm{sh}((x-y)/2)},$$

$$\varphi_i(x) = {}_1\varphi_i(x) + {}_2\varphi_i(x),$$

$${}_{1,2}\varphi_i(x) = -B_{1,2}(2\pi)^{-1}\int_R e^{-ipx}\,\mathrm{th}(\pi p + i\pi(0{,}5-\gamma_{1,2}))\frac{X^-(p)}{2i\pi}\left(\int_R \frac{H^+(t)dt}{(t-p)X^-(t)}\right)dp =$$

$$= B_{1,2}i\pi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(1-\gamma_{1,2}+k)x}X^-(-i(1-\gamma_{1,2}+k))\left(\frac{1}{2i\pi}\int_R \frac{H^+(t)dt}{(t+i(1-\gamma_{1,2}+k))X^-(t)}\right) =$$

$$= B_{1,2}i\pi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(1-\gamma_{1,2}+k)x}X^-(-i(1-\gamma_{1,2}+k))_{1,2}\zeta^k,$$

$${}_{1,2}\zeta^k = \frac{1}{2i\pi}\int_R \frac{H^+(t)dt}{(t+i(1-\gamma_{1,2}+k))X^-(t)} = \frac{1}{2i\pi}\int_R \frac{D(t)H^+(t)dt}{(t+i(1-\gamma_{1,2}+k))X^+(t)} = {}_{1,2}\zeta_1^k + {}_{1,2}\zeta_2^k,$$

$$ {}_l\zeta_s^k = \frac{-B_s}{2i\pi}\int_R \frac{\operatorname{th}(\pi t + i\pi(0{,}5-\gamma_s))H^+(t)dt}{(t+i(1-\gamma_l+k))X^+(t)} = -\frac{B_s}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H^+(t)/X^+(t)}{(t+i(1-\gamma_l+k))}\Bigg|_{t=i(m+\gamma_s)}, \; l,s=\overline{1,2}; $$

$$ {}_l\zeta_1^k = \frac{B_1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-(m+\gamma_1)y}}{1-\gamma_l+\gamma_1+k+m}\frac{\Gamma(1-\gamma_3+\gamma_1+m)\Gamma(1-\gamma_4+\gamma_1+m)}{\Gamma(1-\gamma_2+\gamma_1+m)(m+1)!}\right)\psi(y)dy, $$

$$ {}_l\zeta_2^k = \frac{B_2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-(m+\gamma_2)y}}{1-\gamma_l+\gamma_2+k+m}\frac{\Gamma(1-\gamma_3+\gamma_2+m)\Gamma(1-\gamma_4+\gamma_2+m)}{\Gamma(2-\gamma_1+\gamma_2+m)m!}\right)\psi(y)dy. $$

$$ \varphi_i(x) = \int_0^{+\infty}K(x,y)e^{\varepsilon(y-x)}\psi(y)dy, \; K(x,y) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}{}_lK_s(x,y). $$

Ядра ${}_lK_s(x,y)$ однотипны; ввиду их громоздкости, выпишем лишь ${}_1K_1(x,y)$:

$$ {}_1K_1(x,y) = {}_1C_1e^{(\gamma_1+\varepsilon)(x-y)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}{}_1a_1^k\,{}_1b_1^m\frac{e^{-((1+k)x+my)}}{1+k+m}, $$

$$ {}_1C_1 = \frac{D_-B_1^{\,2}(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)\sin(\pi(\gamma_1-\gamma_2))}{\pi(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\pi(\gamma_1-\gamma_3))\sin(\pi(\gamma_1-\gamma_4))} = \frac{-D_-B_1^{\,2}(1+\rho_1-\rho_3)(1+\rho_1-\rho_4)\sin(\pi(\rho_1-\rho_2))}{\pi(1+\rho_1-\rho_2)\sin(\pi(\rho_1-\rho_3))\sin(\pi(\rho_1-\rho_4))}; $$

$$ {}_1a_1^k = \frac{(1+\gamma_3-\gamma_1)_k(1+\gamma_4-\gamma_1)_k}{(1+\gamma_2-\gamma_1)_k(k-1)!}, \; {}_1b_1^m = \frac{(1-\gamma_3+\gamma_1)_m(1-\gamma_4+\gamma_1)_m}{(1-\gamma_2+\gamma_1)_m(m+1)!}. $$

$$ {}_1K_1(x,y) = {}_1C_1e^{\gamma_1(x-y)}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}{}_1a_1^{k-1}\,{}_1b_1^m\frac{e^{-(kx+my)}}{k+m} = {}_1C_1e^{(1+\rho_1)(x-y)}\int_{x+y}^{+\infty}F_a\left(\frac{s+x-y}{2}\right)F_b\left(\frac{s-x+y}{2}\right)ds, $$

$$ F_a(u) = e^{-2u}\sum_{k=0}^{\infty}{}_1a_1^{k+1}\,{}_1e^{-ku} = \frac{e^{-2u}(\rho_3-\rho_1)(\rho_4-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)}F(1+\rho_3-\rho_1,1+\rho_4-\rho_1,1+\rho_2-\rho_1;e^{-u}), $$

$$ F_b(u) = \sum_{m=0}^{\infty}{}_1b_1^m\,{}_1e^{-mu} = \frac{(1+\rho_1-\rho_2)e^u}{(1+\rho_1-\rho_3)(1+\rho_1-\rho_4)}\left(F(1+\rho_1-\rho_3,1+\rho_1-\rho_4,1+\rho_1-\rho_2;e^{-u})-1\right). $$

Соответственно,

$$ \nu_{s-} = B_0\tilde{g}_- + \frac{B_1}{i\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t+1}\right)^{1/4+\rho_1}\frac{\tilde{g}_-dt}{t-p} + \frac{B_2}{i\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t+1}\right)^{-3/4+\rho_2}\frac{\tilde{g}_-dt}{t-p}, $$

$$ \nu_{i-} = \int_1^{+\infty}K\left(\ln\frac{p+1}{2},\ln\frac{t+1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{t+1}\right)^{-3/4}\tilde{g}_-dt. $$

Уравнение для ν_+ отличается лишь знаками коэффициентов B и C (соответственно, вместо γ пишем $-\gamma-1$) и правой частью:

$$ -AB\nu_+ + \frac{C^2-B^2}{i\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\nu_+dt}{t-p} - \frac{C^2}{i\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t+1}\right)^{-\gamma-1}\frac{\nu_+dt}{t-p} = \tilde{g}_+, $$

$$ \tilde{g}_+ = -Bw_+ + \frac{C\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{p+1}{t-1}\right)^{-\gamma-1}\frac{w_-dt}{t+p}. $$

Поэтому формулы для v_+ получаются из формул для v_- путем замены ρ_4 на $1/2-\rho_4$ и $\widetilde{g}_-$ на $\widetilde{g}_+$. Однако коэффициент при v_{o+} уже не будет произвольным:

$$v_{o+}=\Theta\left(v_{o+}^1+v_{o+}^2\right),$$

$$v_{o+}^1(p)=\frac{\Gamma(\rho_2-\rho_1)(2/(1+p))^{3/4-\rho_1}}{\Gamma(\rho_3-\rho_1)\Gamma(1/2-\rho_4-\rho_1)}F\left(\rho_3-\rho_1,1/2-\rho_4-\rho_1,\rho_2-\rho_1;\frac{2}{1+p}\right),$$

$$v_{o+}^2(p)=\frac{\Gamma(2+\rho_1-\rho_2)(2/(1+p))^{7/4-\rho_2}}{\Gamma(1+\rho_3-\rho_2)\Gamma(3/2-\rho_4-\rho_2)}F\left(1+\rho_3-\rho_2,3/2-\rho_4-\rho_2,2+\rho_1-\rho_2;\frac{2}{1+p}\right).$$

Коэффициент Θ можно найти из однородного соотношения (6). Так как $v_{o-}(p)\sim C_{o-}p^{\rho_1-3/4}$ при $p\to+\infty$, где $C_{o-}=\Gamma(\rho_2-\rho_1)2^{3/4-\rho_1}/(\Gamma(\rho_3-\rho_1)\Gamma(\rho_4-\rho_1))$, то

$$v_{o+}(p)\sim\frac{\left(B^2-A^2\right)^{-1}BC}{\pi\sin(\pi\gamma)}C_{o-}p^{\gamma}\int_1^{+\infty}\frac{t^{\rho_1-3/4-\gamma}dt}{t+p}=\frac{CC_{o-}\sin(\pi\gamma)}{B\sin(\pi/4-\pi\gamma+\pi\rho_1)}p^{\rho_1-3/4},\ p\to+\infty;$$

$$\Theta=\frac{C\Gamma(1/2-\rho_4-\rho_1)/\Gamma(\rho_4-\rho_1)}{iA\sin(\pi/4+\pi\rho_1)-B\cos(\pi/4+\pi\rho_1)}.$$

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

В этом параграфе сингулярные интегралы от функций, в которые входят решения задач сопряжения, выражены через линейные комбинации этих функций с дробно-рациональными коэффициентами.

Результаты данного параграфа носят вспомогательный характер – они понадобятся в следующем параграфе, однако представляют и самостоятельный интерес.

Пусть $\lambda>1$, $\lambda\neq2$, $\delta=(2\pi i)^{-1}\ln(\lambda-1)$, $x>1$, $W_\pm(x)=\pm\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{1-x^{-2}}$, $D_\pm(x)=(W_\pm(x)+1)/(W_\pm(x)-1)$. Рассмотрим следующие однородные задачи сопряжения на полупрямой $x>1$: $X_\pm^+(x)=D_\pm(x)X_\pm^-(x)$ (терминологию и обозначения см. [29, с. 30]). У этих задач существуют единственные, с точностью до постоянного множителя, решения, имеющие особенности интегрируемого порядка и исчезающие на бесконечности:

$$X_\pm(z)=(1-z)^{\mp\delta-1/2}\exp\left((2\pi i)^{-1}\int_1^{+\infty}(t-z)^{-1}\ln\left((1-\lambda)^{\mp1}D_\pm(t)\right)dt\right)$$

(полагаем $-\pi<\arg z\le\pi$).

Обозначим

$$\Theta(x)=-iX_-(-x)/\left(X_+^+(x)(W_+(x)-1)\right),\ \Sigma(x)=\Theta(x)\sqrt{x+1}/\left(x\sqrt{x-1}\right),\ \rho(x)=\sqrt{x^2-1}.$$

Теорема. Справедливы следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma(x)d\rho(x)}{x\pm y}=P_{\pm}(y)\Sigma(y)\mp Q(y),\ y>1, \qquad (1\pm)$$

где

$$P_{\pm}(y)=\frac{p_{\pm}y^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)(y^2-1)},\ Q(y)=\frac{\lambda\Sigma(1)y}{2(\lambda-2)(y^2-1)}$$

– дробно-рациональные функции, $p_+=4(\lambda-1),\ p_-=-2\left((\lambda-1)^2+1\right)$.

Замечание. Указанные соотношения можно рассматривать как аналог формул

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\gamma}dx}{x+y}=\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)}y^{-\gamma},\ 0<\operatorname{Re}\gamma<1,\ y>0\ \text{([136, с. 298, (2.2.5.25)])},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\gamma}dx}{x-y}=\pi\operatorname{ctg}(\pi\gamma)y^{-\gamma},\ 0<\operatorname{Re}\gamma<1,\ y>0\ \text{([136, с. 298, (2.2.5.26)])}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Omega(y)=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma(x)d\rho(x)}{x+y}=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Theta(x)dx}{(x-1)(x+y)},$$

где $y>1$ или $y<-1$. Проведя несложные преобразования, представим подынтегральную функцию в виде

$$\Theta(x)=\frac{\sqrt{a}x\left(x^2-1\right)^{\delta-1/2}(x-1)}{\sqrt{x^2-1+a}}e^{F\left(a^{-1}\left(x^2-1\right)\right)},\ a=\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)},\ F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\ln\frac{\lambda\sqrt{t+a^{-1}}-(\lambda-2)\sqrt{t}}{2\sqrt{t+1}}\frac{dt}{t-z}.$$

Легко видеть, что

$$\Sigma(x)=\sqrt{a}\left(x^2-1\right)^{\delta}e^{F\left(a^{-1}\left(x^2-1\right)\right)}/\sqrt{x^2-1+a}\ ;$$

это позволяет определить функцию $\Sigma(x)$ и при $x<-1$. Заметим, что $F(z)\sim-\delta\ln z$ при $z\to+0$, так что $\Sigma(1)\equiv\Sigma(1+0)=a^{\delta}$.

Следовательно,

$$\Omega(y)=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\left(s^2-1\right)^{\delta-1/2}\exp F\left(a^{-1}\left(s^2-1\right)\right)ds}{\sqrt{a^{-1}+\left(1-2\lambda^{-1}\right)^2s^{-2}}(s+y)}=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\left(s^2-1\right)^{\delta}\exp F\left(a^{-1}\left(s^2-1\right)\right)d\rho(s)}{\sqrt{a^{-1}s^2+1-4\lambda^{-1}+4\lambda^{-2}}(s+y)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\left(s^2-1\right)^{\delta}\exp F\left(a^{-1}\left(s^2-1\right)\right)d\rho(s)}{\sqrt{s^2+a-a\left(4\lambda^{-1}-4\lambda^{-2}\right)}(s+y)}=\frac{\sqrt{a}}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\left(s^2-1\right)^{\delta}\exp F\left(a^{-1}\left(s^2-1\right)\right)d\rho(s)}{\sqrt{s^2-1+a}(s+y)}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\left(s^2-1\right)^{\delta}\exp F\left(a^{-1}\left(s^2-1\right)\right)d\sqrt{s^2-1}}{\sqrt{a^{-1}s^2+\left(1-2\lambda^{-1}\right)^2}(s+y)}=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2\delta}\exp F\left(a^{-1}u^2\right)du}{\sqrt{a^{-1}u^2+a^{-1}+1-4\lambda^{-1}+4\lambda^{-2}}\left(\sqrt{u^2+1}+y\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\left(w\sqrt{a}\right)^{2\delta}\exp F\left(w^2\right)\sqrt{a}dw}{\sqrt{w^2+1}\left(\sqrt{aw^2+1}+y\right)}=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{a^{\delta}w^{2\delta}\exp F\left(w^2\right)dw}{\sqrt{w^2+1}\left(\sqrt{w^2+a^{-1}}+a^{-1/2}y\right)}=$$

$$= \frac{a^{\delta}}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\exp F(v)dv}{\sqrt{v+1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}+a^{-1/2}y\right)} = \frac{a^{\delta}}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\exp F(v)\left(\sqrt{v+a^{-1}}-a^{-1/2}y\right)dv}{\sqrt{v+1}\left(v-a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)} =$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\sqrt{a}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\exp F(v)\sqrt{v+a^{-1}}dv}{\sqrt{v+1}\left(v-a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)} - y\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\exp F(v)dv}{\sqrt{v+1}\left(v-a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)}\right) =$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\sqrt{a}T\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right) - yS\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)\right),$$

$$S(\delta,z) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}e^{F(v)}dv}{\sqrt{v+1}(v-z)},\ T(\delta,z) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\sqrt{v+a^{-1}}e^{F(v)}dv}{\sqrt{v+1}(v-z)},\ z>0.$$

Выразим $S(\delta,z)$ и $T(\delta,z)$ через следующие два интеграла:

$$U(\alpha,z) = \int_0^{+\infty} e^{F^-(v)} \frac{v^{\alpha}dv}{(v+1)(v-z)},\ -1<\operatorname{Re}\alpha<1,$$

$$V(\alpha,z) = \int_0^{+\infty} e^{F^-(v)} \frac{v^{\alpha}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)dv}{(v+1)(v-z)},\ -1<\operatorname{Re}\alpha<3/2.$$

В дальнейшем, при вычислении интегралов нам будет удобно считать, что $0 \le \arg z < 2\pi$.

Рассмотрим сначала $S(\delta,z)$:

$$S(\delta,z) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}e^{F^-(v)}dv}{\sqrt{v+1}(v-z)} \frac{\sqrt{v+a^{-1}}-\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{v}}{\sqrt{v+1}} = \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} v^{\delta-1/2}e^{F^-(v)} \frac{\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}+2\lambda^{-1}\sqrt{v}}{(v+1)(v-z)}dv =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} v^{\delta+1/2}e^{F^-(v)} \frac{\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}}{v(v+1)(v-z)}dv + \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta}e^{F^-(v)}dv}{(v+1)(v-z)} =$$

$$= \frac{\lambda}{2z}V(\delta+1/2,z) + U(\delta,z) - \frac{\lambda}{2z}\int_0^{+\infty} v^{\delta-1/2}e^{F^-(v)} \frac{\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}}{v+1}dv =$$

$$= \frac{\lambda}{2z}V(\delta+1/2,z) + U(\delta,z) - \frac{\lambda}{2z}V(\delta+1/2,0).$$

Теперь рассмотрим $T(\delta,z)$:

$$T(\delta,z) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\sqrt{v+a^{-1}}e^{F(v)}dv}{\sqrt{v+1}(v-z)} = \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}\sqrt{v+a^{-1}}e^{F^-(v)}dv}{\sqrt{v+1}(v-z)} \frac{\sqrt{v+a^{-1}}-\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{v}}{\sqrt{v+1}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}e^{F^-(v)}dv}{(v+1)(v-z)}\left(2\lambda^{-1}v + a^{-1} - \left(1-2\lambda^{-1}\right)\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)\sqrt{v}\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}e^{F^-(v)}dv}{(v+1)(v-z)}\left(v+\frac{\lambda}{2a}\right) - \left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta}e^{F^-(v)}dv}{(v+1)(v-z)}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right) =$$

$$= \left(z + 2\left(1-\lambda^{-1}\right)\right)U\left(\delta - 1/2, z\right) - \left(\lambda/2 - 1\right)V\left(\delta, z\right) + \int_0^{+\infty} \frac{v^{\delta-1/2}}{v+1} e^{F^-(v)} dv =$$

$$= \left(z + 2\left(1-\lambda^{-1}\right)\right)U\left(\delta - 1/2, z\right) - \left(\lambda/2 - 1\right)V\left(\delta, z\right) + U\left(\delta + 1/2, 0\right).$$

Вычислим интегралы U, V методом контурного интегрирования ($z > 0$):

$$U(\alpha, z) = \int_0^{+\infty} v^\alpha e^{F^-(v)} (v+1)^{-1} (v-z)^{-1} dv = -\pi i z^\alpha (z+1)^{-1} e^{F^-(z)} + \int_{0-i0}^{+\infty-i0} v^\alpha e^{F^-(v)} (v+1)^{-1} (v-z)^{-1} dv,$$

$$\int_{0-i0}^{+\infty-i0} v^\alpha e^{F^-(v)} (v+1)^{-1} (v-z)^{-1} dv = -\int_{-\infty-i0}^{0-i0} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F(v)} (v-z)^{-1} dv =$$

$$= -\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)} (-1-z)^{-1} - e^{-2\pi i\alpha} \int_{-\infty+i0}^{0+i0} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F(v)} (v-z)^{-1} dv - \pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)} (-1-z)^{-1} =$$

$$= -2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)} (-1-z)^{-1} - e^{-2\pi i\alpha} \int_{-\infty+i0}^{0+i0} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F(v)} (v-z)^{-1} dv,$$

$$- e^{-2\pi i\alpha} \int_{-\infty+i0}^{0+i0} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F(v)} (v-z)^{-1} dv = e^{-2\pi i\alpha} \int_{0+i0}^{+\infty+i0} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F(v)} (v-z)^{-1} dv =$$

$$= -e^{-2\pi i\alpha} \pi i z^\alpha (z+1)^{-1} e^{F^+(z)} + e^{-2\pi i\alpha} \int_0^{+\infty} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F^+(v)} (v-z)^{-1} dv =$$

$$= -e^{-2\pi i\alpha} \pi i z^\alpha (z+1)^{-1} e^{F^+(z)} + e^{-2\pi i\alpha} \int_0^{+\infty} v^\alpha (v+1)^{-1} e^{F^-(v)} e^{F^+(v)-F^-(v)} (v-z)^{-1} dv.$$

Заметим, что

$$e^{F^+(v)-F^-(v)} = \left(\frac{(\lambda/2)\left(\sqrt{v+a^{-1}} - \left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{v}\right)}{\sqrt{v+1}} \right)^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} \frac{\left(1 + \left(1-2\lambda^{-1}\right)^2\right)v + a^{-1} - 2\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{v}\sqrt{v+a^{-1}}}{v+1} =$$

$$= \frac{\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right)v - \left(\lambda^2 - 2\lambda\right)\sqrt{v}\sqrt{v+a^{-1}} + 2(\lambda-1)}{2(v+1)} = \frac{2v + 2(\lambda-1) - \left(\lambda^2 - 2\lambda\right)\sqrt{v}\left(\sqrt{v+a^{-1}} - \sqrt{v}\right)}{2(v+1)} =$$

$$= \frac{v + \lambda - 1 - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{v}\left(\sqrt{v+a^{-1}} - \sqrt{v}\right)}{v+1} = 1 + \frac{\lambda-2}{v+1} - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{v}\,\frac{\sqrt{v+a^{-1}} - \sqrt{v}}{v+1}.$$

Нам также будет полезно следующее представление:

$$e^{F^+(v)-F^-(v)} = \frac{\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right)v + 2(\lambda-1) - \left(\lambda^2 - 2\lambda\right)\sqrt{v}\sqrt{v+a^{-1}}}{2(v+1)} =$$

$$= \frac{\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)v + (\lambda-1) - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{v}\left(\sqrt{v+a^{-1}} + \sqrt{v}\right)}{v+1} =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \frac{3\lambda - 2 - \lambda^2}{\nu+1} - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{\nu}\,\frac{\sqrt{\nu + a^{-1}} + \sqrt{\nu}}{\nu+1}.$$

Следовательно,

$$U(\alpha, z) = -\pi i z^{\alpha}(z+1)^{-1} e^{F^-(z)} - 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)}(-1-z)^{-1} - e^{-2\pi i\alpha}\pi i z^{\alpha}(z+1)^{-1} e^{F^+(z)} +$$

$$+ e^{-2\pi i\alpha}\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)} e^{F^+(\nu) - F^-(\nu)}(\nu - z)^{-1} d\nu =$$

$$= 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)}(1+z)^{-1} - \pi i z^{\alpha}(z+1)^{-1}\left(e^{F^-(z)} + e^{-2\pi i\alpha} e^{F^+(z)}\right) +$$

$$+ e^{-2\pi i\alpha}\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)} e^{F^+(\nu) - F^-(\nu)}(\nu - z)^{-1} d\nu =$$

$$= -\pi i z^{\alpha}(z+1)^{-1}\left(e^{F^-(z)} + e^{-2\pi i\alpha} e^{F^+(z)}\right) + 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)}(1+z)^{-1} +$$

$$+ e^{-2\pi i\alpha}\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)}\left(1 + \frac{\lambda-2}{\nu+1} - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{\nu}\,\frac{\sqrt{\nu + a^{-1}} - \sqrt{\nu}}{\nu+1}\right)\frac{d\nu}{\nu - z}.$$

Так как

$$\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)}\left(1 + \frac{\lambda-2}{\nu+1} - \lambda(\lambda/2-1)\sqrt{\nu}\,\frac{\sqrt{\nu + a^{-1}} - \sqrt{\nu}}{\nu+1}\right)\frac{d\nu}{\nu - z} =$$

$$= U(\alpha, z) + \frac{\lambda-2}{z+1}\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)}\left(\frac{1}{\nu - z} - \frac{1}{\nu+1}\right)d\nu -$$

$$- \frac{\lambda(\lambda/2-1)}{z+1}\int_0^{+\infty} \nu^{\alpha+1/2}(\nu+1)^{-1} e^{F^-(\nu)}\left(\sqrt{\nu + a^{-1}} - \sqrt{\nu}\right)\left(\frac{1}{\nu - z} - \frac{1}{\nu+1}\right)d\nu =$$

$$= U(\alpha, z) + \frac{\lambda-2}{z+1}\left(U(\alpha, z) - U(\alpha, -1)\right) - \frac{\lambda(\lambda/2-1)}{z+1}\left(V(\alpha+1/2, z) - V(\alpha+1/2, -1)\right),$$

то

$$\left(1 - e^{-2\pi i\alpha} - e^{-2\pi i\alpha}\,\frac{\lambda-2}{z+1}\right)U(\alpha, z) = 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)}(1+z)^{-1} - \pi i z^{\alpha}(z+1)^{-1}\left(e^{F^-(z)} + e^{-2\pi i\alpha} e^{F^+(z)}\right) -$$

$$- e^{-2\pi i\alpha}\,\frac{\lambda-2}{z+1}U(\alpha, -1) - e^{-2\pi i\alpha}\,\frac{\lambda(\lambda/2-1)}{z+1}\left(V(\alpha+1/2, z) - V(\alpha+1/2, -1)\right),$$

или

$$\left(\left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right)(z+1) - e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)\right)U(\alpha, z) = 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)} - \pi i z^{\alpha}\left(e^{F^-(z)} + e^{-2\pi i\alpha} e^{F^+(z)}\right) -$$

$$- e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)U(\alpha, -1) - e^{-2\pi i\alpha}\lambda(\lambda/2-1)\left(V(\alpha+1/2, z) - V(\alpha+1/2, -1)\right).$$

Таким образом, $A_1(\alpha)U(\alpha, z) = B_1(\alpha)V(\alpha+1/2, z) + f_1(\alpha)$, где

$$A_1(\alpha) = \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right)(z+1) - e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2),\ B_1(\alpha) = -e^{-2\pi i\alpha}\lambda(\lambda/2-1),$$

$$f_1(\alpha) = 2\pi i e^{-\pi i\alpha} e^{F(-1)} - \pi i z^{\alpha}\left(e^{F^-(z)} + e^{-2\pi i\alpha} e^{F^+(z)}\right) -$$

$$-e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)U(\alpha,-1)+e^{-2\pi i\alpha}\lambda(\lambda/2-1)V(\alpha+1/2,-1).$$

Аналогично, при $z>0$

$$V(\alpha,z)=\int_0^{+\infty}v^{\alpha}e^{F^{-}(v)}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)(v+1)^{-1}(v-z)^{-1}dv=$$

$$=-\pi i z^{\alpha}\left(\sqrt{z+a^{-1}}-\sqrt{z}\right)(z+1)^{-1}e^{F^{-}(z)}+\int_{0-i0}^{+\infty-i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}e^{F^{-}(v)}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)(v-z)^{-1}dv,$$

$$\int_{0-i0}^{+\infty-i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}e^{F^{-}(v)}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)(v-z)^{-1}dv=$$

$$=-\int_{-\infty-i0}^{-a^{-1}-i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-\int_{-a^{-1}-i0}^{0-i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\left(\sqrt{v}\right)^{-}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv=$$

$$=-\pi i e^{-\pi i\alpha}\left(-i\sqrt{1-a^{-1}}+i\right)e^{F(-1)}(-1-z)^{-1}+\pi i e^{-\pi i\alpha}\left(i\sqrt{1-a^{-1}}-i\right)e^{F(-1)}(-1-z)^{-1}+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}\int_{-\infty+i0}^{-a^{-1}+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-e^{-2\pi i\alpha}\int_{-a^{-1}+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}+\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv=$$

$$=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}(1+z)^{-1}+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}\int_{-\infty+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-e^{-2\pi i\alpha}\int_{-a^{-1}+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-e^{-2\pi i\alpha}\int_{-a^{-1}+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}+\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv=$$

$$=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}(1+z)^{-1}+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}\int_{-\infty+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-2e^{-2\pi i\alpha}\int_{-a^{-1}+i0}^{0+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\sqrt{v+a^{-1}}e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv=$$

$$=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}(1+z)^{-1}-e^{-2\pi i\alpha}\int_{0+i0}^{+\infty+i0}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv-$$

$$-2e^{-\pi i\alpha}\int_{-a^{-1}}^{0}|v|^{\alpha}(v+1)^{-1}\sqrt{v+a^{-1}}e^{F(v)}(v-z)^{-1}dv=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}(1+z)^{-1}+$$

$$+\pi i e^{-2\pi i\alpha}z^{\alpha}(z+1)^{-1}\left(\sqrt{z+a^{-1}}-\sqrt{z}\right)e^{F^{+}(z)}-e^{-2\pi i\alpha}\int_{0}^{+\infty}v^{\alpha}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F^{+}(v)}(v-z)^{-1}dv+$$

$$+2e^{-\pi i\alpha}\int_{0}^{a^{-1}}v^{\alpha}(1-v)^{-1}\sqrt{a^{-1}-v}e^{F(-v)}(v+z)^{-1}dv.$$

Таким образом,

$$V(\alpha,z)=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}(1+z)^{-1}-\pi i z^{\alpha}(1+z)^{-1}\left(\sqrt{z+a^{-1}}-\sqrt{z}\right)\left(e^{F^{-}(z)}-e^{-2\pi i\alpha}e^{F^{+}(z)}\right)-$$

$$-e^{-2\pi i\alpha}\int_{0}^{+\infty}\frac{v^{\alpha}}{v+1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F^{-}(v)}\left((\lambda-1)^{2}+\frac{3\lambda-2-\lambda^{2}}{v+1}-\lambda\frac{\lambda-2}{2}\sqrt{v}\frac{\sqrt{v+a^{-1}}+\sqrt{v}}{v+1}\right)\frac{dv}{v-z}+$$

$$+2e^{-\pi i\alpha}\int_{0}^{a^{-1}}v^{\alpha}(1-v)^{-1}\sqrt{a^{-1}-v}e^{F(-v)}(v+z)^{-1}dv.$$

Так как

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{v^{\alpha}}{v+1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F^{-}(v)}\left((\lambda-1)^{2}+\frac{3\lambda-2-\lambda^{2}}{v+1}-\lambda(\lambda/2-1)\sqrt{v}\frac{\sqrt{v+a^{-1}}+\sqrt{v}}{v+1}\right)\frac{dv}{v-z}=$$

$$=(\lambda-1)^{2}\int_{0}^{+\infty}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F^{-}(v)}(v-z)^{-1}dv+$$

$$+\frac{3\lambda-2-\lambda^{2}}{z+1}\int_{0}^{+\infty}v^{\alpha}(v+1)^{-1}\left(\sqrt{v+a^{-1}}-\sqrt{v}\right)e^{F^{-}(v)}\left(\frac{1}{v-z}-\frac{1}{v+1}\right)dv-$$

$$-\frac{\lambda(\lambda-2)}{2a(z+1)}\int_{0}^{+\infty}v^{\alpha-1/2}(v+1)^{-1}e^{F^{-}(v)}\left(\frac{z}{v-z}+\frac{1}{v+1}\right)dv=$$

$$=(\lambda-1)^{2}V(\alpha,z)+\frac{3\lambda-2-\lambda^{2}}{z+1}\left(V(\alpha,z)-V(\alpha,-1)\right)-$$

$$-\frac{2(\lambda-2)(1-\lambda^{-1})}{z+1}\left(zU(\alpha-1/2,z)+U(\alpha-1/2,-1)\right),$$

то

$$\left((z+1)\left(1+e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-1)^{2}\right)+e^{-2\pi i\alpha}\left(3\lambda-2-\lambda^{2}\right)\right)V(\alpha,z)=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}-$$

$$-\pi i z^{\alpha}\left(\sqrt{z+a^{-1}}-\sqrt{z}\right)\left(e^{F^{-}(z)}-e^{-2\pi i\alpha}e^{F^{+}(z)}\right)+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}\left(3\lambda-2-\lambda^{2}\right)V(\alpha,-1)+e^{-2\pi i\alpha}2(\lambda-2)(1-\lambda^{-1})zU(\alpha-1/2,z)+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}2(\lambda-2)(1-\lambda^{-1})U(\alpha-1/2,-1)+2e^{-\pi i\alpha}(z+1)\int_{0}^{a^{-1}}v^{\alpha}(1-v)^{-1}\sqrt{a^{-1}-v}e^{F(-v)}(v+z)^{-1}dv.$$

Аналогично, $A_2(\alpha)V(\alpha,z)=B_2(\alpha)U(\alpha-1/2,z)+f_2(\alpha)$, где

$$A_2(\alpha)=(z+1)\left(1+e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-1)^2\right)+e^{-2\pi i\alpha}\left(3\lambda-2-\lambda^2\right),\ B_2(\alpha)=e^{-2\pi i\alpha}2(\lambda-2)\left(1-\lambda^{-1}\right)z,$$

$$f_2(\alpha)=2\pi e^{-\pi i\alpha}\left(\sqrt{1-a^{-1}}-1\right)e^{F(-1)}+2e^{-\pi i\alpha}(z+1)\int_0^{a^{-1}}v^{\alpha}(1-v)^{-1}\sqrt{a^{-1}-v}\,e^{F(-v)}(v+z)^{-1}dv-$$

$$-\pi i z^{\alpha}\left(\sqrt{z+a^{-1}}-\sqrt{z}\right)\left(e^{F^-(z)}-e^{-2\pi i\alpha}e^{F^+(z)}\right)+$$

$$+e^{-2\pi i\alpha}\left(3\lambda-2-\lambda^2\right)V(\alpha,-1)+e^{-2\pi i\alpha}2(\lambda-2)\left(1-\lambda^{-1}\right)U(\alpha-1/2,-1).$$

Отсюда следует, что

$$A_1(\alpha)U(\alpha,z)=B_1(\alpha)\left(\frac{B_2(\alpha+1/2)}{A_2(\alpha+1/2)}U(\alpha,z)+\frac{f_2(\alpha+1/2)}{A_2(\alpha+1/2)}\right)+f_1(\alpha),$$

$$A_1(\alpha)A_2(\alpha+1/2)U(\alpha,z)=B_1(\alpha)B_2(\alpha+1/2)U(\alpha,z)+B_1(\alpha)f_2(\alpha+1/2)+A_2(\alpha+1/2)f_1(\alpha),$$

$$U(\alpha,z)=\frac{B_1(\alpha)f_2(\alpha+1/2)+A_2(\alpha+1/2)f_1(\alpha)}{A_1(\alpha)A_2(\alpha+1/2)-B_1(\alpha)B_2(\alpha+1/2)}=\frac{\Delta_U(\alpha)}{\Delta(\alpha)}.$$

Аналогично,

$$A_2(\alpha)V(\alpha,z)=B_2(\alpha)\left(\frac{B_1(\alpha-1/2)}{A_1(\alpha-1/2)}V(\alpha,z)+\frac{f_1(\alpha-1/2)}{A_1(\alpha-1/2)}\right)+f_2(\alpha),$$

$$A_1(\alpha-1/2)A_2(\alpha)V(\alpha,z)=B_2(\alpha)B_1(\alpha-1/2)V(\alpha,z)+B_2(\alpha)f_1(\alpha-1/2)+A_1(\alpha-1/2)f_2(\alpha),$$

$$V(\alpha,z)=\frac{B_2(\alpha)f_1(\alpha-1/2)+A_1(\alpha-1/2)f_2(\alpha)}{A_1(\alpha-1/2)A_2(\alpha)-B_1(\alpha-1/2)B_2(\alpha)}=\frac{\Delta_V(\alpha)}{\Delta(\alpha-1/2)},$$

или

$$V(\alpha+1/2,z)=\frac{B_2(\alpha+1/2)f_1(\alpha)+A_1(\alpha)f_2(\alpha+1/2)}{A_1(\alpha)A_2(\alpha+1/2)-B_1(\alpha)B_2(\alpha+1/2)}=\frac{\Delta_V(\alpha+1/2)}{\Delta(\alpha)}.$$

Вычислим знаменатель:

$$\Delta(\alpha)=A_1(\alpha)A_2(\alpha+1/2)-B_1(\alpha)B_2(\alpha+1/2)=$$

$$=\left(\left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)(z+1)-(\lambda-2)e^{-2\pi i\alpha}\right)\left((z+1)\left(1-e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-1)^2\right)-e^{-2\pi i\alpha}\left(3\lambda-2-\lambda^2\right)\right)+$$

$$+\lambda(\lambda/2-1)e^{-2\pi i\alpha}\left(-2e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)\left(1-\lambda^{-1}\right)z\right)=$$

$$=(z+1)^2\left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)\left(1-e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-1)^2\right)+(z+1)e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)^2.$$

Точнее,

$$\Delta(\delta)=-(\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)^2(z+1)z,\ \Delta(\delta-1/2)=(\lambda-1)^{-1}(z+1)\left(\lambda^2(z+1)-(\lambda-2)^2\right).$$

Первый числитель:

$$\Delta_U(\alpha)=B_1(\alpha)f_2(\alpha+1/2)+A_2(\alpha+1/2)f_1(\alpha)=$$

$$=-\lambda(\lambda/2-1)e^{-2\pi i\alpha}f_2(\alpha+1/2)+\left((z+1)\left(1-e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-1)^2\right)+e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)(\lambda-1)\right)f_1(\alpha),$$

$$\Delta_U(\delta)=-\lambda(\lambda/2-1)(\lambda-1)^{-1}f_2(\delta+1/2)-(\lambda-2)zf_1(\delta),$$

$$\Delta_U(\delta-1/2)=\lambda(\lambda/2-1)(\lambda-1)^{-1}f_2(\delta)+(\lambda z+2)f_1(\delta-1/2).$$

Второй числитель:

$$\Delta_V(\alpha)=B_2(\alpha)f_1(\alpha-1/2)+A_1(\alpha-1/2)f_2(\alpha)=$$

$$=2e^{-2\pi i\alpha}(\lambda-2)(1-\lambda^{-1})zf_1(\alpha-1/2)+\left((1+e^{-2\pi i\alpha})(z+1)+(\lambda-2)e^{-2\pi i\alpha}\right)f_2(\alpha),$$

$$\Delta_V(\delta)=2\lambda^{-1}(\lambda-2)zf_1(\delta-1/2)+(\lambda-1)^{-1}(\lambda z+2\lambda-2)f_2(\delta),$$

$$\Delta_V(\delta+1/2)=-2\lambda^{-1}(\lambda-2)zf_1(\delta)+(\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)zf_2(\delta+1/2).$$

Таким образом,

$$S(\delta,z)+\frac{\lambda}{2z}V(\delta+1/2,0)=\frac{\lambda}{2z}V(\delta+1/2,z)+U(\delta,z)=\frac{\lambda\Delta_V(\delta+1/2)}{2z\Delta(\delta)}+\frac{\Delta_U(\delta)}{\Delta(\delta)}=$$

$$=\frac{-(\lambda-2)f_1(\delta)+\lambda(\lambda-1)^{-1}(\lambda/2-1)f_2(\delta+1/2)}{\Delta(\delta)}-$$

$$-\frac{\lambda(\lambda/2-1)(\lambda-1)^{-1}f_2(\delta+1/2)+(\lambda-2)zf_1(\delta)}{\Delta(\delta)}=\frac{-(\lambda-2)(z+1)f_1(\delta)}{-(\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)^2(z+1)z}=\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)z}f_1(\delta).$$

Так как

$$f_1(\delta)=2\pi i(\lambda-1)^{-1/2}e^{F(-1)}-\pi iz^{\delta}\left(e^{F^-(z)}+(\lambda-1)^{-1}e^{F^+(z)}\right)-$$

$$-(\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)U(\delta,-1)+(\lambda-1)^{-1}\lambda(\lambda/2-1)V(\delta+1/2,-1),$$

то

$$zS(\delta,z)=(\lambda-1)(\lambda-2)^{-1}f_1(\delta)-(\lambda/2)V(\delta+1/2,0)=2\pi i(\lambda-1)^{1/2}(\lambda-2)^{-1}e^{F(-1)}-$$

$$-\pi iz^{\delta}(\lambda-2)^{-1}\left((\lambda-1)e^{F^-(z)}+e^{F^+(z)}\right)-U(\delta,-1)+(\lambda/2)V(\delta+1/2,-1)-(\lambda/2)V(\delta+1/2,0).$$

Аналогично,

$$T(\delta,z)-U(\delta+1/2,0)=\left(z+2(1-\lambda^{-1})\right)U(\delta-1/2,z)-(\lambda/2-1)V(\delta,z)=$$

$$=\left(z+2(1-\lambda^{-1})\right)\frac{\Delta_U(\delta-1/2)}{\Delta(\delta-1/2)}-(\lambda/2-1)\frac{\Delta_V(\delta)}{\Delta(\delta-1/2)}=$$

$$=\left(z+2(1-\lambda^{-1})\right)\frac{\lambda(\lambda/2-1)(\lambda-1)^{-1}f_2(\delta)+(\lambda z+2)f_1(\delta-1/2)}{\Delta(\delta-1/2)}-$$

$$-(\lambda/2-1)\frac{2\lambda^{-1}(\lambda-2)zf_1(\delta-1/2)+(\lambda-1)^{-1}(\lambda z+2\lambda-2)f_2(\delta)}{\Delta(\delta-1/2)}=$$

$$=\left((\lambda z+2+2(\lambda-2))(\lambda z+2)-(\lambda-2)^2z\right)\frac{\lambda^{-1}f_1(\delta-1/2)}{\Delta(\delta-1/2)}=$$

$$=\left((\lambda(z+1)+(\lambda-2))(\lambda(z+1)-(\lambda-2))-(\lambda-2)^2(z+1)+(\lambda-2)^2\right)\frac{\lambda^{-1}f_1(\delta-1/2)}{\Delta(\delta-1/2)}=$$

$$= \left(\lambda^2(z+1) - (\lambda-2)^2\right)(z+1)\frac{\lambda^{-1} f_1(\delta-1/2)}{(\lambda-1)^{-1}(z+1)\left(\lambda^2(z+1)-(\lambda-2)^2\right)} = \left(1-\lambda^{-1}\right) f_1(\delta-1/2).$$

Так как

$$f_1(\delta-1/2) = -2\pi i(\lambda-1)^{-1/2} e^{F(-1)} - \pi i z^{\delta-1/2}\left(e^{F^-(z)} - (\lambda-1)^{-1} e^{F^+(z)}\right) +$$
$$+ (\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)U(\delta-1/2,-1) + \lambda(\lambda-1)^{-1}(\lambda/2-1)V(\delta,-1),$$

то

$$\lambda T(\delta, z) = -2\pi i(\lambda-1)^{1/2} e^{F(-1)} - \pi i z^{\delta-1/2}\left((\lambda-1)e^{F^-(z)} - e^{F^+(z)}\right) +$$
$$+ (\lambda-2)U(\delta-1/2,-1) + (\lambda-2)(\lambda/2)V(\delta,-1) + \lambda U(\delta+1/2,0).$$

Итак,

$$S(\delta, z) = -\pi i z^{\delta-1}(\lambda-2)^{-1}\left((\lambda-1)e^{F^-(z)} + e^{F^+(z)}\right) + S_0/z,$$

$$S_0 = 2\pi i(\lambda-1)^{1/2}(\lambda-2)^{-1} e^{F(-1)} - U(\delta,-1) + (\lambda/2)V(\delta+1/2,-1) - (\lambda/2)V(\delta+1/2,0);$$

$$T(\delta, z) = -\pi i z^{\delta-1/2}\lambda^{-1}\left((\lambda-1)e^{F^-(z)} - e^{F^+(z)}\right) + T_0,$$

$$T_0 = -2\pi i\lambda^{-1}(\lambda-1)^{1/2} e^{F(-1)} + \left(1-2\lambda^{-1}\right)U(\delta-1/2,-1) + (\lambda/2-1)V(\delta,-1) + U(\delta+1/2,0).$$

Далее,

$$S(\delta, z) = \frac{-\pi i z^{\delta-1}}{\lambda-2} e^{F(z)}\left((\lambda-1)\frac{\sqrt{z+a^{-1}} + \left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{z}}{2\left(1-\lambda^{-1}\right)\sqrt{z+1}} + \frac{\sqrt{z+a^{-1}} - \left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{z}}{2\lambda^{-1}\sqrt{z+1}}\right) + S_0/z =$$

$$= -\pi i\left(1-2\lambda^{-1}\right)^{-1} z^{\delta-1} e^{F(z)}\sqrt{z+a^{-1}}/\sqrt{z+1} + S_0/z,$$

$$T(\delta, z) = -\pi i z^{\delta-1/2}\lambda^{-1} e^{F(z)}\left((\lambda-1)\frac{\sqrt{z+a^{-1}} + \left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{z}}{2\left(1-\lambda^{-1}\right)\sqrt{z+1}} - \frac{\sqrt{z+a^{-1}} - \left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{z}}{2\lambda^{-1}\sqrt{z+1}}\right) + T_0 =$$

$$= -\pi i\left(1-2\lambda^{-1}\right) z^{\delta} e^{F(z)}/\sqrt{z+1} + T_0.$$

Заметим, что $T_0 = T(\delta, +\infty) = 0$.

Если обозначить $R(\delta, z) = -\pi i z^{\delta-1} e^{F(z)}/\sqrt{z+1}$, то

$$S(\delta, z) = \left(1-2\lambda^{-1}\right)^{-1}\sqrt{z+a^{-1}}R(\delta, z) + S_0/z,\ T(\delta, z) = \left(1-2\lambda^{-1}\right)zR(\delta, z).$$

Заметим, что $R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right) = -\pi i a^{1-\delta}\Sigma(y)/\left(y^2-1\right)$, независимо от знака y.

Следовательно,

$$\Omega(y) = \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\sqrt{a}T\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right) - yS\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(1-2\lambda^{-1}\right)a^{-1/2}\left(y^2-1\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right) +$$
$$+ \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(-y\left(\lambda(\lambda-2)^{-1}\sqrt{a^{-1}\left(y^2-1\right)+a^{-1}}R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right) + aS_0/\left(y^2-1\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\left(1-2\lambda^{-1}\right)a^{-1/2}\left(y^2-1\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(-ya^{-1/2}\lambda(\lambda-2)^{-1}|y|R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)-ya^{1/2}S_0/\left(y^2-1\right)\right)=$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\left(\left(1-2\lambda^{-1}\right)\left(y^2-1\right)-y\left(1-2\lambda^{-1}\right)^{-1}|y|\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)-ayS_0/\left(y^2-1\right)\right).$$

Если $y>1$, то

$$\Omega(y)=\frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\left(\left(1-2\lambda^{-1}\right)\left(y^2-1\right)-y^2\lambda(\lambda-2)^{-1}\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)-ayS_0/\left(y^2-1\right)\right)=$$

$$= \frac{a^{\delta-1/2}}{2\pi i}\left(\left(\frac{4(1-\lambda)}{\lambda(\lambda-2)}y^2-1+2\lambda^{-1}\right)(-\pi i)a^{1-\delta}\Sigma(y)/\left(y^2-1\right)-ayS_0/\left(y^2-1\right)\right)=$$

$$= \frac{2(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-2)}\frac{y^2-1+a}{y^2-1}\Sigma(y)-\frac{a^{\delta}}{2\pi i}\frac{y}{y^2-1}S_0.$$

Итак,

$$\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma(s)d\rho(s)}{s+y}=\Omega(y)=\frac{2(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-2)}\frac{y^2-1+a}{y^2-1}\Sigma(y)-\frac{a^{\delta}}{2\pi i}\frac{y}{y^2-1}S_0,\ y>1.$$

Так как левая часть ограничена при $y\to 1+0$, то

$$S_0=\pi i a^{1-\delta}\frac{4(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-2)}\Sigma(1),$$

поэтому

$$\Omega(y)=\frac{2(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-2)}\frac{\left(y^2-1+a\right)\Sigma(y)-ay\Sigma(1)}{y^2-1},$$

откуда и следует формула $(1+)$.

Если же $y<-1$, то

$$\Omega(y)_{y<-1}=\frac{a^{\delta-1}}{2\pi i}\left(\left(\left(1-2\lambda^{-1}\right)\left(y^2-1\right)-y\lambda(\lambda-2)^{-1}|y|\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)-ayS_0/\left(y^2-1\right)\right)=$$

$$= \frac{a^{\delta-1}}{2\pi i}\left(\left(\left(1-2\lambda^{-1}\right)\left(y^2-1\right)+y^2\lambda(\lambda-2)^{-1}\right)R\left(\delta, a^{-1}\left(y^2-1\right)\right)-\pi i a^{2-\delta}\frac{4(\lambda-1)\Sigma(1)}{\lambda(\lambda-2)\left(y^2-1\right)}\right)=$$

$$= -\frac{(\lambda-2)^2\left(y^2-1\right)+y^2\lambda^2}{2\lambda(\lambda-2)\left(y^2-1\right)}\Sigma(y)-\frac{2ay(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-2)\left(y^2-1\right)}\Sigma(1)=$$

$$= \frac{\left(-\left((\lambda-1)^2+1\right)2y^2+(\lambda-2)^2\right)\Sigma(y)-\lambda^2y\Sigma(1)}{2\lambda(\lambda-2)\left(y^2-1\right)},$$

откуда и следует формула $(1-)$.

§ 6. РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе рассмотрена система сингулярных интегральных уравнений с ядрами, в которые входят решения задач сопряжения. Построено общее решение этой системы в квадратурах.

Как и в предыдущем параграфе, пусть $\lambda>1$, $\lambda\neq 2$, $\delta=(2\pi i)^{-1}\ln(\lambda-1)$, $x>1$, $W_{\pm}(x)=\pm(1-2\lambda^{-1})\sqrt{1-x^{-2}}$, $D_{\pm}(x)=(W_{\pm}(x)+1)/(W_{\pm}(x)-1)$. Рассмотрим следующие однородные задачи сопряжения на полупрямой $x>1$: $X_{\pm}^{+}(x)=D_{\pm}(x)X_{\pm}^{-}(x)$. У этих задач существуют единственные, с точностью до постоянного множителя, решения, имеющие особенность интегрируемого порядка в $z=1$ и исчезающие на бесконечности:

$$X_{\pm}(z)=(1-z)^{\mp\delta-1/2}\exp\left((2\pi i)^{-1}\int_{1}^{+\infty}(t-z)^{-1}\ln\left((1-\lambda)^{\mp1}D_{\pm}(t)\right)dt\right)$$

(считаем $-\pi<\arg z\le\pi$).

Заметим, что $X_{\pm}(z)=o^{*}\left((z-1)^{-1/2}\right)$ при $z\to 1$.

Обозначим

$$\Theta_{+}(x)=-iX_{-}(-x)/\left(X_{+}^{+}(x)(W_{+}(x)-1)\right),\ A=-\lambda(\lambda-2)^{-1}=i\operatorname{ctg}(\pi\delta),\ a=\lambda^{2}/(4(\lambda-1)),$$

$$M(x)=x(x+1)/(x^{2}-1+a),\ \Sigma(x)=\Theta_{+}(x)\sqrt{x+1}/\left(x\sqrt{x-1}\right),$$

$$\Theta_{-}(x)=x\sqrt{x-1}/\left(\sqrt{x+1}\left(1+a^{-1}(x^{2}-1)\right)\Sigma(x)\right),\ \rho(x)=\sqrt{x^{2}-1},\ \Xi(x)=(x+1)\Sigma(x)/M(x),$$

$$\Sigma_{1}=\Sigma(1),\ \Xi_{1}=\Xi(1).$$

Заметим, что $\Sigma(1)=a^{\delta}$.

В дальнейшем, как правило, будем опускать аргументы функций в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

В предыдущем параграфе были доказаны следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Sigma\,d\rho(t)}{t\pm x}=P_{\pm}\Sigma+Q_{\pm},\ x>1, \qquad (1\pm)$$

где

$$P_{\pm}=\frac{p_{\pm}x^{2}+(\lambda-2)^{2}}{2\lambda(\lambda-2)(x^{2}-1)},\ Q_{\pm}=\mp\frac{\lambda\Sigma_{1}x}{2(\lambda-2)(x^{2}-1)}$$

– дробно-рациональные функции, $p_{+}=4(\lambda-1)$, $p_{-}=-2\left((\lambda-1)^{2}+1\right)$.

Рассмотрим следующую систему сингулярных интегральных уравнений, $x>1$:

$$U_{-}+\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{+}U_{+}dt}{t+x}=V_{-},\ U_{+}-\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{-}U_{-}dt}{t+x}=V_{+}. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что $V_{\pm}\in C[1,+\infty)$ и $V_{\pm}=O(x^{-1})$ при $x\to+\infty$. Решения $U_{\pm}$ будем искать в классе функций, имеющих особенность интегрируемого порядка при $x\to 1+0$ и исчезающих на бесконечности; из (2) немедленно вытекает, что $U_{\pm}\in C[1,+\infty)$.

Переходя от системы (2) к одному уравнению, получаем по формуле $(1+)$:

$$L[U_-]\equiv U_- + \frac{A}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{x\Xi(x)-\Xi_1}{x-1}-\frac{t\Xi(t)-\Xi_1}{t-1}\right)\frac{t-1}{t\Xi(t)}\frac{U_-d\rho(t)}{t-x}=\tilde{V}_-, \tag{3}$$

$$\tilde{V}_- = V_- - \frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Theta_+V_+dt}{t+x}.$$

Опираясь на формулу (1–), построим решение уравнения (3).

Лемма 1. Если U_- – решение уравнения (3), то функция

$$g=L_+[U_-]\equiv\frac{x-1}{x}U_- + \frac{A\Xi}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{s-1}{s\Xi}\frac{U_-d\rho(s)}{s-x} \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$L_-[g]\equiv Mg-\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{Mgd\rho(s)}{s-x}=(1-A^2)\tilde{V}_-. \tag{5}$$

Доказательство.

$$L_-[g]=\frac{x-1}{x}M(x)U_-(x)+\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(M(x)\frac{\Xi(x)}{\Xi(s)}-M(s)\right)\frac{s-1}{s}\frac{U_-(s)d\rho(s)}{s-x}+$$

$$+\left(\frac{A}{\pi}\right)^2\int_1^{+\infty}\frac{M(t)d\rho(t)}{t-x}\int_1^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{\Xi(s)}\frac{s-1}{s}\frac{U_-(s)d\rho(s)}{s-t}=\left(1-(A\rho'(x))^2\right)\frac{x-1}{x}M(x)U_-(x)+$$

$$+\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(M(x)\frac{\Xi(x)}{\Xi(s)}-M(s)\right)\frac{s-1}{s}\frac{U_-(s)d\rho(s)}{s-x}+\frac{A^2}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{s-1}{s}\frac{U_-(s)d\rho(s)}{\Xi(s)(s-x)}K(s,x),$$

$$K(s,x)=\frac{s-x}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{M(t)\Xi(t)d\rho(t)}{(t-x)(t-s)}=\frac{s+1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma d\rho}{t-s}-\frac{x+1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma d\rho}{t-x}=$$

$$=(s+1)P_-(s)\Sigma(s)-(x+1)P_-(x)\Sigma(x)+(s+1)Q_-(s)-(x+1)Q_-(x)=$$

$$=M(s)P_-(s)\Xi(s)-M(x)P_-(x)\Xi(x)+\frac{A\Xi_1}{2a}\frac{s-x}{(s-1)(x-1)}.$$

Следовательно,

$$L_-[g]=(1-A^2)U_-+\frac{A^3}{2\pi ia}\int_1^{+\infty}\frac{\Xi_1U_-d\rho(s)}{(x-1)s\Xi}+$$

$$+\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(M(x)\frac{\Xi(x)}{\Xi(s)}(1-AP_-(x))-M(s)(1-AP_-(s))\right)\frac{s-1}{s}\frac{U_-d\rho(s)}{s-x}.$$

Так как

$$1-AP_-(x)=\frac{2(1-\lambda)}{(\lambda-2)^2}\frac{x^2-1+a}{x^2-1},$$

то

$$L[g]=(1-A^2)\left(U_-+\frac{A}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{\Xi(x)}{\Xi(s)}\frac{x(s-1)}{(x-1)s}-1\right)\frac{U_-d\rho(s)}{s-x}-\frac{A}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Xi_1U_-d\rho(s)}{(x-1)s\Xi}\right)=(1-A^2)\widetilde{V}.$$

Лемма 1 доказана.

Обращая уравнение (5) стандартным методом (см. приложение), получаем: $g=C_-g_1+g_2$, C_- – произвольная постоянная,

$$g_1=\frac{X_-^+/M}{1+A\rho'},\ g_2=\frac{1-A^2}{(1+A\rho')M}\left(\frac{\widetilde{V}_-}{1-A\rho'}+\frac{AX_-^+}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\widetilde{V}_-d\rho(t)/X_-^+}{(1-A\rho')(t-x)}\right).$$

Обратим теперь уравнение (4): $U_-=C_+U_0+C_-U_1+U_2$, где U_0 – решение однородного уравнения (4), C_+ – произвольная постоянная, $U_{1,2}$ – частное решение неоднородного уравнения (4) с правой частью $g_{1,2}$. Согласно приложению,

$$U_0=\frac{x/(x-1)}{1-A\rho'}\Xi X_+^+;$$

$$U_1=\frac{x/(x-1)}{1-A\rho'}\left(d_0\frac{A}{\pi i}\Xi X_+^+\ln(x-1)+\frac{g_1}{1+A\rho'}-\frac{A}{\pi i}\Xi X_+^+\int_1^{+\infty}\left(\frac{g_1\rho'/\Xi}{(1+A\rho')X_+^+}-d_0\right)\frac{dt}{t-x}\right),$$

$$d_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{g_1\rho'/\Xi}{(1+A\rho')X_+^+}=\frac{(\lambda-2)^2}{2\lambda\sqrt{\lambda-1}};\ U_2=\frac{x/(x-1)}{1-A\rho'}\left(\frac{g_2}{1+A\rho'}-\frac{A}{\pi i}\Xi X_+^+\int_1^{+\infty}\frac{g_2d\rho(t)/(\Xi X_+^+)}{(1+A\rho')(t-x)}\right).$$

Лемма 2. Если (вообще говоря, произвольная) функция U имеет особенность интегрируемого порядка при $x\to1+0$ и исчезает на бесконечности, то

$$L[U]=\frac{1}{1-A^2}\left(ML_+[U]-\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho(t)}{t-x}\right).$$

Доказательство. Запишем

$$L[U]=U+\frac{A}{2\pi i}\frac{x\Xi-\Xi_1}{x-1}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x}-\frac{A}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{t\Xi-\Xi_1}{t-1}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x}.$$

Используя равенства

$$\frac{x\Xi-\Xi_1}{x-1}=\frac{\lambda(\lambda-2)}{2(1-\lambda)}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)+\frac{(\lambda-2)^2}{2(1-\lambda)}(x+1)\Sigma+\Xi_1,\ \frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x}=\frac{1}{\Xi}L_+[U]-\frac{x-1}{x\Xi}U,$$

представим второй интеграл в следующем виде:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{t\Xi-\Xi_1}{t-1}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x}=\frac{\lambda(\lambda-2)}{2(1-\lambda)}(I_1+I_2)+\Xi_1I_3,$$

$$I_1=\int_1^{+\infty}(t+1)(P_-\Sigma+Q_-)\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x},\ I_2=-\frac{1}{A}\int_1^{+\infty}(t+1)\frac{t-1}{t\Xi}\frac{\Sigma Ud\rho(t)}{t-x},\ I_3=\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho(t)}{t-x}.$$

Далее,

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{(s^2-1)Ud\rho(s)}{s(s-x)\Xi}\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma d\rho(t)}{t-s}=\pi i\frac{x\Sigma U}{\Xi}-\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\Sigma(t)d\rho(t)}{t-x}\int_1^{+\infty}\frac{s-1}{s}\frac{U(s)d\rho(s)}{\Xi(s)}\left(\frac{t+1}{s-t}-\frac{x+1}{s-x}\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{A}\left(\frac{Ax\Sigma U}{\Xi}+(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)\frac{L_+[U]}{\Xi}-(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}U\right)+$$

$$+\frac{\pi i}{A}\left(-\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{(t^2-1)\Sigma Ud\rho}{t\Xi(t-x)}\right).$$

Следовательно,

$$I_1+I_2=\pi i\frac{x\Sigma U}{\Xi}+\frac{\pi i}{A}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)\frac{L_+[U]}{\Xi}-\frac{\pi i}{A}(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}U-\frac{1}{A}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho}{t-x},$$

так что

$$L[U]=U+\frac{A}{2\pi i}\frac{x\Xi(x)-\Xi(1)}{x-1}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi(t)}\frac{Ud\rho}{t-x}+\frac{A}{2\pi i}\Xi(1)\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho}{t-x}-$$

$$-\frac{A}{2\pi i}\frac{\lambda(\lambda-2)}{2(1-\lambda)}\left(\pi i\frac{x\Sigma U}{\Xi}+\frac{\pi i}{A}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)\frac{L_+[U]}{\Xi}-\frac{\pi i}{A}(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}U-\frac{1}{A}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho}{t-x}\right).$$

Так как

$$\frac{A}{2\pi i}\frac{x\Xi(x)-\Xi(1)}{x-1}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi(t)}\frac{Ud\rho}{t-x}-\frac{A}{2\pi i}\Xi(1)\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi}\frac{Ud\rho}{t-x}=\frac{A}{2\pi i}x\frac{\Xi(x)-\Xi(1)}{x-1}\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\Xi(t)}\frac{Ud\rho}{t-x}=$$

$$=\frac{x}{2}\frac{\Xi(x)-\Xi(1)}{x-1}\left(\frac{1}{\Xi}L_+[U]-\frac{x-1}{x\Xi}U\right)=\frac{x}{2\Xi}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}L_+[U]-\frac{\Xi-\Xi(1)}{2\Xi}U,$$

то

$$L[U]=U+\frac{x}{2\Xi}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}L_+[U]-\frac{\Xi-\Xi(1)}{2\Xi}U+$$

$$+\frac{A}{2\pi i}\frac{\lambda(\lambda-2)}{2(\lambda-1)}\left(\pi i\frac{x\Sigma U}{\Xi}+\frac{\pi i}{A}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)\frac{L_+[U]}{\Xi}-\frac{\pi i}{A}(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}U-\frac{1}{A}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho}{t-x}\right),$$

или

$$L[U]=\left(1-\frac{\Xi-\Xi(1)}{2\Xi}-\frac{A\lambda(\lambda-2)}{4(1-\lambda)}\frac{x\Sigma}{\Xi}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(1-\lambda)}(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}\right)U+$$

$$+\left(\frac{x}{2}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}-\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(1-\lambda)}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)\right)\frac{L_+[U]}{\Xi}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4\pi i(1-\lambda)}\int_1^{+\infty}\frac{ML_+[U]d\rho}{t-x}.$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что, во-первых,

$$1-\frac{\Xi-\Xi(1)}{2\Xi}-\frac{A\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{x\Sigma}{\Xi}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(1-\lambda)}(P_-\Sigma+Q_-)\frac{x^2-1}{x\Xi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\Xi(1)}{2\Xi}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{Ax\Sigma}{\Xi}-\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\left(\frac{p_-x^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)}\Sigma+\frac{\lambda\Sigma(1)x}{2(\lambda-2)}\right)\frac{1}{x\Xi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\Xi(1)}{2\Xi}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{Ax\Sigma}{\Xi}-\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{p_-x^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)}\frac{\Sigma}{x\Xi}-\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{\lambda\Sigma(1)}{2(\lambda-2)\Xi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\Xi(1)}{2\Xi}+\frac{\left(-2\lambda^2x^2-p_-x^2+(\lambda-2)^2\right)\Sigma}{4(\lambda-1)2x\Xi}-\frac{\Xi(1)}{2\Xi}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\Xi(1)}{2\Xi}-\frac{\left(x^2+1-a\right)\Sigma}{2x\Xi}-\frac{\Xi(1)}{2\Xi}=\frac{1}{2}+\frac{\Xi(1)}{2\Xi}-\frac{1}{2}-\frac{\Xi(1)}{2\Xi}=0;$$

во-вторых,

$$\frac{x}{2}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}-\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(1-\lambda)}(x+1)(P_-\Sigma+Q_-)=$$

$$=\frac{x}{2}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}+\frac{\lambda(\lambda-2)}{4(\lambda-1)}\frac{1}{x-1}\left(\frac{p_-x^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)}\Sigma+\frac{\lambda\Sigma(1)x}{2(\lambda-2)}\right)=$$

$$=\frac{x}{2}\frac{\Xi-\Xi(1)}{x-1}+\frac{p_-x^2+(\lambda-2)^2}{8(\lambda-1)(x-1)}\Sigma+\frac{\Xi(1)x}{2(x-1)}=\frac{x}{2}\frac{\Xi}{x-1}+\frac{\left(-2\lambda^2+4\lambda-4\right)x^2+(\lambda-2)^2}{8(\lambda-1)(x-1)}\Sigma=$$

$$=\frac{4(\lambda-1)\left(x^2-1+a\right)+\left(-2\lambda^2+4\lambda-4\right)x^2+(\lambda-2)^2}{8(\lambda-1)(x-1)}\Sigma=\frac{-2(\lambda-2)^2x^2+2(\lambda-2)^2}{8(\lambda-1)(x-1)}\Sigma=$$

$$=\frac{-(\lambda-2)^2}{4(\lambda-1)}M\Xi.$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема. Общее решение уравнения (3) имеет вид $U_-=CU_-^0+U_-^1$, где C – произвольная постоянная,

$$U_-^0=\frac{x/(x-1)}{1-A\rho'}\Xi X_+^+\left(E+d_0\frac{A}{\pi i}\ln(x-1)+\frac{g_1/\left(\Xi X_+^+\right)}{1+A\rho'}-\frac{A}{\pi i}\int_1^{+\infty}\left(\frac{g_1\rho'}{(1+A\rho')\Xi X_+^+}-d_0\right)\frac{dt}{t-x}\right),$$

$$E=\frac{A}{\pi i}\left(\int_1^{e+1}\frac{g_1d\rho/(t-1)}{(1+A\rho')\Xi X_+^+}-d_0+\int_{e+1}^{+\infty}\left(\frac{g_1\rho'}{(1+A\rho')\Xi X_+^+}-d_0\right)\frac{dt}{t-1}\right),$$

$$U_-^1=\frac{x}{1-A\rho'}\left(\frac{g_2/(x-1)}{1+A\rho'}-\frac{A}{\pi i}\Xi X_+^+\int_1^{+\infty}\frac{g_2d\rho/\left((t-1)\Xi X_+^+\right)}{(1+A\rho')(t-x)}\right).$$

Доказательство. Заметим, что в силу (2) функция, имеющая особенность первого порядка при $x\to1+0$, не может быть решением уравнения (3); таким образом, для

построения общего решения достаточно подобрать постоянные так, чтобы устранить эту особенность. Отметим, что $U_-^1 \in C[1,+\infty)$, так как $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{t-1}(t-x)} = 0$ при $x>1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение интегрального уравнения

$$f(x)+\frac{b}{\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(t)d\rho(t)}{t-x}=h(x),\ x>1,\ b\in \mathrm{R},$$

при различных правых частях.

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(t)d\rho(t)}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(t)\rho'(t)dt}{t-z},$$

$$\frac{F^+-F^-}{2\rho'}+b\frac{F^++F^-}{2}=h,\ \left(\frac{1}{\rho'}+b\right)F^+=\left(\frac{1}{\rho'}-b\right)F^-+2h,$$

$$F^+=DF^-+H,\ D=\left(\frac{1}{\rho'}-b\right)/\left(\frac{1}{\rho'}+b\right)=\frac{1-b\rho'}{1+b\rho'},\ H=\frac{2h\rho'}{1+b\rho'}.$$

Если $b=A=-\lambda(\lambda-2)^{-1}$, то

$$D=D_+=\frac{1-b\rho'}{1+b\rho'}=\frac{(\lambda-2)\sqrt{x^2-1}+\lambda x}{(\lambda-2)\sqrt{x^2-1}-\lambda x}.$$

$$X_+(z)=(1-z)^{-\delta-1/2}\exp\left((2\pi i)^{-1}\int\limits_1^{+\infty}(t-z)^{-1}\ln\left((1-\lambda)^{-1}D_+(t)\right)dt\right).$$

Соответственно, $D_+=X_+^+/X_+^-$ (решение однородной задачи), $X_+\in H(-1/2,1/2+\delta)$, $F=X_+Y$, $Y^+-Y^-=H/X_+^+$.

Обозначим $d_0=\lim\limits_{x\to+\infty}H/(2X_+^+)=(1+b)^{-1}\lim\limits_{x\to+\infty}h/X_+^+$, предполагая, что это значение конечно. Если $d_0=0$, то

$$Y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{H/X_+^+}{t-z}dt;$$

если же $d_0\neq 0$, то

$$Y(z)=-\frac{d_0}{\pi i}\ln(1-z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{H/X_+^+-2d_0}{t-z}dt.$$

Окончательно, получаем:

$$F^+=X_+^+\left(-\frac{d_0}{\pi i}\ln(x-1)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\frac{H/X_+^+-2d_0}{t-x}dt+H/(2X_+^+)\right),$$

$$F^- = \frac{1+b\rho'}{1-b\rho'} X_+^+ \left(-\frac{d_0}{\pi i} \ln(x-1) + \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{H / X_+^+ - 2d_0}{t-x} dt - H / \left(2X_+^+\right) \right),$$

$$F^+ - F^- = X_+^+ \left(\left(1 - \frac{1+b\rho'}{1-b\rho'}\right) \left(-\frac{d_0}{\pi i} \ln(x-1) + \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{H / X_+^+ - 2d_0}{t-x} dt \right) + \left(1 + \frac{1+b\rho'}{1-b\rho'}\right) H / \left(2X_+^+\right) \right),$$

$$\frac{F^+ - F^-}{2\rho'} = \frac{1}{1-b\rho'} \left(X_+^+ \frac{bd_0}{\pi i} \ln(x-1) + \frac{H}{2\rho'} - \frac{bX_+^+}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{H / X_+^+ - 2d_0}{t-x} dt \right),$$

$$f = \frac{1}{1-b\rho'} \left(X_+^+ \frac{bd_0}{\pi i} \ln(x-1) + \frac{h}{1+b\rho'} - \frac{bX_+^+}{\pi i} \int_1^{+\infty} \left(\frac{h\rho'}{(1+b\rho')X_+^+} - d_0 \right) \frac{dt}{t-x} \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящему времени теория краевых задач для уравнений смешанного типа превратилась в хорошо разработанную, разветвленную область математики, однако в ней по-прежнему остаются открытые проблемы.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Укажем возможные направления дальнейших исследований по тематике настоящей диссертации.

Применение методов теории аналитических функций комплексного переменного, теории сингулярных интегральных операторов и методов задач сопряжения позволило изучить неклассические краевые задачи, например, задачу типа Дирихле, для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Представляется перспективным применить рассмотренные в диссертации методы интегральных преобразований к изучению различных краевых задач для уравнения Геллерстедта, уравнения второго рода и других уравнений смешанного типа.

Представляется интересным развить методы решения краевых задач для уравнения Гельмгольца, в том числе с неклассическими краевыми условиями, по аналогии с теорией задач сопряжения для аналитических функций.

Примененный в настоящей диссертации метод факторизации посредством интегральных операторов допускает естественное обобщение и распространение на другие уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке.

Вызывает интерес изучение возможности решения в квадратурах различных сингулярных интегральных уравнений и их систем с неклассическими коэффициентами, выражающимися через решения задач сопряжения.

Дальнейшее развитие аппарата канонических функций – решений задач сопряжения также представляется перспективным.

Автор выражает глубокую благодарность акад. РАН, проф. Е.И. Моисееву за научные консультации, внимание и интерес к проделанной работе, а также проф. А.П. Солдатову за многочисленные замечания и рекомендации, способствовавшие улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. – М.: ИЛ, 1962. – 208 с.

2. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа. Дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М., МИАН, 1952.

3. Бабенко К.И. О принципе максимума для уравнения Эйлера-Трикоми // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 777-782.

4. Бабенко К.И. О задаче Трикоми // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 1. С. 14-19.

5. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – М.: Наука, 1972. – 456 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

8. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

9. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. – 208 с.

10. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1970. 34:5. С.1142-1158.

11. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // УМН. 1977. 32:1(193). С. 17-84.

12. Бицадзе А.В. О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 561-564.

13. Бицадзе А.В. О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа // Сообщ. АН Груз. ССР. 1950. Т. 11. № 4. С. 205-210.

14. Бицадзе А.В. К общей задаче смешанного типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78. № 4. С. 621-624.

15. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа. Дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М., 1951.

16. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР, 41. – М: Изд-во АН СССР, 1953. С. 3-59.

17. Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкля // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 6. С. 1091-1094.

18. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 375-376.

19. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

20. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

21. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739-740.

22. Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. – М.: ИЛ, 1949. – 798 с.

23. Векуа И.Н. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сооб. АН Груз. ССР. 1945. Т. VI. № 3. С. 177-183.

24. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

25. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 1977. Т. 13. № 6. С. 1098-1105.

26. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск, НГУ, 1983. – 84 с.

27. Гайдай Н.Н. О существовании спектра для оператора Трикоми // Дифф. уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 31-38.

28. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

29. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

30. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов// УМН. 1957. 12. № 2. С. 43-118.

31. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

32. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Проекционные методы решения уравнений Винера-Хопфа. – Кишинев, 1967. – 164 с.

33. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

34. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений. – М.: ИЛ, 1960. – 421 с.

35. Данфорд , Шварц. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. – М., Мир, 1966. – 1064 с.

36. Девингталь Ю.В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франкля // Изв. вузов. Математика. 1958. Т. 2(3). С. 39-51.

37. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979. – 120 с.

38. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.

39. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. О задаче с косой производной // Матем. сборник. 1969. Т. 78 (120). № 1. С. 148-176.

40. Ерошенков Е.П. О спектре задачи Бицадзе-Самарского // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 169-171.

41. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Учен. зап. Казанского ун-та. 1962. Т. 122 (3). С. 3-16.

42. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

43. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. – Орел: Изд-во Орловск. гос. ун-та, 1999. – 223 с.

44. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О некоторых неклассических особенностях спектральной задачи для эллиптического оператора с условием равенства нулю наклонной производной // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 2. С. 18-21.

45. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 128-143.

46. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифф. уравнения. 1977. Т. 13. № 8. С. 1718-1725.

47. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.

48. Кальменов Т.Ш. О сильных решениях задач Дарбу и Трикоми // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3.

49. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Гылым, 1993. – 327 с.

50. Каратопраклиев Г.Д. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях. 1 // Дифф. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 64-75.

51. Каратопраклиев Г.Д. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 78-84.

52. Кароль И.Л. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Матем. сб. 1956. Т. 38 (80). № 3. С. 261-283.

53. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. С. 181-183.

54. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 15-41.

55. Кислов Н.В. Краевая задача для дифференциально-операторного уравнения второго порядка типа уравнения Трикоми // Дифф. уравнения. 1975. Т. 11. № 4. С. 718-726.

56. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск: НГУ, 1990. – 132 с.

57. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 312 с.

58. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209-292.

59. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. – М., Мир, 1989. – 360 с.

60. Крикунов Ю.М. Об одной задаче Геллерстедта. // Известия вузов. Математика. 1975. № 6. С. 56-59.

61. Кузьмин А.Г. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 77-83.

62. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Л.: ЛГУ, 1990. – 208 с.

63. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1950. Т. 70. № 3. С. 373-376.

64. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

65. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

66. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10-ти т. 4-е изд., стер. Т. 6. Гидродинамика. – М., 1988. – 736 с.

67. Линь Цзянь-бин. О некоторых задачах Франкля // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. 1961. № 3(13). С. 28-39.

68. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

69. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // В сб. «Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления». Т. 27. – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 131-228.

70. Мамедов Я.Н. О полноте корневых функций некоторых краевых задач // Дифф. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 167-169.

71. Мамедов Я.Н. О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 163-168.

72. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957. – 256 с.

73. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281-1284.

74. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38. № 1. С. 129-131.

75. Мирсабуров М., Мирсабурова Г.М. Задача Трикоми-Нахушева // Дифф. уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 55-63.

76. Мирсабуров М., Мирсабурова Г.М. О задаче со смещением с условием Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 359-367.

77. Мирсабуров М., Рузиев М.Х. Об одной краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47. № 1. С. 112-119.

78. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

79. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F. Tricomi // ДАН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053-1056.

80. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 234 с.

81. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 423 с.

82. Моисеев Е.И. Некоторые теоремы единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. Т. 238. № 3. 1978.

83. Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1987. Т. 242. № 1. С. 48-51.

84. Моисеев Е.И. О задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. С. 275-278.

85. Моисеев Е.И. Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа. Дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1981.

86. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794-798.

87. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифф. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 177-179.

88. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: МГУ, 1988. – 150 с.

89. Моисеев Е.И. О расположении спектра краевой задачи со смешанными краевыми условиями // Дифф. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 123-135.

90. Моисеев Е.И. О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифф. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 97-106.

91. Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 93-103.

92. Моисеев Е.И. Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 7. С. 1160-1172.

93. Моисеев Е.И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифф. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1229-1237.

94. Моисеев Е.И. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 110-121.

95. Моисеев Е.И. О существовании и единственности решения неклассической краевой задачи // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 448-451.

96. Моисеев Е.И. О единственности решения одной трехмерной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Дифф. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 1591-1595.

97. Моисеев Е.И., Аббаси Н. О базисности собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44. № 6. С. 831-836.

98. Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О базисности собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности второго рода // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1735-1740.

99. Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О базисности собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности и нечетности второго рода // Докл. РАН. 2010. Т. 432. № 4. С. 1-5.

100. Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 718-725.

101. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об одной спектральной задаче для оператора Лапласа на квадрате со спектральным параметром в граничном условии // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 5. С. 662-667.

102. Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. Базисность и полнота некоторых специальных функций. – М.: Вычислительный центр РАН. 2004. – 146 с.

103. Монахов В.Н., Семенко Е.В. Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.

104. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 513 с.

105. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука. 2006. – 287 с.

106. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.

107. Новокшенов В.Ю. Сингулярное интегральное уравнение с малым параметром на конечном отрезке // Матем. сб. 1978. Т. 105 (147). № 4. С. 543–573.

108. Овсянников Л.В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.

109. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

110. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // В сб. «Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1969» – М: ВИНИТИ, 1971. – С. 7-252.

111. Пальцев Б.В. Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. “Слабо” несамосопряженные регулярные ядра // Изв. АН СССР, сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 591–634.

112. Пальцев Б.В. Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР, сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.

113. Пальцев Б.В. Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Изв. РАН, сер. матем. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.

114. Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // Журн. экспер. и теор. физики. 1971. Т. 60. Вып. 1. С. 389-399.

115. Полосин А.А. О краевой задаче для уравнения Трикоми в специальной области // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1101-1111.

116. Полосин А.А. О базисности одной возмущенной тригонометрической системы функций. // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 1000-1003.

117. Полосин А.А. О расположении спектра смешанной краевой задачи в квадрате // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1095-1100.

118. Полосин А.А. О решении одного сингулярного интегрального уравнения // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 710-714.

119. Полосин А.А. О расположении спектра смешанной краевой задачи в полукруге // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 641-652.

120. Полосин А.А. Об асимптотическом решении одной системы уравнений Винера-Хопфа с кусочно-постоянными образами ядер // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43. № 9. С. 1197-1205.

121. Полосин А.А. Некоторые интегральные преобразования решений задач сопряжения // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1427-1432.

122. Полосин А.А. Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами, содержащими решения задач сопряжения // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1457-1462.

123. Полосин А.А. Об асимптотике спектра интегрального оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1516-1520.

124. Полосин А.А. О расположении спектра и отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной с переменным углом наклона // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1466-1473.

125. Полосин А.А. О задаче с отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта // Дифф. уравнения. 2012. Т. 48. № 10. С. 1428-1442.

126. Полосин А.А. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1213-1220.

127. Полосин А.А. О собственных функциях оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Доклады Академии наук. 2017. Т. 475. № 6. С. 614-617.

128. Полосин А.А. О спектре и собственных функциях оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1180-1194.

129. Полосин А.А. О некоторых свойствах сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 3. С. 423-424.
130. Полосин А.А. О задаче с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в круге // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 492-501.
131. Полосин А.А. О смешанной задаче с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 10. С. 1399-1410.
132. Пономарев С.М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. С. 39-40.
133. Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1981.
134. Прандль Л. Гидроаэромеханика. – Ижевск: НИЦ, "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 576 стр.
135. Прёсдорф З. Линейные интегральные уравнения // В сб. «Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления». Т. 27. – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 5-130.
136. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
137. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. – Изд-во Саратовского университета, Самарский филиал, 1992. – 162 с.
138. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса // Дифф. уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 565-567.
139. Родионова И.Н., Бушков С.В. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Трикоми // Тр. Второй Всеросс. науч. конф. (1-3 июня 2005 г.). Ч. 3, Дифф. уравнения и кр. задачи, Матем. моделир. и кр. задачи. – СамГТУ, Самара, 2005. – С. 195-198.
140. Рузиев М.Х. Краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Доклады АН РУз. 2007. № 6. С. 5-8.
141. Рузиев М.Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Изв. вузов, Математика. 2010. № 11. С. 41-49.
142. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. – М.: ВЦ АН СССР, 1965. – 236 с.
143. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: Физматлит. 2014. – 304 с.
144. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1974. – 156 с.

145. Салахитдинов М.С. Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // Доклады Адыгской (Черкесской) МАН. 2007. Т. 9. № 1. С. 92-97.

146. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 5. С. 748-760.

147. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Изд-во НУУз, 2005. – 224 с.

148. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 110-119.

149. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

150. Сахнович Л.А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке. УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 69-129.

151. Севостьянов Г.Д. Краевая задача Трикоми для полуполосы и четверти плоскости // Волжск. матем. сб. 1965. Вып. 3. С. 312-320.

152. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

153. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

154. Солдатов А.П. О единственности решения одной задачи А.В. Бицадзе // Дифф. уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 143-146.

155. Солдатов А.П. Об одной задаче теории функций // Дифф. уравнения. 1973. Т. 9. № 2. С. 325-332.

156. Солдатов А.П. Один класс сингулярных интегральных уравнений со сдвигом некарлемановского типа // Дифф. уравнения, 1975, т. 11, № 1, с. 137-150.

157. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.

158. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696-698.

159. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. II. Теорема существования // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 16-18.

160. Солдатов А.П. Задача Римана-Гильберта для системы Лаврентьева-Бицадзе // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1649-1659.

161. Солдатов А.П. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Научн. тр. III межд. сем. «Совр. проблемы прочности», Ст. Русса, 1999. – Новгород: НовГУ, 1999. Т. 1. С. 119-125.

162. Солдатов А.П. Об индексе операторов с концевым символом // Изв. РАН, сер. матем. 1999. Т. 63. № 4. С. 171-206.

163. Солдатов А.П. Задача Пуанкаре для уравнения смешанного типа с данными на всей границе // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 5. Актуальные проблемы математики и механики. Мат. межд. научн. конф. – Казань, УНИПРЕСС, 2000. С. 194-198.

164. Солдатов А.П. О решениях системы Лаврентьева-Бицадзе, допускающих нули бесконечного порядка // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1101-1105.

165. Солдатов А.П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. I. Операторы типа свертки на полуоси // Дифф. уравнения. 2000. Т. 36. № 9. С. 1209-1219.

166. Солдатов А.П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. II. Основные построения // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 825-838.

167. Солдатов А.П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. III. Операторы нормального типа // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1364-1376.

168. Солдатов А.П. Задача Пуанкаре для уравнения смешанного типа // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 447-451.

169. Солдатов А.П. Краевые задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с данными на всей границе // В сб. научных работ «Неклассические уравнения математической физики». – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 249 с. – С. 321-340.

170. Солдатов А.П. Задача *R* для системы Лаврентьева-Бицадзе в весовых классах Харди // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1418-1430.

171. Солдатов А.П. Задачи Римана-Гильберта для системы Лаврентьева-Бицадзе в смешанной области с характеристическими участками границы // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38. № 12. С. 1653-1663.

172. Солодовников И.Е. Обобщенная задача Геллерстедта для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$ // Тр. сем. по кр. задачам. Казань. 1973. Вып. 10. С. 130-139.

173. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 418 с.

174. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с.

175. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИЛ, 1957. – 443 с.

176. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 299 с.

177. Флайшер Н.М. Об одной задаче Франкля для уравнения Лаврентьева в случае неограниченной области // Изв. вузов. Математика. 1966. № 6. С. 152-156.

178. Франкль Ф.И. О задачах С.А.Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. 1945. Сер. 9. Т. 2. С. 121-142.

179. Франкль Ф.И. К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. № 5. С. 387-422.

180. Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 196-202.

181. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – 712 с.

182. Чаплыгин С.А. Полное собрание сочинений. Т. II. О газовых струях. – АН СССР, 1933. – 290 с.

183. Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.

184. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1996. № 3. С. 68-76.

185. Хиршман И.И., Уиддер Д.В. Преобразования типа свертки. – М.: ИЛ, 1958. – 312 с.

186. Шифрин Э.Г. О единственности "в целом" решения прямой задачи Лаваля // Журн. вычислит. мат. и матем. физики. 1978. Т. 18. № 2. С. 509-512.

187. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119-147.

188. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6. № 4. P. 455-470.

189. Aziz A.K., Schneider M. On Uniqueness of Frankl-Morawetz Problem in R^2 // Monatsch. Math. 1978. V. 85. № 4. P. 265-276.

190. Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions of the Tricomi operator // Duke Math. J. 1999. V. 98. № 3. P. 465-483.

191. Bers L. Results and Conjectures in the Mathematical Theory of Subsonic and Transonic Gas Flows // Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. P. 79-104.

192. Carleman T. Sur la resolution de certaines equations integrals // Arkiv f. M.A.O.F. Bd. 16. № 26. 1922.

193. Cibrario M. Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Accademia di scienze e lettere, Instituto Lombardo, Rendiconti. 1932. V. 65. P. 889-906.

194. Cibrario M. Alcuni teoremi di esistenza e di unicita per l'equatione $xz_{xx} + z_{yy} = 0$ // Atti R. Acc. Torino. 1932-1933. V. 68.

195. Gellerstedt S. Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Ark. Mat. Astron. Fysik. 1938. V. 26A. № 3. P. 1-32.

196. Gellerstedt S.G. Sur un problème aux limites pour une equation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte: These pour le doctorat. – Uppsala, 1935.

197. Germain P., Bader R. Sur le problème de Tricomi // C.R. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232. P. 463-465.

198. Germain P., Bader R. Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte // Bull. Soc. Math. de France. 1953. V. 81. P. 145-174.

199. Kuz'min A. G. Boundary-Value Problems for Transonic Flow. – Wiley and Sons, 2002. – 316 p.

200. Langer R.E. On the Asympthotic Solutions of Differential Equations, with an Application to the Bessel Functions of Large Complex Order // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 447-480.

201. Lonseth A.T. Sources and applications of integral equations // SIAM Rev. 1977. V. 19, № 2. P. 241-278.

202. Lupo D., Morawetz C.S., Payne K.R. On closed boundary value problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Comm. Pure Appl. Math. 2007. V. 60. № 9. P. 1319-1348.

203. Manwell A.R. On general conditions for the existence of certain solutions of the equations of plane transonic flow. // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. V. 12. № 3. P. 250-258.

204. Manwell A.R. A uniqueness theorem for the moving medium reduced wave equation // Applicable Analysis. 1981. V. 12. № 3. P. 215-228.

205. Moiseev E. Spectral characteristics of some nonlocal boundary-value problems // Computers and Mathematics with Applications. 1997. V. 34. № 5-6. P. 649-655.

206. Moiseev E.I., Abbasi N. On the completeness of eigenfunctions of the Frankl problem with the oddness condition and with the discontinuity of the gradient of solution // Integral Transforms and Special Functions. 2009. V. 20. № 2. P. 155-160.

207. Moiseev E.I., Nefedov P.V. Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D domain // Integral Transforms and Special Functions. 2012. V. 23. № 10. P. 761-768.

208. Moiseev E.I., Nefedov P.V. Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions. 2013. V. 24. № 7. P. 554-560.

209. Moiseev E.I., Nefedov P.V. Gellerstedt problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions. 2014. V. 25. № 7. P. 509-512.

210. Moiseev E.I., Gulyaev D.A. The completeness of the sines and cosines in the space of integrable functions // Integral Transforms and Special Functions. 2018. V. 29. № 1. P. 16-20.

211. Morawetz C.S. A Uniqueness Theorem for Frankl's Problem // Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. № 4. P. 697-703.

212. Morawetz C.S. On the non-existence of continuous transonic flow past profiles // Comm. Pure and Appl. Math., I. 1956. V. 9. № 1. P. 45-68; – II. 1957. V. 10. № 1. P. 107-131; – III. 1958. V. 11. № 1. P. 129-144.

213. Morawetz C.S. A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type // Comm Pure and Appl Math. 1958. V. 11. № 3. P. 315-331.

214. Morawetz C.S. Non-existence of transonic flow past a profile // Comm. Pure and Appl. Math. 1964. V. 7. № 3. P. 357-367.

215. Morawetz C.S. Mathematical problems in transonic flow // Canadian Math. Bull. 1986. V. 29. № 2. P. 129-139.

216. Morawetz C.S. Mixed equations and transonic flow // J. Hyperbolic Diff. Eq. 2004. № 1. P. 1-26.

217. Popivanov N., Schneider M. On M.H. Protter problems for the wave equation in R3 // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 194. P. 50–77.

218. Popivanov N., Popov T. Singular solutions of Protter's problem for the (3 + 1)-D wave equation // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15, № 1. P. 73–91.

219. Popivanov N., Popov T., Scherer R. Asymptotic expansions of singular solutions for (3 + 1)-D Protter problems // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 331. P. 1093–1112.

220. Popivanov N., Popov T., Scherer R. Singular solutions with exponential growth to Protter's problems // Sib. Adv. Math. 2013. V. 23. № 3. P. 219-226.

221. Protter M.H. Uniqueness Theorems for the Tricomi Problem. // J. Rat. Mech. & Anal. 1953. V. 2. № 1. P. 107-114.

222. Protter M. H. An existence theorem for the generalized Tricomi problem // Duke Math. J. 1954. V. 21. № 1. P. 1-8.

223. Protter M. H. A boundary value problem for the wave equation and mean value problems // Ann. Math. Stud. 1954. V. 33. P. 247-257.

224. Protter M. H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Rat. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 435-446.

225. Protter M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line // Canadian J. of Math. 1954. V. 6. № 4. P. 542-553.

226. Protter M.H. Equations of mixed type by M.M. Smyrnov // Bull. (New series) Amer. Math. Soc. 1979. V. 1. № 3.

227. Rassias J.M. On Mixed Type Partial Differential Equations // São Carlos / Sp. / Brasil / Univ. São Paolo, August 11, 1988 – September 9, 1988.

228. Tarkhanov N.N. On the Root Functions of General Elliptic Boundary Value Problems // Complex Analysis and Operator Theory. 2006. № 1. P. 115-141.

229. Ukai S. Solution of Monoenergetic Neutron Transport Equation for a Finite Slab by Laplace Transformation // J. of Math. Anal. and Appl. 1969. № 27. P. 323-337.

230. Ukai S. Asymptotic Distribution of Eigenvalues of the Kernel in the Kirkwood-Riseman Integral Equation // J. of Math. Physics. 1971. V. 12. № 1. P. 83-92.

231. Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Sitzungsber. Preuss. Acad. d. Wiss. 1931. P. 696-706.

232. Zaremba S. Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann // J. Math. Pures Appl. 1927. V. 6. P. 127-163.