ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2018, № 6, с. 87–93

УДК 532.685

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВНУТРИ ВЫСОКОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

© 2018 г. Н. Е. Леонтьев*, Е. И. Рощин**

МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва
**E-mail: leontiev_n@mail.ru*
***E-mail: evg.roschin@gmail.com*

Поступила в редакцию 07.02.2018 г.

Предложена модель для описания медленного (безынерционного) течения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью внутри высокопористой среды над непроницаемым основанием. Течение жидкости описывается законом фильтрации Бринкмана, на нижней границе ставится условие проскальзывания Навье. Получено уравнение для толщины слоя жидкости, которое оказывается частным случаем нелинейного уравнения теплопроводности. Изучаются решения в виде бегущих волн и автомодельные решения, описывающие растекание жидкости.

Ключевые слова: течение в пористой среде, уравнение Бринкмана, безнапорное течение, свободная поверхность.

DOI: 10.31857/S056852810002304-5

В работе предлагается уравнение для описания безнапорной фильтрации в высокопористой среде в случае пологой свободной поверхности. Уравнение может рассматриваться как обобщение известных гидравлических моделей, используемых для описания медленных течений тонких пленок вязкой жидкости [1] и пологих безнапорных течений в пористых средах с малой пористостью [2, 3]. Построенная модель может быть интересна для ряда практических приложений, в частности для описания пропитки пористых сред при производстве композиционных материалов.

1. УРАВНЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ В ВЫСОКОПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается медленное (безынерционное) течение слоя весомой вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду с пористостью, близкой к единице. Течение жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнением Бринкмана

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad -\operatorname{grad} p - \frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \mu_1\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{g} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации, p — давление, ρ, μ — плотность и динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость пористой среды, μ_1 — коэффициент с размерностью динамической вязкости, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Система (1.1) справедлива при малых числах Рейнольдса, $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho u d}{\mu} \ll 1$, где d — характерный размер внутрипорового пространства.

Для простоты будем считать, что течение плоское, а непроницаемая стенка, ограничивающая снизу насыщенную жидкостью пористую среду, горизонтальна. Верхняя свободная поверхность слоя жидкости внутри пористой среды описывается неизвестной функцией $y = h(x, t)$, где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты (ось x направлена вдоль дна, ось y — вверх, против силы тяжести), t — время. Толщина слоя жидкости h предполагается малой по сравнению с характерным горизонтальным размером течения L, $h(x, t) \ll L$; свободная поверхность слоя считается пологой, $\dfrac{\partial h}{\partial x} \ll 1$.

На нижней поверхности ставятся условие проскальзывания Навье для касательной компоненты скорости фильтрации u_x и условие непротекания

$$\left.\left(u_x - b\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = 0$$

где b — постоянная длина скольжения (подчеркнем, что постановка условия проскальзывания не связана, вообще говоря, с молекулярным проскальзыванием или супергидрофобностью подстилающей поверхности [4]).

На свободной поверхности ставятся (а) условие непротекания, (б) условие непрерывности давления и (в) условие для тензора скоростей деформаций, вычисленного по скорости фильтрации (формальный аналог условия отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности в свободной вязкой жидкости)

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - mD)\big|_{y=h(x,t)} = 0, \quad p\big|_{y=h(x,t)} = p_0 = \text{const}, \quad e_{ij}n_j\tau_i\big|_{y=h(x,t)} = 0, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к свободной поверхности, $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к свободной поверхности (напомним, что рассматривается плоское течение), m — пористость, D — скорость движения свободной поверхности (как геометрического объекта) по нормали к ней [5], ∇_i — производная по i-й пространственной координате; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Подчеркнем, что условия (б) и (в) являются эвристическими гипотезами, которые мотивируются, в частности, высокой пористостью скелета ($m \approx 1$). При постулировании условия (б) предполагается, что капиллярная разность давлений на свободной поверхности либо нулевая (если влияние поверхностного натяжения мало), либо постоянна вдоль всей свободной поверхности, а влиянием вязкости при написании баланса потока нормальной компоненты импульса на разрыве можно пренебречь (в классической гидромеханике этому требованию соответствует пренебрежение слагаемым, которое пропорционально свертке $e_{ij}n_in_j$). Возможные обобщения условия (с) обсуждаются ниже в разд. 4.

В приближении тонкой пленки [1, 6] локальный (в фиксированном вертикальном сечении в фиксированный момент времени) профиль скорости $U(y) = u_x(x, y, t)$ находится из решения краевой задачи

$$-\rho g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\mu}{k}\cdot U(y) + \mu_1 U''(y) = 0, \quad bU'(0) = U(0), \quad U'(h) = 0 \tag{1.2}$$

после чего дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию толщины слоя, определяется из интегрального закона сохранения массы

$$m\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad Q = \int_0^h U(y)dy$$

После введения безразмерных величин

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu_1}{\mu}\cdot\frac{k}{l^2}, \quad b_1 = \frac{b}{l}, \quad h_1 = \frac{h}{l}, \quad x_1 = \frac{x}{L}, \quad t_1 = \frac{\rho g l k}{m\mu L^2}\cdot t$$

где l, $l \sim h$, — характерный вертикальный масштаб задачи (характерная толщина слоя), уравнение для толщины слоя принимает вид нелинейного уравнения теплопроводности (индекс “1”, соответствующий безразмерным переменным, здесь и далее, если не оговорено противное, опускается)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right), \quad F(h) = h + \frac{\varepsilon^2\left(\exp\left(\frac{-2h}{\varepsilon}\right) - 1\right)}{(\varepsilon + b) + (\varepsilon - b)\exp\left(\frac{-2h}{\varepsilon}\right)} \tag{1.3}$$

В уравнение (1.3) входят два безразмерных параметра ε и b, которые определяют соответственно соотношение дарси- и бринкман-слагаемых в уравнении Бринкмана и влияние проскальзывания на подстилающей поверхности. Отметим, что для высокопористых сред параметр ε не обязательно мал.

В отсутствие проскальзывания (при $b = 0$) функция $F(h)$ принимает особенно простой вид: $F(h) = h - \varepsilon \operatorname{th}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)$.

При стремлении толщины слоя к нулю поведение функции $F(h)$ определяется разложением

$$F(h) = \frac{b}{\varepsilon^2} \cdot h^2 + \frac{\varepsilon^2 - 3b^2}{3\varepsilon^4} \cdot h^3 + \ldots,\ h \to 0$$

и в случае прилипания на дне ($b = 0$) и отсутствия пористой среды ($m = 1$, $\mu_1 = \mu$) уравнение (1.3) асимптотически переходит в известное уравнение течения тонкой пленки вязкой жидкости, которое в размерных переменных имеет вид [6]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

(для осуществления предельного перехода $h \to 0$ можно не требовать стремления проницаемости k к бесконечности, так как k входит в члены более высокого порядка по h).

В противоположном случае $h \to \infty$ уравнение (1.3) асимптотически переходит в известное уравнение Буссинеска для пологой безнапорной фильтрации в рамках закона Дарси [2, 3], которое в размерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k\rho g}{m\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

Формальное условие на разрыве обычным образом получается из интегрального закона сохранения массы и при постоянной пористости имеет вид

$$[h]D + \left[F(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right] = 0, \quad D = \frac{dx_*(t)}{dt} \tag{1.4}$$

где $x_*(t)$ — положение разрыва и, как и раньше, D — скорость движения поверхности разрыва; квадратные скобки обозначают скачок величины при переходе через разрыв. В частном случае слабого разрыва h отсюда вытекает, что в слое ненулевой толщины слабых разрывов первых производных распространяться не может, а при растекании слоя по сухому пористому скелету (движение по нулевому фону $h \equiv 0$) на передней кромке формально должно выполняться условие равенства нулю потока массы

$$\lim_{x \to x_*(t)} \left(F(h) \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь важно подчеркнуть, что этот вывод условия (1.4), строго говоря, справедлив при предположении о том, что выражение для потока массы не меняет своего вида при стремлении к разрыву с обеих сторон от него. С физической точки зрения в окрестности передней кромки с большим или бесконечным тангенсом угла наклона поверхности предположения теории тонкого слоя теряют свою силу.

2. РЕШЕНИЯ С БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ

Простейшие решения уравнения (1.3), зависящие от переменной $\zeta = x - Vt$, $V = \mathrm{const}$ (решения в виде бегущей волны), находятся из уравнения

$$-Vh'(\zeta) = (F(h(\zeta)) \cdot h'(\zeta))'$$

которое интегрируется в квадратурах

$$\zeta + C_2 = -\int \frac{F(h)dh}{V \cdot h + C_1}, \quad C_1,\ C_2 = \mathrm{const}$$

При $C_1 = 0$ возможны решения, распространяющиеся по нулевому фону $h \equiv 0$ с выполнением условия (1.5). На передней границе волны (в окрестности точки ζ_0, такой, что $h(\zeta_0) = 0$) асимптотическое поведение формы свободной границы при $\zeta \to \zeta_0$ определяется соотношениями $h \sim \eta^{1/2}$ в случае проскальзывания ($b \neq 0$) и $h \sim \eta^{1/3}$ в случае прилипания ($b = 0$), где $\eta = |\zeta - \zeta_0|$ — расстояние до передней кромки слоя жидкости.

В частном случае $V = 0$ из общего решения получаются решения со стационарной формой свободной поверхности $h(x)$

$$G(h) = Ax + B, \quad A,\ B = \text{const}, \quad G(h) = \int\limits_0^h F(s)ds$$

причем при $b \neq \varepsilon$

$$G(h) = \frac{\varepsilon^2 h}{\varepsilon - b} + \frac{h^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{b^2 - \varepsilon^2}\ln\frac{(\varepsilon + b)\exp\left(\dfrac{2h}{\varepsilon}\right) + \varepsilon - b}{2\varepsilon}$$

а при $b = \varepsilon$

$$G(h) = \frac{h^2}{2} - \frac{\varepsilon h}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 - \exp\left(\frac{-2h}{\varepsilon}\right)\right)$$

Практический интерес может представлять случай распространения нетривиального решения в виде бегущей волны по ненулевому фону $h = h_0 = \text{const}$ (последний, очевидно, также является решением с бегущей волной). Склейка этих решений осуществляется с помощью, вообще говоря, сильного разрыва, движущегося со скоростью $D = V$, на котором толщина слоя меняется от h_0 до h_f, $h_f \geq h_0$. Условие сохранения массы (1.4) в этом случае дает решение за скачком в виде

$$\zeta + C = -\int\frac{F(h)dh}{V\cdot(h - h_0)}, \quad C = \text{const}$$

конкретное значение толщины h_f слоя жидкости за скачком определяется из дополнительных условий.

3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКА

Другим простейшим классом решений являются автомодельные решения, зависящие от переменной $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$. По-видимому, впервые на существование таких решений для уравнения теплопроводности с нестепеннóй зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры указал Н.А. Дмитриев, о чем упоминается в [7] (для линейного уравнения теплопроводности такие решения были указаны еще Ламе и Клапейроном [8]). Впоследствии автомодельные и неавтомодельные решения аналогичного или более общего вида в задачах о растекании жидкости или распространении фронтов рассматривались рядом авторов [9–17] (отметим также, что известны неавтомодельные классы точных решений с компактным носителем [18]).

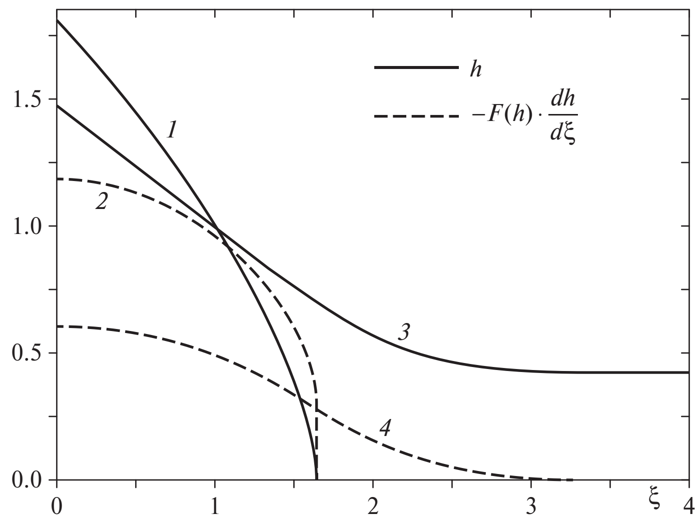
В случае плоских течений автомодельные решения вида $h = h(\xi)$ находятся из уравнения

$$\xi\frac{dh(\xi)}{d\xi} + 2\frac{d^2G(h(\xi))}{d\xi^2} = 0$$

Такие решения могут описывать растекание жидкости от расположенного в сечении $x = 0$ источника с интенсивностью, пропорциональной $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

В зависимости от конкретных определяющих параметров здесь возможны как решения, распространяющиеся по ненулевому фону, так и решения, распространяющиеся по нулевому фону (решения с компактным носителем). В последнем случае из общего условия на разрыве $[h(\xi)]\xi + 2[F(h(\xi))h'(\xi)] = 0$ получается условие $F(h(\xi_0))\cdot h'(\xi_0) = 0$, где ξ_0 — автомодельная координата передней кромки растекающейся жидкости ($h(\xi_0) = 0$). Асимптотика решения около передней кромки определяется выражением $h \sim |\xi_0 - \xi|^{1/2}$ в случае проскальзывания на подстилающей поверхности ($b \neq 0$) и $h \sim |\xi_0 - \xi|^{1/3}$ — в случае прилипания ($b = 0$), причем в обоих случаях условие баланса массы на передней кромке выполняется.

В качестве иллюстрации на фиг. 1 показаны графики толщины слоя $h(\xi)$ и величины $-F(h)h'(\xi)$, пропорциональной коэффициенту в зависимости локального расхода от времени $Q \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, для авто-



Фиг. 1. Толщина слоя $h(\xi)$ и величина $-F(h)h'(\xi)$ для автомодельных плоских течений при $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.2$: *1*, *2* — растекание по нулевому фону; *3*, *4* — растекание по ненулевому фону

модельных плоских течений в случае растекания по нулевому (кривые *1*, *2*) и ненулевому (кривые *3*, *4*) фону.

Приведем числовую оценку. Для волокнистой пористой среды с диаметром волокон $d \sim 100$ мкм при $1 - m \sim 10^{-2}$ проницаемость k имеет порядок $10^2 d^2 \sim 10^{-6}$ м^2 [19]. Для течения глицерина ($\rho \sim 10^3$ кг/м^3, $\mu_1 \sim \mu \sim 1$ Па·с) в поле тяжести для случая характерных размеров $l \sim 1$ см, $L \sim 1$ м характерное время движения имеет порядок 10^4 с, скорость движения передней границы жидкости — 10^{-4} м/с, при этом характерное число Рейнольдса существенно меньше единицы: $\mathrm{Re} \sim 10^{-5}$.

Практический интерес также могут представлять аналогичные осесимметрические автомодельные решения вида $h = h(\xi)$, где $\xi = \dfrac{r}{\sqrt{t}}$, r — радиус цилиндрической системы координат. Толщина слоя жидкости находится из уравнения

$$\xi^2 \frac{dh(\xi)}{d\xi} + 2\frac{d}{d\xi}\left(\xi \cdot \frac{dG(h(\xi))}{d\xi}\right) = 0$$

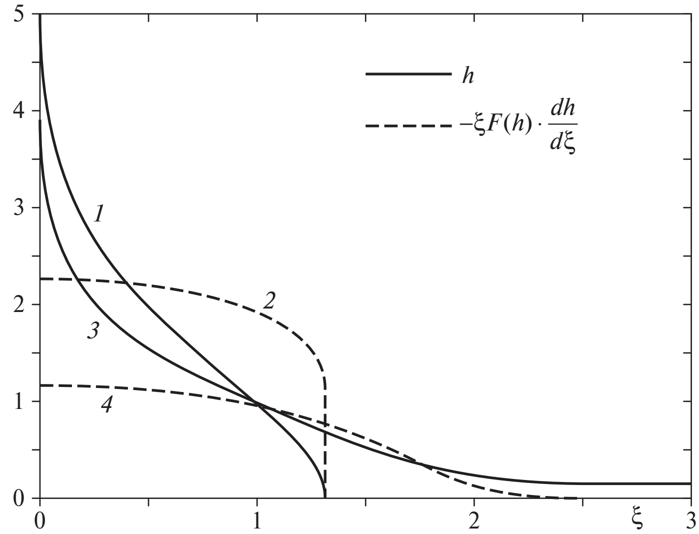
В осесимметрическом случае такие решения описывают растекание от источника постоянной интенсивности, расположенного на оси симметрии $r = 0$, причем около оси производная $h'(\xi)$ стремится к бесконечности. Здесь также возможны решения, распространяющиеся как по ненулевому, так и по нулевому фону. Во втором случае асимптотическое поведение толщины у передней кромки такое же, как в плоском случае.

Для иллюстрации на фиг. 2 приведены зависимости толщины слоя $h(\xi)$ и величины $-\xi F(h)h'(\xi)$, пропорциональной локальному расходу через цилиндрическую поверхность $r = \mathrm{const}$, для автомодельных осесимметрических течений при растекании по нулевому (кривые *1*, *2*) и ненулевому (кривые *3*, *4*) фону.

4. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ КАПИЛЛЯРНОЙ КАЙМЫ

Над поверхностью жидкости, текущей через пористую среду, может образовываться зона с неполным насыщением (капиллярная кайма), которая может оказывать дополнительное сопротивление основному течению. Качественным аналогом такого тормозящего действия может служить известное демпфирующее влияние пены [20] или поплавков [21, 22] на поверхности колеблющейся в баке чистой жидкости.

Для пологих течений в первом приближении можно считать, что поперек капиллярной каймы давление меняется на постоянную величину, а сопротивление ненасыщенной зоны учитывается условием скольжения Навье.



Фиг. 2. Толщина слоя $h(\xi)$ и величина $-\xi F(h)h'(\xi)$ для автомодельных осесимметрических течений при $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.2$: *1*, *2* — растекание по нулевому фону; *3*, *4* — растекание по ненулевому фону

В этом случае в краевой задаче (1.2) условие на верхней границе заменяется условием (в размерных переменных) $aU'(h) = -U(h)$, где a — эффективная длина скольжения; отсутствие капиллярной каймы формально соответствует предельному переходу $a \to \infty$.

Учет ненасыщенной зоны приводит к несколько более громоздким соотношениям, например, разложение функции $F(h)$ имеет вид

$$F(h) = \frac{ab}{(b+a)\varepsilon^2}h^2 + \frac{\varepsilon^2(a^2+b^2-ab)-3a^2b^2}{3\varepsilon^4(a+b)^2}h^3 + \ldots, \quad h \to 0$$

при этом качественного изменения результатов не происходит.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая приближенная модель ползущего гравитационного течения тонкого слоя жидкости со свободной поверхностью через высокопористую среду. В рамках модели рассмотрен ряд простейших решений (стационарные, с бегущими волнами, автомодельные), которые могут использоваться для экспериментального определения параметров моделей течения в пористых средах (длины скольжения и др.).

Модель очевидным образом может быть обобщена для описания более сложных течений (течение по негоризонтальному основанию [6], течения в анизотропных, например слоистых, пористых, средах и т.д.). Кроме того, представляет интерес рассмотрение в рамках модели более сложных задач (например, задачи о растекании конечного объема жидкости), которые более удобны с точки зрения экспериментальных исследований.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00037).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leal L.G.* Advanced transport phenomena. Fluid mechanics and convective transport processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. xx + 912 p.
2. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. N.Y.: Dover Publ., 1988. 764 p.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. *Леонтьев Н.Е.* Течения в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничным условием Навье // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 2. С. 107–112.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. Т. 1. 528 с.
6. *Acheson D.J.* Elementary fluid dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2005. 397 p.

7. *Зельдович Я.Б.*, *Компанеец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В кн.: Сборник, посвященный семидесятилетию академика А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
8. *Lamé G.*, *Clapeyron É.* Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide // Annales de Chimie et de Physique. 1831. T. 47. P. 250–256.
9. *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
10. *Pattle R.E.* Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient // Quart. J. of Mech. and Appl. Math. 1959. V. 12. I. 4. P. 407–409. DOI: 10.1093/qjmam/12.4.407.
11. *Huppert H.E.* The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58. DOI: 10.1017/S0022112082001797.
12. *Зырянов В.Н.*, *Фролов А.П.*, *Хубларян М.Г.* Некоторые нелинейные режимы фильтрации грунтовых вод // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 5. С. 110–120.
13. *Агеев А.И.*, *Осипцов А.Н.* Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 3. С. 37–51.
14. *Веденеева Е.А.* Растекание лавы во время вулканических извержений при условии частичного проскальзывания на подстилающей поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 27–40.
15. *Осипцов А.А.* Автомодельное решение задачи о росте лавового купола на произвольной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 53–68.
16. *Осипцов А.А.* Трехмерные изотермические течения лавы на неосесимметричной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 31–45.
17. *Woods A.W.* Flow in porous rocks. Energy and environmental applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015. 290 p.
18. *Казаков А.Л.*, *Орлов Св.С.* О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 112–123.
19. *Jackson G.W.*, *James D.F.* The permeability of fibrous porous media // Canad. J. Chem. Engin. 1986. V. 64. I. 3. P. 364–374. DOI: 10.1002/cjce.5450640302.
20. *Sauret A.*, *Boulogne F.*, *et al.* Damping of liquid sloshing by foams // Phys. of Fluids. 2015. V. 27. P. 022103. DOI: 10.1063/1.4907048.
21. *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
22. The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology / Ed. by H.N. Abramson. Washington, D.C.: NASA SP-106, 1966. 467 p.