

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ООО «В-ТИМ»

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Материалы Международной конференции,
посвященной 110-летию со дня рождения
Льва Семеновича Понтрягина,
Москва, 12–14 декабря 2018 г.

OPTIMAL CONTROL AND DIFFERENTIAL GAMES

Materials of the International Conference
dedicated to the 110th anniversary
of Lev Semenovich Pontryagin,
Moscow, December 12–14, 2018



Москва – 2018

УДК 517.9
ББК 22.16
О62

*Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18–01–20101)
и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации*

Программный комитет:

*Ю. С. Осипов (председатель), Н. Л. Григоренко (зам. председателя),
А. И. Смирнов (секретарь), А. А. Агрacheв, Р. В. Гамкрелидзе, М. И. Зеликин,
Л. В. Локуцкий, М. С. Никольский, Н. Х. Розов*

Организационный комитет:

*Н. Л. Григоренко (сопредседатель), Д. В. Трецёв (сопредседатель),
С. М. Асеев (зам. председателя), Л. А. Артемьева (секретарь), К. О. Бесов,
А. А. Дряженков, Е. И. Моисеев, С. М. Орлов, В. А. Тимофеева*

Ответственный редактор К. О. Бесов

О62 **Оптимальное управление и дифференциальные игры** : Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, Москва, 12–14 декабря 2018 г. / Отв. ред. К. О. Бесов. – Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; МАКС Пресс, 2018. – 304 с.

ISBN 978-5-98419-082-4 (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

ISBN 978-5-317-05994-1 (МАКС Пресс)

ISBN 978-5-98419-082-4
ISBN 978-5-317-05994-1

© Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2018
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2018

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

Единственность решения дифференциальной игры с интегральными ограничениями (Uniqueness of a solution to a differential game with integral constraints)	
<i>В. Н. Афанасьев (V. N. Afanas'ev), Н. А. Матвеева (N. A. Matveeva)</i>	15
Новое условие существования и единственности минимаксных решений в задаче Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (A new condition for the existence and uniqueness of minimax solutions in the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs problem)	
<i>В. Н. Афанасьев (V. N. Afanas'ev), А. П. Преснова (A. P. Presnova)</i>	18
Homotopically visible and invisible singular trajectories	
<i>А. А. Agrachev</i>	20
Дифференциальные игры преследования, описываемые уравнениями дробного порядка (Pursuit differential games described by equations of fractional order)	
<i>Х. Н. Алимов (Kh. N. Alimov)</i>	21
Lagrangian as a tool for solving linear optimal control problems with state constraints	
<i>А. S. Antipin, E. V. Khoroshilova</i>	23
Singular trajectories in sub-Finsler problems on Cartan and Engel groups	
<i>А. А. Ardentov</i>	26
Модификация обобщенного принципа невязки при наличии информации о погрешностях в ослабленных нормах (A modification of the generalized residual principle when there is information on errors in weakened norms)	
<i>Л. А. Артемьева (L. A. Artemyeva), А. А. Дряженков (A. A. Dryazhenkov)</i>	27
Численное решение задачи оптимизации сбережений в модели бизнес-цикла Калдора (Numerical solution of the problem of optimizing savings in the Kaldor business cycle model)	
<i>А. С. Асеев (A. S. Aseev), С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)</i>	29
Optimal policies in the Dasgupta–Heal–Solow–Stiglitz model	
<i>S. Aseev, K. Besov, S. Kaniowski</i>	32
Об асимптотическом поведении сингулярных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера (On asymptotic behavior of singular solutions to Emden–Fowler type differential equations)	
<i>И. В. Асташова (I. V. Astashova)</i>	35

Maximum principle for infimum in optimal control problems	
<i>E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il'yaev</i>	37
On solvability of some pseudo-differential equations	
<i>G. N. Averianov, Shaban H. Kutaiba, V. B. Vasilyev</i>	39
Pontryagin's alternating integral	
<i>A. A. Azamov</i>	42
Fundamental solution for a one-dimensional parabolic equation with a continuous coefficient	
<i>E. A. Baderko, K. V. Semenov</i>	45
A new approach to the existence of periodic and bounded solutions for functional differential equations of pointwise type and their numerical realization	
<i>L. A. Beklaryan, A. L. Beklaryan</i>	46
On necessary optimality conditions for Ramsey-type problems	
<i>Anton O. Belyakov</i>	49
Geodesics and curvatures of left-invariant sub-Riemannian metrics on Lie groups	
<i>V. N. Berestovskii</i>	52
Optimization of processes with switchings of models of control systems	
<i>A. S. Bortakovskii</i>	55
Geodesics and Laplacians in sub-Riemannian geometry	
<i>U. Boscain</i>	58
Singularities of attainability regions of systems with control bounded in absolute value or impulse	
<i>D. I. Bugrov, A. M. Formalskii</i>	59
Сингулярно возмущенные ОДУ с кратными корнями вырожденного уравнения (Singularly perturbed ODEs with multiple roots of the degenerate equation)	
<i>В. Ф. Бутузov (V. F. Butuzov)</i>	61
The method of programmed iterations in the theory of differential games	
<i>A. G. Chentsov</i>	64
Capsule robots: dynamics and optimal control	
<i>F. L. Chernousko</i>	67
Первый прямой метод Л.С. Понтрягина. Развитие идей (L.S. Pontryagin's first direct method. Development of ideas)	
<i>А. А. Чикриiй (A. A. Chikrii)</i>	69

Pontryagin's condition and its time stretching modification

G. Ts. Chikrii 72

N -person differential games: examples and counterexamples

S. V. Chistyakov 75

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных (Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow and fast variables)

A. P. Данилин (A. R. Danilin), A. A. Шабуров (A. A. Shaburov) 76

Устойчивость управляемости динамических неравенств (Stability of controllability of dynamic inequalities)

A. A. Давыдов (A. A. Davydov) 78

Вариации типа v -замены времени в задачах с фазовыми ограничениями (Variations of the v -change of time type in problems with state constraints)

*A. B. Дмитриук (A. V. Dmitruk),
H. П. Осмоловский (N. P. Osmolovskii)* 79

Численное решение задачи позиционного граничного наведения на линейное подпространство для волнового уравнения (Numerical solution of the closed-loop boundary control problem with linear terminal set for the wave equation)

A. A. Дряженков (A. A. Dryazhenkov), M. M. Потанов (M. M. Potapov) 82

On integration of nonlinear differential equations in the parametric form

V. S. Dryuma 84

Позиционный принцип минимума для непрерывных, дискретных и импульсных задач оптимального управления (Feedback minimum principle for continuous, discrete and impulsive optimal control problems)

*B. A. Дыхта (V. A. Dykhta), O. H. Самсонык (O. N. Samsonyuk),
C. П. Сорокин (S. P. Sorokin)* 87

Approximate properties of C^1 -smooth Ω -stable skew products of maps of an interval

L. S. Efremova 88

Анализ линейно-квадратичных задач управления системами с распределенными параметрами (Analysis of linear-quadratic control problems for systems with distributed parameters)

A. И. Егоров (A. I. Egorov), Л. Н. Знаменская (L. N. Znamenskaya) 90

Быстрое автоматическое дифференцирование и приложения (Fast automatic differentiation and applications)	
Ю. Г. Евтушенко (<i>Yu. G. Evtusenko</i>), А. Ф. Албу (<i>A. F. Albu</i>), В. И. Зубов (<i>V. I. Zubov</i>)	93
Стабилизация тела в электромагнитном подвесе (Stabilization of a body in the electromagnetic suspension)	
А. А. Федюков (<i>A. A. Fedyukov</i>)	94
Homotopy and fixed points of set-valued mappings on ordered sets and some applications	
Т. Н. Фоменко	97
Path planning of a controlled object in a problem of increasing the stealth with constraints on length and curvature of trajectory	
А. А. Галыев, Р. В. Лысенко	99
Hypoelliptic diffusion, Chu duality and human vision	
J.-P. Gauthier	102
Control of quantum processing based on the three-level quantum system	
Г. К. Гиоргадзе	103
Релаксационные колебания в моделях нейронных систем (Self-excited relaxation oscillations in neurosystem models)	
С. Д. Глызин (<i>S. D. Glyzin</i>), А. Ю. Колесов (<i>A. Yu. Kolesov</i>), Н. Х. Розов (<i>N. Kh. Rozov</i>)	106
О нерегулярных траекториях в задаче быстрогодействия с фазовыми ограничениями (On irregular trajectories in the time optimal control problem with state constraints)	
М. Н. Гончарова (<i>M. N. Goncharova</i>)	109
Three types of dynamics	
С. В. Гонченко	111
Фазовый поток, порождаемый нелинейным уравнением Шрёдингера (Phase flow generated by the nonlinear Schrödinger equation)	
А. Д. Грехнева (<i>A. D. Grekhneva</i>), В. Ж. Сакбаев (<i>V. Zh. Sakbaev</i>)	112
On the question “Can one hear the shape of a group?” and a Hulanicki type theorem for graphs	
Р. Григорчук	114
К решению задачи управляемости для одной нелинейной системы (To the solution of the controllability problem for a nonlinear system)	
Н. Л. Григоренко (<i>N. L. Grigorenko</i>), А. Е. Румянцев (<i>A. E. Rumiantcev</i>)	115

Управляемые модели лечения аллергии
(Control models of allergy treatment)

Э. В. Григорьева (*E. V. Grigorieva*),
Н. Л. Григоренко (*N. L. Grigorenko*), Е. Н. Хайлов (*E. N. Khailov*) 118

Convexity of small-time reachable sets under integral constraints on control

M. I. Gusev 121

Typicalness of chaotic fractal behaviour of integral vortices in Hamiltonian
systems with discontinuous right-hand side

R. Hildebrand, L. V. Lokutsievskiy, M. I. Zelikin 124

Геометрические свойства оператора Минковского
(Geometrical properties of the Minkowski operator)

Г. Е. Иванов (G. E. Ivanov) 127

Optimal control on Lie groups and integrable Hamiltonian systems

V. Jurdjevic 129

Динамика сингулярно возмущенных моделей на основе логистического
уравнения с запаздыванием
(The dynamics of singular perturbed models based on logistic equation
with delay)

С. А. Кащенко (S. A. Kaschenko) 130

Модифицированная задача Фуллера
(Modified Fuller problem)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), С. Н. Аввакумов (S. N. Avvakumov) ... 131

Исследование многомерных задач оптимального управления
с производственной функцией Кобба–Дугласа
(Investigation of multidimensional optimal control problems
with Cobb–Douglas production function)

*Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), М. В. Орлов (M. V. Orlov),
С. М. Орлов (S. M. Orlov), А. П. Бакланов (A. P. Baklanov)* 132

Оптимальные стратегии подавления клеточного деления в антираковой
терапии

(Optimal strategies for suppressing cell division in anti-cancer therapy)

*А. Д. Клименкова (A. D. Klimenkova),
А. Коробейников (A. Korobeinikov), Е. Н. Хайлов (E. N. Khailov)* 134

Guaranteed result of control of a differential inclusion with mixed constraint

R. V. Konstantinov 137

Построение асимптотик решений для обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности
(Construction of asymptotics of solutions of ordinary differential equations with holomorphic coefficients in a neighborhood of infinity)

М. В. Коровина (M. V. Korovina) 140

О первой краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью
(On the first boundary-value problem for a semilinear parabolic equation with controllable principal part)

И. С. Коржавина (M. S. Korzhavina), В. И. Сумин (V. I. Sumin) 142

Метод синтеза оптимального управления в условиях неопределенности
(Some optimal control design under uncertainty)

В. В. Кулагин (V. V. Koulaguin) 144

Модель разработки невозобновляемого ресурса
(Model of nonrenewable resource extraction)

А. В. Кулевский (A. V. Kulevsky) 147

Attacker–defender–target problem as a 2×1 linear differential game

С. С. Кумков 150

On zero order asymptotic solution of singularly perturbed linear–quadratic problems in a critical case

Г. А. Курина, Н. Т. Ноаи 152

О динамике систем под воздействием импульсных входов высокого порядка и быстрых управлений
(On the dynamics of systems under the influence of high-order pulse inputs and fast controls)

А. Б. Куржанский (A. B. Kurzhanski) 155

Sub-Finsler problems on Cartan and Engel groups

Е. Ле Донне, Ю. Л. Сачков 156

Program-predictive control for differential games

Ю. С. Ледяев 156

Solutions of triangular Schlesinger equations

В. П. Лексин 157

Алгебраические надстройки в конструкции потока ранга 1 и простой спектр тензорных произведений потоков
(Algebraic spacers in a construction of a rank 1 flow and the simple spectrum of the tensor products of flows)

М. С. Лобанов (M. S. Lobanov) 159

Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry <i>L. V. Lokutsievskiy</i>	160
О задаче управляемости при наличии фазовых ограничений (On the controllability problem with state constraints) <i>Л. Н. Лукьянова (L. N. Lukianova)</i>	161
Optimal guaranteed result in control problems of neutral-type systems <i>N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin</i>	164
Дифференциальные игры преследования для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка (Differential games of pursuit for the two-dimensional heat equation with derivatives of fractional order) <i>М. Ш. Маматов (M. Sh. Mamatov)</i>	167
Singular solutions for a Timoshenko beam <i>L. Manita, M. Ronzhina</i>	171
Existence and uniqueness of solutions for the first-order nonlinear differential equations with multipoint boundary conditions <i>М. J. Mardanov, Y. A. Sharifov</i>	172
Optimal control of large buildings using a hybrid model predictive control approach <i>О. Ю. Марьясин</i>	175
Sub-Riemannian geodesics on the group of rigid body motions <i>A. P. Mashtakov</i>	177
Conjugacy of Smale semi-chaotic homeomorphisms and diffeomorphisms <i>V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma</i>	178
Устойчивость и быстроедействие параллельного метода Фей–Тейлора в динамических моделях общего экономического равновесия (Robustness and efficiency of the parallel Fair–Taylor method in dynamic general equilibrium models) <i>Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)</i>	179
Об инвариантах Лапласа для гиперболических уравнений (On the Laplace invariants for hyperbolic equations) <i>А. Н. Миронов (A. N. Mironov), Л. Б. Миронова (L. B. Mironova)</i>	181
О полноте систем синусов и косинусов в пространстве интегрируемых функций (On the completeness of sine and cosine systems in the space of integrable functions) <i>Е. И. Моисеев (E. I. Moiseev), Д. А. Гуляев (D. A. Gulyaev)</i>	184

Weak and strong nilpotentizability in the monster towers hosting flag distributions

P. Mormul 185

A control based mathematical study on the role of regulatory T cells in the inhibition of psoriasis using UVB exposure therapy

Sanchari Mukherjee, Amit Kumar Roy, Ellina Grigorieva, Evgenii Khailov, Priti Kumar Roy 187

О геометрии множества достижимости векторных полей
(On the geometry of the reachability set of vector fields)

А. Я. Нарманов (A. Ya. Narmanov) 189

Asymptotic method of differential inequalities and its applications in nonlinear wave theory

N. N. Nefedov 192

Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов
(On estimating the attainable set for some control objects)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii) 194

Задача о формировании общественного мнения инвесторов в рамках теории Mean field games
(The problem of forming the investor public opinion within a mean field games framework)

С. И. Никulin (S. I. Nikulin) 196

Singularities of minimum time control-affine systems

M. Orieux, R. Roussarie 198

Control set smoothing method for program package elements calculation

S. M. Orlov, N. V. Strelkovskii 199

Приближенное решение частной неустойчивой задачи оптимального управления
(Approximate solution of a particular unstable optimal control problem)

А. И. Осинский (A. I. Osinsky) 201

Joint optimization of smooth and nonsmooth functionals on beams of trajectories

D. A. Ovsyannikov, M. A. Mizintseva, A. D. Ovsyannikov 203

О структуре решений задачи Римана для одной нестрого гиперболической системы
(On the structure of solutions of the Riemann problem for a non-strictly hyperbolic system)

В. В. Палин (V. V. Palin) 205

Using the Pontryagin maximum principle in constructing reachable sets
for Dubins car

V. S. Patsko, A. A. Fedotov 207

Особенности геодезических потоков в метриках переменной сигнатуры:
2D и 3D

(Singularities of geodesic flows in variable-signature metrics: 2D and 3D)

Н. Г. Павлова (N. G. Pavlova), А. О. Ремизов (A. O. Remizov) 210

Pontryagin's maximum principle for control of open quantum systems

A. N. Pechen 212

Optimality conditions for differential games with continuous updating

O. Petrosian 214

Cooperative differential games

L. A. Petrosyan 216

К задаче группового преследования с дробными производными
(To the problem of group pursuit with fractional derivatives)

Н. Н. Петров (N. N. Petrov) 218

Топологическая классификация систем Морса–Смейла
(Topological classification of Morse–Smale systems)

О. В. Починка (O. V. Pochinka) 221

Symmetries in left-invariant optimal control problems

A. V. Podobryaev 223

Прямой метод Понтрягина для оптимизационных задач
с дифференциальным включением
(Pontryagin's direct method for optimization problems with differential
inclusion)

Е. С. Половинкин (E. S. Polovinkin) 226

l-Проблема моментов для одномерных линейных систем, заданных
интегро-дифференциальными уравнениями с операторами Эрдейи–Кобера
(*l*-Problem of moments for one-dimensional systems defined
by integro-differential equations with Erdélyi–Kober operators)

С. С. Постнов (S. S. Postnov) 227

Оптимальное управление линейными динамическими системами дробного
порядка
(Optimal control for linear dynamical systems of fractional order)

Е. А. Постнова (E. A. Postnova) 230

Оптимальное управление и принцип максимума для операторных уравнений первого рода в банаховых пространствах (Optimal control and the maximum principle for operator equations of the first kind in Banach spaces)	
<i>А. И. Приленко (A. I. Prilepko)</i>	233
Динамика асимметрического волчка при изотропной эмиссии его момента импульса (Dynamics of asymmetric top under isotropic emission of its angular momentum)	
<i>А. Э. Рассадин (A. E. Rassadin)</i>	234
On average time profit in stochastic harvesting models	
<i>L. I. Rodina</i>	237
Mathematical study on CTL generated control induced delay model for HPV associated cervical cancer	
<i>Priti Kumar Roy, Sudip Chakraborty</i>	239
Самоподобные потоки, несколько спектральных эффектов (Self-similar flows, some spectral effects)	
<i>В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)</i>	242
Аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) (Abnormal trajectories in the sub-Riemannian problem with the growth vector (2, 3, 5, 8))	
<i>Ю. Л. Сачков (Y. L. Sachkov), Е. Ф. Сачкова (E. F. Sachkova)</i>	243
Регуляризация интегральных операторов в сингулярно возмущенных задачах в методе С.А. Ломова (Regularization of integral operators in singularly perturbed problems in S. A. Lomov's Method)	
<i>В. Ф. Сафонов (V. F. Safonov)</i>	244
Классификация расширений квазипериодических потоков на торе (Classification of extensions of quasiperiodic torus flows)	
<i>А. Н. Сахаров (A. N. Sakharov)</i>	246
Optimization of interplanetary flight to Phobos on the basis of maximum principle	
<i>А. S. Samokhin, M. A. Samokhina</i>	249
Stationarity conditions in an optimal control problem related to autonomous objects group target orbiting by carrier object	
<i>I. A. Samylovskiy</i>	252
Интегрируемые динамические системы с переменной диссипацией (Integrable variable dissipation dynamical systems)	
<i>М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)</i>	254

Structurally stable properties of control systems <i>Shiva Shankar</i>	257
Energy conservation in lattice field theories <i>M. B. Skopenkov</i>	260
On applications of Hamilton–Jacobi equations and optimal control theory to problems of chemotherapy of malignant tumors <i>N. N. Subbotina, N. G. Novoselova</i>	261
Регуляризация классических условий оптимальности в оптимальном управлении (Regularization of classical optimality conditions in optimal control) <i>М. И. Сумин (M. I. Sumin)</i>	263
Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем (Volterra functional equations and optimization of distributed systems) <i>В. И. Сумин (V. I. Sumin)</i>	266
Matrix Riccati equation in the stabilization problem of Hamiltonian systems <i>A. M. Tarasyev, A. A. Usova</i>	269
Об общих принципах теории экстремума (On general principles of extremum theory) <i>В. М. Тихомиров (V. M. Tikhomirov)</i>	272
Superstable semigroups in nonlocal problems for evolution equations <i>I. V. Tikhonov, Vu Nguyen Son Tung</i>	272
On a quantum heavy particle <i>D. V. Treschev</i>	274
Оптимизационная задача стартового управления распространением тепла в стержне (Starting control optimization problem for the distribution of heat in the rod) <i>М. Тухтасинов (M. Tukhtasinov), Г. М. Абдуалимова (G. M. Abdualimova)</i>	274
Дифференциальные игры с платой, зависящей от модуля линейной функции и интеграла (Differential games with a payoff depending on the modulus of a linear function and an integral) <i>В. И. Ухоботов (V. I. Ukhobotov), И. В. Изместьев (I. V. Izmest'ev)</i> ...	276
Harvesting a remote renewable resource <i>Thorsten Upmann, Stefan Behringer</i>	279

Диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических точек

(Diffeomorphisms with an infinite set of stable periodic points)

Е. В. Васильева (E. V. Vasileva) 282

Об операторах, уравнениях и краевых задачах

(On operators, equations and boundary value problems)

В. Б. Васильев (V. B. Vasilyev) 285

О дискретной версии псевдодифференциальных уравнений

(On a discrete version of pseudodifferential equations)

*В. Б. Васильев (V. B. Vasilyev), Р. Е. Деркач (R. E. Derkach),
О. А. Тарасова (O. A. Tarasova)* 287

Spectral analysis of Volterra integro-differential equations and its applications

V. V. Vlasov, N. A. Rautian 289

Модификация метода динамической регуляризации решения задачи численного дифференцирования, улучшающая его характеристики

(Modification of the method of dynamic regularization of the solution of the numerical differentiation problem which improves its characteristics)

А. Ю. Вдовин (A. Yu. Vdovin), С. С. Рублева (S. S. Rubleva) 290

Optimality conditions for a nonconvex optimal control problem with linear system

М. В. Янulevich 292

Лемма Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх убегания

(L.S. Pontryagin's lemma in differential evasion games)

Л. П. Югай (L. P. Yugay) 295

Computational technologies for solving nonconvex optimal control problems with free right-hand end

T. S. Zarodnyuk, A. Yu. Gornov 297

Solutions of Newton's aerodynamic problem without axial symmetry

М. И. Зеликин, Л. В. Локутский (L. V. Lokutsievskiy) 299

Коэффициентные критерии равновесности в одной дифференциальной игре двух лиц

(Coefficient equilibrium criteria in a two-person differential game)

В. И. Жуковский (V. I. Zhukovskiy), Л. В. Смирнова (L. V. Smirnova) . 300

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ
(UNIQUENESS OF A SOLUTION TO A DIFFERENTIAL GAME
WITH INTEGRAL CONSTRAINTS)

В. Н. Афанасьев (V. N. Afanas'ev),
Н. А. Матвеева (N. A. Matveeva)

*Московский институт электроники и математики Национального
исследовательского университета "Высшая школа экономики", Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

afanval@mail.ru, matveeva.nataljja@physics.msu.ru

Проблема оптимального управления для класса нелинейных объектов с неконтролируемыми ограниченными возмущениями формулируется в ключе дифференциальной игры. Для задач с квадратическим функционалом качества и интегральными ограничениями на управляющие воздействия задача поиска оптимальных управлений сводится к необходимости нахождения решений скалярного уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби–Айзекса. Применение единой схемы на базе функций Ляпунова позволило получить новые условия существования и единственности минимаксного решения задачи.

Рассматривается детерминированная нелинейная система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t). \quad (1)$$

Здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_f]\}$ — состояние системы; $x(\cdot) \in \Omega_x$, $X_0 \subset \Omega_x$ — множество возможных начальных условий системы; $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, — выход системы; $u(\cdot) = \{u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [t_0, t_f]\}$ — управление; $w(\cdot) = \{w(t) \in \mathbb{R}^k, t \in [t_0, t_f]\}$ — возмущение, $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ — непрерывные матрицы-функции.

Предложение 1. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующее успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w . Цель игры заключается в минимизации конечного значения состояния системы $K(x(t_f)) > 0$ игроком G_u , определяемого решением уравнения (1), в условиях действий игрока G_w , стремящегося максимизировать это значение.

На управляющие воздействия $u(t)$ и $w(t)$ наложены ограничения вида

$$\int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_{R^*}^2 dt \leq E_u, \quad \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_{P^*}^2 dt \leq E_w, \quad E_u - E_w > 0, \quad (2)$$

где R^* и P^* — положительно определенные матрицы.

Введем функционал качества дифференциальной игры

$$J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = K(x(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t)\} dt. \quad (3)$$

В этом функционале $K(x(t_f)) > 0$, $x(t_f) \neq 0$, симметрическая матрица Q по крайней мере положительно полуопределена, матрицы $R = c_1 R^*$ и $P = c_2 P^*$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, положительно определены.

Предложение 2. Если $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ — достаточно гладкие функции, то функция $V(t, x)$, определенная как

$$V(t, x) \triangleq \inf_{u \in U} \sup_{w \in W} J(x, u, w), \quad (4)$$

является дифференцируемой функцией при любых допустимых стратегиях игроков $G_u, G_w \in L_2(0, \infty)$.

Предложение 3. Функция $V(t, x)$, определенная в (4), локально липшицева в Ω_x .

В рассматриваемом случае значение назначаемой функции $V(t, x)$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона–Якоби–Айзекса [1, 2]:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T + \frac{1}{2} x^T(t) C^T Q C x(t) = 0, \quad (5)$$

$$V(t_f, x(t_f)) = K(x(t_f)),$$

где

$$\Pi(x) = g_2(x) R^{-1} g_2^T(x) - g_1(x) P^{-1} g_1^T(x).$$

Оптимальные управления определяются соотношениями

$$u(t) = -R^{-1} g_2^T(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T, \quad w(t) = -P^{-1} g_1^T(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T. \quad (6)$$

Исходная система с управлениями (6) определяется выражением

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) - \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t). \quad (7)$$

Условия существования оптимального решения поставленной задачи определяются свойствами матрицы $\Pi(x)$ (см. [3]).

Теорема 1. Система (7) равномерно асимптотически устойчива, если и только если

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \leq -\frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T \quad \forall x \neq 0, \quad (8)$$

где $\Pi(x) = g_2(x) R^{-1} g_2^T(x) - g_1(x) P^{-1} g_1^T(x)$ — по крайней мере положительно полуопределенная матрица.

Доказательство. Из уравнения (5) имеем

$$\frac{dV(t, x)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T + \frac{1}{2} x^T(t) C^T Q C x(t) = 0,$$

$$V(t_f, x(t_f)) = K(x(t_f)),$$

откуда

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \leq -\frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T \quad \forall x \neq 0,$$

так как $x^T(t)C^TQCx(t) \geq 0$.

Таким образом, в силу второй теоремы Ляпунова система (7), где вектор $\{\partial V(t, x)/\partial x\}^T$ определяется решением уравнения (5), при выполнении условия (8) равномерно асимптотически устойчива. $\square$

Вернемся к рассмотрению ограничений, наложенных на управление и возмущающее воздействие (2):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t)] dt &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T dt = \\ &= E_u - E_w > 0, \end{aligned}$$

так как матрица $\Pi(x)$ по крайней мере положительно определенная.

Теорема 2. *Дифференциальная игра (1)–(4) имеет цену, если соотношение ограничений, наложенных на действия игроков G_u и G_w , таково, что выполняется условие*

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} \leq -\frac{1}{2}[E_u - E_w].$$

Лемма 1. *Если существуют оптимальные управления в задаче дифференциальной игры, то они единственны и определяются уравнениями (6), где вектор $\{\partial V(t, x)/\partial x\}^T$ определяется решением уравнения (5).*

Список литературы

1. Bellman R. Dynamic programming. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
2. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
3. Афанасьев В.Н. Задача вывода и сопровождения нелинейного объекта по заданной траектории // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 3–20.

НОВОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ
И ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ
ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА–АЙЗЕКСА
(A NEW CONDITION FOR THE EXISTENCE
AND UNIQUENESS OF MINIMAX SOLUTIONS
IN THE HAMILTON–JACOBI–BELLMAN–ISAACS PROBLEM)

**В. Н. Афанасьев (V. N. Afanas'ev),
А. П. Преснова (A. P. Presnova)**

*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Москва, Россия*

afanval@mail.ru, presnova.a.p@yandex.ru

Пусть детерминированная нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t). \quad (1)$$

Здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_f]\}$ — состояние системы; $x(\cdot) \in \Omega_x$, $X_0 \subset \Omega_x$ — множество возможных начальных условий системы; $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, — выход системы; $u(\cdot) = \{u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [t_0, t_f]\}$ — управление; $w(\cdot) = \{w(t) \in \mathbb{R}^k, t \in [t_0, t_f]\}$ — возмущение; $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ — непрерывные матрицы-функции.

Введем функционал качества дифференциальной игры

$$J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = K(x(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t)\} dt. \quad (2)$$

Предложение 1. Если $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ — достаточно гладкие функции, то функция $V(t, x)$, определенная как

$$V(t, x) \triangleq \inf_{u \in U} \sup_{w \in W} J(x, u, w), \quad (3)$$

является дифференцируемой функцией при любых допустимых стратегиях игроков $G_w, G_u \in L_2(0, \infty)$.

Предложение 2. Функция $V(t, x)$, определенная в (3), локально липшицева в Ω_x .

В рассматриваемом случае значение назначаемой функции $V(t, x)$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона–Якоби–Айзекса (см. [1, 2])

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \Pi(x) \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\}^T + \frac{1}{2} x^T(t) C^T Q C x(t) = 0, \quad (4)$$

$$V(t_f, x(t_f)) = K(x(t_f)),$$

где

$$\Pi(x) = g_2(x)R^{-1}g_2^T(x) - g_1(x)P^{-1}g_1^T(x).$$

Оптимальные управления определяются соотношениями

$$u(t) = -R^{-1}g_2^T(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^T, \quad w(t) = P^{-1}g_1^T(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^T. \quad (5)$$

Исходная система с управлениями (5) примет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - \Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^T, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t). \quad (6)$$

В начале 1980-х гг. М. Крэндалл и П.Л. Лионс ввели понятие вязкостного решения (viscosity solution) [3, 4]. Опираясь на это понятие, введем в рассмотрение

Определение 1. Верхним (нижним) решением уравнения (4) называется скалярная непрерывная функция $\varphi^T(t)x(t)$, удовлетворяющая следующему условию: если разность функций $V(t,x) - \varphi^T(t)x(t)$ достигает локального минимума (максимума) в точке $(t^*, x^*) \in \Omega$ и в этой точке функция $\varphi^T(t)x(t)$ дифференцируема, то должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x) + \frac{1}{2}x^T(t)H^TQHx(t) - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\} \leq (\geq) 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Определение 2. Решением $\varphi^T(t)x(t)$ называется функция, которая одновременно является верхним и нижним решениями, т.е. удовлетворяет условию

$$V(t,x) = \varphi^T(t)x(t). \quad (8)$$

Используя это определение, найдем уравнение для функции $\varphi^T(t)x(t)$. Запишем полные производные функций $V(t,x)$ и $\varphi^T(t)x(t)$:

$$\frac{dV(t,x)}{dt} = -\frac{1}{2}x^T(t)C^TQCx(t) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^T, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\{\varphi^T(t)x(t)\} = \left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}^T x(t) + \varphi^T(t)f(x) - \varphi^T(t)\Pi(x)\varphi(t). \quad (10)$$

Приравнявая (9) и (10) и учитывая, что $V(t,x) = \varphi^T(t)x(t)$ и $\partial V(t,x)/\partial x = \varphi^T(t)$, получим уравнение (4) в виде

$$\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}^T x(t) + \varphi^T(t)f(x) - \frac{1}{2}\varphi^T(t)\Pi(x)\varphi(t) + \frac{1}{2}x^T(t)C^TQCx(t) = 0, \quad (11)$$

$$\varphi^T(t_f)x(t_f) = K(x(t_f)).$$

Отметим, что уравнение (11) определяет динамическое соответствие функций $\varphi(t)$ и $x(t)$ при всех $t \in [t_0, t_f]$.

Теорема. Решение $V(t, x) = \varphi^T(t)x(t)$ уравнения (4) есть непрерывная функция $\varphi^T(t)x(t)$, удовлетворяющая уравнению (11), при этом оптимальное значение функционала качества есть

$$J^0(x(\cdot), \varphi(\cdot)) = \varphi^T(t_0)x(t_0).$$

Для отыскания условия “движения” функции $s(t) = \varphi^T(t)x(t)$ к решению (8), введем функцию Ляпунова

$$V_L(\varphi, x) = \frac{1}{2} [V(t, x) - \varphi^T(t)x(t)]^2. \quad (12)$$

Полная производная функции Ляпунова (12) для выполнения этой задачи должна быть меньше нуля при $x(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$, откуда имеем

$$s(t) = \{\varphi^T(t)x(t)\} \leq V(t, x) \frac{x^T(t)C^TQCx(t)}{\varphi^T(t)\Pi(x)\varphi(t)}. \quad (13)$$

Выполнение условия (13) обеспечивает “движение” функции $s(t)$ из любой периферии множеств, образуемых верхними и нижними решениями (7) при $\varphi^T x(t) \neq V(t, x)$, к значению $s(t) = \varphi^T(t)x(t) - V(t, x)$.

Список литературы

1. *Bellman R.* Dynamic programming. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
2. *Isaacs R.* Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
3. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L.* User's quite to viscosity solutions of second order partial differential equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 1–67.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск.: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

HOMOTOPICALLY VISIBLE AND INVISIBLE SINGULAR TRAJECTORIES

A. A. Agrachev

SISSA, Trieste, Italy

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

`agrachev@sisssa.it`

In this talk I will try to link optimal control theory with homotopic topology. These are rather distant domains to which Lev Semenovich Pontryagin made fundamental contributions.

Let M be a Riemannian manifold equipped with a bracket generating vector distribution $\Delta \subset TM$ and let $\Omega_\Delta \subset H^1([0, 1]; M)$ be the space of integral curves of the distribution. The *boundary map*

$$\partial_\Delta: \Omega_\Delta \rightarrow M \times M, \quad \partial_\Delta(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)),$$

is smooth. *Singular trajectories* are just critical points of this map.

We study the influence of singular trajectories on the homotopy type of Lebesgue sets of the action functional on the generalized loop spaces $\partial_{\Delta}^{-1}(q_0, q_1)$ in order to develop a Morse theory for these spaces. The role of singular trajectories is very different for rank 2 distributions and for distributions of rank greater than 2. In particular, these trajectories do not influence the homotopy type of the Lebesgue sets in the case of a generic distribution of rank greater than 2 and may produce homotopic obstructions in the rank 2 case.

Let the distribution Δ has rank 2; different segments $\gamma|_{[0,t]}$ of the same singular trajectory γ also play different roles. Given $t > 0$, we define and compute two integral-valued and monotonically increasing (with t) indices $I_0^t(\gamma)$ and $I^t(\gamma)$ associated to $\gamma|_{[0,t]}$, where $0 \leq I_0^t(\gamma) \leq I^t(\gamma) \leq I_0^t(\gamma) + 1$. If $I_0^t(\gamma) < I^t(\gamma)$, then $\gamma|_{[0,t]}$ is homotopically indistinguishable in the Lebesgue sets; if $I_0^t(\gamma) = I^t(\gamma) = I$, then $\gamma|_{[0,t]}$ provides a homotopical obstruction of dimension I . Both indices are equal to 0 for small t . I am going to explain the construction of these indices and to illustrate general results by examples of left-invariant distributions on the groups $U(2)$ and $GL(2)$.

This is a joint work with Francesco Boarotto and Antonio Lerario.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА (PURSUIT DIFFERENTIAL GAMES DESCRIBED BY EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER)

Х. Н. Алимов (Kh. N. Alimov)

Джизакский педагогический институт, Джизак, Узбекистан

xakim-alimov@mail.ru

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$${}_0^C D_t^\alpha z = Az + Bu - Gv + f(t), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ${}_0^C D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования, $0 < \alpha < 1$, $t \in [0, T]$, A , B и G — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, u , v — управляющие параметры, u — управляющий параметр преследующего игрока, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, v — управляющий параметр убегающего игрока, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q — компакты, $f(t)$ — известная измеримая вектор-функция. Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [1–4]. Напомним, что дробная производная Капуто произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ от функции $z(t) \in AC^{[\alpha]+1}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, определяется выражением

$${}_{a+}^C D_t^\alpha z(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_a^t \frac{d^{[\alpha]+1} z(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}} \frac{d\xi}{(t - \xi)^{\{\alpha\}}}. \quad (2)$$

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M . Цель преследующего игрока — вывести z на множество M , убегающий игрок стремится этому помешать.

Рассматривается задача о сближении траектории конфликтно-управляемой системы (1) с терминальным множеством M за конечное время из заданных начальных положений z_0 . Будем говорить, что дифференциальная игра (1) может быть закончена из начального положения z_0 за время $T = T(z_0)$, если существует такая измеримая функция $u(t) = u(z_0, v(t)) \in P$, $t \in [0, T]$, что решение уравнения

$${}^C D_t^\alpha z = Az + Bu(t) - Gv(t) + f(t), \quad z(0) = z_0,$$

принадлежит множеству M в момент $t = T$ при любых измеримых функциях $v(t)$, $v(t) \in Q$, $0 \leq t \leq T$.

Настоящая работа, посвященная получению достаточных условий завершения преследования для управляемых систем дробного порядка, примыкает к исследованию [5–7]. При этом мы используем идеи первого и второго прямых методов преследования Л.С. Понтрягина [5, 6].

Перейдем к формулировке основных результатов. Всюду в дальнейшем терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0 , π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L , под операцией $\stackrel{*}{\cdot}$ понимается операция геометрического вычитания [5].

Пусть $e_\alpha^{At} = t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^{\alpha k} / \Gamma((k+1)\alpha)$ — матричная α -экспонента [1] и $r \geq 0$, $\hat{u}(r) = \pi e_\alpha^{rA} B P$, $\hat{v}(r) = \pi e_\alpha^{rA} G Q$, $\hat{w}(r) = \hat{u}(r) \stackrel{*}{\cdot} \hat{v}(r)$,

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(r) dr, \quad \tau > 0, \quad W_1(\tau) = -M_1 + W(\tau). \quad (3)$$

Теорема 1. Если в игре (1) при некотором $\tau = \tau_1$ выполняется включение

$$-\pi z_0 - \int_0^\tau \pi e_\alpha^{A(\tau-r)} [Az_0 + f(r)] dr \in W_1(\tau), \quad (4)$$

то из начального положения z_0 можно завершить преследование за время $T = \tau_1$.

Пусть теперь ω — произвольное разбиение отрезка $[0, \tau]$,

$$\begin{aligned} \omega &= \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \tau\}, \quad A_0 = -M_1, \\ A_i(M, \tau) &= \left(A_{i-1}(M, \tau) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \pi e_\alpha^{rA} B P dr \right) \stackrel{*}{\cdot} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \pi e_\alpha^{rA} G Q dr, \\ i &= 1, 2, \dots, k, \quad W_2(\tau) = \bigcap_{\omega} A_i(M, \tau). \end{aligned}$$

Теорема 2. Если в игре (1) при некотором $\tau = \tau_2$ выполняется включение

$$-\pi z_0 - \int_0^\tau \pi e_\alpha^{A(\tau-r)} [Az_0 + f(r)] dr \in W_2(\tau),$$

то из начального положения z_0 можно завершить преследование за время $T = \tau_2$.

Обозначим через $\hat{w}(r, \tau)$ множество $[-\tau^{-1}M_1 + \hat{u}(r)] \stackrel{*}{=} \hat{v}(r)$, определенное при всех $r \geq 0, \tau > 0$. Рассмотрим интеграл

$$W_3(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(r, \tau) dr.$$

Теорема 3. Если в игре (1) при некотором $\tau = \tau_3$ выполняется включение

$$-\pi z_0 - \int_0^\tau \pi e_\alpha^{A(\tau-r)} [Az_0 + f(r)] dr \in W_3(\tau),$$

то из начального положения z_0 можно завершит преследование за время $T = \tau_3$.

Список литературы

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D.J. Theory of fractional dynamic systems. Cambridge: Cambridge Acad. Publ., 2009.
3. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Feliu V. Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications. London: Springer, 2010.
4. Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petras I. Fractional order systems. Modeling and control applications. Singapore: World Scientific, 2010.
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.
6. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Диф. уравнения. 1973. Т. 9. № 11. С. 2000–2009.
7. Mamatov M.SH., Alimov H.N. Differential games of persecution of frozen order with separate dynamics // J. Appl. Math. Phys. 2018. V. 6. P. 475–487.

LAGRANGIAN AS A TOOL FOR SOLVING LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS*

A. S. Antipin, E. V. Khoroshilova

*FRC “Computer Science and Control” of RAS, Moscow, Russia
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

asantip@yandex.ru, khorelena@gmail.com

An optimal control problem with linear controlled dynamics and inequality-type state constraints is considered. A process develops on a finite time interval $[t_0, t_1]$. The terminal condition on the right-hand end of this interval is implicitly given as a solution to a boundary-value problem of linear programming. Formally, the optimal

*The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00312).

control problem includes two components: controlled dynamics and a boundary-value problem, and it has the form

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1^*, \\ G(t)x(t) \leq g(t), & x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1], \quad u(\cdot) \in U, \\ x_1^* \in \text{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1 \rangle \mid G_1 x_1 \leq g_1, \quad x_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \end{cases} \quad (1)$$

where $D(t)$, $B(t)$ and $G(t)$ are continuous matrices, φ_1 and $g(t)$ are a fixed vector and a fixed continuous function; $G(t_1) = G_1$, $g(t_1) = g_1$ and x_0 are also given; $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$ is the linear variety of absolutely continuous functions. Here $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ is a trajectory (state variable). For any $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T \in U$ is a control vector, where $U \subset \mathbb{R}^r$ is a convex compact set.

We consider problem (1) in the Hilbert space $\mathbb{L}_2^n[t_0, t_1]$ and interpret it as a generalization of the linear programming problem. Following this idea, we introduce the Lagrange function

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x(\cdot), u(\cdot); p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) &= \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, G_1 x_1 - g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), G(t)x(t) - g(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (2)$$

defined for all $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$ and $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$. Here $x_1 = x(t_1)$; $\Psi^n[t_0, t_1]$ and $\Psi_+^n[t_0, t_1]$ are the linear varieties of absolutely continuous and, respectively, nonnegative absolutely continuous functions from the space conjugate to the Cartesian product of the primal variable spaces.

We write out the conjugate (dual) Lagrange function with respect to (2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^T(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) &= \langle \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1 - \psi_1, x_1 \rangle + \langle -p_1, g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) + G^T(t)\eta(t), x(t) \right\rangle dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u(t) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), g(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (3)$$

for all $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$ and $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$, where $\psi_1 = \psi(t_1)$. In the regular case (Slater), the primal (2) and dual (3) Lagrangians have the same saddle points $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$, since (3) is obtained from (2) by passing to conjugate operators.

Starting from the saddle-point inequalities for the Lagrange function (2), we obtain the source problem (1). Similarly, starting from the saddle-point inequalities for the conjugate Lagrangian (3), we can obtain a dual problem [1, 2]. Combining primal and dual problems into one system, we obtain necessary and sufficient optimality conditions for problem (1). For convex problems, these conditions can be regarded as a refinement (strengthening) of the maximum principle:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^*(t) &= D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), & x^*(t_0) &= x_0, \\ \langle G_1 x_1^* - g_1, p_1 - p_1^* \rangle &\leq 0, & p_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \langle G(t)x^*(t) - g(t), \eta(t) - \eta^*(t) \rangle dt &\leq 0, \quad \eta(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \\
\frac{d}{dt} \psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) + G^T(t)\eta^*(t) &= 0, \quad \psi_1^* = \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1^*, \\
\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt &\leq 0, \quad u(\cdot) \in U,
\end{aligned}$$

where $x_1^* = x^*(t_1)$. The solution of this system is a saddle point of the primal and dual Lagrange functions.

To solve the obtained system, special saddle-point methods of extragradient and extraproximal types have been developed [1–7]. The extragradient method is a controlled process in which each iteration breaks down into two half-steps:

(1) predictive half-step:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} x^k(t) &= D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0, \\
\bar{p}_1^k &= \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 x_1^k - g_1)), \\
\bar{\eta}^k(t) &= \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)x^k(t) - g(t))), \\
\frac{d}{dt} \psi^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) + G^T(t)\bar{\eta}^k(t) &= 0, \quad \psi_1^k = \nabla \varphi_1(x_1^k) + G_1^T \bar{p}_1^k, \\
\bar{u}^k(t) &= \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t));
\end{aligned}$$

(2) basic half-step:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \bar{x}^k(t) &= D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \quad \bar{x}^k(t_0) = x_0, \\
p_1^{k+1} &= \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 \bar{x}_1^k - g_1)), \\
\eta^{k+1}(t) &= \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)\bar{x}^k(t) - g(t))), \\
\frac{d}{dt} \bar{\psi}^k(t) + D^T(t)\bar{\psi}^k(t) + G^T(t)\eta^{k+1}(t) &= 0, \quad \bar{\psi}_1^k = \nabla \varphi_1(\bar{x}_1^k) + G_1^T p_1^k, \\
u^{k+1}(t) &= \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

The limit point of this process satisfies the state constraints.

The saddle-point approach is proposed to solve the problem of terminal control with state constraints. The proposed approach is based on the saddle-point-type necessary and sufficient optimality conditions with respect to primal and dual variables. The method of extragradient type for calculating the saddle point of the Lagrange function is formulated. The convergence of the iterative process to the solution $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ of the problem over all its components is proved. In particular, convergence in controls is proved to be weak, convergence in terms of phase and conjugate trajectories and terminal variables of the boundary-value problem is proved to be strong. We also prove the monotone convergence with respect to the variables $(p_1, u(\cdot), \eta(\cdot))$.

References

1. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Linear programming and dynamics // Ural Math. J. 2015. V. 1. P. 3–18.

2. *Antipin A.S.* Terminal control of boundary models // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54, No. 2. P. 275–302.
3. *Antipin A.S., Artemieva L.A., Vasiliev F.P.* Regularization method for searching for an equilibrium point in two-person saddle-point games with approximate input data // Dokl. Math. 2014. No. 1. P. 49–53.
4. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Optimal control with connected initial and terminal conditions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 289. Suppl. 1. P. 9–25.
5. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Multicriteria boundary value problem in dynamics // Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 2015. V. 21, No. 3. P. 20–29 (in Russian).
6. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Saddle-point approach to solving problem of optimal control with fixed ends // J. Global Optim. 2016. V. 65, No. 1. P. 3–17.
7. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optim. Lett. 2017. P. 1–23. doi: 10.1007/s11590-017-1216-8.

SINGULAR TRAJECTORIES IN SUB-FINSLER PROBLEMS ON CARTAN AND ENGEL GROUPS

A. A. Ardentov

Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia

aaa@pereslavl.ru

The l_∞ left invariant problem on the Cartan group M is studied as the following time-optimal problem for $q = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5 = M$:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad \max(|u_1|, |u_2|) \leq 1, \quad (1)$$

$$q(0) = q_0 = (0, \dots, 0), \quad q(T) = q_1, \quad (2)$$

$$T \rightarrow \min, \quad (3)$$

where

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

The Pontryagin maximum principle is applied to problem (1)–(3). The normal case provides the following types of extremal arcs: singular, bang–bang and mixed. All singular trajectories are shown to be optimal. We use reflection symmetries of system (1) to restrict control in the singular case as follows:

$$|u_1(t)| \leq 1, \quad u_2 \equiv 1. \quad (4)$$

A geometric formulation of the Pontryagin maximum principle [1] is applied to system (1), (2) with condition (4) in order to describe the boundary of the attainable set via singular trajectories (this set coincides with the part of the sub-Finsler sphere filled by singular trajectories). This set is explicitly described; we prove that it is semi-algebraic.

Similar results are also obtained for a one-parameter family of left-invariant sub-Finsler problems on the Engel group.

This study is part of joint work with Yu. L. Sachkov and E. Le Donne on sub-Finsler problems on Cartan and Engel groups.

References

1. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control theory from the geometric viewpoint. Springer, 2004.

МОДИФИКАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФОРМАЦИИ О ПОГРЕШНОСТЯХ В ОСЛАБЛЕННЫХ НОРМАХ (A MODIFICATION OF THE GENERALIZED RESIDUAL PRINCIPLE WHEN THERE IS INFORMATION ON ERRORS IN WEAKENED NORMS)*

**Л. А. Артемьева (L. A. Artemyeva),
А. А. Дряженков (A. A. Dryazhenkov)**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

artemieva.luda@gmail.com, andrja@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача квадратичной минимизации

$$\|\mathcal{A}u - f\|_F^2 \rightarrow \min_{u \in H}$$

с линейным непрерывным оператором $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, действующим в гильбертовых пространствах H и F , и фиксированным элементом $f \in F$. Ищется нормальное решение u_* этой задачи, т.е. решение, обладающее наименьшей нормой в пространстве H :

$$u_* = \arg \min_{u \in U_*} \|u\|_H, \quad U_* = \text{Arg} \min_{u \in H} \|\mathcal{A}u - f\|_F.$$

Предполагается, что вычислительно вместо точных данных $\mathcal{A}$, f задачи известны некоторые их приближения $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, $\tilde{f} \in F$. Считаются также известными уровни погрешности $h_{\mathcal{A}}^-, h_{\mathcal{A}}^+$ в следующих оценках для оператора $\mathcal{A}$:

$$\|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow F)} \leq h_{\mathcal{A}}^-, \quad \|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F^+)} \leq h_{\mathcal{A}}^+,$$

где H^- и F^+ — некоторые вспомогательные гильбертовы пространства, связанные с исходными пространствами H и F непрерывными и плотными вложениями $H^- \subset H$, $F \subset F^+$. Отметим, что приведенные оценки погрешности обобщают классическую оценку $\|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} \leq h$ и превращаются в нее при $H^- = H$, $F^+ = F$. Такие оценки могут быть доступны в ряде приложений, для которых классическое условие $\|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} \rightarrow 0$ не выполнено. Уровни погрешностей

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00391).

σ_f, σ_f^+ в задании элемента f считаются известными в нормах пространств F и F^+ :

$$\|\tilde{f} - f\|_F \leq \sigma_f, \quad \|\tilde{f} - f\|_{F^+} \leq \sigma_f^+.$$

Авторами предложен численный метод, являющийся модификацией классического обобщенного принципа невязки [1]. Метод представляет собой следующую трехшаговую процедуру, результатом работы которой является элемент $\tilde{u}_* \in H$, приближающий искомое нормальное решение u_* .

1. Поиск оценки $\tilde{\mu}$ меры несовместности уравнения $\mathcal{A}u = f$:

$$\tilde{\mu} = \inf_{u \in H^-} (\|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f}\|_F + h_{\mathcal{A}}^- \|u\|_{H^-} + \sigma_f).$$

2. Проверка неравенства

$$\min_{\psi \in \tilde{\Psi}} \|\psi + \tilde{f}\|_{F^+} \leq \sigma_f^+, \quad \tilde{\Psi} = \{\psi \in F \mid \|\psi\|_F \leq \tilde{\mu}\}.$$

Если оно выполнено, то полагаем $\tilde{u}_* = 0$ и останавливаем процесс. Иначе переходим на шаг 3.

3. Поиск решения $\alpha_* > 0$ скалярного уравнения

$$\|\tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}_\alpha - \tilde{f} - \tilde{\psi}_\alpha\|_{F^+} = h_{\mathcal{A}}^+ \|\tilde{u}_\alpha\|_H + \sigma_f^+,$$

где элементы $\tilde{u}_\alpha \in H$, $\tilde{\psi}_\alpha \in F$ для каждого $\alpha > 0$ определяются как решение следующей задачи минимизации:

$$\|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f} - \psi\|_{F^+}^2 + \alpha \|u\|_H^2 \rightarrow \min, \quad u \in H, \quad \psi \in \tilde{\Psi}.$$

Полагаем $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{\alpha_*}$ и останавливаем процесс.

По сравнению с модификацией обобщенного метода невязки из [2], использующей те же априорные предположения об уровнях погрешностей, все вспомогательные задачи минимизации в предложенном методе являются либо задачами безусловной минимизации, либо задачами минимизации на шаре, в то время как в [2] основным шагом метода было решение задачи минимизации на невыпуклом множестве довольно сложной структуры.

В работе доказана сильная в пространстве H сходимостъ вырабатываемых методом приближений $\tilde{u}_*$ к искомому нормальному решению: $\|\tilde{u}_* - u_*\|_H \rightarrow 0$ при стремлении к нулю всех уровней погрешностей.

Метод применен к решению следующей задачи дирихле-управления для одномерного волнового уравнения [3, 4]:

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) &= y_{xx}(t, x), & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ y|_{x=0} &= u(t), & y|_{x=l} &= 0, & \quad 0 < t < T, \\ y|_{t=0} &= 0, & y_t|_{t=0} &= 0, & \quad 0 < x < l, \\ y|_{t=T} &= f^0(x), & y_t|_{t=T} &= f^1(x), & \quad 0 < x < l, \end{aligned}$$

в которой конечное положение $f^0(x) \in H^1(0, l)$, $f^0(l) = 0$, и конечная скорость $f^1(x) \in L^2(0, l)$ заданы и ищется нормальное управление $u_*(t) \in L^2(0, T)$, приводящее систему в момент $t = T$ в состояние $(f^0(x), f^1(x))$. Приводятся результаты расчетов для этой модельной задачи.

Список литературы

1. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12. № 6. С. 1592–1594.
2. Дряженков А.А. Модифицированный обобщенный метод невязки для задач минимизации с погрешностями известного уровня в ослабленных нормах // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 456–463.
3. Russell D.L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Rev. 1978. V. 20, No. 4. P. 639–739.
4. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СБЕРЕЖЕНИЙ В МОДЕЛИ БИЗНЕС-ЦИКЛА КАЛДОРА (NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMIZING SAVINGS IN THE KALDOR BUSINESS CYCLE MODEL)

А. С. Асеев (A. S. Aseev), С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)

*Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский
государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

anton.ser.as@gmail.com, samsonov@cs.msu.su

Рассмотрим следующую управляемую версию модели бизнес-цикла Калдора (см. [3, 4, 6]):

$$\dot{Y}(t) = \alpha[I(Y(t), K(t)) - (1 - u(t))S(Y(t))],$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t), K(t)) - \delta K(t).$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов. Функции инвестиций $I(Y, K)$, $Y, K \geq 0$, и сбережений $S(Y)$, $Y \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y, K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при } K \leq I(Y)/\beta, \\ 0 & \text{при } K > I(Y)/\beta, \end{cases} \quad S(Y) = \gamma Y,$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I(Y)$ логистическая, т.е. такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y \rightarrow \infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $\hat{Y} > 0$, что $I''(Y) > 0$ при $Y < \hat{Y}$ и $I''(Y) < 0$ при $Y > \hat{Y}$. Начальные значения $Y(0) = Y_0 \geq 0$ и $K(0) = K_0 \geq 0$ считаются известными.

В качестве допустимых управлений рассматриваются все измеримые по Лебегу функции $u: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$. В этом случае величина $u(t)$ характеризует долю сбережений $u(t)S(t) = \gamma u(t)Y(t)$, перераспределяемую центральным планирующим

органом (государством) в потребление $Y(t) - (1 - u(t))S(t)$ в момент $t \geq 0$ за счет проводимой политики управления сбережениями, посредством стимулирования спроса.

В неуправляемом случае (т.е. при $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$) модель Калдора изучалась многими авторами (см. [2, 3, 5, 6]). Известно, что в неуправляемом случае при определенных значениях параметров модель Калдора имеет в качестве своего устойчивого предельного множества предельный цикл (подробнее см. [6]), движение по которому можно интерпретировать как циклическое повторение периодов экономического роста и спада (кризисов). С другой стороны, можно показать, что в управляемом случае при всех достаточно больших значениях $\tilde{Y}$ существует такое постоянное управление $\tilde{u}(t) \equiv u(\tilde{Y}) \in [0, 1]$, $t \geq 0$, при котором модель Калдора имеет единственное асимптотически устойчивое стационарное состояние $(\tilde{Y}, K(\tilde{Y}))$, что с экономической точки зрения предпочтительнее неуправляемого циклического движения.

Стоимость стимулирования спроса на величину $\gamma u Y$, $u \in [0, 1]$, определим при помощи квадратичной функции $\varphi(Y, u) = \omega(\gamma u Y)^2/2$, где $\omega > 0$ — некоторая постоянная. В качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y, u)$ будем рассматривать величину национального дохода, взятого с учетом стоимости стимулирования спроса, т.е. положим

$$\Phi(Y, u) = Y - \varphi(Y, u) = Y - \frac{\omega \gamma^2}{2} (u Y)^2.$$

Пусть (Y_0, K_0) — заданное начальное состояние и (Y_1, K_1) — устойчивое состояние управляемой модели Калдора, соответствующее постоянному управлению $u(t) \equiv u(Y_1)$, $t \geq 0$.

Рассмотрим следующую задачу быстрогодействия (P) :

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \alpha [I(Y(t), K(t)) - (1 - u(t))S(Y(t))], & u(t) &\in [0, 1], \\ \dot{K}(t) &= I(Y(t), K(t)) - \delta K(t), \\ Y(0) &= Y_0, \quad K(0) = K_0, \quad Y(T) = Y_1, \quad K(T) = K_1, \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

В силу принципа максимума Понтрягина для задачи быстрогодействия (см. [1, гл. 1, теорема 2]) необходимые условия оптимальности для задачи (P) имеют следующий вид.

Теорема. Пусть $u_*(t)$ — оптимальное управление, $(Y_*(t), K_*(t))$ — соответствующая оптимальная траектория и $T_* > 0$ — время быстрогодействия в задаче (P) . Предположим, что $Y_*(t) - \beta K_*(t) > 0$ при всех $t \in [0, T_*]$. Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль абсолютно непрерывные функции $\psi^1(t)$ и $\psi^2(t)$ на $[0, T_*]$, что выполняются следующие условия:

- (i) функция $\psi(t) = (\psi^1(t), \psi^2(t))$, $t \in [0, T_*]$, является решением сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^1(t) &= -\alpha (I'(Y_*(t)) - (1 - u_*(t))\gamma) \psi^1(t) - I'(Y_*(t)) \psi^2(t), \\ \dot{\psi}^2(t) &= \alpha \beta \psi^1(t) + (\beta + \delta) \psi^2(t); \end{aligned}$$

(ii) выполняется условие максимума

$$u_*(t)\psi^1(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in [0,1]} \{u\psi^1(t)\};$$

(iii) кроме того,

$$\begin{aligned} M(t) = & \alpha(I(Y_*(t)) - \beta K_*(t) - \gamma Y_*(t))\psi^1(t) + (I(Y_*(t)) - (\beta + \delta)K_*(t))\psi^2(t) + \\ & + \alpha\gamma Y_*(t) \max_{u \in [0,1]} \{u\psi^1(t)\} \equiv \text{const} \geq 0, \quad t \in [0, T_*]. \end{aligned}$$

Из принципа максимума вытекает, что оптимальное управление $u_*(t)$ в задаче (P) не имеет особых режимов

В докладе обсуждается подход к численному решению задачи (P), основанный на использовании принципа максимума Понтрягина. Приводятся результаты численного решения. Для случая, когда неуправляемая модель Калдора (при $u(t) \equiv 0, t \geq 0$) имеет единственное неустойчивое стационарное состояние $(\tilde{Y}, \tilde{K})$, а ее устойчивое предельное множество — предельный цикл, показано, что оптимальное стационарное состояние (Y_*, K_*) является устойчивым узлом и ему соответствуют как большее значение величины $\Phi(Y_*)$ национального дохода, взятого с учетом расходов на стимулирование спроса, так и большее значение величины потребления, чем при движении по периодическому решению $(Y_c(t), K_c(t)), t \geq 0$. При помощи численного решения показано, что оптимальный по быстродействию перевод системы в стационарное состояние (Y_*, K_*) приводит к улучшению ее экономических показателей по сравнению с неуправляемой (“рыночной”) траекторией.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз, 1961.
2. Рязанова Т.В. Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления в моделях экономической динамики: Отчет о науч.-исслед. раб. Екатеринбург: УрФУ, 2013.
3. Chang W.W., Smyth D.J. The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38, No. 1. P. 37–44.
4. Kaldor N. A model of trade cycle // Econ. J. 1940. V. 50, No. 197. P. 78–92.
5. Krawiec A., Szydalowski M. On nonlinear mechanics of business cycle model // Regular Chaotic Dyn. 2001. V. 6, No. 1. P. 101–118.
6. Lorenz H.-W. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. New York: Springer, 1993.

OPTIMAL POLICIES IN THE DASGUPTA–HEAL–SOLOW–STIGLITZ MODEL

S. Aseev^a, K. Besov^a, S. Kaniovski^b

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Austrian Institute of Economic Research (WIFO), Vienna, Austria*

aseev@mi.ras.ru, kbesov@mi.ras.ru, sergei.kaniovski@wifo.ac.at

The Dasgupta–Heal–Solow–Stiglitz (DHSS) model can be presented in terms of output produced using two types of capital: produced capital and the exhaustible resource. At every instant $t \in [0, \infty)$, the economy produces output $Y(t)$ described by a Cobb–Douglas function:

$$Y(t) = K(t)^\varkappa R(t)^\gamma \quad \text{where} \quad 0 \leq \varkappa \leq 1, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (1)$$

Here, $K(t) > 0$ is the stock of produced capital and $R(t) > 0$ is the speed of resource extraction from the current resource stock $S(t)$ at instant $t \geq 0$. The output can be either consumed, generating utility, or invested in increasing the stock of produced capital, which deteriorates with time. If a part $u(t)Y(t)$, $u(t) \in [0, 1]$, of the output $Y(t)$ is invested, the amount of produced capital available at time t varies according to the rule

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t)^\varkappa R(t)^\gamma - \delta K(t) \quad \text{where} \quad \delta \geq 0. \quad (2)$$

This makes the produced capital renewable at the expense of consumption. The stock of produced capital depreciates at a constant rate δ . The initial stock of produced capital is $K(0) = K_0 > 0$. The remaining output, $(1 - u(t))Y(t)$, $t \geq 0$, is consumed.

The resource, on the other hand, is nonrenewable. The finite resource stock imposes the following integral constraint on the depletion speed $R(\cdot)$:

$$\int_0^\infty R(t) dt \leq S_0, \quad (3)$$

where $S_0 > 0$ is the initial resource stock.

The problem facing the economy is how to optimally deplete the resource and invest in produced capital. We will measure welfare by a discounted logarithmic utility function of consumption, as maximizing the aggregate discounted logarithmic utility essentially amounts to maximizing the aggregate discounted growth rates. This leads to the following objective functional for the economy (see (1)):

$$\begin{aligned} J_1(K(\cdot), u(\cdot), R(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln[(1 - u(t))Y(t)] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \varkappa \ln K(t) + \gamma \ln R(t)] dt, \end{aligned}$$

where $\rho > 0$ is a discount rate.

Setting $\varkappa = 0$ leads to a *pure depletion* economy. In a pure depletion economy the only question is how to optimally deplete the resource, and we briefly discuss this special case before turning to the full model. We ignore the case $\gamma = 0$ as it implies the irrelevance of the resource.

In solving the above specification of the DHSS model, we follow an approach based on an *existence* theorem and the application of *necessary* optimality conditions. This approach settles the question of the uniqueness of the solution to the DHSS model, because the maximum principle implies uniqueness when a solution exists. The subsequent analysis of the Hamiltonian system of the maximum principle yields explicit and easily interpretable asymptotic solutions for all types of returns to scale.

Given parameters $0 \leq \varkappa \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $\delta \geq 0$, $\rho > 0$, $K_0 > 0$ and $S_0 > 0$, the optimization problem $J(K(\cdot), u(\cdot), R(\cdot)) \rightarrow \max$, subject to equation (2) and constraint (3), can be formulated as an infinite-horizon optimal control problem (P_1):

$$J_1(K(\cdot), u(\cdot), R(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \varkappa \ln K(t) + \gamma \ln R(t)] dt \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t)^\varkappa R(t)^\gamma - \delta K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \quad (5)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad R(t) > 0, \quad \int_0^\infty R(t) dt \leq S_0. \quad (6)$$

By an admissible control $w(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ in problem (P_1) we mean a pair $w(\cdot) = (u(\cdot), R(\cdot))$ comprising a measurable function $u(\cdot)$ and an integrable function $R(\cdot)$, each of which is defined on the infinite time interval $[0, \infty)$ and satisfies the constraints in (6). In view of (5) and (6), for any admissible control $w(\cdot) = (u(\cdot), R(\cdot))$ the corresponding admissible trajectory $K(\cdot)$ always exists on the whole infinite interval $[0, \infty)$.

It can be shown that for any admissible pair $(K(\cdot), w(\cdot))$ the improper integral in (4) either converges to a finite real or diverges to $-\infty$. Moreover, it is uniformly bounded from above. In other words, there is a number $M \geq 0$ such that

$$\sup_{(K(\cdot), w(\cdot))} \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \varkappa \ln K(t) + \gamma \ln R(t)] dt \leq M, \quad (7)$$

where the supremum is taken over all admissible pairs $(K(\cdot), w(\cdot))$. This fact allows us to understand the optimality of an admissible pair $(K_*(\cdot), w_*(\cdot))$ in problem (P_1) in the strong sense.

To simplify the system, we introduce a new state variable $x(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ and a new control variable $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ as follows:

$$x(t) = \frac{K(t)^{1-\varkappa}}{S(t)^\gamma}, \quad v(t) = \frac{R(t)}{S(t)}, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Here, the state variable $S(\cdot)$ represents the current supply of the exhaustible resource. This variable is a (Carathéodory) solution to the initial value problem

$$\dot{S}(t) = -R(t), \quad S(0) = S_0, \quad (9)$$

for a given admissible control $R(\cdot)$ on $[0, \infty)$. So the control variable $v(\cdot)$ represents the extraction rate of the resource. Due to the pointwise and integral constraints on $R(\cdot)$ in (6), we have $S(t) > 0$ for all $t > 0$. Thus, the quantities $x(t)$ and $v(t)$ are well defined for all $t > 0$. Moreover, the function $v(\cdot)$ is locally integrable since $R(\cdot)$ is integrable and $S(\cdot)$ is positive and continuous.

It can be shown that problem (P_1) is equivalent (in a certain sense) to the following optimal control problem $(\tilde{P}_1)$:

$$\tilde{J}_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \rightarrow \max, \quad (10)$$

$$\dot{x}(t) = (1 - \varkappa)u(t)v(t)^\gamma + (\gamma v(t) - (1 - \varkappa)\delta)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (11)$$

$$v(t) \in (0, \infty), \quad u(t) \in [0, 1), \quad (12)$$

where

$$\tilde{J}_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \ln(1 - u(t)) + \gamma \left[\ln v(t) - \frac{v(t)}{\rho} \right] + \frac{\varkappa}{\rho} \frac{u(t)v(t)^\gamma}{x(t)} \right\} dt.$$

We say that a control $\tilde{w}(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot)): [0, \infty) \rightarrow [0, 1) \times (0, \infty)$ (which is a pair of measurable functions) is admissible in problem $(\tilde{P}_1)$ if the functions

$$t \mapsto v(t) \quad \text{and} \quad t \mapsto e^{-\rho t} \left\{ \ln(1 - u(t)) + \gamma \left[\ln v(t) - \frac{v(t)}{\rho} \right] + \frac{\varkappa}{\rho} \frac{u(t)v(t)^\gamma}{x(t)} \right\}$$

are locally integrable on $[0, \infty)$. The corresponding trajectory $x(\cdot)$ is always defined on the whole infinite time interval $[0, \infty)$. A pair $(x(\cdot), \tilde{w}(\cdot))$, where $\tilde{w}(\cdot)$ is an admissible control and $x(\cdot)$ is the corresponding trajectory, is called an admissible pair in problem $(\tilde{P}_1)$.

After showing that regimes with very large controls $v(\cdot)$ cannot be optimal, we can bound the control $v(\cdot)$ by a (uniform) large constant V and then apply the existence theorem from [2]. Then we establish an appropriate version of the Pontryagin maximum principle for problem $(\tilde{P}_1)$ with an additional characterization of the adjoint variable and use it to analyze optimal regimes in problem $(\tilde{P}_1)$ (and hence in the original problem (P_1)) [1].

References

1. *Aseev S., Besov K., Kaniowski S.* The optimal use of exhaustible resources under non-constant returns to scale: WIFO Working Paper 525. Vienna: Austrian Inst. Econ. Res. (WIFO), 2016.
2. *Besov K.O.* On Balder's existence theorem for infinite-horizon optimal control problems // *Math. Notes*. 2018. V. 103, No. 2. P. 167–174.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА
(ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SINGULAR SOLUTIONS TO
EMDEN–FOWLER TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS)

И. В. Астахова (I. V. Astashova)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия
`ast.diffiety@gmail.com`

Рассматриваются дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad (1)$$

где p — положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по последним n переменным, и его частный случай

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 > 0. \quad (2)$$

Для этих уравнений обсуждается асимптотическое поведение сингулярных решений.

Известно (см. [1, 4]), что любое максимально продолженное решение уравнения (1) с положительным набором данных Коши в некоторой точке x_0 имеет ограниченную справа область определения и стремится к бесконечности вместе со всеми своими производными при стремлении x к этой границе $x^* > x_0$. Такие решения по терминологии [1] называются сингулярными решениями второго рода. Для $n \in \{2, 3, 4\}$ известно (см. [1, гл. V] для $n = 2$ и [2; 3; 4, 5.3] для $n \in \{3, 4\}$), что любое такое решение уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow x^* - 0, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C = \left(\frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{p_0} \right)^{1/(k-1)}, \quad (4)$$

при этом для уравнения (1) под $p_0 = \operatorname{const} > 0$ подразумевается предел функции $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ при $x \rightarrow x^* - 0$, $y_0 \rightarrow \infty, \dots, y_{n-1} \rightarrow \infty$. В [5] было также доказано, что существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что любое сингулярное решение второго рода с правой границей области определения $x = x^*$ в левой полукрестности x^* удовлетворяет неравенствам $C_1(x^* - x)^{-\alpha} \leq y(x) \leq C_2(x^* - x)^{-\alpha}$. В работах [2; 4, 5.1] для уравнения (1) при некоторых дополнительных предположениях относительно функции P было доказано существование при любом n решения со степенной асимптотикой вида (3). Для $5 \leq n \leq 11$ было доказано существование $(n-1)$ -параметрического семейства таких решений.

Естественное предположение о том, что и при всех $n > 4$ сингулярные решения второго рода имеют степенную асимптотику, оказалось неверным даже для

уравнения (2) (см. [6] для сколь угодно больших n и [7] для $n \in \{12, 13, 14\}$). В этих случаях было доказано существование (при некоторых k) решений вида

$$y(x) = (x^* - x)^{-\alpha} h(\ln(x^* - x)),$$

где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция.

Оказалось, однако, что для достаточно слабо нелинейного уравнения нестепенное поведение решений с вертикальной асимптотой невозможно, а именно справедлива следующая

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) $p \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \cap \text{Lip}_{y_0, \dots, y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$ и $p \rightarrow \rightarrow p_0 > 0$ при $x \rightarrow x^*$, $y_0 \rightarrow \infty, \dots, y_{n-1} \rightarrow \infty$. Тогда для любого целого $n > 4$ существует такое $K > 1$, что для любого действительного $k \in (1, K)$ любое решение уравнения (1), стремящееся вместе со своими производными к бесконечности при $x \rightarrow x^* - 0$, имеет вид (3), (4).

Замечание 1. Доказательство этой теоремы для уравнения (2) содержится в [8], а для уравнения (1) — в [9].

Тем не менее при больших n и k запас сингулярных решений со степенной асимптотикой даже у уравнения (2) может быть достаточно мал, а именно справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0; +\infty)$ и алгебраическое уравнение

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda + j + \alpha) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + j + \alpha) \quad (5)$$

имеет по крайней мере два корня с положительной действительной частью и не имеет чисто мнимых корней. Тогда множество всех данных Коши в любой точке x_0 , порождающих решения уравнения (2) со степенной асимптотикой вида (3), (4), имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Отметим, что для любого $n \geq 12$ при достаточно большом k , т.е. при достаточно малом α , уравнение (5) имеет, кроме очевидного корня $\lambda = 1$, по крайней мере одну пару комплексно сопряженных корней с положительной действительной частью. Доказательство этого факта содержится в [7].

Замечание 3. Результаты о поведении знакопеременных сингулярных решений уравнения (1) содержатся в [9].

Список литературы

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н. Векуа. Тбилиси. 1985. Т. 1, №3. С. 9–11.
3. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.
4. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

5. Квиникадзе Г.Г., Кигурадзе И.Т. О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 465–468.
6. Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. Bd. 37, No. 2. S. 305–322.
7. Astashova I.V. On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations // Adv. Diff. Eqns. 2013. V. 220. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-220.
8. Astashova I. On Kiguradze’s problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations // Georg. Math. J. 2017. V. 24, No. 2. P. 185–191.
9. Astashova I.V. On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity // Differential and difference equations with applications. ICDDEA 2017 / Ed. by S. Pinelas et al. Cham: Springer, 2018. P. 1–12. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 230).

MAXIMUM PRINCIPLE FOR INFIMUM IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

E. R. Avakov, G. G. Magaril-II’yaev

*Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow State University, Moscow, Russia*

eramag@mail.ru, magaril@mech.math.msu.su

For an optimal control problem, the concept of a strong infimum is introduced, for which necessary conditions consisting of some family of “maximum principles” are formulated. If a function delivers a strong minimum in this problem (and therefore, a strong infimum), then this family contains the classical Pontryagin maximum principle (see [1, 2]). As a corollary, we derive generalized necessary conditions for a strong minimum for a problem of the calculus of variations. Examples will be given to show that the obtained necessary conditions generalize and strengthen classical results.

In our work we use the idea of R. V. Gamkrelidze [3], considering the original control system as a representative of a more general class of control systems.

Let $[t_0, t_1]$ be a line interval, U a nonempty subset of $\mathbb{R}^r$, $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ a mapping of variables $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, and $u \in U$, and $f_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, and $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ mappings of variables $\zeta_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$.

Consider the following optimal control problem:

$$\begin{aligned} f_0(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \dot{x} &= \varphi(t, x, u(t)), \quad u(t) \in U, \\ f(x(t_0), x(t_1)) &\leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (is an absolutely continuous vector function on $[t_0, t_1]$) and $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$.

In what follows we assume that the mapping φ is continuous together with its derivative with respect to x on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ and the mappings f_0 , f , and g are continuously differentiable on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

A function $x(\cdot) \in \text{AC}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ is said to be *admissible* in problem (1) if $f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0$, $g(x(t_0), x(t_1)) = 0$, and there exists $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ such that $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ and $u(t) \in U$ for almost all $t \in [t_0, t_1]$.

Definition. We say that a function $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ delivers a *strong infimum* in problem (1) if $f(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \leq 0$, $g(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = 0$, and there exist a neighbourhood V of the point $\hat{x}(\cdot)$ and a sequence $\{x_N(\cdot)\}$, $N \in \mathbb{N}$, of admissible functions in (1) such that $f_0(x(t_0), x(t_1)) \geq f_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ for any admissible function $x(\cdot) \in V$ and $x_N(\cdot)$ converges uniformly to $\hat{x}(\cdot)$ as $N \rightarrow \infty$.

Clearly, if a pair $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ delivers a *strong minimum* in problem (1), then $\hat{x}(\cdot)$ is a strong infimum in this problem. On the other hand, if a function $\hat{x}(\cdot)$ delivers a strong infimum in (1), $\hat{x}(\cdot)$ is admissible, and $\hat{u}(\cdot)$ is the corresponding control, then the pair $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ delivers a strong minimum in this problem.

Given arbitrary $k \in \mathbb{N}$ and k -tuples $\bar{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) \in (L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r))^k$ and $\bar{\alpha}(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_k(\cdot)) \in (L_\infty([t_0, t_1]))^k$, where $\alpha_i(t) \geq 0$, $\alpha_i(t) \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, and $\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) = 1$ for almost all $t \in [t_0, t_1]$, we associate with the control system specifying the constraints in problem (1) the following *extended* (relaxation) control system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \varphi(t, x, u_i(t)), & u_i(t) &\in U, \quad i = 1, \dots, k, \\ f(x(t_0), x(t_1)) &\leq 0, & g(x(t_0), x(t_1)) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

A triple $(x(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot))$ ($x(\cdot) \in \text{AC}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$) is called *admissible* for system (2) if it satisfies all constraints in (2).

Let us introduce some notation. We let $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ denote a linear functional $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$ evaluated at a point $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. By $(\mathbb{R}^n)_+^*$ we denote the cone of linear functionals that are nonnegative on non-negative elements of $\mathbb{R}^n$. The adjoint operator to a linear operator $\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is denoted by Λ^* .

Given a fixed function $\hat{x}(\cdot)$, the partial derivatives of f_0 , f , and g with respect to ζ_1 and ζ_2 at a point $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ will be briefly denoted by $\hat{f}_{0\zeta_i}$, $\hat{f}_{\zeta_i}$, and $\hat{g}_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$, respectively.

Theorem. If a function $\hat{x}(\cdot) \in \text{AC}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ delivers a strong infimum in problem (1), then for any $k \in \mathbb{N}$, $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_k(\cdot))$, and $\bar{\alpha}(\cdot) = (\bar{\alpha}_1(\cdot), \dots, \bar{\alpha}_k(\cdot))$ such that the triple $(\hat{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot))$ is admissible for the control system (2), there exist a nonzero triple $(\lambda_0, \lambda_f, \lambda_g) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{m_1})_+^* \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$ and a vector function $p(\cdot) \in \text{AC}([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ such that the following conditions hold:

(i) the stationarity condition with respect to $x(\cdot)$

$$\dot{p}(t) = -p(t) \sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \hat{x}(t), \bar{u}_i(t));$$

(ii) the transversality condition

$$p(t_0) = \lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_1} + \hat{f}_{\zeta_1}^* \lambda_f + \hat{g}_{\zeta_1}^* \lambda_g, \quad p(t_1) = -\lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_2} - \hat{f}_{\zeta_2}^* \lambda_f - \hat{g}_{\zeta_2}^* \lambda_g;$$

(iii) the complementary slackness condition

$$\langle \lambda_f, f(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \rangle = 0;$$

(iv) the maximum condition for almost all $t \in [t_0, t_1]$

$$\max_{u \in U} \langle p(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u) \rangle = \langle p(t), \hat{x}(t) \rangle.$$

If for some $k \in \mathbb{N}$ and a triple $(\hat{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot))$ admissible for the control system (2), conditions (i)–(iv) hold only when $\lambda_0 \neq 0$, then there exists a sequence of functions $x_N(\cdot)$, $N \in \mathbb{N}$, admissible in problem (1) such that $x_N(\cdot) \rightarrow \hat{x}(\cdot)$ as $N \rightarrow \infty$ uniformly on $[t_0, t_1]$.

The formulated necessary conditions constitute a family of relations (parameterized by all possible finite tuples $(\hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$ such that the triple $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$ is admissible for the control system (2)), each of which has the form of a maximum principle. Furthermore, if $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ is a strong minimum in problem (1), then this family contains (with $k = 1$, $\hat{u}_1(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$, and $\hat{\alpha}_1(\cdot) = 1$) the classical Pontryagin maximum principle. However, in this case, this family (as will be shown in the examples) contains, generally speaking, more information about the optimal process than the classical result. Thus, the obtained necessary conditions strengthen the Pontryagin maximum principle.

If the infimum is not delivered, then this theorem provides a tool for finding the trajectories “suspicious” for infimum. In this sense, the theorem generalizes the method based on the Pontryagin maximum principle to such kind of problems.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. New York; London: Wiley, 1962.
2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Theory of extremal problems. Amsterdam; New York: North-Holland, 1979. (Stud. Math. Appl.; V. 6).
3. Gamkrelidze R.V. Principles of optimal control theory. Tbilisi: Tbilisi Univ. Publ. House, 1977.

ON SOLVABILITY OF SOME PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS*

G. N. Averianov, Shaban H. Kutaiba, V. B. Vasilyev

Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

averianov@bsu.edu.ru, 1167542@bsu.edu.ru,
vladimir.b.vasilyev@gmail.com

One of the authors studied elliptic pseudo-differential equations in domains with singular points on a boundary [1]. Using the local principle, he considered the equation [2–4]

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad (1)$$

*This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russia, project no. 7311.2017/8.9.

where C is a cone in Euclidean space $\mathbb{R}^m$ and A is a pseudo-differential operator with a symbol $A(\xi)$ satisfying the condition

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

which looks as follows:

$$(Au)(x) = \int_C \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) d\xi dy, \quad x \in C.$$

The main problem is to obtain conditions for unique solvability of equation (1) in appropriate functional spaces, or invertibility conditions for the operator A . To describe such conditions, a concept of the wave factorization for an elliptic symbol was introduced [1]. Unfortunately, a number of solutions depend on an index of the wave factorization [1], and to extract a unique solution one needs some additional conditions.

Here we consider the two-dimensional case and the cone $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ under the condition $1/2 < \varkappa - s < 3/2$, where $\varkappa$ is the index of the wave factorization and s is an exponent of the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(C)$.

Let us consider a very simple case when $v \equiv 0$ and $a = 1$. If the symbol $A(\xi)$ admits the wave factorization [1]

$$A(xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

then one can show that a general solution of equation (1) in the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(C)$ in the Fourier image has the following form:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + \xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - \xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} \\ & + A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \left(\text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{\xi_1 + \xi_2 - \eta} - \text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{\xi_1 - \xi_2 - \eta} \right), \end{aligned}$$

where c_0 is an arbitrary function from $H^{s-\varkappa+1/2}(\mathbb{R})$.

Let us make the change of variables

$$t_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad t_2 = \xi_1 - \xi_2$$

and set

$$a_{\neq}(t_1, t_2) \equiv A_{\neq} \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_1 - t_2}{2} \right).$$

Then we can rewrite

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t_1, t_2) = & \frac{\tilde{c}_0(t_1) + \tilde{c}_0(t_2)}{2a_{\neq}(t_1, t_2)} \\ & + a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) \left(\text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{t_1 - \eta} - \text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{t_2 - \eta} \right). \end{aligned}$$

Let us introduce the notation

$$\text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{t_1 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(t_1), \quad \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{t_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(t_2).$$

Then we have

$$\tilde{U}(t_1, t_2) = \frac{\tilde{c}_0(t_1) + \tilde{c}_0(t_2) + \tilde{d}_0(t_1) - \tilde{d}_0(t_2)}{2a_{\neq}(t_1, t_2)} \equiv \frac{\tilde{c}(t_1) + \tilde{d}(t_2)}{2a_{\neq}(t_1, t_2)},$$

where we put $\tilde{c}(t_1) \equiv \tilde{c}_0(t_1) + \tilde{d}_0(t_1)$ and $\tilde{d}(t_2) \equiv \tilde{c}_0(t_2) - \tilde{d}_0(t_2)$.

Assuming that we know the two integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(t_1, t_2) dt_1 = \tilde{g}_1(t_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(t_1, t_2) dt_2 = \tilde{g}_2(t_1) \quad (2)$$

and integrating the last quantity first in t_1 and then in t_2 , we can obtain the following 2×2 system of linear integral equations with respect to two unknown functions $\tilde{c}$ and $\tilde{d}$:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2) \tilde{c}(t_1) dt_1 + b_1(t_2) \tilde{d}(t_2) = \tilde{g}_1(t_2), \\ b_2(t_1) \tilde{c}(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2) \tilde{d}(t_2) dt_2 = \tilde{g}_2(t_1), \end{cases} \quad (3)$$

where we use the following notation:

$$K(t_1, t_2) = (2a_{\neq}(t_1, t_2))^{-1}, \\ b_1(t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2) dt_1, \quad b_2(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2) dt_2.$$

Theorem. *A unique solvability of problem (1), (2) is equivalent to a unique solvability of the system of linear integral equations (3).*

Remark. Indeed, conditions (2) are the Dirichlet conditions on sector sides.

References

1. *Vasil'ev V.B.* Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains. Kluwer, 2000.
2. *Vasilyev V.B.* On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone // *Math. Bohem.* 2014. V. 139, No. 2. P. 333–340.
3. *Vasilyev V.B.* On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // *Adv. Dyn. Syst. Appl.* 2014. V. 9, No. 2. P. 227–237.
4. *Vasil'ev V.B.* Pseudodifferential equations on manifolds with complicated boundary singularities // *J. Math. Sci.* 2018. V. 230, No. 1. P. 175–183.

PONTRYAGIN'S ALTERNATING INTEGRAL

A. A. Azamov

Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

`abdulla.azamov@gmail.com`

L.S. Pontryagin devoted the last active period of his research to the theory of pursuit–evasion games. In order to estimate one piece of his contribution to the theory, let us begin with the following fairly real sample. Imagine $\mathbb{R}^2$ as a surface of a sea on which cutters P (a pursuing point) and Q (an evading point) move in accordance with Newton's law

$$m_P \ddot{x} = -k_P \dot{x} + f_P, \quad m_Q \ddot{y} = -k_Q \dot{y} + f_Q.$$

The pursuer controls his cutter changing some way the force vector f_P aiming to approach Q to the distance l , while Q tries to achieve the opposite goal controlling the force vector f_Q . Naturally, the values of these quantities are bounded:

$$|f_P| \leq \rho, \quad |f_Q| \leq \sigma$$

(m_P, m_Q, k_P, k_Q, ρ , and σ are positive, and $l \geq 0$).

The task of a researcher consists in answering the following question: which of the players wins if the game begins from an initial position $x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0)$?

The formulated game was called the “control sample” by L. S. Pontryagin. It belongs to the class of linear pursuit–evasion differential games described as

$$\dot{z} = Cz - u + v, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad P, Q, M \subset \mathbb{R}^d, \quad C \in \text{Lin}(\mathbb{R}^d).$$

Putting aside discussions about how important the sample is, let us consider the following questions usually treated without due attention by specialists in applied mathematics but essential in principle for mathematicians: what is meant by “control” and by saying that “the pursuer (or evader) wins” when there is another player pursuing the opposite goal?

The answer is quite nontrivial. During 1960–2000, about ten approaches were suggested to that. But when L. S. Pontryagin started to consider the problem in the 1950s, it was new and seemed absolutely inaccessible [1]. Of course, formally the problem might be classified as that of calculus of variations, but the results obtained in this way (say, by the Hamilton–Jacobi method) were impossible to justify on the whole. That is why the monograph “Differential Games” by R. Isaacs, the first one in the new field, consists mainly of examples of pursuit–evasion games and their discussions without definitions and proofs.

Under such circumstances, L. S. Pontryagin's genius created a fundamentally new concept called an alternating integral [1].

Let a linear map $C: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, compact subsets P and Q , any subset M of $\mathbb{R}^d$ and some interval $[0, \tau]$ be given. Let Ω be the family of all partitions $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \tau\}$, $n = n(\omega)$.

The definition of an alternating integral involves the Minkowski difference $A \star B = \{\vec{x} \mid B + \vec{x} \subset A\}$ and the integral of a multivalued map

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{tC} X \, dt = \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \, dt \mid x(t) \in e^{tC} X \right\},$$

where $X = P$ or $X = Q$. We put $U_i = \int_i e^{tC} P dt$ and $V_i = \int_i e^{tC} Q dt$, where the integrals are taken over the interval $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

The expression

$$\sum_{\tau}(\omega) = M + U_1 - V_1 + U_2 - V_2 + \cdots + U_n - V_n$$

is called an alternating sum; its limit under an infinite refinement of partitions, or actually the intersection

$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\omega \in \Omega} \sum_{\tau}(\omega),$$

is called an alternating integral.

Thus, the alternating integral is a concrete purely mathematical concept which does not allow any obscurity and free interpretation. Therefore, the following result was quite unexpected.

Pontryagin's theorem [2]. *Let M be closed. Then*

$$e^{\tau C} z_0 \in W^{\tau}(M) \Rightarrow \begin{cases} \text{In the game from an initial state } z_0 \\ \text{the pursuer wins on the interval } [0, \tau]. \end{cases}$$

Of course, the proof of the theorem requires that the notion of pursuer's win (from the initial position z_0 on the time interval $[0, \tau]$) should be strictly defined. As noted above, there are several approaches to answering this, which turn out practically equivalent at least for the game under consideration. The following one seems to be the most simple [4].

Let A be a bounded subset of $\mathbb{R}^d$ and $\varepsilon > 0$. The set of all measurable functions $\varphi(\cdot): [0, \tau] \rightarrow A$ will be denoted by A_{ε} .

Definition 1. Every map $V: \mathbb{R}^d \rightarrow Q_{\varepsilon}$ is called a lower ε -strategy of the evader. Every map $V: \mathbb{R}^d \times Q_{\varepsilon} \rightarrow P_{\varepsilon}$ is called an upper ε -strategy of the pursuer. The class of all upper ε -strategies of the pursuer (lower ε -strategies of the evader) will be denoted by P^{ε} (respectively, Q_{ε}).

Every triple $z_0 \in \mathbb{R}^d, u \in P^{\varepsilon}, v \in Q_{\varepsilon}$ generates a unique absolutely continuous trajectory $z(t) = z(t; z_0, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$ in the following way.

For $t \in [0, \varepsilon]$, $z(t)$ is a solution of the Cauchy problem

$$\dot{z} = Cz - u_0(t) + v_0(t), \quad z(0) = z_0,$$

where $v_0(t) = v(z_0)$ and $u_0(t) = u(z_0, v_0(\cdot))(t)$.

Suppose $z(t)$ has been defined on $[0, n\varepsilon]$. Then $z(t)$ on $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ is a solution of the Cauchy problem

$$\dot{z} = Cz - u_n(t - n\varepsilon) + v_n(t - n\varepsilon), \quad z(n\varepsilon + 0) = z(n\varepsilon - 0),$$

where $v_n(s) = v(z(n\varepsilon))(s)$ and $u_n(s) = u(z(n\varepsilon), v_n(\cdot))(s)$, $0 \leq s < \varepsilon$.

Definition 2. In the game under consideration the pursuer wins from the initial position z_0 on the interval $[0, \tau]$ if and only if for every $\varepsilon \geq 0$ there exists $u \in P^{\varepsilon}$ such that for all $v \in Q_{\varepsilon}$ we have $z(t) \in M$ for some $t \in [0, \tau]$.

Some modification of the notion of pursuer's win allows one to invert Pontryagin's theorem.

Definition 3. In the game under consideration the pursuer wins from the initial position z_0 at the time instance $t = \tau$ if and only if for every $\varepsilon \geq 0$ there exists $u \in P^\varepsilon$ such that for all $v \in Q_\varepsilon$ we have $z(\tau) \in M$.

Theorem 1. Let M be closed in the game under consideration. The pursuer wins from the initial position z_0 at the time instance $t = \tau$ if and only if $e^{\tau C} z_0 \in M$.

In accordance with the introduced classes of strategies, the pursuer uses informational discrimination of the evader. The dual theory of alternating integral allows one to consider a situation when the evader uses informational discrimination of the pursuer [3]. The class P_ε (respectively, Q^ε) of lower ε -strategies of the pursuer (upper ε -strategies of the evader) and the notions of alternating sum and alternating integral are defined in a similar way. For example,

$$\sum_{\omega}^{\tau}(M) = M \star V_1 + U_1 \star V_2 + U_2 \star \dots \star V_n + U_n, \quad W_{\tau}(M) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \sum_{\omega}(M).$$

Naturally, dual variants of the theorems formulated above are valid. Moreover, several relations between the upper and lower integrals are exit. One of them is

Theorem 2 [5]. Let M be closed and convex and there be a positive number r such that

$$rD \stackrel{\star}{\subset} W^t(M) \quad \text{for all } t \in [0, \tau]$$

(condition of uniform bodyness). Then

$$\text{Int } W^{\tau}(M) = W_{\tau}(\text{Int } M). \quad (1)$$

This relation has a clear interpretation in the language of the game under consideration. The main result of present talk is the following.

Theorem 3. Suppose there exists a nonnegative function $r(t)$ such that $r(t) > 0$ for $t \in (0, \tau]$ and $r(t) \stackrel{\star}{\subset} W^t(M)$ for $t \in [0, \tau]$. Then (1) holds.

References

1. Pontryagin L.S. Selected works. Moscow: Maks-Press, 2004.
2. Pontryagin L.S. On linear differential games // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. V. 175, No. 4. P. 764–766.
3. Azamov A.A. On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit // Math. USSR, Sb. 1983. V. 46, No. 3. P. 429–437.
4. Nikol'skii M.S. On the lower alternating integral of Pontryagin in linear differential games of pursuit // Math. USSR, Sb. 1987. V. 56, No. 1. P. 33–47.
5. Azamov A.A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral // Sov. Math., Dokl. 1988. V. 37, No. 2. P. 355–359.

FUNDAMENTAL SOLUTION FOR A ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH A CONTINUOUS COEFFICIENT

E. A. Baderko, K. V. Semenov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

baderko.ea@yandex.ru, ksemen@mech.math.msu.su

In $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ we consider the uniformly parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

whose coefficient $a(x, t)$ is such that $0 < \delta \leq a(x, t) \leq A$ for some $\delta > 0$, $A > 0$ and all $(x, t) \in \overline{D}$, $a(x, t)$ is uniformly continuous in $\overline{D}$, and

$$|a(x_2, t) - a(x_1, t)| \leq \omega(|x_2 - x_1|)$$

with modulus of continuity ω satisfying the Dini condition

$$\tilde{\omega}(x) = \int_0^x \frac{\omega(y)}{y} dy < \infty, \quad x > 0. \quad (2)$$

A. M. Il'in (see [1]) proved that if condition (2) is not satisfied, then, generally speaking, equation (1) has no classical fundamental solution.

According to [2], the existence of a fundamental solution follows under the more restrictive condition

$$|a(x_2, t_2) - a(x_1, t_1)| \leq \omega(|x_2 - x_1| + |t_2 - t_1|^{1/2}),$$

where the modulus of continuity ω satisfies the Dini condition.

In this paper we show that the minimal condition (2) is sufficient for the existence of a classical fundamental solution for equation (1).

References

1. *Il'in A.M.* On the fundamental solution of the parabolic equation // Dokl. Math. 1962. V. 147, No. 4. P. 768–771.
2. *Zeyneddin M.* Regularity of the single-layer potential for a second-order parabolic system in Dini classes: Deposited in VINITI 16.04.92. No. 1294-V92 (in Russian).

A NEW APPROACH TO THE EXISTENCE OF PERIODIC AND BOUNDED SOLUTIONS FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF POINTWISE TYPE AND THEIR NUMERICAL REALIZATION*

L. A. Beklaryan, A. L. Beklaryan

*Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia
National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia*

beklar@cemi.rssi.ru, abeklaryan@hse.ru

We consider a functional differential equation of pointwise type (FDEPT)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \quad (1)$$

where $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a mapping of class $C^{(0)}$; $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, are orientation-preserving homeomorphisms of the line; and B_R is either a closed interval $[t_0, t_1]$, or a closed half-line $[t_0, +\infty[$, or the line $\mathbb{R}$.

The approach proposed for the study of such equations is based on a formalism whose central element is the construction using a finitely generated group

$$Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$$

of homeomorphisms of the line (the group operation in such a group is the composition of two homeomorphisms).

Using time replacement for deviations of the argument $[q_j(t) - t]$, $j = 1, \dots, s$, we can always achieve the condition

$$h = \max_{j \in \{1, \dots, s\}} h_j < +\infty, \quad h_j = \sup_{t \in \mathbb{R}} |q_j(t) - t|, \quad j = 1, \dots, s.$$

The importance of equations of the considered type is determined by the fact that the theory of solutions of such equations is closely related to the theory of soliton solutions for infinite-dimensional ordinary differential equations [1]. Equation (1) defined on the entire line canonically induces an infinite-dimensional ordinary differential equation. In this case, to each solution of equation (1) there corresponds in a one-to-one way a solution of the traveling wave type of the induced infinite-dimensional equation. In particular, finite-difference analogs of equations of mathematical physics define infinite-dimensional dynamical systems. Important subclasses of solutions of the traveling wave type of infinite-dimensional ordinary differential equations are periodic and bounded solutions of the traveling wave type to which the periodic and bounded solutions of the induced functional differential equations correspond.

The main goal in the study of such differential equations is the investigation of the initial-boundary value problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad (3)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

*The reported study was partially supported by the Russian Science Foundation, project no. 17-71-10116. This work was also partially supported by the RFBR, project no. 16-01-00110 a.

which we will call the *basic initial-boundary value problem*. In a general situation, when $\bar{t} \neq t_0, t_1$ or deviations of the argument are arbitrary, we have a problem with *non-local initial-boundary conditions*.

Let us define a Banach space of functions $x(\cdot)$ with weights

$$\mathcal{L}_\mu^{n C^{(k)}}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\},$$

$$\mu \in (0, 1),$$

with a norm

$$\|x(\cdot)\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Let us formulate a system of restrictions on the right-hand side of the FDEPT:

- (a) $f(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ (the function $f(\cdot)$ with respect to the variable t can be considered as a piecewise continuous function with discontinuities of the first kind at the points of a discrete set);
- (b) $f(\cdot)$ satisfies the quasilinear growth condition:

$$\|f(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^s \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

for all t, z_j , and $\bar{z}_j, j = 1, \dots, s$, and the Lipschitz condition

$$\|f(t, z_1, \dots, z_s) - f(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

(in fact $M_1 \leq M_2$, but the constants M_1 and M_2 can be taken equal to each other);

- (c) there exists $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ such that the quantity

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t + i)(\mu^*)^{|i|}$$

is finite for any $t \in \mathbb{R}$ and is continuous as a function of the argument t ;

- (d) for the μ^* from (c) the family of functions

$$\tilde{f}_{i, z_1, \dots, z_s}(t) = f(t + i, z_1, \dots, z_s)(\mu^*)^{|i|}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n,$$

is equicontinuous on any finite interval.

The last condition (d) is necessary only in the case of a half-line or the whole line. It can be removed, but this leads to more technical complications.

Theorem 1 [2]. *If for some $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ the inequality*

$$M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|h_j|} < \ln \mu^{-1}$$

is satisfied, then for any fixed initial-boundary conditions

$$\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

there exists a solution (absolutely continuous)

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

of the basic initial-boundary value problem (2)–(4). Such a solution is unique and, as an element of the space $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, depends continuously on the initial-boundary conditions $\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, and the right-hand side of the equation (function $f(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$). $\square$

Let us formulate sufficient conditions of a new type for the existence of periodic and bounded solutions for ordinary differential equations, as well as for FDEPTs. Such conditions are based on taking into account the asymptotic properties of solutions of differential equations that were not taken into account in the previous study of periodic and bounded solutions. For simplicity, we assume that all deviations are integer; i.e., we consider the equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t + n_1), \dots, x(t + n_s)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Let us introduce the notation

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_f &= \frac{\mu^{-\omega} - 1}{\ln \mu^{-1}}, \quad \mathbb{B}_f = \frac{M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|}}{\ln \mu^{-1} - M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|}}, \\ \mathbb{C}_f(r) &= M_2 sr + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0, \dots, 0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_{0\infty\mu}(t) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t + i) \mu^{|i|}, \\ \tilde{\mathbb{C}}_f(r) &= M_2 sr + \inf_{\xi \in [0, \omega]} \sup_{\tau \in [\xi, \xi + 1]} M_{0\infty\mu}(\tau). \end{aligned}$$

It is not difficult to see that $\tilde{\mathbb{C}}_g(r) \leq \mathbb{C}_g(r)$.

Theorem 2 [3]. *Suppose that the map $f(\cdot)$ satisfies conditions (a)–(d) and is an ω -periodic function with respect to time, where $\omega \in \mathbb{Z}_+$. If for given $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, $r > 0$ and for all $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = r$, it is true that*

$$M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad \left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}}, \int_0^\omega f(\tau, \bar{x}, \dots, \bar{x}) d\tau \right) < -\mathbb{A}_f \mathbb{B}_f \tilde{\mathbb{C}}_f(r),$$

then for equation (5) there exists an ω -periodic solution $x(\cdot)$, $\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq r$, which lies in the ball of the space $\mathbb{R}^n$ with radius $\mu^{-\omega} \hat{\mathcal{R}}$, where

$$\hat{\mathcal{R}} = r + \frac{\tilde{\mathbb{C}}_f(r)}{\ln \mu^{-1} - M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|}}. \quad \square$$

Theorem 3. *Suppose that the map $f(\cdot)$ satisfies conditions (a)–(d) and the function $f(t, 0, \dots, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, is uniformly bounded. If for given $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, $r > 0$ and for all $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = r$, and $t \in \mathbb{R}$ it is true that*

$$\begin{aligned} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|} &< \ln \mu^{-1}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}}, \int_t^{t+\omega} f(\tau, \bar{x}, \dots, \bar{x}) d\tau \right) &< -\mathbb{A}_f \mathbb{B}_f \mathbb{C}_f(r) - \frac{1}{2r} [\mathbb{A}_f (\mathbb{B}_f + 1) \mathbb{C}_f(r)]^2, \end{aligned}$$

then for the initial FDEPT (5) there exists a bounded solution $x(\cdot)$ which lies in the ball of the space $\mathbb{R}^n$ with radius $\mu^{-\omega}\widehat{\mathcal{R}}$, where

$$\widehat{\mathcal{R}} = r + \frac{\mathbb{C}_f(r)}{\ln \mu^{-1} - M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|}}.$$

Moreover, the length of the maximum open intervals of the set

$$\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \{t: t \in \mathbb{R}, \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$$

is less than ω . $\square$

An important task is the numerical realization of bounded and periodic soliton solutions for systems with a polynomial potential, which has been successfully solved.

References

1. *Beklaryan L.A.* Introduction to the theory of functional differential equations. Group approach. Moscow: Factorial Press, 2007 (in Russian).
2. *Beklaryan L.A.* A method for the regularization of boundary value problems for differential equations with deviating argument // *Sov. Math. Dokl.* 1991. V. 43. P. 567–571.
3. *Beklaryan L.A.* A new approach to the issue of the existence of periodic solutions for functional differential equations of pointwise type // *Izv. Math.* 2018. V. 82 (in press).

ON NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR RAMSEY-TYPE PROBLEMS*

Anton O. Belyakov

*Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University, Russia
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia*

belyakov@mse-msu.ru

We study an infinite-time optimal control problem in which the integrand does not depend explicitly on the state variable. A special case of such a problem is the Ramsey optimal capital accumulation in centralized economy. To complete optimality conditions of the Pontryagin maximum principle, so-called transversality conditions of different types are used in the literature. Here, instead of a transversality condition, an additional maximum condition is considered.

Statement of the problem. Let X be a nonempty open convex subset of $\mathbb{R}$ and U be an arbitrary nonempty set in $\mathbb{R}$. Let us consider the following optimal control problem:

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho t} g(u(t)) dt \rightarrow \max_u, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

*This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01093).

where $u(t) \in U$ and there exists a state variable $x(t) \in X$ for all $t \in (t_0, +\infty)$. We call such control $u(\cdot)$ and state variable $x(\cdot)$ trajectories *admissible*. The functions f and g are differentiable with respect to all their arguments, and together with the partial derivatives f is continuous in (x, u) . Moreover, the function g is strictly concave and $\rho \geq 0$.¹

Optimality conditions. *Pontryagin's maximum principle.* With the use of the adjoint variable ψ we introduce the current value *Hamiltonian*

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, \lambda) = \lambda g(u) + \psi f(x, u). \quad (4)$$

Theorem 1 [1-3]. *There exist $\lambda \geq 0$ and ψ_0 such that $(\lambda, \psi_0) \neq 0$ and the maximum condition*

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \lambda) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, \psi(t), \lambda) \quad (5)$$

holds along with the adjoint equation

$$-\dot{\psi}(t) = -\rho\psi(t) + \psi(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \psi(t_0) = \psi_0. \quad (6)$$

In this theorem ψ_0 remains undetermined. Notice that for $\psi \equiv \psi_0 = 0$ the maximum condition (5) might have no solution with $\lambda > 0$, while $\lambda = \psi_0 = 0$ contradicts the theorem. Additional arguments are used to refine solutions of (5), (6) and single out a nonzero value of ψ_0 .

It turns out that the maximum condition (5) with $\psi \equiv 0$ and $\lambda = 1$ yields an additional necessary optimality condition if we replace the set U by a set $\hat{U}(\hat{x}(\tau))$ defined as follows.

¹The improper integral in (1) might not converge for any candidate for an optimal control $\hat{u}(\cdot)$, i.e., the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J(\hat{u}(\cdot), x_0, t_0, T) \quad (3)$$

might fail to exist or might be infinite, where we introduce the finite time horizon functional

$$J(u(\cdot), x_0, t_0, T) = \int_{t_0}^T e^{-\rho t} g(u(t)) dt,$$

subject to the state equation (2). Thus the functional J may be unbounded as $T \rightarrow \infty$. So we can involve the following more general definitions of optimality.

An admissible control $\hat{u}(\cdot)$ is *overtaking optimal* (OO) if

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} (J(u(\cdot), x_0, t_0, T) - J(\hat{u}(\cdot), x_0, t_0, T)) \leq 0$$

for every admissible control $u(\cdot)$. An admissible control $\hat{u}(\cdot)$ is weakly overtaking optimal (WOO) if

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} (J(u(\cdot), x_0, t_0, T) - J(\hat{u}(\cdot), x_0, t_0, T)) \leq 0$$

for every admissible control $u(\cdot)$. It is clear that if $\hat{u}(\cdot)$ is OO, then it is also WOO. When ordinary optimality holds, i.e., a finite limit exists in (3) and

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} J(u(\cdot), x_0, t_0, T) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} J(\hat{u}(\cdot), x_0, t_0, T)$$

for all admissible controls $u(\cdot)$, the admissible control $\hat{u}(\cdot)$ is also both OO and WOO.

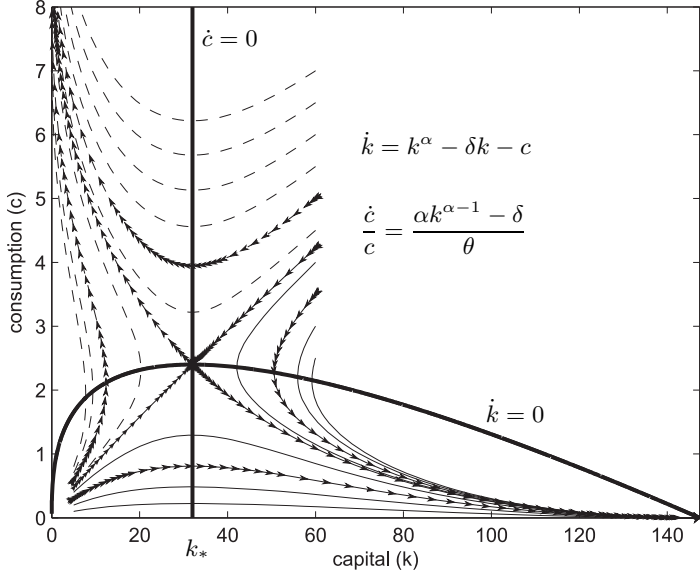


Figure 1. Bold lines are the stationary curves, $\dot{k} = 0$ and $\dot{c} = 0$. Solid lines are the trajectories governed by the state and Euler equations for which $k(t) > 0$ for all $t > t_0$.

Definition 1.

$$\hat{U}(x) = \{u: (u, x) \in G\},$$

where $G \subset U \times X$ is the set of all admissible trajectories $(u(\cdot), x(\cdot))$ satisfying the maximum principle (5), (6) and state equation (2).

Additional maximum condition. In order to use the following condition, we first need to make synthesis of control and calculate the sets $\hat{U}(x)$.

Proposition 1 (necessary optimality condition). *Let there exist an admissible pair $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$. If the control $\hat{u}$ is optimal, then for almost all $\tau \in [t_0, \infty)$ and all $u \in \hat{U}(\hat{x}(\tau))$*

$$g(u) \leq g(\hat{u}(\tau)). \quad (7)$$

Example 1 (Ramsey problem with $\rho = 0$). We maximize the aggregated constant relative risk aversion utility

$$\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt \rightarrow \max_{c>0}$$

subject to the dynamics of capital

$$\dot{k}(t) = k(t)^\alpha - \delta k(t) - c(t), \quad k(t) > 0,$$

where $k(0) = k_0 > 0$, $\theta \neq 1$, $\theta > 0$, and $\alpha \in (0, 1)$.

The Hamiltonian is

$$\mathcal{H}(k, c, \psi, \lambda) = \lambda \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + \psi(k^\alpha - \delta k - c), \quad \lambda \geq 0, \quad (\lambda, \psi) \neq 0.$$

The abnormal case ($\lambda = 0$) would lead to $\psi = 0$ and is thus impossible. The stationarity condition $c(t)^{-\theta} = \psi(t)$ and the adjoint equation $-\dot{\psi}(t) = (\alpha k(t)^{\alpha-1} - \delta)\psi(t)$ result in the Euler equation

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1} - \delta}{\theta}.$$

Due to the Euler and state equations, any feasible pair (k, c) , not violating the constraints $c(t) \geq 0$ and $k(t) > 0$, converges either to a steady state (k_*, c_*) , where $k_* = (\delta/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$ and $c_* = (1-\alpha)k_* > 0$, or to $(\delta^{1/(\alpha-1)}, 0)$, where $k_* < \delta^{1/(\alpha-1)}$. Solid lines in Fig. 1 constitute a set G , which is all the space below the saddle path and horizontal line $c = 0$. Thus condition (7),

$$\frac{\hat{c}(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \geq \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \text{for all } c \in \{c: (c, \hat{k}(t)) \in G\}, \quad (8)$$

selects a saddle path as the only possible optimal.

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. Moscow: Fizmatgiz, 1961; Oxford: Pergamon, 1964.
2. *Shell K.* Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical systems theory and economics I. Berlin: Springer, 1969. P. 241–292. (Lect. Notes Oper. Res. Math. Econ.; V. 11).
3. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42, No. 2. P. 267–272.

GEODESICS AND CURVATURES OF LEFT-INVARIANT SUB-RIEMANNIAN METRICS ON LIE GROUPS*

V. N. Berestovskii

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

vberestov@inbox.ru

We apply here methods and results from [1–3] to find geodesics and curvatures of left-invariant sub-Riemannian metrics on some Lie groups.

Lemma [3]. *Let $(M = G/K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be any Riemannian symmetric space with semisimple Lie group G which is the full connected isometry group of $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, and*

*The publication was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant 1.3087.2017/4.6).

let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$ be the Lie algebras of the Lie groups G and K . Then there exists a unique decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ such that

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}. \quad (1)$$

If $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ and $\mathfrak{k} = \text{diag}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ with a semisimple compact Lie algebra $\mathfrak{h}$, then

$$\mathfrak{p} = \{(u, -u) : u \in \mathfrak{h}\}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}. \quad (2)$$

Corollary 1 [3]. A left-invariant distribution $\mathfrak{P}$ on G with $\mathfrak{P}(e) = \mathfrak{p}$ is two-generated, i.e.,

$$\mathfrak{P} + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = TG. \quad (3)$$

Theorem 1 [4]. Every arc-length parameterized geodesic of any connected Lie group G with left-invariant sub-Riemannian metric d defined by an inner product $(\cdot, \cdot)$ and two-generated distribution $\mathfrak{P}$ on G is normal.

Theorem 2 [3]. Let $(M = G/K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\mathfrak{g}$, and $\mathfrak{k}$ be as in the lemma, $\mathfrak{P}$ be as in Corollary 1, and $(\cdot, \cdot)$ be any G -left-invariant and K -right-invariant inner product on G such that the canonical projection $p: (G, (\cdot, \cdot)) \rightarrow (G/K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is a Riemannian submersion. Then the distribution $\mathfrak{P}$ is bracket generating and the pair $(\mathfrak{P}, (\cdot, \cdot))$ defines a G -left-invariant and K -right-invariant sub-Riemannian metric d on G . Every arc-length parameterized geodesic $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(0) = e$, of (G, d) is normal; it is either a one-parameter subgroup

$$\gamma(t) = \exp(t\xi) \quad (4)$$

or a product of two one-parameter subgroups

$$\gamma(t) = \exp(t(\xi + \eta)) \exp(-t\eta) \quad (5)$$

with arbitrary $\eta \in \mathfrak{k}$ and unit vector $\xi \in \mathfrak{p}$, where $\xi = \dot{\gamma}(0)$ and $[\xi, \eta] \neq 0$.

Remark. Earlier in particular cases results similar to the lemma and Theorem 2 have been proved in [5].

Proposition [3]. Under the conditions and notation of Theorem 2, the projection $p: (G, d) \rightarrow (G/K, \rho)$, where ρ is an intrinsic metric of the symmetric Riemannian manifold $(M = G/K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, is a submetry [6].

Corollary 2 [3]. The space (G, d) from Theorem 2 is isometric to a geodesic orbit sub-Riemannian manifold $((G \times K)/K, d)$. This means that any arc-length parameterized geodesic in (G, d) is an orbit of some one-parameter subgroup in the isometry group $G \times K$ of (G, d) .

Corollary 3 [3]. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ and $\mathfrak{k} = \text{diag}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ be as in the lemma, $\mathfrak{p}$ be as in (2), and H be a compact Lie group with Lie algebra $\mathfrak{h}$. Then the pair $(\mathfrak{p}, (\cdot, \cdot))$ defines a left-invariant sub-Riemannian metric d on $H \times H$; every arc-length parameterized geodesic $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of $(H \times H, d)$ with the condition $\gamma(0) = e$ is normal, and it is either a one-parameter subgroup

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\exp(t\xi), \exp(-t\xi)) \quad (6)$$

or a product of two one-parameter subgroups

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\exp(t(\xi + \eta)) \exp(-t\eta), \exp(t(-\xi + \eta)) \exp(-t\eta)) \quad (7)$$

with arbitrary $\eta, \xi \in \mathfrak{h}$ such that $[\xi, \eta] \neq 0$, $(\xi, -\xi) = \dot{\gamma}(0)$, and $\langle 2\xi, 2\xi \rangle = 1$.

Corollary 4 [3]. *Let $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, be a geodesic (4) or (5) of (G, d) . Then*

$$p(\gamma(t)) = p(\exp(t\xi)) \quad \text{or} \quad p(\gamma(t)) = p(\exp(t(\xi + \eta))). \quad (8)$$

In particular, in the case of Corollary 3,

$$p(\gamma(t)) = \gamma_1(t)\gamma_2^{-1}(t), \quad (9)$$

which is equal to

$$\exp(2t\xi) \quad \text{or} \quad \exp(t(\xi + \eta))\exp(t(\xi - \eta)) \quad (10)$$

for the case (6) or (7).

Earlier, Agrachev defined a notion of curvature for sub-Riemannian manifolds [7]. We use old definitions of sectional and Ricci curvatures for rigged metrized distributions on manifolds given by A. F. Solov'ev [8]. Solov'ev defined in [8] sectional and Ricci curvatures of any rigged distribution $\mathfrak{P}$ on a smooth Riemannian manifold M and gave in some cases concrete methods and formulas for their calculation. The curvatures depend on the restriction of the metric tensor to the distribution $\mathfrak{P}$ and chosen rigging Ω of $\mathfrak{P}$, but do not depend on the restriction of the metric tensor to Ω . To calculate the sectional and Ricci curvatures for homogeneous sub-Riemannian manifolds, the author suggested in [2] to use in some cases special invariant riggings Ω of bracket generating distributions $\mathfrak{P}$, defining the sub-Riemannian metrics d , and then apply the Solov'ev definition, methods, and results.

We consider here only Lie groups G with sub-Riemannian metrics d defined by bracket-generating distributions $\mathfrak{P}$ on G and scalar products $(\cdot, \cdot)$ on $\mathfrak{P}$ that are both left-invariant.

Definition. A rigging of $\mathfrak{P}$ is a left-invariant distribution Ω on G such that $\mathfrak{P} \oplus \Omega = TG$.

Assume that there exists a unique rigging Ω of $\mathfrak{P}$ such that one of the following conditions is valid:

- (i) $[\mathfrak{P}, \Omega] \subset \mathfrak{P}$,
- (ii) $[\mathfrak{P}, \Omega] \subset \Omega$, or
- (iii) $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \Omega$.

Then we take Ω as the rigging of $\mathfrak{P}$.

In particular, the above rigging method is applicable to contact sub-Riemannian metrics (condition (i)), sub-Riemannian Carnot groups (conditions (ii) and (iii) simultaneously), sub-Riemannian metric on the connected component of the full Lie group G of isometries of any Riemannian symmetric space if G is semisimple (conditions (i) and (iii) simultaneously). The latter is a particular case of homogeneous sub-Riemannian manifolds possessing a submetry [6] onto homogeneous Riemannian manifolds [2, 8].

Example [2, 8]. The sectional curvatures of any sub-Riemannian Carnot group with distribution $\mathfrak{P}$ and its rigging $\Omega = [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ are equal to zero.

Theorem 3 [8]. *Let $p: (M, (\cdot, \cdot)) \rightarrow (B, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a Riemannian submersion, and let $\mathfrak{P}$ and Ω be, respectively, its horizontal and vertical distributions on M . Then for any non-collinear vectors $u, v \in \mathfrak{P}(x)$, $x \in M$, the Solov'ev curvature K_{uv} in*

the direction of the linear $\text{span}(u, v)$ is equal to $K_{dp(u)dp(v)}^B$, where K^B is the usual sectional curvature of the Riemannian manifold $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

The lemma, the rigging $\mathfrak{Q}$ with $\mathfrak{Q}(e) = \mathfrak{k}$, and Theorem 3 imply

Theorem 4 [3]. Assume that under the condition of Theorem 2, $X, Y \in \mathfrak{p}$, $(X, X) = (Y, Y) = 1$, and $(X, Y) = 0$. Then the sectional curvature of (G, d) in the direction of $\text{span}(X, Y)$ is $K_{XY} = -([X, Y], Y, X)$.

References

1. Berestovskii V.N. Universal methods of the search of the normal geodesics on Lie groups with left-invariant sub-Riemannian metric // Sib. Math. J. 2014. V. 55, No. 5. P. 783–791.
2. Berestovskii V.N. Curvatures of homogeneous sub-Riemannian manifolds // Eur. J. Mat. 2017. V. 3, No. 4. P. 788–807.
3. Berestovskii V.N. Geodesics and curvatures of special sub-Riemannian metrics on Lie groups // Sib. Math. J. 2018. V. 59, No. 1. P. 31–42.
4. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control theory from the geometric viewpoint. Berlin: Springer, 2005.
5. Boscain U., Chambrion T., Gauthier J.-P. On the K+P problem for a three-level quantum system: Optimality of resonance // J. Dyn. Control Syst. 2002. V. 8, No. 4. P. 547–572.
6. Berestovskii V.N., Guijarro L. A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Global Anal. Geom. 2000. V. 18, No. 6. P. 577–588.
7. Agrachev A., Barilari D., Rizzi L. Curvature: a variational approach. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2018. (Mem. AMS; V. 256, No. 1225).
8. Solov'ev A.F. Curvature of a distribution // Math. Notes. 1984. V. 35, No. 1. P. 61–68.

OPTIMIZATION OF PROCESSES WITH SWITCHINGS OF MODELS OF CONTROL SYSTEMS

A. S. Bortakovskii

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

`asbortakov@mail.ru`

An optimal control problem with a finite number of switchings is considered. At the moment of switching a change of the mathematical model of a control system [1–3] occurs; namely, equations of motion, state space, admissible controls, etc., may change. These switchings, for example, are typical for problems of control of a group of flying machines, when the number of controlled objects changes. Sufficient optimality conditions, whose application is demonstrated via academic examples of group performance, were found.

1. Formulation of the problem. Let the dynamic system make N switchings in a given period of time $T = [t_0, t_F]$ at moments $t_1, \dots, t_N$: $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$.

The state of the system changes continuously between unequal consequent moments of switching:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad (1)$$

and it changes discretely at the moments of switching:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

where $x_i(t) \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ is the state of the system after the i th switching, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$ is the control of continuous motion, and $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$ is the control of switching. The initial state of the system is given, and the final state corresponds to a terminal constraint:

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma_N(t_F, x_N(t_F)) = 0. \quad (3)$$

On a set of admissible processes $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ a functional is given:

$$\begin{aligned} I_0(t_0, x_0, d) = & \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + \sum_{i=0}^N g_i^+(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) \\ & + F_N(t_N, x_N(t_F)), \end{aligned} \quad (4)$$

where g_i^+ is a non-negative function. All hypotheses about the functions (1)–(4) are usual [3]. It is required to find the minimum value of the functional (4) and an optimal process $(x(\cdot), u(\cdot), \{v\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ on which this minimum value is attained. The number N and the moments of switching $t_1, \dots, t_N$ are not given a priori and are determined during minimization (4).

2. Solution method. We denote the value function (Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) function) by $\varphi_i(t, x_i)$; it is equal to the minimum value of the functional of the rest of losses $I_i(t, x_i, d)$ on a set of admissible processes $\mathcal{D}_i(t, x_i)$ after the i th switching. We define the *generator* of the value function, whose value $\varphi_i^k(t, x_i)$ is equal to the minimum value of the functional of the rest of losses $I_i^k(t, x_i, d)$ on a set of admissible processes $\mathcal{D}_i^k(t, x_i)$ with k remained switchings after the i th switching. Finally, the solution of the Lagrange problem for system (1) with fixed ends of the trajectory,

$$x_i(\theta) = x_{i\theta}, \quad x_i(\tau) = x_{i\tau}, \quad \int_{\theta}^{\tau} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt \rightarrow \min,$$

will be called a two-position value function $\phi_i(\theta, x_{i\theta} | \tau, x_{i\tau})$. The function $(t, x_i) \rightarrow \phi(t, x_i | \tau, x_{i\tau})$ satisfies the HJB equation with the zero terminal condition

$$\min_{u_i \in U_i} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i, u_i) + f_i^0(t, x_i, u_j) \right] = 0, \quad \phi_i(\tau, x_i | \tau, x_i) = 0. \quad (5)$$

The intermediate functions are connected with each other and with the “real” value function by the equalities

$$\varphi_i(t, x_i) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_i^k(t, x_i), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^k(t, x_i) = & \min_{t \leq \tau \leq t_F} \min_{x \in X_i} \left\{ \phi_i^k(t, x_i | \tau, x) \right. \\ & \left. + \min_{v \in V_{i+1}} [\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, x, v)) + g_{i+1}^+(\tau, x, v)] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

During the derivation of the equations, the Bellman optimality principle is used, which is modified for the formulated problem in the following way: after the first switching, the optimal process with k remained switchings becomes an optimal process with $k - 1$ remained switchings.

The procedure of solving equations (5)–(7) begins with zero generators $\varphi_i^0(t, x_i)$ which satisfy equation (5) with the terminal conditions

$$\varphi_i^0(t_F, x_i) = F_i(t_F, x_i), \quad \Gamma(t_F, x_i) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

The other generators are determined according to the recurrent equation (7), and the value functions are determined according to formula (6). The minimization operation (5)–(7) define the optimal controls of continuous motion

$$\mathbf{u}_i(t, x_i | \tau, x_i) = \arg \min_{u_i \in U_i} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i, u_i) + f_i^0(t, x_i, u_j) \right] \quad (8)$$

and switchings

$$\mathbf{v}_{i+1}^k(\tau, x_i) = \min_{v \in V_{i+1}} [\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, x_i, v)) + g_{i+1}^+(\tau, y, v)], \quad (9)$$

the optimal moment $\tau_i^k(t, x_i)$ and the state $\mathbf{x}_i^k(t, x_i)$ of the first of the remaining k switchings

$$\begin{aligned} (\tau_i^k, \mathbf{x}_i^k) = & \arg \min_{t \leq \tau \leq t_F} \min_{x \in X_i} \left\{ \phi_i^k(t, x_i | \tau, x) \right. \\ & \left. + \min_{v \in V_{i+1}} [\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, x, v)) + g_{i+1}^+(\tau, x, v)] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

as well as the optimal number of switchings

$$\mathbf{k}_i(t, x_i) = \arg \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_i^k(t, x_i). \quad (11)$$

Equations (8)–(11) form a “controlling complex,” which allows to synthesize optimal processes.

3. Sufficient conditions of optimality. The main theorem is proved using the method of dynamic programming [4].

Theorem. *If there are sequences of functions ϕ_i and φ_i^k , $(i, k) \in \mathbb{Z}_+^2$ for problem (1)–(4) that satisfy equations (5)–(7), then for the optimality of an admissible process $(x(\cdot), u(\cdot), \{v\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ with moments of switching $t_1, \dots, t_N$ that form a non-decreasing sequence, it is sufficient that the following conditions are satisfied:*

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{k}_0(t_0, x_0), \\ u_i(t) &= \mathbf{u}_i^{N-i}(t, x_i(t) | t_{i+1}, x_i(t_{i+1})), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ v_i &= \mathbf{v}_i^{N-i+1}(t_i, x_{i-1}(t_i)), \end{aligned} \quad (12)$$

$$t_i = \tau_{i-1}^{N-i+1}(t_{i-1}, x_{i-1}(t_{i-1})), \quad (13)$$

$$x_{i-1}(t_i) = \mathbf{x}_{i-1}^{N-i+1}(t_{i-1}, x_{i-1}(t_{i-1})), \quad (14)$$

where $i = 1, \dots, N$. If $N = 0$, then equations (12)–(14) are absent.

The application of the optimality conditions is demonstrated by model examples of group performance. The plain motion of a “quick” controlled object (“carrier”) is considered. “Slow” objects directed to preset goals separate from it in the process of motion. It is required to hit all the goals in the shortest possible time. In these examples, switching is considered to be the separation of the controlled objects. At the moment of switching, the control model changes because of the increase in the number of controlled objects.

References

1. *Velichenko V.V.* Optimal control of composite systems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. V. 176, No. 4. P. 754–756.
2. *Boltyanskii V.G.* The problem of optimization with change of phase space // Diff. Uravn. 1983. V. 19. No. 3. P. 518–521.
3. *Bortakovskii A.S.* Synthesis of optimal control-systems with a change of the models of motion // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2018. V. 57, No. 4. P. 543–560.
4. *Bellman R.* Dynamic programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957.

GEODESICS AND LAPLACIANS IN SUB-RIEMANNIAN GEOMETRY

U. Boscain

Sub-Riemannian problems are a particular class of optimal control problems that are linear in the control and have quadratic costs. They can be seen as Riemannian problems in which some directions are forbidden. Geodesics are computed via the Pontryagin Maximum Principle.

In this talk I will discuss how to define an intrinsic Laplacian in sub-Riemannian geometry and I will discuss the relation between its self-adjointness and the properties of the geodesics. Surprising results for the heat and the Schroedinger equation appear already in simple examples as the Grushin plane and the Heisenberg group deprived of a point.

SINGULARITIES OF ATTAINABILITY REGIONS OF SYSTEMS WITH CONTROL BOUNDED IN ABSOLUTE VALUE OR IMPULSE*

D. I. Bugrov, A. M. Formalskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

d.bugrov@mech.math.msu.su, formal@imec.msu.ru

Consider a system described by the linear matrix differential equation

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u. \quad (1)$$

Here x , $A(t)$ and $b(t)$ are $n \times 1$, $n \times n$ and $n \times 1$ matrices, respectively, and $u = u(t)$ is a scalar control (perturbation) assumed to be a piecewise continuous function of time t bounded in absolute value

$$|u(t)| \leq 1. \quad (2)$$

We denote by Ω the set of these admissible functions $u(t)$. System (1) is assumed to be completely controllable [1] in the Kalman sense. We suppose that $x(t_0) = 0$ at the initial instant $t = t_0$. Solutions $x(T)$ at the instant $t = T$ of system (1) under control $u = u(t)$ may be calculated by the Cauchy formula. Consider in the phase space X the attainability region $Q(t_0, T) = \{x(T) : u(t) \in \Omega, t \in [t_0, T]\}$. It is well known that the set $Q(t_0, T)$ is closed, bounded, convex and symmetric about the origin [1, 2]. But we consider here in more detail the properties of this set $Q(t_0, T)$ or, more exactly, of its boundary $\Gamma(t_0, T)$.

Introduce the following definitions [3].

Definition 1. A point $x(T) \in \Gamma(t_0, T)$ is called a *corner point* if it belongs to at least two different reference hyperplanes of the set $Q(t_0, T)$.

Definition 2. A corner point $x(T) \in \Gamma(t_0, T)$ is called a *conical corner point* if it belongs to at least n different reference hyperplanes encompassing the point $x(T)$.

The envelope of the reference hyperplanes containing this point $x(T)$ is the *conical surface*, and the point $x(T)$ is the vertex of this conical surface.

It follows from Definitions 1 and 2 that for $n = 2$ a corner point (if it exists) is always a conical one. But if $n = 3$, then a corner point is not always a conical one (see below). Using Definitions 1 and 2, one can prove the following theorem.

Theorem 1. *For each instant t_0 there exists time $\bar{T}$ such that for each $T \in (t_0, \bar{T})$ the boundary $\Gamma(t_0, T)$ has exactly two conical corner points symmetrical to each other.*

One conical corner point can be found if we insert the control $u(t) \equiv 1$ into the Cauchy formula. The symmetrical point corresponds to the control $u(t) \equiv -1$.

Consider the case of a steady system (1), when the matrices $A(t)$ and $b(t)$ do not depend on time t . In this case, we denote them by A and b . Then we put $t_0 = 0$ and denote $Q(t_0, T)$ and $\Gamma(t_0, T)$ by $Q(T)$ and $\Gamma(T)$, respectively. The following theorem holds in this case.

*This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 15-01-04503 and 16-01-00683).

Theorem 2. *If the matrix A has at least one real eigenvalue, then the boundary $\Gamma(T)$ of the attainability region $Q(T)$ at all values T has exactly two conical corner points symmetrical to each other.*

If $n = 3$ and the matrix A has three real eigenvalues, then the region $Q(T)$ looks like a pit of the plum or apricot: it has two conical corner points and these points are connected by two “ribs” containing the corner points, which are not conical ones.

Also the following theorem holds for the steady system (1).

Theorem 3. *If the matrix A does not have real eigenvalues, then there exists a value $\bar{T} > 0$ such that the boundary $\Gamma(T)$ of the attainability region $Q(T)$ at any values $T > \bar{T}$ does not have conical corner points.*

Now let us consider a third-order steady system like system (1) with one real and two complex conjugate eigenvalues. The matrices A and b of this system may be written as a result of the substitution of parameters and variables in the form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Here $b_1 \neq 0$ in accordance with the controllability condition for system (1).

According to Theorem 2 in this case the boundary $\Gamma(T)$ of the attainability region $Q(T)$ at all values T has two symmetrical conical corner points. The cone apex angle (solid angle) near the conical corner points depends on the difference $\lambda - \varepsilon$ and time T . Below we describe this dependence [4].

If $\lambda - \varepsilon < 0$, then the cone apex angle becomes greater as time T increases. In other words, the conical corner point becomes less pointed and disappears as $T \rightarrow \infty$. The smoothing of the boundary of $Q(T)$ as the time T increases occurs more rapidly for smaller difference $\lambda - \varepsilon$. The limit set $Q(\infty)$ corresponding to $T \rightarrow \infty$ does not have conical corner points. It follows from what was said above that the approximation of $Q(T)$ by an ellipsoid with smooth boundary becomes more acceptable as time T increases.

If $\lambda - \varepsilon = 0$, then the cone apex angle remains unchanged starting from the instant $T = 2\pi$. This angle is equal to $\pi - 2 \arctan(\sqrt{b_2^2 + b_3^2}/b_1)$. Hence, in contrast with the case $\lambda - \varepsilon < 0$, the conical corner points of the boundary of $Q(T)$ do not disappear as time T increases; moreover, their pointedness does not change.

If $\lambda - \varepsilon > 0$, then starting from some instant T^0 the apex angle (solid angle) of the conical surface encompassing the conical corner point remains unchanged as in the previous case.

Instead of constraint (2), we also consider the integral constraint [5]

$$\int_0^T |u(\tau)| d\tau \leq N \quad (N = \text{const}). \quad (3)$$

Here $u = u(t)$ is a scalar control (perturbation) assumed to be a piecewise continuous function of time t or the Dirac delta function. Inequality (3) means the limitation of the impulse of the control action $u(t)$. If some object is controlled by a jet engine and the value $u(t)$ is proportional to the engine’s fuel consumption per second, inequality (3) means that the total fuel is limited.

For steady systems (1) with constraint (3), the singularities of the boundaries $\Gamma(T)$ of the attainability regions $Q(T)$ are investigated [5]. It is shown that the boundary

$\Gamma(T)$ has (in the general case) conical corner points, flat areas, sections of ruled surfaces, and ribs. If the boundary has a flat area, a section of ruled surface, or a rectilinear rib, then the attainability region $Q(T)$ is *not strictly convex*.

As an example we have designed analytically and numerically the attainability region $Q(T)$ for the following system with triple zero eigenvalue:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u.$$

Sometimes this system is called a “triple integrator”. It is shown that the boundary of the attainability region of this system with constraint (3) has four conical corner points, two curvilinear and four rectilinear ribs, two flat triangular areas, and four curvilinear sections of ruled surfaces. The region $Q(T)$ increases if time T increases. But it always remains (for $0 < T < \infty$) in the zone between two planes $x_3 = \pm N$. Some parts of these planes belong to the region $Q(\infty)$, but some parts do not belong and the attainability region $Q(\infty)$ is “partly closed”.

The results described above are illustrated graphically for some numerical values of the parameters.

References

1. *Krasovskii N.N.* The theory of motion control. Moscow: Nauka, 1968.
2. *Boltyanskii V.G.* Mathematical methods of optimal control. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1971.
3. *Formalskii A.M.* On the corner points of the boundaries of attainability regions // J. Appl. Math. Mech. 1983. V. 47, No. 4. P. 566–574.
4. *Bugrov D.I., Formalskii A.M.* Time dependence of the attainability regions of third order systems // J. Appl. Math. Mech. 2017. V. 81, No. 2. P. 106–113.
5. *Bugrov D.I., Formalskii A.M.* Singularities of attainability regions with control action limited by impulse // J. Appl. Math. Mech. (in press).

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ОДУ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ (SINGULARLY PERTURBED ODES WITH MULTIPLE ROOTS OF THE DEGENERATE EQUATION)*

В. Ф. Бутузов (V. F. Butuzov)

*Физический факультет, Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

butuzov@phys.msu.ru

Во многих сингулярно возмущенных начальных и краевых задачах характерной особенностью решений являются пограничные и внутренние слои, в которых происходит быстрое (скачкообразное) изменение решений. Активное исследование таких задач началось еще в середине прошлого века после появления осно-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 18-11-00042).

вопологающих работ А.Н. Тихонова [1], Л.С. Понтрягина [2] и Е.Ф. Мищенко, М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [3].

Важное место в этом круге исследований занимает асимптотический метод, разработанный А.Б. Васильевой [4] и получивший дальнейшее развитие в ее работах и работах ее учеников и других ученых. Этот метод хорошо работает в тех случаях, когда соответствующее вырожденное уравнение имеет простой (т.е. однократный) устойчивый корень. В этом случае пограничные функции (функции внутреннего слоя), описывающие быстрое изменение решения в пограничном (внутреннем) слое, имеют экспоненциальное убывание с ростом погранслошной (внутрислошной) переменной.

В последнее время ведется активное изучение сингулярно возмущенных задач, в которых вырожденное уравнение имеет кратный корень [5–7]. Оказалось, что во многих таких задачах поведение решения в пограничном (внутреннем) слое качественно отличается от поведения в случае простого корня вырожденного уравнения. Пограничный (внутренний) слой становится многозонным с различным характером поведения решения в разных зонах, что делает неприменимым алгоритм А.Б. Васильевой. Для таких задач разработан новый алгоритм, позволяющий построить единые пограничные функции сразу для всех зон, что отличает новый подход от известного метода согласования (сращивания) асимптотических разложений, построенных раздельно в разных зонах.

Указанные, а также другие особенности будут показаны в докладе на примере краевой задачи для системы двух ОДУ второго порядка ($\varepsilon > 0$ — малый параметр):

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = F(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$\text{Краевые условия (Дирихле или Неймана) в точках } x = 0 \text{ и } x = 1. \quad (2)$$

Если вырожденное уравнение

$$F(u, v, x, \varepsilon) = 0 \quad (3)$$

имеет простой корень $u = \varphi(v, x)$, а уравнение

$$f(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0 \quad (4)$$

имеет простой корень $v = \bar{v}_0(x)$, то при определенных условиях краевая задача (1), (2) имеет погранслошное решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x, \varepsilon) = \bar{v}_0(x), \quad x \in (0, 1),$$

где $\bar{u}_0(x) = \varphi(\bar{v}_0(x), x)$.

Равномерное на отрезке $0 \leq x \leq 1$ асимптотическое разложение этого решения строится с помощью алгоритма А.Б. Васильевой и имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &= \bar{u}(x, \varepsilon) + Pu(\xi, \varepsilon) + Pu(\zeta, \varepsilon) + \tilde{P}u(\tilde{\xi}, \varepsilon) + \tilde{P}u(\tilde{\zeta}, \varepsilon), \\ v(x, \varepsilon) &= \bar{v}(x, \varepsilon) + Pv(\xi, \varepsilon) + Pv(\zeta, \varepsilon) + \tilde{P}v(\tilde{\xi}, \varepsilon) + \tilde{P}v(\tilde{\zeta}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\xi = x/\sqrt{\varepsilon}, \quad \zeta = x/\varepsilon, \quad \tilde{\xi} = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}, \quad \tilde{\zeta} = (1-x)/\varepsilon \quad (6)$$

— погранслойные переменные, а каждое слагаемое в правых частях (5) строится в виде ряда по целым степеням ε для $\bar{u}$, $\bar{v}$ и по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ для погранслойных рядов $Pu, \dots, \tilde{P}v$, например, $Pu = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} P_i u(\zeta)$.

Отметим, что масштабы погранслойных переменных не зависят в этом случае от вида краевых условий и все пограничные функции имеют экспоненциальные оценки вида

$$|P_i u(\zeta)| \leq c \exp(-\kappa \zeta), \quad \zeta \geq 0. \quad (7)$$

Пусть теперь функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$F(u, v, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(v, x))^2 + \varepsilon F_1(u, v, x, \varepsilon).$$

Тогда уравнение (3) имеет двукратный корень $u = \varphi(v, x)$, и пусть уравнение (4) имеет простой корень $v = \bar{v}_0(x)$. В этом случае при определенных условиях задача (1), (2) также имеет погранслойное решение с асимптотическим разложением вида (5), однако структура рядов $\bar{u}, \bar{v}, \dots, \tilde{P}u, \tilde{P}v$, как и сам алгоритм построения погранслойной части асимптотики, существенно изменяются. Ряды $\bar{u}$ и $\bar{v}$ являются теперь рядами по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$, погранслойные ряды — по другим дробным степеням ε , а масштабы погранслойных переменных зависят от вида краевых условий.

Если в точке $x = 0$ для u и v заданы краевые условия Дирихле (например, $u(0, \varepsilon) = u^0$), то масштабы погранслойных переменных ξ и ζ такие же, как в (6), но алгоритм построения рядов Pu и Pv существенно изменяется. Эталонной (оценочной) функцией для этих рядов становится не экспонента, как в (7), а функция

$$P_\kappa(\zeta) = \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon^{1/4} \kappa \zeta) (1 + \varepsilon^{1/4} - \exp(-\varepsilon^{1/4} \kappa \zeta))^{-2}, \quad \zeta \geq 0,$$

отражающая трехзонный характер функций $P_i u$ и $P_i v$.

Если в точке $x = 0$ для u и v заданы условия Неймана (например, $\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = q_0$), то изменяется масштаб погранслойной переменной ζ , теперь $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$.

Если в точке $x = 0$ для u заданы условия Неймана, а для v — условия Дирихле, то $\zeta = x/\varepsilon^{5/6}$, а погранслойные ряды нужно строить в виде рядов по целым степеням $\varepsilon^{1/12}$.

Аналогичные изменения происходят с погранслойной переменной $\tilde{\zeta}$ и рядами $\tilde{P}u$ и $\tilde{P}v$.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Мат. сб. 1952. Т. 31, №3. С. 575–586.
2. Понтрагин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, №5. С. 605–626.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12, №5. С. 3–122.
4. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // УМН. 1963. Т. 18, №3. С. 15–86.
5. Бутузов В.Ф. Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, №1. С. 68–80.

6. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного корня вырожденного уравнения // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 175–186.
7. Бутузов В.Ф. Об одной сингулярно возмущенной системе ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Нелинейные колебания. 2018. Т. 21, № 1. С. 6–23.

THE METHOD OF PROGRAMMED ITERATIONS IN THE THEORY OF DIFFERENTIAL GAMES

A. G. Chentsov

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russia*

chentsov@imm.uran.ru

The antagonistic differential games (DG) in N. N. Krasovskii's formalization are considered. For DG solving, constructions on the basis of programmed control are used. In the general case, these constructions are realized in the form of iterated procedures. This approach is used in the present lecture.

In the known monograph of Isaacs [1], many interesting applied problems of game character are discussed. The idea of employing the methods of classical control theory for DG solving was used by L. S. Pontryagin, R. V. Gamkrelidze, N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, J. Warga, and other mathematicians. Now, we note [2–8]. Separately, we mention the fundamental theorem about the alternative of N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin.

In connection with the considered method of programmed iterations (MPI), we note the investigations [9–22]. So, the MPI is a method of the DG investigation in the general case by employment of game problems of programmed control. Now, the following three basic variants of procedures with the MPI employment are used:

- (1) procedures for constructing the DG value;
- (2) procedure for constructing the stable bridges of N. N. Krasovskii;
- (3) procedures for constructing set-valued quasistrategies.

Moreover, we note that the variant of the MPI for DGs with informational memory has an essential singularity (see [11]). Finally, for DGs without the “saddle point in the small game” condition (Isaacs condition), essential singularities in the construction of auxiliary programmed problems arise (see [19, Ch. VI]).

Now, more explicitly we consider one variant of the MPI. Namely, we keep in mind the problem of realizing a trajectory in the given functional set. This realization is the aim of one player (player I). The aim of the second player is opposite. The initial time is given. In the original problem (of player I), constraints on the trajectory realization are missing. But, under employment of the MPI, constraints on fragments of the trajectory arise. We obtain auxiliary problems of programmed control with constraints on initial fragments of the trajectory. Under employment of the MPI, we realize a transformation of these constraints (see [11]). In fact, by a universal programmed operator the transformation of sets in the space of functional positions

is realized. This idea (transformation of constraints by a universal operator) is also used in other variants of the MPI (of course, some other elements in concrete constructions of the MPI arise). Under realization of this idea, the properties of the used (in the MPI procedure) operator of programmed absorption are investigated. The limit element of the corresponding iterated procedure is a fixed point of this operator. Therefore, some properties of the above-mentioned fixed points are considered.

In nonlinear game problems of programmed control used in the MPI procedures, constructions of extension are used. In addition, with respect to the controlled system, only conditions of generalized uniqueness and uniform boundedness of programmed trajectories are postulated (it is expected that the right-hand side of the controlled system is continuous). These conditions were used by A. V. Kryazhimskii (see [23]) to establish a variant of the alternative theorem for DGs without Lipschitz condition with respect to the phase variable for the right-hand side of system.

So, in DGs with functional aim set, by the MPI the compression of sets in the space of functional positions is realized. By these sets the corresponding constraints on fragments of trajectories are realized. Then, more accurately, the gradual tightening of constraints is realized. In the lecture, this approach is considered for several variants of DGs. In particular, the MPI procedure for general setting of DGs with non-fixed end point is considered (see [13]); we keep in mind the iterative procedure for constructing the value function. But, at the heart of this procedure in the functional space, there is the corresponding iterative procedure in the set space (similar to [10]). In this last procedure, the sequential compression of phase constraints is realized (a similar procedure is used for DGs with functional aim set). By the MPI quasistrategies solving the corresponding game problem are defined constructively (we keep in mind set-valued generalized quasistrategies; the “usual” one-valued variant of quasistrategies is considered in [25] and [26]). In addition, these variants of quasistrategies have the property of extremality with respect to some order (see [24, §8]). To realize quasistrategies in the discrete scheme, the control procedure with a model (guide) from [27] can be used. We note that the variant of the MPI for immediate construction of set-valued quasistrategies solving the corresponding game problem is considered (in particular) in [28, 29].

References

1. *Isaacs R.* Differential games. Wiley, 1965.
2. *Pontryagin L.S.* Linear differential games. I // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. V. 174, No. 6. P. 1278–1280 (in Russian).
3. *Pontryagin L.S.* Linear differential games. II // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. V. 175, No. 4. P. 764–766 (in Russian).
4. *Gamkrelidze R.V., Kharatishvili G.L.* A differential game with nonlinear control // SIAM J. Control. 1974. V. 12. P. 332–349.
5. *Krasovskii N.N.* Game problems on motion encounter. Nauka, 1970 (in Russian).
6. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer, 1988.
7. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Birkhäuser, 1995.
8. *Warga J.* Optimal control of differential and functional equations. Academic Press, 1972.
9. *Chentsov A.G.* On the structure of a game problem of convergence // Sov. Math. Dokl. 1975. V. 16. P. 1404–1408.

10. *Chentsov A.G.* On a game problem of guidance // Sov. Math. Dokl. 1976. V. 17. P. 73–77.
11. *Chentsov A.G.* On a game problem of guidance with information memory // Sov. Math. Dokl. 1976. V. 17. P. 411–414.
12. *Chentsov A.G.* On a game problem of converging at a given instant of time // Math. USSR Sb. 1976. V. 28. P. 353–376.
13. *Chentsov A.G.* On a game problem of approach to a given moment // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. V. 42, No. 2. P. 455–467 (in Russian).
14. *Chistyakov S.V.* To the solution of game problem of pursuit // Prikl. Mat. Mech. 1977. V. 41, No. 5. P. 825–832 (in Russian).
15. *Chistyakov S.V.* Programmed iterations and universal ε -optimal strategies in a positional differential game // Sov. Math. Dokl. 1992. V. 44, No. 1. P. 354–357.
16. *Chistyakov S.V., Nikitin F.F.* On value operator in differential games // Appl. Math. Sci. 2015. V. 9, No. 59. P. 2941–2952.
17. *Ukhobotov V.I.* Construction of the stable bridge for one class of linear games // Prikl. Mat. Mech. 1977. V. 41, No. 2. P. 358–364 (in Russian).
18. *Ukhobotov V.I.* On a class of differential games of the same type // Mat. Model. 1995. V. 7, No. 5. P. 91.
19. *Subbotin A.I. and Chentsov A.G.* Optimization of guarantee in control problems. Nauka, 1981 (in Russian).
20. *Chentsov A.G.* Iterative program construction for a differential game with a fixed terminal time // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. V. 240, No. 1. P. 36–39 (in Russian).
21. *Chentsov A.G.* The program iteration method in a game problem of guidance // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 297, Suppl. 1. P. 43–61.
22. *Chentsov A.G.* Stability iterations and an evasion problem with a constraint of switchings // Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 2017. V. 23, No. 2. P. 285–302.
23. *Kryazhimskii A.V.* On the theory of positional differential games of approach–evasion // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. V. 239, No. 4. P. 779–782 (in Russian).
24. *Chentsov A.G.* The programmed iterations method in a game problem of guidance // Vestn. Udm. Univ. 2016. V. 26, No. 2. P. 271–282.
25. *Nardzewski C.R.* A theory of pursuit and evasion // Adv. Game Theory. Ann. Math. Studies. 1964. P. 113–127.
26. *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. V. 3, No. 3. P. 153–163.
27. *Kryazhimskii A.V., Chentsov A.G.* About structure of game control in problems of guidance and evasion: VINITI. 1979. No. 1729-80. 72 (in Russian).
28. *Chentsov A.G.* Non-anticipating multi-valued mappings and constructing them by means of the method of programmed iterations. I // Diff. Eqns. 2001. No. 4. P. 470–480 (in Russian).
29. *Chentsov A.G.* Non-anticipating multi-valued mappings and constructing them by means of the method of programmed iterations. II // Diff. Eqns. 2001. No. 5. P. 679–688 (in Russian).

F. L. Chernousko

*Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

chern@ipmnet.ru

Locomotion of mobile robotic systems along surfaces and inside media can be based upon different principles. The most well-known locomotion systems use wheels, legs, tracks, propellers, and other external devices interacting with the outer media. Some types of mobile robots can move by means of special periodic change of their configuration. To a certain extent, they imitate motions of animals and insects such as fish, snakes, worms, etc. Various problems of dynamics and control for such types of mobile robots are considered in a number of books and papers (see, for example, [1–11]).

This paper is devoted to a fundamentally different principle of locomotion of mobile robotic systems that is based upon special, usually periodic, motions of internal masses contained inside the robot. Such mobile robots are sometimes called capsule robots, or capsulbots, or vibro-robots; they have no outward devices and can be made as hermetic capsules that can move inside resistive media. Hence, capsule robots can be useful for motions in vulnerable or hazardous media. The principle of locomotion used in capsule robots is considered in a number of papers and applied to micro-robots [12–14] and robots moving inside tubes [15].

Since the locomotion speed and other motion parameters of capsule robots depend strongly on the motions of internal masses, it is quite natural to consider optimal control problems for these robots.

Let us consider a simple capsule robot as a mechanical system consisting of a main rigid body of mass M and an internal point of mass m equipped with an actuator. The internal mass interacts with the main body but does not interact with the outer medium. The equations of translational motion of the system can be written as follows:

$$(M + m)\dot{v} = -m\ddot{\xi} + F(v), \quad \dot{x} = v,$$

where x is the displacement of the mass M , v is its velocity, ξ is the displacement of the mass m relative to the mass M , and $F(v)$ is the resistance force acting upon the main body M . This force can describe dry friction, linear or quadratic resistance, or other resistance forces. It is natural to impose a constraint $0 \leq \xi \leq L$ upon the relative displacement of the internal mass and consider periodic motions with period T satisfying the conditions $\xi(t + T) = \xi(t)$ and $v(t + T) = v(t)$.

Different versions of optimal control problems for one-dimensional motions of capsule robots are analyzed and solved [16–18]. In these problems, the average locomotion speed is maximized while either the relative velocity $\dot{\xi}$ or relative acceleration $\ddot{\xi}$ is taken as a bounded control. Various resistance forces $F(v)$ and different initial conditions imposed on variables v and ξ are considered. The case of two internal

*The work is performed according to the state task AAAA-A17-117021310387-0 and is supported by the Presidium of the Russian Academy of Sciences (Program no. 29 “Advanced Topics of Robotic Systems”) and by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 17-01-00652 and 17-51-12025).

masses moving along two perpendicular axes is analyzed in [19]. Experimental data obtained for different models of capsule robots confirm theoretical conclusions and results of calculations [20–22].

Optimal one-dimensional controls obtained in [16, 17] can be used for the design of progressive translational and rotational motions of capsule robots. Two-dimensional and three-dimensional motions of such robots present more complicated problems; a possible approach to these consists in the use of the combination of optimal one-dimensional motions.

Two-dimensional motions of the capsule robot along a horizontal plane in the presence of dry friction are considered in [23]. Here, optimal one-dimensional controls are used as parts of the total control.

Time-optimal two-dimensional controls for a rigid body containing a movable internal mass are found in the absence of external forces in [24]. Here, various boundary conditions imposed on the internal mass are considered. The obtained controls are used for the design of an arbitrary three-dimensional controlled motion of the rigid body about its center of mass. These results can be used for mobile robots and also for the re-orientation of space vehicles.

References

1. *Lavrentyev M.A., Lavrentyev M.M.* On one principle of creating the thrust force in motion // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1962. V. 4. P. 6–9.
2. *Gray J.* Animal locomotion. New York: Norton, 1968.
3. *Lighthill J.* Mathematical biofluidynamics. Philadelphia: SIAM, 1975.
4. *Blake R.W.* Fish locomotion. Cambridge: Univ. Press, 1983.
5. *Hirose S.* Biologically inspired robots: snake-like locomotors and manipulators. Oxford Univ. Press, 1993.
6. *Chernousko F.L.* The motion of a multilink system along a horizontal plane // J. Appl. Math. Mech. 2000. V. 64, No. 1. P. 5–15.
7. *Chernousko F.L.* Snake-like locomotions of multilink mechanisms // J. Vib. Control. 2003. V. 9, No. 1–2. P. 235–256.
8. *Colgate J.E., Lynch K.M.* Mechanics and control of swimming: a review // IEEE J. Oceanic Eng. 2004. V. 29, No. 3. P. 660–673.
9. *Transth A.A., Pettersen K.V., Liljeback P.* A survey on snake robot modelling and locomotion // Robotica. 2009. V. 27, No. 7. P. 999–1015.
10. *Zimmermann K., Zeidis I., Behn C.* Mechanics of terrestrial locomotion. Berlin: Springer, 2009.
11. *Chernousko F.L.* Locomotion of multibody robotic systems: dynamics and optimization // Theor. Appl. Mech. 2018. V. 45, No. 1. P. 17–33.
12. *Schmoeckel F., Worn H.* Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs) // Proc. Int. Conf. Robotics and Automation. New York: IEEE, 2001. P. 3903–3913.
13. *Fidlin F., Thomsen J.J.* Predicting vibration-induced displacement for a resonant friction slider // Eur. J. Mech. A: Solids. 2001. V. 20, No. 1. P. 155–166.
14. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel micro-robotic platform employing vibration microactuators // J. Dyn. Syst., Meas., Control. 2006. V. 128, No. 1. P. 122–133.
15. *Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., Rizzotto G.G., Amato P.* Modular design of electro-magnetic mechatronic microrobots // Proc. 6th Int. Conf. Climbing and Walking Robots CLAWAR. 2003. P. 651–658.

16. *Chernousko F.L.* Analysis and optimization of the motion of a body controlled by a movable internal mass // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 70, No. 6. P. 915–941.
17. *Chernousko F.L.* The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // J. Appl. Math. Mech. 2008. V. 72, No. 2. P. 116–125.
18. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernousko, F.L.* Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76, No. 1. P. 1–14.
19. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu.* Optimal control of the rectilinear motion of a rigid body on a rough plane by means of the motion of two internal masses // J. Appl. Math. Mech. 2008. V. 72, No. 2. P. 126–135.
20. *Li H., Furuta K., Chernousko F.L.* A pendulum-driven cart via internal force and static friction // Physics and control: Proc. Int. Conf., St. Petersburg, 2005. P. 15–17.
21. *Li H., Furuta K., Chernousko F.L.* Motion generation of the Capsubot using internal force and static friction // Decision and control: Proc. 45th IEEE Conf., San Diego, 2006. P. 6575–6580.
22. *Chernousko F.L.* Dynamics of a body controlled by internal motions // Dynamics and control of nonlinear systems with uncertainty: Proc. IUTAM Symp. Springer, 2007. P. 227–236.
23. *Chernousko F.L.* Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // Meccanica. 2016. V. 51, No. 12. P. 3203–3209.
24. *Chernousko F.L.* Optimal control of the motion of a two-mass system // Dokl. Math. 2018. V. 97, No. 3. 295–299.

ПЕРВЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД Л.С. ПОНТРЯГИНА. РАЗВИТИЕ ИДЕЙ (L.S. PONTRYAGIN'S FIRST DIRECT METHOD. DEVELOPMENT OF IDEAS)

А. А. Чикрий (A. A. Chikrii)

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, Киев, Украина
 g.chikrii@gmail.com

Одним из наиболее эффективных методов в теории дифференциальных игр преследования является первый прямой метод Л.С. Понтрягина [1, 2]. Базируясь на классическом условии Понтрягина — условии преимущества первого игрока, он позволяет получить достаточные условия завершения игры за конечное время в классе стробоскопических стратегий. Упомянутое условие позволяет на базе теоремы измеримого выбора строить управление преследователя, реализующее процесс сближения. Этот же принцип выбора управления положен в основу несколько иного метода — метода разрешающих функций, тесно связанного с первым прямым методом и по существу являющегося его развитием. Далее методика была развита для более сложной динамики с группой преследователей в работах [3–5]. В данном исследовании рассматриваются игровые задачи конфликтного взаимодействия в ситуации “один на один”.

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задан конфликтно управляемый процесс [6], эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, функция $g(t)$, $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = \{t: t \geq 0\}$, измерима по Лебегу и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$ определена на множестве $\Delta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$, она измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая является непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V . Допустимые управления игроков $u(\tau)$, $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$, и $v(\tau)$, $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$, — измеримые функции времени.

Задано терминальное множество M^* , имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \quad (2)$$

где M_0 — линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а M — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Первый игрок (u) пытается вывести траекторию процесса (1) на множество (2) за конечное время, а второй — максимально оттянуть этот момент или вообще избежать встречи.

Конкретный вид функций $g(t)$ и $\Omega(t, \tau)$ определяет тип конфликтно управляемого процесса. Например, в случае линейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля или Капуто эти функции выражаются через матричные функции Миттаг-Леффлера.

Примем сторону первого игрока. Если игра (1), (2) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t выбираем на основании информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \quad (3)$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U. \quad (4)$$

Цель работы — установить достаточные условия разрешимости задачи (1), (2) в пользу первого игрока.

Обозначим через π ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в L . Положим $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \quad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v), \quad (t, \tau) \in \Delta, \quad v \in V.$$

Условие Понтрягина. $W(t, \tau) \neq \emptyset$ для всех $(t, \tau) \in \Delta$.

В силу свойств параметров процессов (1) отображение $W(t, \tau)$ является измеримым по τ , $\tau \in [0, t]$, и замкнутозначным на Δ . Поэтому в нем существует хотя бы один измеримый по τ , $\tau \in [0, t]$, селектор $\gamma(t, \tau)$ — селектор Понтрягина, который суммируем по τ [7]. Если условие Понтрягина не имеет места, то зафиксируем функцию с такими же свойствами и назовем ее функцией сдвига.

Введем функцию $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$ и рассмотрим многозначное отображение $\mathfrak{A}$ из $\Delta \times V$ в $\mathbb{R}_+$:

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0: [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \neq \emptyset\}. \quad (5)$$

Будем предполагать, что $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \emptyset$ на $\Delta \times V$; если выполнено условие Понтрягина, то это имеет место автоматически. Верхнюю и нижнюю опорные функции отображения $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ в направлении +1

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}, \quad \alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}$$

назовем разрешающими функциями первого типа [8].

Из определения (5) следует, что если выполнено условие Понтрягина, то $\alpha_*(t, \tau, v) \equiv 0$, а если к тому же $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то $\mathfrak{A}(t, \tau, v) = [0, +\infty]$, а $\alpha^*(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Эта ситуация соответствует первому прямому методу Понтрягина. Учитывая свойства параметров конфликтно управляемого процесса (1), (2), теоремы о характеристизации и обратном образе [7], можно показать, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ является $(L \times B)$ -измеримым по совокупности (τ, v) , $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, а функции $\alpha^*(t, \tau, v)$, $\alpha_*(t, \tau, v)$ являются $(L \times B)$ -измеримыми по совокупности (τ, v) в силу теоремы об опорной функции [7]. Рассмотрим множество

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0: \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \right\}, \quad (6)$$

нижняя грань берется по всем допустимым управлениям убегающего с учетом того, что $\alpha^*(t, \tau, v)$ является суперпозиционно измеримой. Если при некотором t функция $\alpha^*(t, \tau, v)$ обращается в $+\infty$, то значение интеграла в (6) естественно положить равным $+\infty$ и неравенство выполнено автоматически.

Положим $\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} \mathfrak{A}(t, \tau, v)$, $(t, \tau) \in \Delta$. Введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа [8]

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}, \quad \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}.$$

Они измеримы по τ и порождают функции

$$\alpha^*(t) = \int_0^t \alpha^*(t, \tau) d\tau, \quad \alpha_*(t) = \int_0^t \alpha_*(t, \tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Теорема. Пусть для конфликтно управляемого процесса (1), (2) выполняется условие $\text{dom } \mathfrak{A} = \Delta$, для заданной функции $g(\cdot)$ и функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ существует $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$.

Тогда при $\alpha_*(T) < 1$ траектория (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью управлений вида (3), а если к тому же $\alpha^*(T) \geq 1$ — то в классе контруправлений (4).

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2.
2. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1980.

4. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во “Удмуртский университет”, 2009.
5. *Chikrii A.A.* Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer, 2013.
6. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92.
7. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990.
8. *Чикрий А.А.* Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. ИММ им. Н.Н. Красовского. 2017. № 1. С. 293–305.

PONTRYAGIN’S CONDITION AND ITS TIME STRETCHING MODIFICATION

G. Ts. Chikrii

Glushkov Institute of Cybernetics NASU, Kiev, Ukraine
g.chikrii@gmail.com

At the heart of the First Direct Method of L. S. Pontryagin, created for study of the linear differential games, lies the condition bearing his name [1]. It reflects an advantage of the pursuer over the evader in control resources. However, there are a number of game problems of pursuit for which this condition does not hold, for example, the problems of soft meeting, the pursuit problems for oscillatory processes and different inertia systems. The result of in-depth study of this condition [2] was its modification [3] providing for the construction of the current control of the pursuer on the basis of evader’s control in the past. This idea was used for analysis of the games with integral constraints on controls [4] and the games with many pursuers [5]. In fact, this approach is closely related to the passage from the original game to an auxiliary game with variable information delay and subsequent analysis of the perfect information game equivalent to the latter [6]. The gist of approach consists in introducing a special function of time stretching, through which the time delay is expressed. This approach proved its efficiency in solving a number of problems of soft meeting for the second-order linear differential games for which formulas of the time stretching function were deduced in an explicit form [7, 8]. It is also applicable to the games described by the dynamical system of a general form, encompassing a wide range of functional-differential systems [8]. Below it is applied to analysis of the integro-differential game.

Let us consider two controlled systems evolving in $\mathbb{R}^n$ according to the integro-differential equations, respectively,

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + \lambda \int_0^t K_1(t, s) x(s) ds + u, \quad u \in U, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = A_2 y(t) + \mu \int_0^t K_2(t, s) y(s) ds + \nu, \quad \nu \in V, \quad y(0) = x_0, \quad (2)$$

where A_1 and A_2 are constant matrices, $K_1(t, s)$ and $K_2(t, s)$ are matrix functions whose elements are continuous in the quadrant $\Delta = \{(t, s): 0 \leq t < +\infty, 0 \leq s < t\}$, u and v are control parameters of the pursuer and the evader, respectively; λ and μ are real numbers. By admissible controls of the players are meant the Lebesgue measurable functions taking their values in the compact sets U and V , respectively.

The goal of the pursuer is to achieve in the shortest time the meeting with the evader, i.e., $x(t) = y(t)$, $t < +\infty$, and the evader tries to escape or maximally postpone the meeting.

A solution to equation (1) can be presented in the form (see [9])

$$x(t) = \Omega_1(t, 0)x_0 + \int_0^t \Omega_1(t, \theta) u(\theta) d\theta,$$

$$\Omega_1(t, \theta) = e^{A_1(t-\theta)} + \int_\theta^t \widehat{R}_1(t, s; \lambda) e^{A_1(s-\theta)} ds,$$

where $\widehat{R}_1(t, s, \lambda)$ is the resolvent of the following second-order Volterra equation:

$$x(t) = \lambda \int_0^t \widehat{K}_1(t, s) x(s) ds + \psi_1(t),$$

$$\widehat{K}_1(t, s) = \int_s^t e^{A_1(t-\theta)} K_1(\theta, s) d\theta, \quad \psi_1(t) = e^{A_1 t} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\theta)} u(\theta) d\theta.$$

Analogous formulas concerning $y(t)$ with respective changes are true. The scheme of the First Direct Method assumes that the pursuer at each instant of time chooses his control in view of the current control of the evader and is based on Pontryagin's condition:

Condition 1. The set-valued mapping

$$\Omega_1(t, \theta)U \overset{*}{\subset} \Omega_2(t, \theta)V$$

has non-empty images for all $(t, \theta) \in \Delta$.

Definition. The time stretching function is a non-negative monotonically increasing function $I(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $I(0) = 0$, $I(t) > 0$, $t > 0$, which can have a countable number of first order discontinuities and such that

$$\sup_{t \in [0, +\infty) \setminus D} < +\infty,$$

where D is the set of discontinuity and non-differentiability points of $I(t)$.

Condition 2. There exists a time stretching function $I(t)$ such that the set-valued mapping

$$W(t, \theta) = \Omega_1(I(t), I(t) - \theta)U \overset{*}{\subset} \dot{I}(\theta)\Omega_2(I(t), I(t) - I(\theta))V$$

has non-empty images for all $(t, \theta) \in \Delta$.

Theorem. Let the parameters of pursuit game (1), (2) meet Condition 2 and let for given initial states x_0, y_0 there exist a finite moment t_1 ,

$$t_1 = t_1(x_0, y_0) = \left\{ \min t: t \geq 0, \right.$$

$$\left. \left(\Omega_2(I(t), 0)y_0 - \Omega_1(I(t), 0)x_0 - \int_0^{I(t)-t} \Omega_1(I(t), 0)U d\theta \right) \cap \int_0^t W(t, \theta) d\theta \neq \emptyset \right\}.$$

Then the pursuer can achieve his goal at the moment of time $I(t_1)$ whatever control is applied by the evader.

The statement of the theorem employs the notion of the integral of a set-valued mapping (see, e.g., [10]).

In the course of the game, the pursuer applies a program control on the half-interval $[0, \tau_0]$, $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, and at each instant of time $\tau_0 + \theta$, $\theta \in [0, t_1]$, constructs his control on the basis of information on the evader's control at the moment

$$I(t_1) - I(t_1 - \theta) = \tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta)),$$

that is, the time $I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta)$ earlier. The existence of an admissible control is provided by the Filippov–Castaing measurable choice theorem [11].

By way of illustration, let us suppose that A_1 and A_2 are zero matrices, $K_1(t, s) = K_2(t, s) = E$, $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\|u\| \leq \rho$, and $\|\nu\| \leq \sigma$. Then Condition 1 reduces to the form

$$\rho |\cos \omega_1 t| S \ast \sigma |\cos \omega_2 t| S \neq \emptyset \quad \forall t \geq 0,$$

where $\omega_1 = \sqrt{-\lambda}$, $\omega_2 = \sqrt{-\mu}$, and $S \subset \mathbb{R}^n$ is the ball of unit radius centered at the origin. Evidently it is not met. Let us set $I(t) = (\omega_1/\omega_2)t$. It is easy to show that under the constraints $\omega_1 > \omega_2$ and $\rho/\omega_1 \geq \sigma/\omega_2$ on the game parameters, Condition 2 holds and, what is more, the pursuer can catch the evader at a finite moment of time starting from any initial positions.

References

1. *Pontryagin L.S.* Selected Scientific Papers. Moscow: Nauka, 1988. V. 2 (in Russian).
2. *Nikolskii N.N.* On application of the first direct method in the linear differential games // *Izv. Akad. Nauk SSSR*. 1972. No. 10. P. 51–56.
3. *Zonnevend D.* On one method of pursuit // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1972. V. 204. P. 1296–1299.
4. *Azimov A.Ya.* On one method of pursuit in the linear differential games with integral constraints on controls // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.* 1974. No. 2. P. 31–35.
5. *Grigorenko N.L.* Mathematical Methods of Control of Many Dynamical Processes. Moscow: Moscow State University, 1980 (in Russian).
6. *Chikrii G.Ts.* Using impact of information delay for solution of game problems of pursuit // *Dopov. NAN Ukr.* 1999. No. 12. P. 107–111.
7. *Chikrii G.Ts.* Using the effect of information delay in differential pursuit games // *Cybern. Syst. Anal.* 2007. V. 43, No. 2. P. 233–245.
8. *Chikrii G.T.* Principle of time stretching in evolutionary games of approach // *J. Autom. Inf. Sci.* 2016. V. 48, No. 5. P. 12–26.
9. *Eidelman S.D., Chikrij A.A., Rurenko A.G.* Linear integro-differential games of approach // *J. Autom. Inf. Sci.* 1999. V. 31, No. 1–3. P. 1–13.
10. *Blagodatskikh V.I.* Introduction into Optimal Control. Linear Theory. Moscow: Vysshaya Shkola, 2001 (in Russian).
11. *Filippov A.F.* Differential Equations with Discontinuous Right Side. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).

N-PERSON DIFFERENTIAL GAMES:
EXAMPLES AND COUNTEREXAMPLES

S. V. Chistyakov

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
svch50@mail.ru

Model examples of differential and other games illustrating invalidity of some frequently declared statements are considered in the paper.

The first of the examples shows that in a non-cooperative differential game with terminal gains there may exist several equilibrium paths initiated by an ε -equilibrium in the Nash sense (with $\varepsilon \rightarrow 0$), while for different equilibrium paths the players' gains are also different. The latter proves that it is generally not possible to correctly determine the concept of value (price) of the game for non-cooperative games. This point is well-known for usual non-differential non-cooperative games. However, despite this, in some works on non-cooperative differential games the equilibrium is being sought (with no reason given) in accordance with the solution of the equation (of Bellman–Isaacs type for the function of the game value).

The second example considered illustrates the problem of dynamic stability in cooperative differential games. On the basis of one of the earlier suggested definitions of dynamic stability in differential games with terminal gains of the players, the authors of the above-mentioned definition determined the dynamic stability of the Pareto optimality principle. Commenting on the notion of dynamic stability, the authors underlined that if some cooperative solution is dynamically stable, the players have no reasons to defect from the so-called conditionally optimal path that represents this solution. By the example of a particular case the paper illustrates that there are still significant reasons for this.

Two last examples referring not only to differential games show that regardless of the opinion stated in several books, the equation

$$\inf_{y \in \mathbb{Y}} \sup_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{K}(x, y) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \inf_{y \in \mathbb{Y}} \mathcal{K}(x, y)$$

is not sufficient for the existence of an ε -equilibrium in any zero-sum game $\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathcal{K} \rangle$ with any $\varepsilon > 0$.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА,
ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ
ОТ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
(ASYMPTOTIC EXPANSION OF A SOLUTION TO A SINGULARLY
PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A CONVEX
INTEGRAL PERFORMANCE INDEX WHOSE TERMINAL PART
DEPENDS ON SLOW AND FAST VARIABLES)

А. Р. Данилин (A. R. Danilin), А. А. Шабуров (A. A. Shaburov)

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет им. первого Президента России
Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
dar@imm.uran.ru, alexandershaburov@mail.ru*

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \quad \nabla \varphi_2(0) = 0, \\ J(u) := \varphi_1(x_\varepsilon(T)) + \varphi_2(y_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} , B_i , $i, j = 1, 2$, — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ строго выпуклые и кофинитные функции в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности и существуют единственные векторы l_ε и ρ_ε , определяющие оптимальное управление по формуле

$$u_\varepsilon(T-t) := \frac{C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon + C_{2,\varepsilon}^*(t)\rho_\varepsilon}{S(C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon + C_{2,\varepsilon}^*(t)\rho_\varepsilon)},$$

где

$$\begin{aligned} C_{1,\varepsilon}^*(t) &:= B_1^* e^{A_{11}^* t} + \varepsilon^{-1} B_2^* \mathcal{W}_\varepsilon^*(t), & C_{2,\varepsilon}^*(t) &:= \varepsilon^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* t/\varepsilon}, \\ \mathcal{W}_\varepsilon(t) &:= e^{A_{11} t} \int_0^t e^{-A_{11} \tau} A_{12} e^{A_{22} \tau/\varepsilon} d\tau, & S(\xi) &:= \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Основное отличие статьи от работы [10] заключается в том, что терминальная часть функционала качества зависит не только от медленных переменных, но и от быстрых переменных. Доказано, что в случае конечного числа точек смены

вида управления, начинающихся с постоянного знаменателя, можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon, \rho_\varepsilon)^T$, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы, М.: Наука, 1968.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления, М.: Наука, 1972.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77. (Итоги науки и техники).
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20, No. 1. P. 111–113.
6. Дончев А. Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности, М.: Мир, 1987.
7. Калинин А.И., Семенов К.В. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44, №3. С. 432–443.
8. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // ДАН. 2009. Т. 427, №2. С. 151–154.
9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // ДАН. 2013. Т. 451, №6. С. 612–614.
10. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, №2. С. 280–289.
11. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ, М.: Мир, 1973.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ (STABILITY OF CONTROLLABILITY OF DYNAMIC INEQUALITIES)*

А. А. Давыдов (A. A. Davydov)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

НИТУ "МИСиС", Москва, Россия

davydov@mi.ras.ru

Понятие грубости динамических систем было введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным в работе [1]. Оно относилось к структурной устойчивости семейства фазовых кривых дифференцируемого векторного поля на двумерном диске, не обращающегося в нуль на границе диска и не касающегося этой границы. В этой работе были найдены необходимые и достаточные условия на векторное поле и семейство его фазовых кривых такие, что поле, удовлетворяющее этим условиям, и любое поле, достаточно C^1 -близкое к нему, имеют фазовые портреты в этом диске, которые переводятся один в другой близким к тождественному гомеоморфизмом этого диска. Эта работа оказала огромное влияние на развитие качественной теории динамических систем в XX в. и создание общей теории динамических систем. Одним из этапов этого развития стала фундаментальная теорема о структурной устойчивости типичных дифференцируемых векторных полей на ориентируемых компактных поверхностях, доказанная М. Пейшоту [2, 3].

Аналогичная задача для динамических неравенств или управляемых систем на поверхности M (и те и другие локально можно рассматривать как специальные дифференциальные включения вида $\dot{x} \in \{v: F(x, v) \leq 0, v \in T_x M\}$ и $\dot{x} \in \{v: v = f(x, u), u \in U\}$) при таком же определении структурной устойчивости гораздо сложнее. Ее постановка для динамических неравенств восходит по сути к работе А.Д. Мышкиса [4], в которой он поставил задачу описания семейства орбит динамического неравенства. В частности, такая задача естественным образом включает анализ устойчивости различных типов управляемости таких систем и неравенств.

Для типичных управляемых систем на ориентируемых компактных поверхностях (например, для типичных бидинамических систем на сфере) структурная устойчивость была доказана в работе [5] (см. также [6]). Теорема о структурной устойчивости типичных динамических неравенств (с локально ограниченными производными) на компактных ориентируемых поверхностях не доказана до сих пор. Однако значительная предварительная работа уже проделана: установлены устойчивость свойств локальной управляемости таких неравенств и устойчивость ростков фазовых портретов при движении с предельными скоростями [7]. В 2007 г. структурная устойчивость была доказана для типичных простейших динамических неравенств на плоскости с ограниченным дополнением к области полной управляемости [8].

Доклад посвящен этим результатам и связанным с ними результатам в смежных областях математики.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (проект 1.638.2016/ФПМ).

Список литературы

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. Ser. 2. 1959. V. 69, No. 1. P. 199–222.
3. Peixoto M.M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1, No. 2. P. 101–120.
4. Мышкис А.Д. О дифференциальных неравенствах с локально ограниченными производными // Зап. мех.-мат. фак. Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. о-ва. 1964. Т. 30. С. 152–163.
5. Давыдов А.А. Структурная устойчивость управляемых систем на ориентируемых поверхностях // Мат. сб. 1991. Т. 182, No. 1. С. 3–35.
6. Davydov A.A. Qualitative theory of control systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Transl. Math. Monogr.; V. 141).
7. Давыдов А.А. Локальная управляемость типичных динамических неравенств на поверхностях // Тр. МИАН. 1995. Т. 209. С. 84–123.
8. Гришина Ю.А., Давыдов А.А. Структурная устойчивость простейших динамических неравенств // Тр. МИАН. 2007. Т. 256. С. 89–101.

ВАРИАЦИИ ТИПА v -ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ (VARIATIONS OF THE v -CHANGE OF TIME TYPE IN PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS)*

А. В. Дмитрук (A. V. Dmitruk)^{a,б},
Н. П. Осмоловский (N. P. Osmolovskii)^{б,з}

^aЦентральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

^бМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

^зМосковский государственный строительный университет, Москва, Россия

^зУниверситет технических и гуманитарных наук, Радом, Польша

avdmi@cemi.rssi.ru, osmolovski@uph.edu.pl

Задачи с фазовыми ограничениями привлекали внимание специалистов с самого начала развития теории оптимального управления (см., например, [1]). При этом, как известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на эти задачи было сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений типа неравенств, а необходимые условия экстремума в них содержат меру. Известные способы доказательства принципа максимума (ПМ) технически довольно сложны и вряд ли доступны широкому кругу читателей, кроме узкого круга специалистов. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00585.

Как известно, стандартный способ получения ПМ в задачах оптимального управления состоит во введении так называемых *игольчатых вариаций* управления, предложенных Э. Макшейном и примененных В.Г. Болтянским и Л.С. Понтрягиным [1] для доказательства ПМ в так называемой *понтрягинской* задаче, не содержащей фазовых ограничений. Однако при наличии таких ограничений аппарат стандартных игольчатых вариаций вряд ли возможно использовать, ибо уже производная соответствующей траектории $x(t)$ по ширине иголки будет разрывной функцией. Более удобным (и технически простым, но нетривиальным) аналогом игольчатых вариаций являются так называемые *вариации типа v -замены времени*. Они были предложены А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиним еще в 1965 г. [2] и систематически использовались ими для доказательства ПМ в общей задаче оптимального управления, включающей как фазовые, так и смешанные ограничения.

Идея v -замены состоит в переходе от исходного времени t к новому времени τ , при котором исходное время $t = t(\tau)$ становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, где $v(\tau) \geq 0$ есть произвольная измеримая ограниченная функция, которая трактуется как еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена *не взаимно однозначна* (там, где $v(\tau) = 0$), и по этой причине малые вариации управления $v(\tau)$ порождают немалые (так называемые *понтрягинские*) вариации исходного управления $u(t)$. Использование этого приема в общем случае требует, однако, привлечения глубоких фактов теории функций действительного переменного.

В конце 1990-х годов А.А. Милютин предложил использовать упрощенный вариант v -замены с *кусочно постоянной* функцией $v(\tau)$. Этим способом он доказал принцип максимума для общей понтрягинской задачи, т.е. задачи с концевыми ограничениями, но без фазовых.

В случае кусочно постоянной функции $v(\tau)$ ее вариации порождают по сути дела те же игольчатые вариации исходного управления $u(t)$ (точнее, пакет игольчатых вариаций), но с некоторым отличием от последних. Оно состоит в том, что мы *не заменяем* оптимальное управление на малом отрезке около базовых точек пакета, а *расшишаем* эти точки, вставляя в эти места малые отрезки с произвольными наперед заданными значениями управления. Поскольку этих точек несколько, в итоге получаем пакет игольчатых вариаций. Такие “вставные” иголки имеют следующие два преимущества по сравнению с обычными:

- а) оптимальное управление может быть произвольной измеримой ограниченной функцией, тогда как для использования игольчатых вариаций надо требовать его кусочной непрерывности (иначе не получим гладкой зависимости траектории от ширины иголки);
- б) v -замена дает гладкую управляемую систему, определенную по крайней мере в целой окрестности оптимального процесса, тогда как игольчатые вариации приводят к задаче, функции которой определены лишь на неотрицательном ортанте конечномерного пространства (точнее, в его пересечении с окрестностью нуля), соответствующем ширинам иголок в данном пакете (см. [3]).

Последнее обстоятельство представляется нам весьма существенным.

Применение кусочно постоянной v -замены к задаче с фазовыми ограничениями позволяет свести эту задачу к вспомогательной (так называемой *присоеди-*

ненной) задаче в конечномерном пространстве, аргументами которой служат произвольно выбранные значения управления на участках постоянства функции $v(\tau)$, а также начальное значение фазовой переменной x . Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений типа неравенств, т.е. это не есть обычная гладкая конечномерная задача. (В зарубежной литературе такие задачи принято называть *полубесконечными*.) Однако условия оптимальности (локального минимума) для такой задачи известны (см., например, [4]); их специфика лишь в том, что они содержат меру, сосредоточенную на множестве индексов (моментов времени) активных неравенств. Применяя эти условия к присоединенной v -задаче и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в некоторой топологии (обычной топологии по конечномерным множителям и слабой-* относительно меры). Каждый элемент этого компакта (т.е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве выбранных значений управления и времени, соответствующем данной v -замене.

Таким образом, для каждой кусочно постоянной функции $v(\tau)$ мы имеем свою присоединенную задачу и свой компакт, состоящий из наборов множителей Лагранжа. Ясно, что если одна v -замена “богаче” другой (имеет больше моментов времени t , которые расшиваются, и больше выбранных значений управления), то соответствующий ей компакт уже того другого. Тем самым компакты, порожденные всевозможными кусочно постоянными v -заменами, естественным образом частично упорядочены по включению и поэтому в силу их непустоты образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого ПМ выполнен при всех значениях управления и времени.

Подробное изложение описанной схемы дано в [5, 6].

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Дубовицкий А.Я., Милотин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, №3. С. 395–453.
3. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 19, №5. С. 49–74.
4. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. A general Lagrange multipliers theorem and related questions // Control systems and mathematical methods in economics / Ed. by G. Feichtinger et al. Springer, 2018. P. 165–194. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.; V. 687).
5. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Вариации типа v -замены времени в задачах с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, №1. С. 76–92.
6. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Proof of the maximum principle for a problem with state constraints by the v -change of time variable // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B (to appear).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
ПОЗИЦИОННОГО ГРАНИЧНОГО НАВЕДЕНИЯ
НА ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
(NUMERICAL SOLUTION OF THE CLOSED-LOOP BOUNDARY CONTROL
PROBLEM WITH LINEAR TERMINAL SET FOR THE WAVE EQUATION)*

А. А. Дряженков (А. А. Dryazhenkov),
М. М. Потапов (М. М. Potapov)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

andrja@yandex.ru, mmpotapovrus@gmail.com

Рассматривается следующая управляемая система, описываемая одномерным волновым уравнением:

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) &= y_{xx}(t, x) - q(x)y(t, x), & 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ -y_x|_{x=0} &= u(t), & y_x + \sigma y|_{x=l} &= 0, & 0 < t < T, \\ y|_{t=0} &= v^0(x), & y_t|_{t=0} &= v^1(x), & 0 < x < l. \end{aligned}$$

Параметры системы T , l , σ и непрерывный коэффициент $q(x)$ считаются известными. Задача ставится в классе сильных обобщенных решений $y(t, x)$, соответствующих граничным управлениям

$$u = u(t) \in H = L^2(0, T)$$

и начальным состояниям

$$v = (v^0(x), v^1(x)) \in F = H^1(0, l) \times L^2(0, l),$$

где $L^2(0, T)$ и $L^2(0, l)$ — пространства Лебега, а $H^1(0, l) = W_2^1(0, l)$ — пространство Соболева.

Цель управления $u = u(t)$ состоит в переводе системы в конечный момент времени T на заданное терминальное множество $M \subset F$, являющееся замкнутым линейным аффинным многообразием. Будем считать, что известно представление вида $M = f \oplus L$ с направляющим подпространством $L \subset F$ и вектором сдвига $f \in L^\perp$. Если $P: F \rightarrow L^\perp$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве F на ортогональное дополнение $L^\perp \subset F$, то множество M можно описать линейным уравнением

$$M = \{\varphi \in F \mid P\varphi = f\}.$$

Пусть $A: H \rightarrow F$ — традиционный оператор управления [1], значениями которого являются терминальные состояния системы:

$$Au = (y(T, x), y_t(T, x)) \in F.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

Тогда рассматриваемая здесь задача наведения на многообразие M может быть записана в форме линейного операторного уравнения

$$PAu = f.$$

В случае точечных целей, когда $M = \{f\}$, $L = \{0\}$, $P = I$ и управляющей стороне известны начальные состояния $v(x) \in F$, такие задачи хорошо изучены и могут быть решены численно [1], а в отдельных случаях, например, при $q(x) = 0$, и аналитически [2, 3]. В данной работе предполагается, что M — линейное многообразие общего вида, начальное состояние $v \in F$ неизвестно и управление $u \in H$ строится позиционным образом [4] с учетом результатов наблюдений за смещениями $g(t)$ на управляемом краю:

$$g(t) = y|_{x=0}, \quad g \in H^1(0, T).$$

Авторами разработан устойчивый к возмущениям в наблюдении $g(t)$ численный метод построения позиционного управления, представляющий собой комбинацию метода из [5] и процедуры численного решения вспомогательного линейного операторного уравнения с привлечением вариационного метода [1]. Приводятся соответствующие вычислительные иллюстрации.

Список литературы

1. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.
2. Никитин А.А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Диф. уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1773–1782.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. 2005. Т. 60. № 6. С. 89–114.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
5. Дряженков А.А., Потапов М.М. Численное решение задачи позиционного граничного управления для волнового уравнения с неизвестными начальными данными // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 138–146.

ON INTEGRATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PARAMETRIC FORM

V. S. Dryuma

Institute of Mathematics and Informatics, Kishinev, Moldova

valdryum@gmail.com

Basic formulas. Our approach to the integration of nonlinear PDEs is based on the presentation of the functions and their partial derivatives in a special form.

Proposition 1. *Under the transformation of functions $x(u, v)$ and $y(u, v)$ into functions $\lambda(x, v)$ and $\rho(x, v)$ by means of solving the system of equations*

$$u - \lambda(x, v) = 0, \quad y - \rho(x, v) = 0, \quad (1)$$

the corresponding partial derivatives of the functions are transformed according to the rules

$$x_v = -\frac{\lambda_v}{\lambda_x}, \quad x_u = \frac{1}{\lambda_x}, \quad y_v = -\frac{\rho_x}{\lambda_v}\lambda_x + \rho_v, \quad y_u = \frac{\rho_x}{\lambda_x}, \quad (2)$$

$$x_{uv} = -\frac{\lambda_{xx}}{(\lambda_x)^3}, \quad y_{uv} = \frac{\rho_{xv}}{\lambda_x} + \frac{-\rho_x\lambda_{xv} - \rho_{xx}\lambda_v}{(\lambda_x)^2} + \frac{\rho_x\lambda_{xx}\lambda_v}{(\lambda_x)^3}. \quad (3)$$

These formulas arise in the context of presentation of the functions and their derivatives in the parametric form

$$f(x, y) = u(x, t), \quad f_x = u_x - \frac{u_t}{v_t}v_x = p, \quad f_y = \frac{u_t}{v_t} = s, \quad f_{xy} = \frac{p_t}{v_t},$$

which was introduced by the author and has been used for integration of nonlinear PDEs appearing in various problems of modern mathematical physics [1–3].

Equations of nonlinear fields theory. In this section we construct particular solutions of the sine-Gordon equation

$$\phi_{uv} - \sin(\phi(u, v)) = 0. \quad (4)$$

Theorem 1. *Equation (4) after the change of the function*

$$\phi(u, v) = \arcsin(x(u, v))$$

and the use of formulas (2)–(3) takes the form

$$\lambda_x(1 - x^2)\lambda_{xv} + \lambda_v(-1 + x^2)\lambda_{xx} + x\lambda_x^3(1 - x^2)^{3/2} = 0.$$

It has a solution of the form

$$\lambda(x, v) = A(\sqrt{1 - x^2}) + Bv,$$

where

$$A(z) = \int \frac{\sqrt{(-1 + z^2)(-2z + C_1 B)B}}{(z - 1)(z + 1)(-2z + C_1 B)} dz + C_2,$$

which in the general case is an elliptic function, where B and C_i are parameters and $z = \sqrt{1 - x^2}$.

Under the condition $C_1 = -2/B$ this yields the expression

$$A(z) = -\sqrt{B}\sqrt{-(2z^2 - 2)(z + 1)B} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2Bz + 2B}}{\sqrt{B}}\right)(z + 1)^{-1} \\ \times \frac{1}{\sqrt{-2B(z - 1)}} + C_3,$$

which after further transformations and simplifications leads to the solution of equation (4)

$$\phi(u, v) = \arcsin\left(4\frac{e^{-u+v}(e^{-2u+2v} - 1)}{(e^{-2u+2v} + 1)^2}\right). \quad (5)$$

Note that the obtained solution has the form different from the known one.

Proposition 2. *The equation*

$$y_{uv} - y(u, v)^3 = 0, \quad (6)$$

which is encountered in the theory of the Yang-Mills equations, in new variables takes the form

$$\rho_{xv}\lambda_x^2 - \lambda_x\rho_x\lambda_{xv} - \lambda_x\rho_{xx}\lambda_v + \rho_x\lambda_{xx}\lambda_v - \rho^3\lambda_x^3 = 0. \quad (7)$$

The solutions of equation (6) are constructed with the help of solutions of the undetermined relation (7) by means of eliminating the variable v from condition (1).

Theorem 2. *A particular solution of equation (6) has the form*

$$y(u, v) = -2\frac{(16C_2\sqrt[4]{4v + C_3}C_3 + 4\sqrt{S(u, v)})C_3}{16C_2^2\sqrt{4v + C_3}C_3^2 - S(u, v)},$$

where

$$S(u, v) = 6C_2^2C_3^{3/2}(4v + C_3)\ln\left(\frac{2v + C_3 - \sqrt{4v + C_3}\sqrt{C_3}}{2v + C_3 + \sqrt{4v + C_3}\sqrt{C_3}}\right) \\ + 24C_2^2C_3^{3/2}(4v + C_3)\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{4v + C_3}}{\sqrt{C_3}}\right) + 64C_3^2(4v + C_3)(u - C_1)$$

and C_i are parameters.

Proposition 3. *The equation*

$$f_{tt} - f_{rr} - 2\frac{f_r}{r} + 2\frac{f(r, t)}{r^2} - 3\frac{f(r, t)^2}{r} + f(r, t)^3 = 0$$

is an exact reduction of the $SU(2)$ Yang-Mills equations in the spherical system of coordinates. In the light variables $u = r - t$, $v = r + t$ this equation takes the form

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}x(u, v) + \frac{\mu x(u, v)(x(u, v)^2 - 1)}{(u - v)^2} = 0, \quad (8)$$

where μ is a parameter. Applying formulas (1) and (2) allows one to get examples of its solutions.

Theorem 3. *After a transformation equation (8) takes the form*

$$\lambda_{xx}\lambda_v\lambda^2 - 2v\lambda_{xx}\lambda_v\lambda + v^2\lambda_{xx}\lambda_v - \lambda_{vx}\lambda_x\lambda^2 + 2v\lambda_{xv}\lambda_x\lambda - v^2\lambda_{vv}\lambda_x + \mu x(x^2 - 1) = 0. \quad (9)$$

The simplest particular solutions of equation (9) are

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lambda(x, v) = v + (v + C_1)x^2, \quad \mu = \frac{1}{2}, \\ \text{(ii)} \quad & \lambda(x, v) = -\frac{12xv + 12x^2v + 4vx^3 + vx^3C_1C_2 + 4v + x^3C_2^2}{-12x - 12x^2 - 4x^3 + x^3vC_1^2 + x^3C_1C_2 - 4}, \quad \mu = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Case (i) leads to a solution of equation (8) of the form

$$x(u, v) = \frac{\sqrt{(v + C_1)(u - v)}}{v + C_1}.$$

In case (ii) we get a solution that has a very cumbersome form, which under the condition $C_2 = 0$ looks like

$$\begin{aligned} x(u, v) = & 4 \frac{(u - v)uvC_1}{(-4u + uvC_1^2 + 4v)\sqrt[3]{(-4v + 4u)u^2v^2C_1}} + 4 \frac{u - v}{-4u + uvC_1^2 + 4v} \\ & + \frac{C_1\sqrt[3]{(-4v + 4u)u^2v^2C_1}}{-4u + uvC_1^2 + 4v}. \end{aligned}$$

References

1. *Dryuma V.S.* The Riemann and Einstein–Weyl geometries in theory of differential equations, their applications and all that // *New trends in integrability and partial solvability* / Ed. by A. B. Shabat et al. Kluwer, 2004. P. 115–156.
2. *Dryuma V.S.* Towards the theory of solutions of the flow equations of incompressible liquid // *Anosov systems and modern dynamics: Abstr. Int. Conf. Moscow, December 19–23, 2016*. Moscow: Steklov Inst. Math., 2016. P. 28–31.
3. *Dryuma V.* On solving Euler equations of ideal incompressible liquid // *Mathematical control theory and mechanics: Abstr. Int. Conf., Suzdal, July 7–12, 2015*. P. 166–168.

ПОЗИЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА
ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ, ДИСКРЕТНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
(FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLE FOR CONTINUOUS,
DISCRETE AND IMPULSIVE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS)*

**В. А. Дыхта (V. A. Dykhta), О. Н. Самсонок (O. N. Samsonyuk),
С. П. Сорокин (S. P. Sorokin)**

*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия*

dykhta@gmail.com, samsonyuk.olga@gmail.com, sorsp@mail.ru

В работах [1, 2] был доказан позиционный принцип минимума — необходимое условие глобальной оптимальности, усиливающее принцип максимума для непрерывных задач динамической оптимизации (в том числе для негладких), а в [3, 4] — для дискретных и импульсных соответственно. Усиление фундаментального принципа максимума в указанных классах задач достигается путем использования позиционных управлений спуска по функционалу, формируемых в рамках конструкций принципа максимума, но с позиционно возмущенной котраекторией (решением сопряженной системы). Эффективность позиционного принципа минимума (по сути — отсутствие позиционных вариаций спуска на оптимальном процессе) обусловлена его нелокальностью и свойством алгоритмичности — нарушение на данном процессе сопровождается предъявлением улучшающего процесса.

Основное внимание будет сосредоточено на варианте позиционного принципа минимума для дискретных процессов и основанных на нем итерационных алгоритмах решения задач оптимального управления.

Список литературы

1. Дыхта В.А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // ДАН. 2015. Т. 462, № 6. С. 653–656.
2. Дыхта В.А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 73–86.
3. Сорокин С.П. Позиционные необходимые условия оптимальности и нестандартная двойственность в задачах оптимизации дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 21–30.
4. Dykhta V., Samsonyuk O., Sorokin S. Relaxational methods with feedback controls for discrete and impulsive optimal control problems // Methods of optimization and their applications: 17th Baikal Int. Sch.-Semin., 2017. P. 138.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00733).

APPROXIMATE PROPERTIES OF C^1 -SMOOTH Ω -STABLE SKEW PRODUCTS OF MAPS OF AN INTERVAL*

L. S. Efremova

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia

lefunn@gmail.com

Problems of this work go back to Andronov and Pontryagin, who introduced the concept of structurally stable dynamical systems. We deal here with the concept of C^1 Ω -stability for dynamical systems of skew product class and investigate approximate properties (in the C^1 -topology) of Ω -stable skew products of maps of an interval.

Let $I = I_1 \times I_2$ be a closed rectangle in the plane (I_1 and I_2 are closed intervals). A map $F: I \rightarrow I$ is called a skew product of maps of an interval if the equality

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)), \quad \text{where } g_x(y) = g(x, y),$$

holds for every point $(x, y) \in I$. Then, for every $n \geq 1$ we have

$$F^n(x, y) = (f^n(x), g_{x,n}(y)), \quad \text{where } g_{x,n}(y) = g_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ g_x(y). \quad (1)$$

Denote by $\tilde{T}^1(I)$ the space of C^1 -smooth skew products of maps of an interval (with the standard C^1 -topology) satisfying

$$F(\partial I) \subset \partial I$$

for every $F \in \tilde{T}^1(I)$, where $\partial(\cdot)$ is the boundary of a set.

Definition 1. A map $F \in \tilde{T}^1(I)$ is said to be Ω -stable (with respect to homeomorphisms of skew product class) if for every $\delta > 0$ there exists a neighborhood $\tilde{B}_\varepsilon^1(F)$ of a map F in the space $\tilde{T}^1(I)$ such that for every map $\Phi \in \tilde{B}_\varepsilon^1(F)$ one can find a homeomorphism $H: \Omega(\Phi) \rightarrow \Omega(F)$, where $\Omega(\cdot)$ is the nonwandering set of a map, such that $H(x, y) = (h_1(x), h_{2,x}(y))$ and H is δ -close in the C^0 -topology to the identity map and satisfies the equation

$$H \circ \Phi|_{\Omega(\Phi)} = F \circ H|_{\Omega(F)}.$$

Denote by $\tilde{T}_*^1(I)$ the subspace of the space $\tilde{T}^1(I)$ that consists of skew products with Ω -stable (in the space of C^1 -smooth maps of the closed interval I_1 into itself) quotients of type $\succ 2^\infty$ (i.e., with Ω -stable quotients having periodic orbits with periods $\notin \{2^i\}_{i \geq 0}$).

Further, we need, first, the definition of the special multifunctions for a skew product of maps of an interval and, second, a decomposition theorem for the space $\tilde{T}_*^1(I)$ (see [1, 2] for details).

Definition 2. Let $F \in \tilde{T}_*^1(I)$. The multifunction $\Omega^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ is said to be the Ω -function of a map F if for every $x \in \Omega(f)$ the following equality holds:

$$\Omega^F(x) = (\Omega(F))(x) = \{y \in I_2: (x, y) \in \Omega(F)\},$$

*The work was partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant no. 1.3287.2017).

where 2^{I_2} is the space of all closed subsets of the closed interval I_2 with the exponential topology; $(\cdot)(x)$ is the slice of a set by vertical fiber over a point $x \in \Omega(f)$.

The multifunctions $\Omega_n^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ ($n \geq 1$) are called the auxiliary functions for the Ω -function of a map F if for every $x \in \Omega(f)$ it holds that

$$\Omega_n^F(x) = \Omega(g_{x,n}) \quad (\text{see formula (1)}).$$

The multifunctions $\overline{\Omega}_n^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ ($n \geq 1$) are called the suitable functions for the Ω -function of a map F if their graphs coincide with the closures of the graphs of the corresponding auxiliary functions; moreover, for every $x \in \Omega(f)$ the following equality is valid:

$$\overline{\Omega}_n^F(x) = (\overline{\Omega}_n^F)(x).$$

Let $F \in \tilde{T}_*^1(I)$ and $\{l_i^*\}_{i \geq i_*}$ (for some $i_* \geq 1$) be the recurrence time set of f -trajectories of neighborhoods of all points from the set $\Omega(f)$. Then, one of the following cases is possible:

- (1) the sequence of auxiliary functions $\{\Omega_{l_i^*}^F\}_{i \geq 1}$ contains at most a finite number of discontinuous functions;
- (2) case (1) is not realized, but the sequence of suitable functions $\{\overline{\Omega}_{l_i^*}^F\}_{i \geq 1}$ contains at most a finite number of discontinuous functions;
- (3) the sequence of suitable functions $\{\overline{\Omega}_{l_i^*}^F\}_{i \geq 1}$ contains a countable number of discontinuous functions, and the Ω -function is continuous;
- (4) the sequence of suitable functions $\{\overline{\Omega}_{l_i^*}^F\}_{i \geq 1}$ contains a countable number of discontinuous functions, and the Ω -function is discontinuous.

Denote by $\tilde{T}_{*,j}^1(I)$ ($1 \leq j \leq 4$) the subspace of maps from $\tilde{T}_*^1(I)$ satisfying condition (j).

Decomposition theorem. *Every subspace $\tilde{T}_{*,j}^1(I)$ is not empty, and $\tilde{T}_*^1(I) = \bigcup_{j=1}^4 \tilde{T}_{*,j}^1(I)$.*

Nongenericity of Ω -stability for C^r -diffeomorphisms ($r \geq 2$) was proved by Abraham and Smale in dimensions ≥ 3 and by Newhouse in dimension 2. Considerations for maps from the space $\tilde{T}_*^1(I)$ were performed in [2–4].

Theorem 1. *Let a map $F \in \tilde{T}_*^1(I)$ be Ω -stable. Then $F \in \tilde{T}_{*,1}^1(I)$. Moreover, there exists a map $F_* \in \tilde{T}_{*,1}^1(I)$ such that a neighborhood $\tilde{B}_\varepsilon^1(F_*)$ of it in the space $\tilde{T}_{*,1}^1(I)$ does not contain Ω -stable skew products.*

Definition 3. A family of fiber maps of a skew product $F \in \tilde{T}_{*,j}^1$ ($1 \leq j \leq 4$) is called densely stable as a whole in the C^1 -topology if there is an open set $A(f) \subset I_1$ such that the set $A^*(f) = A(f) \cap \Omega(f)$ (where $A^*(f) \neq \Omega(f)$) is everywhere dense in $\Omega(f)$ and satisfies the following: For every $\delta > 0$ one can find a neighborhood $\tilde{B}_\varepsilon^1(F)$ of F in $\tilde{T}_*^1(I)$ such that for every map $\Phi \in \tilde{B}_\varepsilon^1(F) \cap \tilde{T}_{*,j'}^1(I)$ ($1 \leq j' \leq 4$), $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \psi_x(y))$, and every recurrence time l_i^* ($i \geq i_*$) there exists a homeomorphism $H^{(l_i^*)}: \overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)} \rightarrow \overline{\Omega}_{l_i^*}^\Phi|_{A^*(\varphi)}$, where $H^{(l_i^*)}(x, y) = (h_1(x), h_{2,x}^{(l_i^*)}(y))$, that is δ -close in the C^0 -topology to the identity map and satisfies the equality $h_1(A^*) = A^*(\varphi)$ and

for every $(x, y) \in \overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)}$ the equality

$$h_{2,x}^{(l_i^*)}|\overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)}(x) \circ g_{x,l_i^*}|\overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)}(x)(y) = \psi_{h_1(x),l_i^*}|\overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)}(h_1(x)) \circ h_{2,x}^{(l_i^*)}|\overline{\Omega}_{l_i^*}^F|_{A^*(f)}(x)(y).$$

Note that for every $1 \leq j \leq 4$ there exists a map $F_j \in \tilde{T}_{*,j}^1(I)$ with family of fiber maps densely stable as a whole in the C^1 -topology.

We also prove a criterion of C^1 -approximability of maps from the subspaces $\tilde{T}_{*,j}^1(I)$ ($j \neq 2$) with the use of Ω -stable skew products of maps of an interval.

Theorem 2. *Let $F \in \tilde{T}_{*,j}^1(I)$ ($j = 1, 3$ or 4) be a skew product with family of fiber maps densely stable as a whole (in the C^1 -topology). Then F admits an approximation in the C^1 -topology by means of C^1 Ω -stable skew products of maps of an interval with an arbitrary degree of accuracy if and only if for every locally maximal f -quasiminimal set $K(f)$ and $i \geq i^*$ there exists a connected component $C_{K(f),i}$ of the space of C^1 -smooth Ω -stable maps of the interval I_2 into itself that satisfies*

$$\{g_{x,l_i^*}\}_{x \in K(f)} \subset \overline{C}_{K(f),i},$$

where $\overline{(\cdot)}$ means the closure of a set.

References

1. Efremova L.S. A decomposition theorem for the space of C^1 -smooth skew products with complicated dynamics of the quotient map // Sb. Math. 2013. V. 204, No. 11. P. 1598–1623.
2. Efremova L.S. Dynamics of skew products of interval maps // Russ. Math. Surv. 2017. V. 72, No. 1. P. 101–178.
3. Efremova L.S. Ω -stable skew products of interval maps are not dense in $T^1(I)$ // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. V. 236. P. 157–163.
4. Efremova L.S. Stability as a whole of a family of fibers maps and Ω -stability of C^1 -smooth skew products of maps of an interval // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 692. Paper 012010.

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ANALYSIS OF LINEAR–QUADRATIC CONTROL PROBLEMS FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS)

А. И. Егоров (A. I. Egorov),
Л. Н. Знаменская (L. N. Znamenskaya)

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
egorov@4unet.ru, znamenskaia.ln@mipt.ru

Рассматриваются задачи управления системами с распределенными параметрами, которые описываются линейными неоднородными краевыми задачами для параболических и гиперболических уравнений. Управляющие параметры входят в граничные условия.

Анализируются точные и приближенные методы решения различных задач оптимального управления системой, описываемой краевой задачей

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - c(x)u, & (t, x) \in Q_T, \\ u(0, x) = 0, & x \in D, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) + h(x)u = p(t)g(x), & (t, x) \in H_T, \end{cases}$$

в которой $p(t)$ — управление. Результаты сформулированы в виде теорем о разрешимости соответствующих задач, их приближенном решении и устойчивости приближений относительно погрешностей вычислений.

Задача 1 (задача об управлении с минимальной энергией). Используя допустимые управления $p(t) \in L_2(0, T)$, требуется перевести объект в состояние $u(T, x) = \varphi(x)$ так, чтобы на соответствующем управлении функционал $J[p] = \int_0^T p(t) dt$ достигал своего наименьшего значения. Момент времени T фиксирован (задан).

Задача 2. В том же классе допустимых управлений требуется найти управление, на котором функционал

$$J_1[p] = \int_D [u(T, x) - \varphi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t) dt$$

достигает наименьшего значения, $\varphi(x)$ — заданная функция, момент времени T фиксирован.

По задаче 1

- 1) получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения (см. [1, 2]);
- 2) получены достаточные условия существования решения (см. [1, 2]) и неразрешимости задачи (см. [1]);
- 3) проанализированы приближенные методы решения задачи, доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости приближений относительно начальных данных (см. [1, 2]). Проанализирована также связь между задачами 1 и 2.

Задача 2 решена на основе принципа максимума и методом динамического программирования. Выполнен сравнительный анализ этих методов. Проанализированы методы приближенного решения.

Проблемы наблюдаемости рассматриваются для систем, описываемых совокупностью уравнений с обыкновенными и частными производными (см. [4]). Одна из таких систем описывается краевой задачей

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), & u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(t), \\ \alpha_1 u_x(t, 0) - \beta_1 u(t, 0) = z_1(t), & \alpha_2 u_x(t, \ell) + \beta_2 u(t, \ell) = z_2(t), \\ \ddot{z}_1(t) + \lambda_1^2 z_1(t) = b_1 u_x(t, 0), & z_1(0) = z_1^0, \quad \dot{z}_1(0) = z_1^1, \\ \ddot{z}_2(t) + \lambda_2^2 z_2(t) = b_2 u_x(t, \ell), & z_2(0) = z_2^0, \quad \dot{z}_2(0) = z_2^1. \end{cases}$$

Задача 3 (задача граничной наблюдаемости). Найти период времени T и начальное состояние системы $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$ по результатам граничного наблюдения $u(t, 0) = w_1(t)$, $u(t, \ell) = w_2(t)$ в течение периода времени T .

Получено в явном аналитическом виде решение задачи 3. Доказано, что найденный период времени $T = \ell/a$ нельзя уменьшить. Найдены условия, при которых задача не имеет решения (см. [3, 4]).

Задачи управляемости рассматривались для колебательных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами (см. [4]). Например, для системы, описываемой краевой задачей (см. [4, 5])

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), & u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \\ u(t, 0) = \nu(t), & u(t, \ell) = y(t), \\ \ddot{y}(t) + (ak)^2 y(t) = bu_x(t, \ell), & y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \end{cases}$$

Задача 4 (задача граничной управляемости). Найти период времени T и функцию $\nu(t)$ такие, что решение краевой задачи $u(t, x)$ с начальными значениями $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$ в момент времени T принимает нулевые финальные значения $u(T, x) = 0$, $u_t(T, x) = 0$.

Решение задачи управляемости получено в явном аналитическом виде. Рассмотрена связь с конечномерной аппроксимацией задачи управляемости приведенной колебательной системы.

Список литературы

1. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
2. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управлении процессом теплопроводности с квадратичным функционалом качества // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57, № 12. С. 126–137.
3. Знаменская Л.Н. Наблюдаемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 6. С. 944–958.
4. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Изд-во “Лань”, 2017.
5. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46, № 6. С. 1002–1018.

БЫСТРОЕ АВТОМАТИЧЕСКОЕ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ
(FAST AUTOMATIC DIFFERENTIATION AND APPLICATIONS)*

Ю. Г. Евтушенко (Yu. G. Evtushenko), А. Ф. Албу (A. F. Albu),
В. И. Зубов (V. I. Zubov)

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
yuri-evtushenko@yandex.ru, alla.albu@mail.ru, vladimir.zubov@mail.ru

При численном решении задач управления сложными динамическими системами задача оптимального управления обычно сводится к задаче нелинейного программирования. В ВЦ РАН на протяжении почти 50 лет проводятся работы по созданию и совершенствованию численных методов решения такого рода задач. Часто они решаются градиентными методами минимизации целевого функционала. А для этого необходимо уметь точно вычислять градиент целевой функции.

Методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД) — это общий подход к дифференцированию сложных функций, возникающих в многошаговых процессах. По своей сути эта методология представляет собой метод множителей Лагранжа, который применяется к дискретному варианту задачи оптимального управления. Рассматриваемая задача оптимального управления в этом случае формулируется в конечномерном пространстве. Градиент функционала вычисляется с помощью сопряженной задачи и определяется сразу в дискретном виде. БАД-методология позволяет выбрать такую аппроксимацию сопряженной задачи, которая согласована с дискретизацией прямой задачи и с аппроксимацией целевого функционала. Она предлагает канонические формулы, позволяющие точно вычислять градиент целевой функции дискретной задачи оптимального управления. Использование БАД-методологии позволяет получить точное значение градиента дискретного целевого функционала при наличии дискретных связей за время, не превосходящее утроенного времени вычисления самой функции.

БАД-методология — необходимый компонент при решении задач, в которых вычисление производных “вручную” слишком сложно, а традиционные численные методы определения градиента работают с неприемлемой точностью. Этот подход оказался эффективным и при вычислении градиента достаточно сложной функции многих переменных. Из общих формул дифференцирования несложно получить формулы БАД для определения градиента функций многих переменных. При этом вычисление значения функции представляется как многошаговый процесс, в котором введены новые фазовые переменные. Эти фазовые переменные являются функциями независимых переменных, по которым ищутся производные заданной функции.

БАД-методология используется при решении многих задач, позволяя найти производные сложных функций с высокой точностью. Разработанные в ВЦ РАН

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-07-00493а, 17-07-00510а).

методы, использующие БАД-методологию, эффективно использовались при решении многих теоретически сложных прикладных задач, имеющих большое значение для народного хозяйства нашей страны. Например, они были применены при решении актуальных задач из области материаловедения, при решении задачи моделирования и управления процессом сварки материалов, задачи управления процессом кристаллизации металла в литейном деле.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ТЕЛА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ (STABILIZATION OF A BODY IN THE ELECTROMAGNETIC SUSPENSION)*

А. А. Федюков (А. А. Fedyukov)

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия*

TeleginSasha@yandex.ru

При переходе от нелинейной математической модели управляемого объекта к линейной модели систему дифференциальных уравнений линеаризуют в окрестности состояния равновесия. Тем самым накладывается некоторое ограничение на область фазового пространства. В этой области линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект. Заметим также, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничения на фазовые переменные объекта.

В работе рассматривается задача синтеза управления по выходу, обеспечивающего стабилизацию неустойчивого объекта с ограничениями на фазовые переменные. Она является сложной и актуальной в настоящее время [1, 2]. Подход к решению основан на применении метода функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств [3]. Сформулированы достаточные условия для существования регуляторов.

Уравнения движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия [4], имеют вид

$$m\ddot{y} = \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)^2} - mg, \quad \frac{C_L}{(\delta - y)}\dot{I} + \frac{C_L I}{(\delta - y)^2}\dot{y} + RI = U(t), \quad (1)$$

где m — масса вывешенного тела, y — координата вывешенного тела, g — ускорение свободного падения, C_L — конструктивный параметр, δ — величина номинального зазора между электромагнитом и вывешенным телом, I — сила тока в электромагните, R — сопротивление в цепи электромагнита, $U(t)$ — напряжение, подаваемое на электромагнит.

Состояние равновесия системы (1) определяется равенствами $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $I = I_c$, где $I_c = \sqrt{2\delta^2 mg / C_L}$. Перейдем к безразмерным величинам. Введем новое безразмерное время $t_n = \sqrt{2g/\delta} t$ и обозначения $x_1 = y/\delta$, $x_2 = \dot{y}/\sqrt{2g\delta}$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00606 и 18-41-520002).

$x_3 = I/I_c - 1$, $u = \sqrt{\delta/(4g^2 m C_L)}(U(t) - R I_c)$ и линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия. Получим

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{R\delta}{C_L} \sqrt{\frac{\delta}{2g}}.$$

Введем $y = Cx$ — измеряемый выход системы, $z_i = C_i x$, $i = 0, 1$, — выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные, где C и C_i — заданные матрицы соответствующего размера.

Требуется построить динамический регулятор вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_r \in \mathbb{R}^3$ — состояние регулятора, $x_r(0) = 0$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2), (3) со степенью устойчивости не меньше β и выполнение при заданных значениях γ_0 и γ_1 ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Теорема. Пусть начальное состояние x_0 , матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ и величины γ_i , $i = 0, 1$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} W_C^T (A^T X + X A + 2\beta X) W_C &< 0, \quad W_{B^T}^T (Y A^T + A Y + 2\beta Y) W_{B^T} < 0, \\ \begin{pmatrix} X & I_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} & Y \end{pmatrix} &> 0, \quad x_0^T X x_0 \leq 1, \quad \text{trace}(C_i Y C_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где столбцы матриц W_C и W_{B^T} образуют базисы ядер матриц C и B^T соответственно, т.е. $C W_C = 0$ и $B^T W_{B^T} = 0$.

Положим

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{3 \times 3} & 0 \end{pmatrix}, \\ C_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I_{3 \times 3} \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y & Y - X^{-1} \\ Y - X^{-1} & Y - X^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $I_{3 \times 3}$ и $0_{3 \times 3}$ — единичная и нулевая матрицы.

Тогда все траектории замкнутой системы (2), (3) с начальными условиями $x_c(0) \in \{x_c: x_c^T \bar{Y}^{-1} x_c \leq 1\}$ удовлетворяют ограничениям (4). Параметры регулятора (3) для системы при ограничениях на фазовые переменные вычисляются как решение относительно переменной Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = \bar{Y} A_0^T + A_0 \bar{Y} + 2\beta \bar{Y}$, $P = C_0 \bar{Y}$ и $Q = B_0^T$.

Пример 1. Предположим, что доступна измерению величина x_3 , пропорциональная силе тока в цепи электромагнита $y = x_3$. Численное решение проведено в пакете MATLAB при значении параметра $\alpha = 7.5$ и начальном состоянии системы $(x_1, x_2, x_3)^T = (0.05, 0, 0)^T$.

Для объекта (2) решен ряд задач. На плоскости параметров γ_0 и γ_1 получено множество точек, для которых существует динамический регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньше $\beta = 0.1$, и выполнены ограничения

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq \gamma_0, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq \gamma_1,$$

где x_1 — величина, пропорциональная смещению тела. Вне этой области система матричных неравенств (5) неразрешима. В частности, для значения $\gamma_0 = 0.07$ получено минимальное значение $\gamma_1^* = 0.1367$. Матрица параметров регулятора, которая соответствует этим значениям, имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -297.48 & -61.65 & -144.92 & 99.98 \\ -43.00 & -9.35 & 126.31 & 161.53 \\ 1.47 & -11.91 & -281.82 & -283.99 \\ 2.29 & 11.70 & 282.31 & 288.90 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В работе указано множество начальных состояний, при которых регулятор (6) стабилизирует замкнутую систему. Проведено сравнение полученного закона управления с законом управления по выходу, обеспечивающего стабилизацию объекта (2) без учета ограничений на $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Показано, что такой регулятор неприменим к решению данной задачи. Проведено сравнение поведения линеаризованной (2) и нелинейной (1) моделей объекта при найденных управлениях. Расчеты показали, что регулятор (6) стабилизирует нелинейную модель электромагнитного подвеса при заданных ограничениях на фазовые переменные.

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. №6. С. 48–57.
2. Федюков А.А. Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестн. ННГУ. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2013. №2 (1). С. 152–159.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
4. Журавлев Ю.Н. Активные электромагнитные подшипники: Теория, расчет, применение. СПб.: Политехника, 2003.

HOMOTOPY AND FIXED POINTS OF SET-VALUED MAPPINGS ON ORDERED SETS AND SOME APPLICATIONS

T. N. Fomenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

tn-fomenko@yandex.ru

The report is in part based on joint results by T. N. Fomenko and D. A. Podoprikin (2018). The concept of a *set-valued homotopy* is introduced for set-valued mappings of ordered sets, and some related problems are considered. In 1984 Walker [3] introduced a concept of a homotopy for isotone mappings of ordered sets. It follows from the paper by Stong [4] that the isotone homotopy by Walker is a particular case of a topological homotopy, for mappings of finite ordered sets. In [5], we removed the condition of the isotone property and extended the concept of homotopy. In this report, the concept of a set-valued homotopy is introduced.

Let $(X, \preceq)$ be an ordered set, $x_0 \in X$, and $F, G: X \rightrightarrows X$ be set-valued mappings. Let $\text{Fix}(F) := \{x \in X \mid x \in F(x)\}$ and $T_{(X, \preceq)}(x_0) := \{y \in X \mid y \preceq x_0\}$. Let us recall that the order $\preceq^*$ such that $x \preceq y \Leftrightarrow y \preceq^* x$ is called the dual order with respect to the order $\preceq$. We denote $T_{(X, \preceq)}^*(x) := T_{(X, \preceq^*)}(x)$.

Definition 1. A mapping $F: X \rightrightarrows X$ is called *isotone* if for any $x \in X$, any $y \in F(x)$, and any $x' \in X$, $x' \preceq x$, there is an element $y' \in F(x')$ such that $y' \preceq y$.

It should be noticed that, unlike the case of a single-valued mapping, the isotone property of a set-valued mapping $F: X \rightrightarrows X$ with respect to the order $\preceq$ is not equivalent to its isotone property with respect to the dual order $\preceq^*$.

Definition 2. Following [6, 7], we say that a mapping $F: X \rightrightarrows X$ *covers a mapping* $G: X \rightrightarrows X$ on a subset $D \subseteq X$ if, for any $x \in D$ such that there are elements $u \in F(x)$ and $v \in G(x)$ with $v \preceq u$, there exists $x' \in D$, $x' \preceq x$, such that $v \in F(x')$.

It is clear that the identical mapping $\text{Id}: X \rightarrow X$ is isotone relative to the order $\preceq$ as well as relative to the dual order $\preceq^*$. In addition, Id covers any mapping $F: X \rightrightarrows X$ relative to the order $\preceq$ as well as relative to the dual order $\preceq^*$.

We notice that a set-valued mapping $G: X \rightrightarrows X$ covers the identical mapping Id on X (relative to the order $\preceq$) if, for any $x \in X$ such that there is a value $u \in G(x)$, $x \preceq u$, there exists a point $x' \in X$, $x' \preceq x$, $x \in G(x')$.

Let $\mathbb{S}(G; \preceq)$ stand for the totality of pairs of the form (S, g) , where $S \subseteq X$ is a chain in X , $g: S \rightarrow X$ is a single-valued section of the mapping G on S , that is $g(x) \in G(x)$ for all $x \in S$, and the following conditions hold:

- (1) $g(x) \preceq x$ for all $x \in S$;
- (2) for all $x, y \in S$, $x \prec y \Rightarrow x \preceq g(y)$.

Similarly, we define $\mathbb{S}^*(G; \preceq) := \mathbb{S}(G; \preceq^*)$.

Given a point $x_0 \in X$, we denote

$$\mathbb{S}(x_0, G; \preceq) := \{(S, g) \in \mathbb{S}(G; \preceq) \mid S \subseteq T_{(X, \preceq)}(x_0)\}.$$

Definition 3. Given mappings $F, F': X \rightrightarrows X$, we say that the mapping F' *majorizes* the mapping F at a point $x \in X$ (with respect to the order $\preceq$) and write

$F \nearrow F'$ at x if, for any $v \in F(x)$, there is an element $u \in F'(x)$ such that $v \preceq u$. Similarly, we say the mapping F' *minorizes* F at $x \in X$ (relative to $\preceq$) and write $F \searrow F'$ at x if, for any $v \in F(x)$, there is an element $u \in F'(x)$ such that $u \preceq v$. We say that $F \nearrow F'$ ($F \searrow F'$) on a subset $D \subseteq X$ if $F \nearrow F'$ ($F \searrow F'$) at every point $x \in D$.

It is clear that if $F \nearrow F'$ with respect to the order $\preceq$, then $F \searrow F'$ with respect to the order $\preceq^*$.

Definition 4. Let mappings $F, F': X \rightrightarrows X$ be given. A *set-valued homotopy* connecting the mappings F and F' is a finite family of set-valued mappings of the form $\mathbb{H} = \{H_0, H_1, \dots, H_n\}$, where $H_k: X \rightrightarrows X$, $k = 0, 1, \dots, n$, $H_0 = F$, $H_n = F'$, and $H_k \nearrow H_{k+1}$ with respect to the order $\preceq$ or the order $\preceq^*$.

The following statement is valid.

Theorem 1. Given mappings $G, G': X \rightrightarrows X$ on an ordered set $(X, \preceq_X)$, let $x_0 \in \text{Fix}(G)$. Let also a set-valued homotopy $\mathbb{Q} = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ be given, joining the mappings G and G' , where $Q_0 = G$ and $Q_n = G'$. In addition, let, for any k , $1 \leq k \leq n$, the following conditions be fulfilled with respect to the order $\preceq$ (the dual order $\preceq^*$):

- (1) $Q_{k-1} \searrow Q_k$;
- (2) Q_k is isotone;
- (3) for any pair $(S, q_k) \in \mathbb{S}(x_0, Q_k, \preceq)$ ($(S, q_k) \in \mathbb{S}(x_0, Q_k, \preceq^*)$) the chain S has a lower (relative to the corresponding order) bound $w \in X$, and there is an element $v \in Q_k(w)$ such that $v \preceq w$ ($v \preceq^* w$) and v is a lower bound of the chain $q_k(S)$ (relative to the corresponding order).

Then, each mapping Q_k has a fixed point, $k = 1, \dots, n$. In particular, $\text{Fix}(G') \neq \emptyset$.

Theorem 1 is a generalization of [8, Theorem 6].

In the report, some more general statements will be presented on the preservation of fixed points under a set-valued homotopy of a set-valued mapping of ordered sets. In addition, similar questions will be discussed with respect to the existence and existence preservation of coincidence points of a pair of set-valued mappings of ordered sets.

Now, let us consider an antagonistic (zero-sum two-person) game, where a game function $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ is given on the product $X \times Y$ of the admissible strategy spaces X and Y . In this case, player I seeks to maximize a value of the function $f(x, y)$, and player II seeks to minimize it. In this case, the play behavior (play rules) of the players I and II may be described with the following set-valued mappings (if the involved maxima and minima exist) (see, e.g. [1]):

$$B(x) = \left\{ y \mid y \in Y, f(x, y) = \min_{\tilde{y} \in Y} f(x, \tilde{y}) \right\},$$

$$A(y) = \left\{ x \mid x \in X, f(x, y) = \max_{\tilde{x} \in X} f(\tilde{x}, y) \right\}.$$

Definition 5. In the described situation a pair of strategies (x_0, y_0) is called an *equilibrium strategy* if the following conditions hold:

$$x_0 \in A(y_0), \quad y_0 \in B(x_0).$$

It follows from the definition that a point $(x_0, y_0) \in X \times Y$ is equilibrium if and only if the point (x_0, y_0) is a fixed point of the set-valued mapping $\mathbb{P} = A \times B: X \times Y \rightrightarrows X \times Y$, where $\mathbb{P}(x, y) = (A \times B)(x, y) := A(y) \times B(x)$.

We notice that the described notion of an equilibrium strategy in an antagonistic game is a particular case of the more general well-known concept of *Nash equilibrium* in game theory (see, e.g., [2]).

In the report, some statements will be presented on the existence of equilibrium strategies as well as on the preservation of the property of the existing equilibrium strategies under some discrete transformations of the game function.

References

1. *Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkhis A.D., Obukhovskiy V.V.* Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsialnykh vklyucheniye. Moscow: URSS, 2005 (in Russian).
2. *Vasin A.A., Morozov V.V.* Teoriya igr i modeli matematicheskoy ekonomiki. Moscow: MGU, 2005 (in Russian).
3. *Walker J.W.* Isotone relations and the fixed point property for posets // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 48, No. 2–3. P. 275–288.
4. *Stong R.E.* Finite topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123, No. 2. P. 325–340.
5. *Podoprikin D.A., Fomenko T.N.* Preservation of the existence of fixed and coincidence points under homotopy of mappings of ordered sets // Dokl. Math. 2017. V. 96, No. 3. P. 591–593.
6. *Fomenko T.N., Podoprikin D.A.* Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered set // Topol. Appl. 2017. V. 221. P. 275–285.
7. *Fomenko T.N., Podoprikin D.A.* On coincidences of families of mappings on ordered sets // Dokl. Math. 2016. V. 94, No. 3. P. 620–622.
8. *Podoprikin D.A.* Fixed points of mappings on ordered sets // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 6, No. 38. P. 1069–1074.

PATH PLANNING OF A CONTROLLED OBJECT IN A PROBLEM OF INCREASING THE STEALTH WITH CONSTRAINTS ON LENGTH AND CURVATURE OF TRAJECTORY*

A. A. Galyaev, P. V. Lysenko

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

galyaev@ipu.ru, PashLys@yandex.ru

An optimal path planning problem of a controlled object with constraints on the length and curvature of the trajectory with the objective of minimizing the integral level of useful signal received by an observer is solved. The solution is modelled and illustrated with some examples.

*This research is partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-01076-a).

Introduction. The history of path planning problems of controlled moving objects with the objective of optimizing the mission's criterion (optimization criterion) traces back to 1887, when A. A. Markov was the first to examine the so-called Dubins car problem, where one needs to find the time optimal trajectory of a vehicle on a plane under a constraint on the curvature radius of the trajectory. The known solution, shown in [1] for example, is based on the Pontryagin maximum principle.

Classical optimization criteria are energy consumption, time or miss, as in [2]. Recently, non-traditional criteria have attracted interest, such as increasing the stealth during the passage through a threat environment with regard to a potential threat map, as in [3–5]. When solving the path planning problem where a controlled object moves from a fixed start point to a fixed end point, the integral level of useful signal, which is a mission success criterion, is minimized. In these problems the control vector is the velocity vector of the moving object.

The specific features of the considered problems of increasing the stealth is that the instant level of signal I received by an observer or sensor depends on the current distance between the sensor and the evading object D , as well as on the absolute instant velocity of the object v for some types of physical fields. The parameter I is called the risk of detection. This dependence can be described with the power model

$$I \sim \frac{v^m}{D^k}.$$

In this work the path planning problem with constraints on the length and curvature of the trajectory with the objective of minimizing the risk of detection acquired along the trajectory is considered. The solution is illustrated with examples of optimal paths of a controlled object.

Maximum principle in the problem of path planning of controlled object.

The optimal control problem is as follows. Find a trajectory $\mathbf{r}(s)$, $\alpha(s)$ and a control $k(s)$ such that

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))^T \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_A, \quad (2)$$

$$\Phi(\mathbf{r}(S)) = \Phi(\mathbf{r}_B) = 0, \quad (3)$$

which minimizes the integral functional

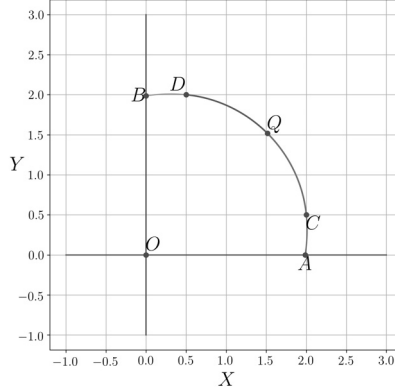
$$R(\mathbf{r}(\cdot), \alpha(\cdot), k(\cdot)) = \int_0^S f(\mathbf{r}(s)) ds \rightarrow \min_{\mathbf{r}(\cdot), \alpha(\cdot), k(\cdot)} \quad (4)$$

under the trajectory-length constraint

$$S = \int_0^S ds \quad (5)$$

and curvature constraint

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s), \quad |k(s)| \leq K. \quad (6)$$



The trajectory of a moving object with $S = 3.5$.

Here $\mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) \in \mathbb{R}^1$, and $\mathbf{r}(s) \in \mathcal{C}^1(0, S)$. The curvature $k(s) \in \mathcal{L}^1(0, S)$ is chosen as an admissible control.

Here $f(\mathbf{r}(s))$ is a function of the risk level. The criterion is a curvilinear integral along the whole trajectory (ds is the length element of the trajectory). As the terminal conditions, one can choose, for example, the following: $\mathbf{r}(S) = \mathbf{r}_B$, the radius vector of a given terminal point, or $\Phi(\mathbf{r}_B) = 0$, the equation of the boundary of a given terminal domain.

This problem can be solved with the maximum principle.

Theorem 1. *Let conditions (1)–(6) be met and let $\mathbf{r}^0(s), \alpha^0(s), k^0(s)$ be a problem solution. Then one can find a $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$, a constant $\lambda \geq 0$, not equal to zero simultaneously, and a constant λ_1 such that*

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{1,2}(s) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, & \dot{\psi}_3(s) &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \\ H(\mathbf{r}^0, \alpha^0, k^0, \Psi) &= \lambda_1 & \text{for almost all } s \in [0, S], \\ H(\mathbf{r}^0, \alpha^0, k, \Psi) &\leq \lambda_1 & \forall k(s) \in [-K, K], \forall s \in [0, S], \end{aligned}$$

where

$$H(\mathbf{r}, \alpha, k, \Psi) = (\Psi(s), (\mathbf{n}(s), k(s))^T) - \lambda - f(\mathbf{r}(s)),$$

and the vector $\Psi(S)$ is transversal to the surface $\Phi(\mathbf{r}(S)) = 0$.

To solve this optimal control problem, one needs to solve the supplementary problem of finding the optimal trajectory of evading with constraint on the trajectory length, which was solved previously in [6].

To validate the solution, a computer simulation with Python has been carried out in the case of a controlled object moving on a plane from point A to point B when $f(\mathbf{r}) = 1/(\mathbf{r}, \mathbf{r})$. This example is shown in the figure.

The optimal trajectory, as well as the one in the time optimal Dubins car problem, consists of intervals of turning with maximal curvature (AC and DB) and a special interval (CD), where the trajectory length constraint is active. Optimal parameters

for this interval are the result of solution of algebraic integral equations that include normal Legendre polynomials of the first and second kind, which is based on the solution of an optimal control problem from [6].

References

1. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Control theory from the geometric viewpoint. Springer, 2004.
2. *Andreev K.V., Rubinovich E.Y.* Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 1. P. 106–129.
3. *Dogan A., Zengin U.* Unmanned aerial vehicle dynamic-target pursuit by using probabilistic threat exposure map // J. Guid. Control Dyn. 2006. V. 29. No. 4. P. 723–732.
4. *Galyaev A.A., Maslov E.P.* Optimization of a mobile object evasion laws from detection // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2010. V. 49, No. 4. P. 560–569.
5. *Galyaev A.A., Maslov E.P.* Optimization of the law of moving object evasion from detection under constraints // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 6. P. 992–1004.
6. *Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Evasion of moving object from single detector at given velocity (to appear).

HYPONELLIPTIC DIFFUSION, CHU DUALITY AND HUMAN VISION

J.-P. Gauthier

In neuroscience, there is a model of the primary visual cortex of mammals V1 as a subriemannian structure over the group $SE(2)$ of motions of the plane. The Hypoelliptic diffusion associated with this metric is used for the purpose of image completion or image reconstruction.

In my talk, I shall present the theory, together with a semi-discrete improvement of the model more in accordance with the discrete structure of V1, over the group $SE(2, N)$ of discrete rotations and all translations. The group under consideration being maximally almost periodic, and therefore subject to Chu duality, there is a much simpler harmonic analysis on it. It results in nice and efficient algorithms both for image completion and pattern recognition.

A preliminary version of the full work may be found in [1].

References

1. *Prandi D., Gauthier J.-P.* A semidiscrete version of the Citti–Petitot–Sarti model as a plausible model for anthropomorphic image reconstruction and pattern recognition, arXiv: 1704.03069 [cs.CV].

CONTROL OF QUANTUM PROCESSING
BASED ON THE THREE-LEVEL QUANTUM SYSTEM*

G. K. Giorgadze

Institute of Cybernetics, Tbilisi, Georgia
gia.giorgadze@tsu.ge

In computation theory it is known that the three-state element is most efficient for classical computers, but its realization remained a problem for many years. Progress was achieved during the 1990s. The optimal number of states in the physical system for the expression mod p , where p is a prime, is 3. Indeed, if we denote by N_p this number, it is known that $N_p = f(p)N_2$, where $f(p) = p/(2\log_2 p)$. The function N_p/N_2 has the minimum when $p = 3$ (see [1]).

In the quantum world the *many-level systems* are ordinary ones. We will consider one possible version of a quantum processor based on a many-level quantum system and investigate its controllability from the geometric control theory point of view (see [2]). For our purposes, we construct a special Hamiltonian case for a hydrogen-like atom moving in and interacting with a quantized electromagnetic field. The general form for such a Hamiltonian includes the center-of-mass motion and all the modes of the interacting field (see [3]). We consider the following assumptions about atom-photon interactions:

- (i) all the atom-photon interactions are the electric dipole;
- (ii) only three atomic levels are included in the interaction;
- (iii) two quantized resonator modes interact with this three-level system;
- (iv) each couple of levels interacts with only one of these modes;
- (v) only two couples of levels among three possible ones interact directly (see [4]).

The levels of the third couple interact only by means of an intermediate level, and we permit but do not consider the center-of-mass motion and large detuning from resonances, which cause the state entanglement. In our consideration the general form of the Hamiltonian in the electric dipole approximation is $\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} = -\hat{\phi}\mathbf{E}(R, t) = -e\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$, and we will transform it for a three-level atom interacting with two modes of quantized fields of radiation.

Hamiltonian for internal degrees of freedom of non-interacting atom.

We consider internal degrees of freedom of a three-level atom. Due to assumptions (i)–(v) only two couples of energy states are involved in the interaction. In all cases, the intermediate state with energy $E_i \equiv \hbar\omega_i$ is labeled by the state vector $|i\rangle$. From other states, the state with higher energy is called excited, denoted $E_e \equiv \hbar\omega_e$ and labeled by the state vector $|e\rangle$. The remaining energy level is called the ground level, denoted $E_g \equiv \hbar\omega_g$ and labeled by the state vector $|g\rangle$. All of them are eigenstates of the Hamiltonian $\hat{H}_{\text{atom}}$ of a non-interacting three-level atom:

$$\hat{H}_{\text{atom}}|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle, \quad \hat{H}_{\text{atom}}|i\rangle = \hbar\omega_i|i\rangle, \quad \hat{H}_{\text{atom}}|g\rangle = \hbar\omega_g|g\rangle. \quad (1)$$

*The work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (grant N FS 17-96).

Using the completeness relation $|e\rangle\langle e| + |i\rangle\langle i| + |g\rangle\langle g| = 1$ and the orthonormality condition $\langle j||j'\rangle = \delta_{ij'}$ for the Hamiltonian of a three-level atom, one can easily obtain

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{atom}} &= (|e\rangle\langle e| + |i\rangle\langle i| + |g\rangle\langle g|)\hat{H}_{\text{atom}}(|e\rangle\langle e| + |i\rangle\langle i| + |g\rangle\langle g|) \\ &= E_e |e\rangle\langle e| + E_i |i\rangle\langle i| + E_g |g\rangle\langle g|.\end{aligned}\quad (2)$$

The electric field operator. Consider two modes of the radiation field, assume that the radiation field is formed in a three-mirror standing wave resonator and decompose the electric field strength in the resonator as follows:

$$\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{R}}, t) = \mathcal{F}_{0a} \mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}}) i(\hat{a} - \hat{a}^+) + \mathcal{F}_{0b} \mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}}) i(\hat{b} - \hat{b}^+), \quad (3)$$

where $\mathcal{F}_{0j} \equiv \sqrt{\hbar\Omega_j/(2\epsilon_0 V_j)}$, $j = a, b$.

Here, $\mathbf{u}_j(\hat{\mathbf{R}})$ represents the mode functions of the resonator at the position $\mathbf{R}$ of the atom, and Ω_a and Ω_b are oscillation frequencies of the field. In a classical treatment, $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$ and $\hat{a}$, $\hat{b}$ are time dependent amplitudes. In our present treatment they are operators which obey the commutation relations

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1, \quad \hat{b}\hat{b}^+ - \hat{b}^+\hat{b} = 1.$$

With their help, the quantized field Hamiltonian can be written in the form

$$\hat{H}_{\text{field}} = \hbar\Omega_a \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar\Omega_b \hat{b}^+ \hat{b}. \quad (4)$$

Here, we neglect the zero-point energy.

The interaction Hamiltonian. Consider the Hamiltonian of electric dipole atom-photon interactions

$$\hat{H}_{\mathbf{rE}} = -e\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{R}}, t).$$

Substituting into this expression the expressions of the dipole moment operator $e\hat{\mathbf{r}}$ and the electric field operator $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{R}}, t)$, we obtain

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathbf{rE}} &= -\mathcal{F}_{0a} i [\wp_{ig} \mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}}) \hat{\sigma}_{ig} + \wp_{ei} \mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}}) \hat{\sigma}_{gi}] (\hat{a} - \hat{a}^+) \\ &\quad - \mathcal{F}_{0b} i [\wp_{ei} \mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}}) \hat{\sigma}_{ei} + \wp_{ie} \mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}}) \hat{\sigma}_{ie}] (\hat{b} - \hat{b}^+).\end{aligned}\quad (5)$$

This expression contains the scalar product $\wp \mathbf{u}$ of the dipole moment and the mode function $\mathbf{u}$. As this product is a complex quantity, we represent it in the following manner:

$$\wp \mathbf{u} = |\wp \mathbf{u}| e^{i\varphi}, \quad (6)$$

where φ is the phase. Substituting (6) into (5), we can write the Hamiltonian of electric dipole atom-photon interactions in the form

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathbf{rE}} &= -\hbar\mathcal{F}_{0a} i \left[\frac{|\wp_{ig} \mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar} \hat{\sigma}_{ig} e^{i\varphi_a} + \frac{|\wp_{ei} \mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar} \hat{\sigma}_{gi} e^{-i\varphi_a} \right] (\hat{a} - \hat{a}^+) \\ &\quad - \hbar\mathcal{F}_{0b} i \left[\frac{|\wp_{ei} \mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar} \hat{\sigma}_{ei} e^{i\varphi_b} + \frac{|\wp_{ie} \mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar} \hat{\sigma}_{ie} e^{-i\varphi_b} \right] (\hat{b} - \hat{b}^+).\end{aligned}\quad (7)$$

Introducing the Rabi frequencies

$$g_a(\mathbf{R}) = \frac{|\wp_{ig}\mathbf{u}_a(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar}\mathcal{F}_{0a}, \quad g_b(\mathbf{R}) = \frac{|\wp_{ei}\mathbf{u}_b(\hat{\mathbf{R}})|}{\hbar}\mathcal{F}_{0b},$$

one can represent the interaction Hamiltonian (7) as

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\mathbf{rE}} = & \hbar g_a(\hat{\mathbf{R}})(-i)(\hat{\sigma}_{ig}e^{i\varphi_a} + \hat{\sigma}_{gi}e^{-i\varphi_a})(\hat{a} - \hat{a}^+) \\ & + \hbar g_b(\hat{\mathbf{R}})(-i)(\hat{\sigma}_{ei}e^{i\varphi_b} + \hat{\sigma}_{ie}e^{-i\varphi_b})(\hat{b} - \hat{b}^+). \end{aligned} \quad (8)$$

Introducing the difference of phases $\delta\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$ in the Hamiltonian (8), we obtain

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\mathbf{rE}} = & \hbar g_a(\hat{\mathbf{R}})(-i)(\hat{\sigma}_{ig}e^{i\varphi_a} + \hat{\sigma}_{gi}e^{-i\varphi_a})(\hat{a} - \hat{a}^+) \\ & + \hbar g_b(\hat{\mathbf{R}})(-i)(\hat{\sigma}_{ei}e^{i(\delta\varphi - \varphi_a)} + \hat{\sigma}_{ie}e^{-i(\delta\varphi - \varphi_a)})(\hat{b} - \hat{b}^+). \end{aligned} \quad (9)$$

In quantum mechanics, only the difference in phases is important, so in (9) we can put $\varphi_a = \pi/2$ and finally obtain

$$\hat{H}_{\mathbf{rE}} = \hbar g_a(\hat{\mathbf{R}})(\hat{\sigma}_{ig} - \hat{\sigma}_{gi})(\hat{a} - \hat{a}^+) + \hbar g_b(\hat{\mathbf{R}})(\hat{\sigma}_{ei}e^{-i\delta\varphi} - \hat{\sigma}_{ie}e^{i\delta\varphi})(\hat{b} - \hat{b}^+). \quad (10)$$

Expression (10) is the final form of the *exact Hamiltonian responsible for all atom-photon interactions between the three-level atom and two modes of the electromagnetic field*.

This Hamiltonian will be used to study the controllability of the considered quantum system.

References

1. *Giorgadze G.K.* Geometry of quantum computation. New York: Nova Publisher, 2013.
2. *Agrachev A.A., Sachkov Y.L.* Control theory from the geometric viewpoint. Berlin: Springer, 2004.
3. *Schleich W.P.* Quantum optics in phase space. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
4. *Giorgadze G., Melikishvili Z.* Atom-photon interactions with respect to quantum computation: A three-level atom in a two-mode field // J. Math. Sci. 2008. V. 153, No. 2. P. 167–185.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МОДЕЛЯХ НЕЙРОННЫХ СИСТЕМ
(SELF-EXCITED RELAXATION OSCILLATIONS
IN NEUROSYSYSTEM MODELS)*

С. Д. Глызин (S. D. Glyzin), А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov),
Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Отдел прикладных сетевых исследований НЦЧ РАН, Черноголовка, Россия

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

Ярославль, Россия

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

glyzin.s@gmail.com, kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

Моделирование динамики изменения электрического потенциала нервных клеток связано в первую очередь с работами А.Л. Ходжкина и А.Ф. Хаксли. Этим авторам в статье [1] впервые удалось представить феноменологическую модель, полученную на основе соотношений балансного типа, так, что ее динамика при надлежащем выборе параметров обладает основными качественными свойствами, характерными для наблюдаемых в эксперименте нервных клеток. Во многих случаях данная модель имеет вполне удовлетворительное не только качественное, но и количественное соответствие экспериментальным данным.

Модель Ходжкина–Хаксли довольно сложна, и потому с момента ее появления предпринимались многочисленные попытки ее упрощения с сохранением основных эффектов, характерных для динамики импульсных нейронов. В суммирующих статьях [2, 3] приведен ряд требований, которым должна удовлетворять такая модель. Среди этих требований наиболее важным является существование у нее устойчивого периодического режима импульсного типа. Другим существенным требованием является наличие у модели (при некоторых значениях параметров) bursting-эффекта, который подразумевает импульсный режим с несколькими всплесками на периоде. Еще одним требованием, часто предъявляемым к моделям ассоциаций импульсных нейронов, является возможность сосуществования у них нескольких устойчивых режимов.

Следуя методике из [4] и применяя рассуждения, аналогичные используемым Ходжкиным и Хаксли в [1], в качестве математической модели отдельного нейрона возьмем дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \quad (1)$$

Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (1) функций $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

предполагаем, что они обладают свойствами

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) + a_0, \quad u f'(u), \quad u^2 f''(u) = O(1/u), \\ g(u) - b_0, \quad u g'(u), \quad u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_0, b_0 — положительные константы.

Основной результат, полученный авторами в работе [5] для уравнения (1), состоит в следующем.

Теорема. *По любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (1), (2) параметры h, a_0, b_0 , что при всех достаточно больших λ уравнение (1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала.*

Иными словами, при указанном выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется bursting-эффект. В серии работ авторов (см. [6]) на основе модели (1) рассмотрены ассоциации импульсных нейронов с различными связями между ними. Анализировались задачи с диффузионной и синаптической связями между осцилляторами. В первом случае для системы

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))]u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $u_0 = u_1, u_{m+1} = u_m, d = \text{const} > 0, \lambda \gg 1$, в статье [7] было установлено, что при увеличении m и при согласованном стремлении $d \rightarrow 0, \lambda \rightarrow +\infty$ в ней происходит неограниченное накопление устойчивых bursting-циклов. Термин bursting в данном случае означает, что компоненты $u_j, j = 1, \dots, m$, каждого из этих циклов демонстрируют то же самое асимптотическое поведение, что и функция $u_*(t, \lambda)$, а именно допускают на периоде ровно n асимптотически высоких всплесков. Что же касается натурального n , то при соответствующем выборе параметров оно может быть любым.

В случае синаптической связи изучается следующая система:

$$\dot{u}_j = [\lambda f(u_j(t-1)) + b h(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)]u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (4)$$

в которой $b = \text{const} > 0, u_* = \exp(c\lambda), c = \text{const} \in \mathbb{R}$, функция $f(u)$ та же, что и в (1), а функция $h(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что

$$\begin{aligned} h(u) > 0 \quad \forall u > 0, \quad h(0) = 0, \\ h(u) - 1, \quad u h'(u), \quad u^2 h''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Для системы (4) удается корректно определить предельный объект при $\lambda \rightarrow +\infty$, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием. Наличие предельного объекта существенно облегчает проблему отыскания аттракторов системы (4) и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем. Опираясь на эти результаты, в работе [8] мы показали, что при увеличении m и

при подходящем выборе остальных параметров в системе (4) может сосуществовать любое конечное число устойчивых периодических движений типа бегущих волн. Точнее говоря, в [8] речь шла о сосуществовании устойчивых периодических решений, допускающих представление

$$u_j = u(t + (j - 1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\Delta > 0$, а функция $u(t, \varepsilon)$ — периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{u} = [\lambda f(u(t - 1)) + b h(u(t - \Delta)) \ln(u_*/u)] u$$

периода $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Перечисленные свойства уравнения (1) и систем (3), (4) позволяют считать их вполне адекватными феноменологическими моделями соответствующих нейродинамических систем.

Список литературы

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. V. 117. P. 500–544.
2. *Izhikevich E.* Neural excitability, spiking and bursting // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2000. V. 10, No. 6. P. 1171–1266.
3. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. V. 78. P. 1213–1265.
4. *Каценко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Эдиториал УРСС, 2009.
5. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // *Мат. заметки.* 2013. Т. 93, № 5. С. 682–699.
6. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН.* 2015. Т. 70, № 3. С. 3–76.
7. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Дискретные автоволны в нейронных системах // *ЖВМиМФ.* 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858.
8. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов // *Диф. уравнения.* 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.

О НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ В ЗАДАЧЕ
БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ
(ON IRREGULAR TRAJECTORIES IN THE TIME OPTIMAL
CONTROL PROBLEM WITH STATE CONSTRAINTS)*

М. Н. Гончарова (M. N. Goncharova)

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Гродно, Беларусь*

m.gonchar@grsu.by

Необходимость учитывать ограничения (ресурсные, технологические и пр.) при исследовании различных систем в экономике, биологии, физике, технике и др. часто приводит к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями. В связи с этим исследование задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями является актуальным. Одной из основных постановок задач оптимального управления является задача быстрогодействия. Задача быстрогодействия представляется достаточно простой. Тем не менее при ее исследовании просматриваются все сложности теории оптимального управления. Кроме этого, исследование задач быстрогодействия с фазовыми ограничениями является важным для решения других задач оптимального управления, для развития системы необходимых и достаточных условий оптимальности, а также для построения численных методов решения задач оптимизации.

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия из некоторой точки в начале координат O с фазовым ограничением, в которой поведение объекта описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

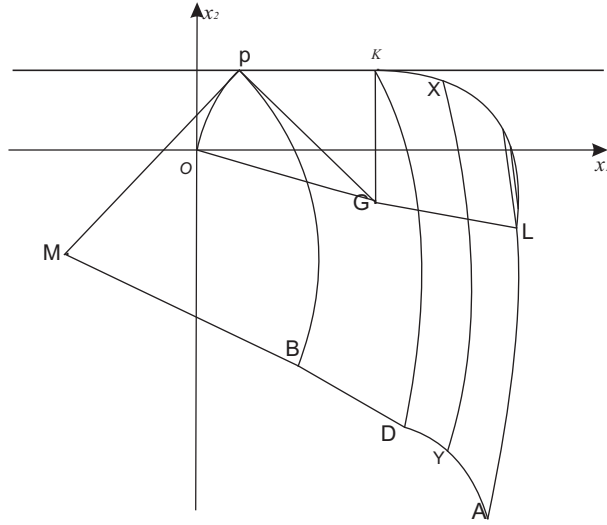
где x есть n -вектор фазовых координат объекта, u есть r -вектор переменных управления, A , B — матрицы соответствующих размерностей. Допустимым на некотором отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ считаем управление u , являющееся измеримой на отрезке I функцией аргумента t , принимающей для каждого $t \in I$ значение, удовлетворяющее ограничению $u \in U$, где U — заданное компактное множество. Фазовое ограничение $x(t) \in X$ для всех $t \in I$ определим посредством компактного множества X .

В работе [1] сформулирована система необходимых условий оптимальности для широкого класса задач оптимального управления. Здесь для траекторий, лежащих на границе фазового ограничения, выдвигается требование регулярности [1, с. 294]. В работе [2] доказаны достаточные условия оптимальности для линейной задачи быстрогодействия с фазовыми ограничениями, при формулировке которых требование регулярности траекторий не выдвигается.

Рассмотрим задачу (1), в которой положим $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 гг. (шифр задания “Конвергенция А42-16”).



Фазовая плоскость

$$U = \{u = (u_1, u_2) \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}, \quad (3)$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \leq l, l > 0\}. \quad (4)$$

Отметим, что параметр l должен принимать достаточно малые значения. Для определенности остальные параметры задачи ограничим условиями $b > 0$, $d_1 d_4 - d_2 d_3 \neq 0$, $d_1 < 0$, $d_2 < 0$, $d_3 < 0$, $d_4 > 0$, $d_1 - d_2 < 0$.

В плоскости фазовых переменных Ox_1x_2 выполним следующие построения (рисунок). Обозначим через $M = (x_1^M, x_2^M)$, $K = (x_1^K, x_2^K)$ и $G = (x_1^G, x_2^G)$ точки с координатами $x_1^M = (-d_3 - d_4)/b$, $x_2^M = (d_1 + d_2)/b$, $x_1^K = (-d_3 + d_4)/b$, $x_2^K = l$ и $x_1^G = (-d_3 + d_4)/b$, $x_2^G = (d_1 - d_2)/b$. Отметим, что точки M и G являются положениями равновесия задачи (1)–(3) с управлениями $u = (1, 1)$ и $u = (1, -1)$ соответственно. Через точку O проведем дугу OP , являющуюся решением системы (1)–(3) с управлением $u = (1, -1)$, причем через P обозначим точку пересечения этой дуги с линией, определяемой уравнением $x_2 = l$ и являющейся границей фазового ограничения. Через точку P проведем дугу PB , являющуюся решением системы (1)–(3) с управлением $u = (1, 1)$ и стягивающую в положении равновесия M этой системы угол $\alpha = \arccos((d_1 d_2 - d_3 d_4)/(\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \sqrt{d_3^2 + d_4^2}))$. Через точку K проведем дугу KL , являющуюся решением системы (1)–(3) с управлением $u = (1, -1)$ и стягивающую в положении равновесия G этой системы угол $\pi - \alpha$. Через каждую точку X дуги KL проведем дугу XY , являющуюся решением системы (1)–(3) с управлением $u = (1, 1)$ и стягивающую в положении равновесия M этой системы угол α . Совокупность точек Y образует дугу, которую мы обозначим через DA . Обозначим через $P\tau$ подобное преобразование, осуществляющее поворот вокруг точки M по часовой стрелке на угол α . Заметим, что дуга DA получается из дуги KL посредством преобразования $P\tau$, а отрезок PK при этом преобразовании отобразится в отрезок BD [3, с. 195]. Обозначим через M_{01} открытое множество, ограниченное линиями PB , BD , KD , PK , и через M_{02} замкнутое множество, ограниченное линиями KD , DA , LD , KL .

Задача вида (1)–(4) для случая, когда начальная точка принадлежит множеству M_{01} , исследована в работе [4]. В этом случае оптимальная траектория имеет участок движения по границе фазового ограничения и является регулярной.

Исследование задачи вида (1)–(4) для случая, когда начальная точка выбирается из множества M_{02} , приводит к построению оптимальных траекторий, которые имеют участок движения по границе и не являются регулярными. В этом случае для доказательства оптимальности строится сопряженная функция, являющаяся суммой абсолютно непрерывной функции и функции скачка. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Существуют задачи быстрогодействия с фазовыми ограничениями, в которых оптимальными являются нерегулярные траектории.*

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
2. Гончарова М.Н. Достаточные условия оптимальности в задаче быстрогодействия // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 53–61.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966.
4. Гончарова М.Н. Построение оптимальных по быстрдействию регулярных траекторий с линейным фазовым ограничением для одного типа систем второго порядка // Вестн. Гродн. гос. ун-та. Сер. 2: Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2017. № 2. С. 78–87.

THREE TYPES OF DYNAMICS

S. V. Gonchenko

N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

`sergey.gonchenko@mail.ru`

We observe some recent results related to the new type of dynamical chaos, the so-called “mixed dynamics,” which can be considered as an intermediate link between the “strange attractor” and “conservative chaos.” We propose a mathematical concept for these three forms of dynamics and consider several examples. The talk is based on the results of our paper [1] with D. Turaev.

References

1. Gonchenko S.V., Turaev D.V. On three types of dynamics and the notion of attractor // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 297. P. 116–137.

ФАЗОВЫЙ ПОТОК, ПОРОЖДАЕМЫЙ
НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА
(PHASE FLOW GENERATED BY THE NONLINEAR
SCHRÖDINGER EQUATION)*

А. Д. Грехнева (A. D. Grekhneva),
В. Ж. Сакбаев (V. Zh. Sakbaev)

Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Жуковский, Россия
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

alice-prohorses@yandex.ru, fumi2003@mail.ru

Устанавливается локальная однозначная разрешимость задачи Коши для модельного нелинейного уравнения Шрёдингера на отрезке с однородными условиями Дирихле на его границе:

$$i \frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t) \equiv -\Delta u(t) - |u(t)|^p u(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(+0) = u_0, \quad u_0 \in H \equiv L_2([0, \pi]). \quad (2)$$

Здесь u_0 — заданный элемент гильбертова пространства $H = L_2([0, \pi])$, u — искомое отображение промежутка $[0, T)$ при некотором $T \in (0, +\infty]$ в пространство H , удовлетворяющее уравнению (1) и условию (2) в смысле определения 1 (см. ниже), Δ — линейный оператор, заданный на подпространстве $X = \dot{W}_2^2([0, 2\pi]) = \{v \in W_2^2([0, 2\pi]): v(0) = v(\pi) = 0\}$ пространства H равенством $\Delta v(x) = v''(x)$, $x \in (0, \pi)$, и принимающий значения в пространстве H , а оператор $\mathbf{L}: \dot{W}_2^2([0, 2\pi]) \rightarrow H$ — нелинейный оператор. Оператор $-\Delta$ является неотрицательным самосопряженным оператором в пространстве H . Для каждого $l \in \mathbb{N}$ обозначим через H^l область определения самосопряженного оператора $(-\Delta)^{l/2}$, наделенную нормой графика оператора $(-\Delta)^{l/2}$.

Определение 1. Функцию u будем называть H^l -решением задачи (1), (2) ($l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), если $u \in C([0, T), H^l)$ и выполнено равенство

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u(s)|^p u(s)) ds, \quad t \in [0, T). \quad (3)$$

Исследованы эффекты глобального существования решения задачи Коши и возникновения градиентного взрыва решения за конечное время (см. [1, 2]).

Теорема 1. Пусть $p \geq 0$. Тогда для любого $\rho > 0$ существует число $T_* = T_*(\rho) > 0$ такое, что если $u_0 \in H^1$ и $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$, то задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение на отрезке $[-T_*, T_*]$.

Теорема 2. Пусть $p \geq 0$. Если функция $u(x, t)$ является H^1 -решением задачи Коши (1), (2), то $E(u(t)) = E(u_0)$ при всех $t > 0$, где функционал энергии $E: H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ определен равенством

$$E(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} |u'(x)|^2 - \frac{1}{p+2} |u(x)|^{p+2} \right) dx, \quad u \in \dot{W}_2^1([0, \pi]). \quad (4)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 5-100 повышения конкурентоспособности МФТИ среди ведущих мировых научно-образовательных центров

Теорема 3. Если $0 \leq p < 4$, то для любого $u_0 \in H^1$ задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение на полусоси $\mathbb{R}_+$, причем значения этого решения ограничены по H^1 -норме на полусоси $\mathbb{R}_+$.

Следствие 1. Если $0 \leq p < 4$, то нулевое решение задачи Коши для уравнения (1) с тривиальным начальным условием (2) является устойчивым по Ляпунову.

Согласно теореме 3 задача Коши (1), (2) определяет фазовый поток $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в пространстве начальных данных H^1 .

Следствие 2. Если $0 \leq p < 4$, то на пространстве Соболева H^1 задача Коши–Дирихле задает однопараметрическую группу преобразований $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$.

В случае $p > 4$ задача Коши (1), (2) допускает разрушение решения на конечном интервале, оценку длины которого в терминах начального условия u_0 позволяет дать функционал $J(u_0) = \text{Im} \int_{[0, \pi]} x u'_0(x) \bar{u}_0(x) dx$.

Теорема 4. Если $p > 4$, то существует $u_0 \in H^1$ такое, что $E(u_0) < 0$, $J(u_0) < 0$. Тогда существует число $T^* = T^*(G(u_0), E(u_0))$ такое, что точная верхняя грань T_1 промежутка существования H^1 -решения задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию $T_*(\|u_0\|_{H^1}) \leq T_1 \leq T^*$. Кроме того, справедливы равенства $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|u(t)\|_{L_{p+2}} = +\infty$.

Следствие 3. Пусть $p > 4$, и пусть $u_0 \in H^1$ удовлетворяет условиям $E(u_0) < 0$, $J(u_0) < 0$. Тогда решение $u(t)$, $t \in [0, T_1)$, задачи Коши (1), (2) сходится слабо в пространстве H к нулю при $t \rightarrow T_1 - 0$.

Определена процедура регуляризации задачи Коши, и исследовано предельное поведение последовательности решений регуляризованных задач. В качестве аппроксимаций нелинейного уравнения Шрёдингера (1) рассмотрим регуляризацию четвертого порядка — последовательность нелинейных уравнений Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} u = \mathbf{L}_\epsilon u \equiv -\Delta u - |u|^p u - \epsilon \Delta^2 u, \quad t > 0, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad (5)$$

где $\epsilon \in (0, 1)$ — параметр регуляризации. Регуляризованный функционал энергии имеет при каждом $\epsilon \in (0, 1)$ вид

$$E_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+2} |u|^{p+2} - \frac{\epsilon}{2} |\Delta u|^2 \right] dx, \quad u \in H^2.$$

При $\epsilon > 0$ и $l = 0, 1, 2, \dots$ будем называть H^l -решением регуляризованной задачи Коши (2), (5) на промежутке $[0, T)$ функцию $u_\epsilon \in C([0, T), H^l(\Omega))$, удовлетворяющую равенству

$$u_\epsilon(t) = e^{i(\Delta + \epsilon \Delta^2)t} u_0 + \int_0^t e^{i(\Delta + \epsilon \Delta^2)(t-s)} |u_\epsilon(s)|^p u_\epsilon(s) ds.$$

Лемма 1. Пусть $\epsilon > 0$, $p \geq 0$. Тогда для любого $u_0 \in H^2$ задача Коши (2), (5) на промежутке $[0, +\infty)$ имеет единственное H^2 -решение u_ϵ , причем $E_\epsilon(u_\epsilon(t)) = E_\epsilon(u_0)$, $t \geq 0$.

Теорема 5. Пусть $u_0 \in H^2$ и $T_* \in (0, +\infty)$ — точная верхняя грань длин промежутков, на которых существует H^1 -решение $u(t)$, $t \in [0, T_*)$, задачи Коши (1), (2). Тогда для любого $T \in (0, T_*)$ последовательность $\{u_\epsilon(t), t > 0\}$

решений задач (2), (5) сходится к решению $u(t)$, $t \in [0, T_*)$, задачи (1), (2) в том смысле, что $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\epsilon(t) - u(t)\|_H = 0$.

Если $T > T_*$, то не существует бесконечно малой последовательности $\{\epsilon_k\}$ такой, что последовательность $\{u_{\epsilon_k}\}$ сходится в пространстве $C([0, T], H)$.

В предположении $p \in [0, 4)$ исследован поток в фазовом пространстве начальных данных H^1 , который задается группой преобразований $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, согласно следствию 2. Пространство Соболева H^1 начальных данных задачи Коши (1), (2) является плотно вложенным в пространство Лебега H , а преобразования из группы $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняют H -норму каждого вектора пространства Соболева, но не сохраняют H -расстояния между векторами. Показано, что существуют его продолжения по полунепрерывности сверху до многозначного отображения в пространство H или до отображения со значениями в множестве мер на пространстве H . Кроме того, порожденная задачей Коши–Дирихле группа преобразований является гамильтоновым потоком в бесконечномерном вещественном гильбертовом пространстве, являющимся овеществлением комплексного соболевского гильбертова пространства. Исследованы аналог меры Лебега на овеществленном гильбертовом пространстве и сохранение этой меры гамильтоновым потоком [3].

Список литературы

1. Сакбаев В.Ж. Градиентный взрыв решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 171–187.
2. Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж. Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // ТМФ. 2015. Т. 185, № 2. С. 252–271.
3. Sakbaev V.Zh. Averaging of random flows of linear and nonlinear maps // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 990, No. 1. Paper. 012012.

ON THE QUESTION “CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A GROUP?” AND A HULANICKI TYPE THEOREM FOR GRAPHS

R. Grigorchuk

*Department of Mathematics, Texas A&M University, USA
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
grigorch@math.tamu.edu*

In my talk I will address the famous question of M. Kac (traced back to L. Bers and A. Weyl) “Can one hear the shape of a drum?” in the context of groups viewed as geometric objects. I will show that the answer is NO in a strong sense: there is a continuum family of 4-generated pairwise not quasi-isometric groups with the same spectrum of the discrete Laplacian. Moreover, each of these groups has an uncountable family of amenable covering groups with the same spectrum.

The arguments will be based on the construction by the speaker of groups of intermediate growth (between polynomial and exponential) and the results in the spectral theory of graphs which somehow is related to the famous Hulanicki criterion of amenability of groups in terms of weak containment of unitary representations.

The talk is based on joint results with A. Dudko.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ (TO THE SOLUTION OF THE CONTROLLABILITY PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM)*

**Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko),
А. Е. Румянцев (A. E. Rumiantcev)**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

grigor@cs.msu.su, rumiantcev@mail.ru

Для нелинейной управляемой системы, вывод уравнений движения которой содержится в работе [1], рассматривается задача терминального управления. Решение такой задачи на бесконечном интервале времени при специальных краевых условиях получено в работе [2]. В настоящей работе предложено решение задачи терминального управления по части координат фазового вектора на конечном отрезке времени. Исследование опирается на результаты работ [3–7].

Постановка задачи. Рассматривается движение вектора (x, y, z, θ, ϕ) , удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\sin \theta(t) u_1(t), & \ddot{\theta}(t) = u_2(t), \\ \ddot{y}(t) = \cos \theta(t) \sin \varphi(t) u_1(t), & \ddot{\varphi}(t) = u_3(t), \\ \ddot{z}(t) = \cos \theta(t) \cos \varphi(t) u_1(t) - g, & t \in [0, T_k]. \end{cases} \quad (1)$$

Начальное положение системы $x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), \theta(0), \varphi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\varphi}(0)$. Конечное положение $x(T_k), y(T_k), z(T_k), \dot{x}(T_k), \dot{y}(T_k), \dot{z}(T_k)$, где $T_k > 0$ — нефиксированный момент окончания. Параметры управления u_1, u_2, u_3 ; g — константа, $g = 9.8$. Ограничения на управления $u_1 \in [0, \rho_1], |u_2| \leq \rho, |u_3| \leq \rho, \rho > 0, \rho_1 > 0$.

Задача терминального управления. Для заданных начальных и конечных положений системы найти допустимые управления $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$, при которых траектория системы (1) переходит из начального положения в малую окрестность конечного за конечное время.

Построение управления, решающего задачу. Управление $u = (u_1, u_2, u_3)$ на первом этапе $t \in [0, T_*]$ выберем в форме $u_1(t) = g, u_2(t), u_3(t)$ как решение задачи управляемости для уравнений второго порядка для компонент $\theta(t), \varphi(t)$ из начального положения $\varphi(0), \dot{\varphi}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$ в положение $\varphi(T_*) = 0, \dot{\varphi}(T_*) = 0, \theta(T_*) = 0, \dot{\theta}(T_*) = 0$. Управление имеет вид

$$u_i(t) = u_i(t, T_*) = 2d_{1i}(T) + 6d_{2i}(T), \quad t, t \in [0, T_*], \quad i = 2, 3, \quad (2)$$

где $d_{12}(T) = (-3\theta(0) - 2T_*\dot{\theta}(0))/T_*^2$, $d_{22}(T) = (2\theta(0) + T_*\dot{\theta}(0))/T_*^3$, $d_{13}(T) = (-3\varphi(0) - 2T_*\dot{\varphi}(0))/T_*^2$, $d_{23}(T) = (2\varphi(0) + T_*\dot{\varphi}(0))/T_*^3$. Величина T_* выбирается из условия выполнения неравенства $|u_i(t)| \leq \rho, i = 2, 3, t \in [0, T_*]$ (см. [7]). При

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00539).

описанных управлениях траектория системы (1) в момент T_* будет находиться в позиции $x(T_*), \dot{x}(T_*), y(T_*), \dot{y}(T_*), z(T_*), \dot{z}(T_*), \varphi(T_*) = 0, \dot{\varphi}(T_*) = 0, \theta(T_*) = 0, \dot{\theta}(T_*) = 0$.

Опишем алгоритм выбора управления $u = (u_1, u_2, u_3)$ на втором этапе $t \in [T_*, T_1]$, $T_1 > T_*$, при краевых условиях $x(T_*), \dot{x}(T_*), y(T_*), \dot{y}(T_*), z(T_*), \dot{z}(T_*), \varphi(T_*) = 0, \dot{\varphi}(T_*) = 0, \theta(T_*) = 0, \dot{\theta}(T_*) = 0, x(T_1), \dot{x}(T_1), y(T_1), \dot{y}(T_1), z(T_1), \dot{z}(T_1)$, где T_1 — нефиксированный момент прихода траектории в целевую точку. В силу стационарности системы (1) для упрощения обозначений далее будем считать, что $T_* = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$. Момент окончания процесса в этом случае обозначим через T .

Рассмотрим замену переменных $u_1, \varphi(t), \theta(t)$ на переменные r_1, r_2, r_3 вида

$$u_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{r_2}{r_3 + g}, \quad \theta = \arctg \frac{-r_1 \cos \varphi}{r_3 + g}, \quad (3)$$

где функции (r_1, r_2, r_3) являются управлением вспомогательной задачи управления

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} (t), \quad |r_i| \leq 0.9g, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

при тех же краевых условиях. Траектория $w(t) = (x(t), y(t), z(t))$ системы (4), являющаяся решением задачи управляемости в классе многочленов, имеет вид

$$w(t) = w_0 + \dot{w}_0 t + c_1(T)t^2 + c_2(T)t^3, \quad t \in [0, T],$$

где $c_1(T) = (3A(T) - BT)/T^2$, $c_2(T) = (BT - 2A(T))/T^3$, $A(T) = w_1 - w_0 - \dot{w}_0 T$, $B = \dot{w}_1 - \dot{w}_0$, $w_0 = w(0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(0)$, $w_1 = w(T)$, $\dot{w}_1 = \dot{w}(T)$. Управление $r = (r_1, r_2, r_3)$ системы (4), доставляющее решение задачи управляемости, имеет вид

$$r(t) = r(t, T) = 2c_1(T) + 6c_2(T)t, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

В силу свойства $c_{ij}(T) \rightarrow 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$, при $T \rightarrow \infty$ существует $T_2 > 0$ такое, что $\|r(t, T)\| \leq 0.9g$ при $t \in [0, T]$, $T > T_2$.

Учитывая соотношения $\dot{r}_t(t) = 6c_2(T)$, $\ddot{r}_{tt}(t) = 0$, из (3), (5) получаем явные значения $\theta(0), \varphi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\varphi}(0), u_1(t, T), u_2(t, T), u_3(t, T)$. Приведем их для функций φ, θ, u_3 (явный вид функций u_1, u_2 приводится в докладе):

$$\varphi(0, T) = \arctg \frac{2c_{12}(T)}{2c_{13}(T) + g}, \quad (6)$$

$$\dot{\varphi}(0, T) = \frac{(6g + 12c_{13}(T))c_{22}(T) - 12c_{12}(T)c_{23}(T)}{4c_{13}(T)^2 + 4c_{13}(T)g + g^2 + 4c_{12}(T)^2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_3(t, T) = & -72(6c_{23}(T)^2 t + (2c_{13}(T) + g)c_{23}(T) + 6c_{22}(T)^2 t + 2c_{12}(T)c_{22}(T)) \times \\ & \times (-2c_{12}(T)c_{23}(T) + c_{22}(T)(2c_{13}(T) + g)) \times \\ & \times \left(36c_{23}(T)^2 t^2 + 12t(2c_{13}(T) + g)c_{23}(T) + 36c_{22}(T)^2 t^2 + \right. \\ & \left. + 24c_{12}(T)c_{22}(T)t + g^2 + 4c_{13}(T)g + 4c_{12}(T)^2 + 4c_{13}(T)^2 \right)^{-2}, \end{aligned}$$

$$\theta(0, T) = -\arctg \frac{2c_{11}(T)}{\sqrt{4c_{13}(T)^2 + 4c_{13}(T)g + g^2 + 4c_{12}(T)^2}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(0, T) = & -6 \left((4c_{13}(T)^2 + 4c_{13}(T)g + g^2 + 4c_{12}(T)^2) c_{21}(T) - \right. \\ & \left. - 2c_{11}(T)((2c_{13}(T) + g)c_{23}(T) + 2c_{12}(T)c_{22}(T)) \right) \times \\ & \times \left(\sqrt{4c_{13}(T)^2 + 4c_{13}(T)g + g^2 + 4c_{12}(T)^2} \times \right. \\ & \left. \times (g^2 + 4c_{13}(T)g + 4c_{11}(T)^2 + 4c_{12}(T)^2 + 4c_{13}(T)^2) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Лемма. Из (5)–(9) и свойств векторных функций $c_1(T)$, $c_2(T)$ следует, что $\varphi(0, T) \rightarrow 0$, $\dot{\varphi}(0, T) \rightarrow 0$, $\theta(0, T) \rightarrow 0$, $\dot{\theta}(0, T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. При достаточно большом T управления второго этапа u_1 , u_2 , u_3 удовлетворяют ограничениям.

Управление, построенное для $t \in [0, T_*]$ в виде (2) и для $t \in [T^*, T]$ в виде (5), далее назовем двухэтапным управлением. В силу леммы и выполнения условий теорем о непрерывной зависимости решения от начальных значений, единственности и нелокальной продолжимости решений для системы (1) (см. [8]) справедлива следующая

Теорема. Для краевых условий, сформулированных в постановке задачи, двухэтапное управление решает задачу терминального управления в малую окрестность конечного значения за конечное время.

Список литературы

1. Гурьянов А.Е. Моделирование управления квадрокоптером // Инженерный вестник МГТУ им. Баумана. 2014. № 08. С. 522–534.
2. Castillo P., Lozano R., Dzul A.E. Modelling and control of mini-flying machines. Springer, 2005.
3. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004.
4. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
5. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
6. Никольский М.С. Исследование обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 211–217.
7. Батенко А.П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

УПРАВЛЯЕМЫЕ МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ АЛЛЕРГИИ (CONTROL MODELS OF ALLERGY TREATMENT)*

**Э. В. Григорьева (E. V. Grigorieva)^a,
Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko)^b,
Е. Н. Хайлов (E. N. Khailov)^b**

^aТехасский женский университет, Дентон, США

^bМосковский государственный университет, Москва, Россия

egrigorieva@twu.edu, grigor@cs.msu.su, khailov@cs.msu.su

Одной из определяющих характеристик современного мира являются увеличение иммунных нарушений и отсутствие соответствующего лечения или их устойчивость к уже существующим способам лечения. Аллергия — один из примеров таких нарушений. Главная цель настоящего исследования заключается в создании адекватных управляемых моделей, описывающих различные виды аллергии, и в нахождении с их помощью эффективных способов ее лечения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha - N(t) - N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} - \theta N(t)A(t)T_2(t), \\ T_1'(t) = \rho N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_1(t), \\ T_2'(t) = \rho \theta N(t)A(t)T_2(t)(1 + \mu_2 T_2(t))(1 + \mu_1 T_1(t) + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_2(t), \\ A'(t) = \lambda A(t) - A(t)(T_1(t) + T_2(t)), \end{cases} \quad (1)$$

которая описывает взаимодействие между концентрациями Т-хелперных клеток (N), Th1-клеток (T_1), Th2-клеток (T_2) и аллергических клеток (A) во время аллергии. В этой системе $\alpha, \rho, \theta, \lambda, \mu_1, \mu_2$ — заданные положительные константы. Смысл этих констант, а также уравнений, подобных уравнениям системы (1), подробно описан в работах [1–3].

Для системы (1) мы находим положения равновесия, принадлежащие множеству

$$\Lambda = \{(N, T_1, T_2, A): N \geq 0, T_1 \geq 0, T_2 \geq 0, A \geq 0\},$$

а также условия их существования:

- положение равновесия $\Delta_1 = (\alpha, 0, 0, 0)$ существует всегда;
- положение равновесия $\Delta_2 = (\rho^{-1}(\alpha\rho - \lambda), 0, \lambda, \theta^{-1}(\alpha\rho - \lambda)^{-1})$ существует, если $\alpha\rho - \lambda > 0$;
- положение равновесия $\Delta_3 = (\rho^{-1}(\alpha\rho - \lambda), \lambda, 0, (\alpha\rho - \lambda)^{-1})$ также существует, если $\alpha\rho - \lambda > 0$;
- положение равновесия

$$\Delta_4 = (\rho^{-1}(\alpha\rho - z_0 w), \mu_1^{-1} z_0 (\theta z_0 - 1), \mu_2^{-1} (z_0 - 1), z_0 (\alpha\rho - z_0 w)^{-1}),$$

$$z_0 = 0.5(\mu_2 \theta)^{-1} \left((\mu_2 - \mu_1) + \sqrt{(\mu_2 - \mu_1)^2 + 4\mu_1 \mu_2 \theta (1 + \mu_2 \lambda)} \right),$$

*Работа второго и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ДНТ в рамках научного проекта 18-51-45003 ИНД_а.

$$w = \mu_1^{-1}(\theta z_0 - 1) + \mu_2^{-1}\theta(z_0 - 1),$$

существует, если $z_0 > 1$, $\theta z_0 > 1$, $\alpha\rho - z_0 w > 0$.

Затем подробно исследуем локальную асимптотическую устойчивость каждого из найденных положений равновесия.

Добавим к системе (1) положительные начальные условия

$$N(0) = N_0, \quad T_1(0) = T_1^0, \quad T_2(0) = T_2^0, \quad A(0) = A_0, \quad (2)$$

после чего рассмотрим систему (1), (2) на заданном отрезке времени $[0, T]$. Ограниченность, положительность и продолжимость ее решений вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Решение $(N(t), T_1(t), T_2(t), A(t))$ системы (1), (2) определено на всем отрезке $[0, T]$, и его компоненты всюду на этом отрезке удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} 0 < N(t) < N_{\max}, \quad 0 < T_1(t) < T_1^{\max}, \quad T_2(t) < T_2^{\max}, \quad 0 < A(t) < A_{\max}, \\ N_{\max} &= N_0 + \alpha T, \quad A_{\max} = A_0 e^{\lambda T}, \\ T_1^{\max} &= T_1^0 e^{\rho N_{\max} A_{\max} T}, \quad T_2^{\max} = T_2^0 e^{\rho \theta N_{\max} A_{\max} T}. \end{aligned}$$

После этого мы представляем результаты анализа поведения компонент решения $(N(t), T_1(t), T_2(t), A(t))$ системы (1), (2) для значений ее параметров [2, 3]

$$\alpha = 10.0, \quad \rho = 8.0, \quad \theta = 1.02, \quad \lambda = 1.0, \quad \mu_1 = 0.2, \quad \mu_2 = 0.1 \quad (3)$$

и начальных условий

$$N_0 = 10.0, \quad T_1^0 = 10.0, \quad T_2^0 = 20.0, \quad A_0 = 1.0 \quad (4)$$

в зависимости от значений величины $T \in \{30; 60; 90\}$ с помощью программы, написанной в среде MAPLE. Эти результаты подробно обсуждаются в докладе, и на их основании делаются выводы об адекватности системы (1), (2) реальному процессу протекания аллергии.

Теперь введем в систему (1) управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$, которые будут отражать действие лекарственных препаратов на аллергию:

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha - N(t) - v(t)N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} - \theta u(t)N(t)A(t)T_2(t), \\ T_1'(t) = \rho v(t)N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_1(t), \\ T_2'(t) = \rho \theta u(t)N(t)A(t)T_2(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} + \mu_1 T_1(t) + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_2(t), \\ A'(t) = \lambda A(t) - A(t)(T_1(t) + T_2(t)). \end{cases} \quad (5)$$

Во время аллергии Th2-клетки доминируют над Th1-клетками, т.е. $T_2(t) > T_1(t)$. При этом выздоровление означает переход этих клеток из начального состояния в состояние, когда устанавливается баланс между Th1- и Th2-клетками:

$$T_2(t)/T_1(t) \approx 1, \quad (6)$$

который достигается с помощью одного из следующих подходов.

Подход 1. Подавление Th2-клеток, что означает уменьшение концентрации $T_2(t)$ Th2-клеток с помощью лекарств. При этом в системе (5) управления $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 < u_{\min} \leq u(t) \leq 1, \quad v(t) = 1. \quad (7)$$

Подход 2. Стимулирование Th1-клеток, что подразумевает увеличение концентрации $T_1(t)$ Th1-клеток с помощью лекарств. При этом в системе (5) управления $u(t)$ и $v(t)$ подчиняются соотношениям

$$u(t) = 1, \quad 1 \leq v(t) \leq v_{\max}. \quad (8)$$

Подход 3. Одновременное стимулирование Th1-клеток и подавление Th2-клеток, что достигается одновременным увеличением концентрации $T_1(t)$ Th1-клеток и уменьшением концентрации $T_2(t)$ Th2-клеток с помощью лекарств. При этом в системе (5) управления $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 < u_{\min} \leq u(t) \leq 1, \quad 1 \leq v(t) \leq v_{\max}. \quad (9)$$

Чтобы контролировать отношение $T_2(t)/T_1(t)$ из (6), мы, как и в работе [4], добавляем в систему (2), (5) дифференциальное уравнение для функции $D(t) = T_2(t)/T_1(t)$

$$D'(t) = \rho N(t)A(t)D(t)(\theta u(t)(1 + \mu_2 T_2(t))(1 + \mu_1 T_1(t) + \mu_2 T_2(t))^{-1} - v(t)(1 + \mu_2 T_2(t))^{-1}) \quad (10)$$

вместе с соответствующим начальным условием

$$D(0) = T_2(0)/T_1(0) = D_0. \quad (11)$$

Под множеством допустимых управлений мы будем понимать всевозможные пары измеримых по Лебегу функций $(u(t), v(t))$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют в зависимости от рассматриваемого подхода соотношениям (7), (8) или (9). В результате для каждого подхода 1, 2 или 3 мы имеем соответствующую управляемую систему (2), (5), (10), (11).

В зависимости от подхода 1, 2 или 3 для системы (2), (5), (10), (11) мы рассматриваем задачу минимизации функционала

$$0.5 \int_0^T (D(t) - 1)^2 dt + 0.5 \int_0^T (bu^2(t) + cv^2(t)) dt, \quad (12)$$

где неотрицательные величины b и c являются весовыми коэффициентами. Для подхода 1 величина b неотрицательна, а величина c равна нулю. Для подхода 2, наоборот, величина b равна нулю, а величина c неотрицательна. Наконец, для подхода 3 обе величины b и c неотрицательны. Заметим, что второе слагаемое в формуле (12) отражает общую стоимость лечения аллергии в зависимости от рассматриваемого подхода. Если в подходе 1 величина b равна нулю, или в подходе 2 величина c равна нулю, или, наконец, в подходе 3 обе величины b и c равны нулю, то в функционале (12) общая стоимость лечения вообще отсутствует. При этом минимизация такого функционала нами также исследуется.

Лемма и теорема 4 из [5, гл. 4] гарантируют существование в задаче минимизации (12) оптимального решения: оптимальных управлений и отвечающей им оптимальной траектории системы (2), (5), (10), (11).

Для значений параметров (3) и начальных условий (4) системы (2), (5), уже упомянутых значений величины T , а также значений

$$u_{\min} = 0.3, \quad v_{\max} = 1.5, \quad b = 0.5, \quad c = 0.5$$

далее нами численно изучается поведение оптимальных управлений и соответствующих оптимальных траекторий в задаче минимизации (12) для каждого подхода 1, 2 или 3 с помощью расчетов в среде “ВОСОР-2.0.5”. Результаты этих расчетов и их подробный анализ представлены в докладе.

Список литературы

1. *Bergmann C., van Hemmen J.L., Segel L.A.* Th1 or Th2: how an appropriate T helper response can be made // *Bull. Math. Biol.* 2001. V. 63. P. 405–430.
2. *Richter J., Metzner G., Behn U.* Mathematical modelling of venom immunotherapy // *J. Theor. Med.* 2002. V. 4, No. 2. P. 119–132.
3. *Vogel R., Behn U.* Th1–Th2 regulation and allergy: bifurcation analysis of the non-autonomous system // *Mathematical modeling of biological systems.* Boston: Birkhäuser, 2008. V. 2. P. 145–155.
4. *Magombedze G., Eda S., Ganusov V.V.* Competition for antigen between Th1 and Th2 responses determines the timing of the immune response switch during *Mycobacterium avium* subspecies *paratuberculosis* infection in ruminants // *PLOS Comput. Biol.* 2014. V. 10, No. 1. Paper e1003414.
5. *Лу Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

CONVEXITY OF SMALL-TIME REACHABLE SETS UNDER INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROL*

M. I. Gusev

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia

gmi@imm.uran.ru

We consider a reachability problem for a nonlinear control-affine system with integral constraints on the control variables. In [1] the convexity of reachable sets for a nonlinear control system was proved assuming that the linearization of the system is controllable and the $\mathbb{L}_2$ norms of controls are bounded from above by a sufficiently small number. The proof is based on the convexity of a nonlinear image of a small ball in a Hilbert space. Using this result for an autonomous control system on a small time interval, we prove the convexity of reachable sets assuming appropriate asymptotics for the controllability Gramian of the linearization of the system. A procedure for calculating the reachable sets based on the Pontryagin maximum principle for an

*This work is supported by the program of the Presidium of the Russian Academy of Sciences no. 01 “Fundamental Mathematics and its Applications” under grant PRAS-18-01.

auxiliary control problem is described, and an example illustrating the convexity of reachable sets is presented.

We consider here the autonomous control system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

where $0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a mapping with a Lipschitz continuous derivative, B is an $n \times r$ matrix, and x^0 is a fixed initial state, with control variables subjected to quadratic integral constraints

$$J(u(\cdot)) := (u(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} u^\top(t) R u(t) dt \leq \mu^2, \quad (2)$$

where R is a positive definite matrix and $\mu > 0$ is a given number. Let $x(t) = x(t, u(\cdot))$ be a trajectory of system (1) corresponding to $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$. A reachable set $G(t_1)$ is defined as

$$G(t_1) := \{x(t_1, u(\cdot)): J(u(\cdot)) \leq \mu^2\}.$$

In [1] it is proved that $G(t_1)$ is convex if the linearization of (1) along the trajectory $x(t, 0)$ is controllable and μ is sufficiently small. Here we prove that the convexity of $G(t_1)$ takes place for a fixed μ if t_1 is small enough and the controllability Gramian of the linearized system has appropriate asymptotics. Denote $A(t) = t_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, 0))$ and $B_1 = BR^{-1/2}$. Let $W(t_1)$ be the controllability Gramian of the pair $A(t), B_1$ on the interval $[0, 1]$ and $\nu^2(t_1)$ be the minimal eigenvalue of $W(t_1)$.

Theorem. *Suppose that there exist $C > 0$, $\alpha > 0$, and $\bar{t} > 0$ such that $\nu^2(t_1) \geq Ct_1^{4-\alpha}$ for $t_1 \leq \bar{t}$. Then $G(t_1)$ is convex for all sufficiently small t_1 .*

Briefly outline the proof. Applying a change of variables $t = t_1\tau$ and denoting $y(\tau) = x(t_1\tau)$ and $v(\tau) = t_1 R^{1/2} u(t_1\tau)$ we have $\dot{y}(\tau) = t_1 f(y(\tau)) + B_1 v(\tau)$, $y(0) = x^0$. After returning to the previous notation, we get the system

$$\dot{x}(t) = t_1 f(x(t)) + B_1 u(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

with constraints

$$\int_0^1 u^\top(t) u(t) dt \leq (\mu \sqrt{t_1})^2. \quad (4)$$

For any $x_1(t)$ and $x_2(t)$ corresponding to controls $u_1(t)$ and $u_2(t)$ the inequality

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_C \leq \sqrt{t_1 \|B_1\|} \|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \exp(t_1 L_1)$$

holds where L_1 is a Lipschitz constant for $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$.

Define the map $F: \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ by the equality $F(u(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$; here $x(t, u(\cdot))$ is a trajectory of system (3). Then F has a continuous Fréchet derivative: $F'(u(\cdot))\Delta u(\cdot) = \Delta x(t_1, \Delta u(\cdot))$, where $\Delta x(t, u(\cdot))$ is a solution of the linearized system (3) corresponding to a control $\Delta u(\cdot)$ and zero initial state (see [1, 2]).

For any $u_1(t)$ and $u_2(t)$ we have the inequality

$$\|A_1(t) - A_2(t)\| \leq t_1 L_1 \|x(t, u_1(\cdot)) - x(t, u_2(\cdot))\|,$$

where $A_i(t) = t_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, u_i(\cdot)))$, $i = 1, 2$, which implies

$$\|A_1(\cdot) - A_2(\cdot)\|_C \leq (t_1)^{3/2} C_1 \|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}$$

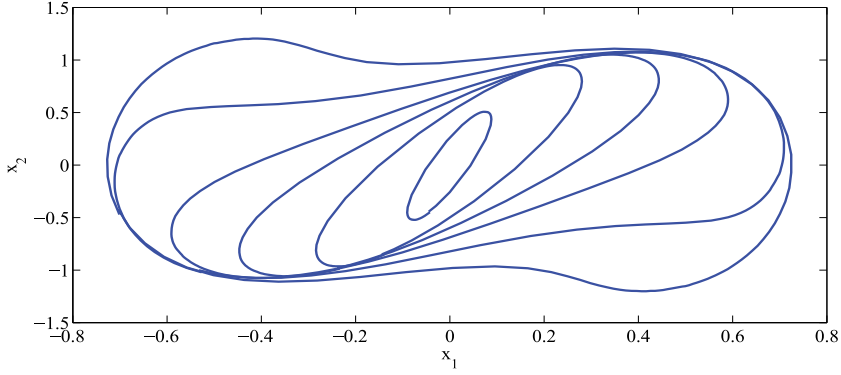


Figure.

for some $C_1 > 0$. Using the proof scheme from [2], we find that a Lipschitz constant L for $F'(u(\cdot))$ equals $C_2 t_1^{3/2}$ for some $C_2 > 0$. Taking into account the inequality $\nu^2(t_1) \geq C t_1^{4-\alpha}$, we get $\mu\sqrt{t_1} \leq \nu(t_1)/L$ for sufficiently small t_1 . The last inequality implies the convexity of reachable sets (see [1]).

As an illustrative example, consider the Duffing equation

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 10x_1^3 + u, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (5)$$

which describes the motion of nonlinear stiff spring on impact of an external force u , under the integral constraints

$$\int_0^{t_1} u^2(t) dt \leq \mu^2$$

and the zero initial state $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$. The linearization of (5) along $x(t) \equiv 0$ after a time variable change is as follows:

$$\dot{x}_1 = t_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

and the constraints take the form

$$\int_0^1 u^2(t) dt \leq \mu^2 t_1.$$

The controllability Gramian $W(t_1)$ is as follows:

$$W(t_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2t_1} \sin 2t_1) & \frac{1}{4t_1}(1 - \cos 2t_1) \\ \frac{1}{4t_1}(1 - \cos 2t_1) & \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2t_1} \sin 2t_1) \end{pmatrix},$$

For small t_1 we have

$$W(t_1) \approx \begin{pmatrix} 2t_1^2/3 & t_1/2 \\ t_1/2 & 1 - 2t_1^2/3 \end{pmatrix},$$

which implies the estimate $\nu^2(t_1) = O(t_1^2)$ for the minimal eigenvalue of $W(t_1)$, and consequently the convexity of reachable sets for a small t_1 .

In the figure the results of the numerical simulation are shown. These results are obtained using the algorithm proposed in [2, 3] which is based on Pontryagin's maximum principle for boundary trajectories.

The figure presents the plot of the reachable sets boundaries for $\mu^2 = 2$ at times $t_1 = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.2, 1.5$. This plot shows that reachable sets remain convex until $t_1 \approx 0.9$ and lose their convexity as t_1 increases.

References

1. *Polyak B.T.* Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dyn. Contin. Discr. Impulsive Syst., Ser. A: Math. Anal. 2004. V. 11. P. 255–267.
2. *Gusev M.I., Zykov I.V.* On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. P. 4082–4087. (Proc. 20th World Congr., Toulouse, France, July 9–14).
3. *Gusev M.* On reachability analysis of nonlinear systems with joint integral constraints // Large-scale scientific computing (LSSC 2017). Springer, 2018. P. 219–227. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 10665).

TYPICALNESS OF CHAOTIC FRACTAL BEHAVIOUR OF INTEGRAL VORTICES IN HAMILTONIAN SYSTEMS WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

R. Hildebrand, L. V. Lokutsievskiy, M. I. Zelikin

*Université Grenoble Alpes, CNRS, LJK, Grenoble, France
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

`roland.hildebrand@univ-grenoble-alpes.fr, lion.lokut@gmail.com,
mzelikin@mtu-net.ru`

The Pontryagin Maximum Principle (PMP) [4] allows one to reduce a deterministic optimal control problem to a two-point boundary value problem of Hamiltonian dynamics. The Hamiltonian H defining the dynamics is given as the maximum $H(t, x, p) = \max_{u \in \Omega} \mathbf{H}(t, x, p, u)$ of the *Pontryagin function* $\mathbf{H}$ over the control u taking values in some set Ω , and the optimal control $\hat{u}(t, x, p)$, if it exists, is found among the maximizers.

In general, the maximizer is unique in an open dense subset of the space of variables t, x, p and depends smoothly on these variables. Usually the Hamiltonian system as a whole will be piecewise smooth on the extended phase space of the variables t, x, p . The extended phase space is divided into disjoint domains $A_1, \dots, A_k$ on which the Hamiltonian is given by smooth functions $H_1, \dots, H_k$, respectively, whereas on their boundaries the derivatives of H will experience discontinuities. Here the set Ω is a convex polyhedron, and the domains A_i are those regions where the optimal control resides in a particular vertex v_i of the polyhedron. The set of points where the

derivatives of H are discontinuous is a stratified manifold, and on each stratum the optimal control is confined to a particular face of the polyhedron Ω .

A trajectory of the Hamiltonian system evolving inside a smoothness domain is called *regular*. If a trajectory passes from one smoothness domain A_i into another one A_j , then the corresponding optimal control will experience a jump from the vertex v_i of the polyhedron Ω to the vertex v_j . This process is called *switching*, and the discontinuity hypersurface is called a *switching surface*. Typically optimal trajectories intersect the switching surface transversally, in which case they are called *bang-bang trajectories*. It may happen, however, that a trajectory moves along the switching surface, in which case one speaks of a *singular trajectory*.

For a singular trajectory lying on a switching surface, one can define an *order*, in dependence on the order up to which the Poisson brackets of the adjoining smooth pieces H_i of the Hamiltonian vanish. The order may be *local* or *intrinsic*, depending on whether the brackets vanish only on the trajectory itself or in a neighbourhood of it [2]. A good generalization of these notions (the so-called *natural order*) is given in [3]. If the natural order of the singular trajectory is even, then a regular trajectory cannot join it in a piecewise smooth manner. In this case regular trajectories spiral around the singular trajectory and intersect the switching surface in an infinite number of points in finite time, such that the joining point is an accumulation point of switchings. This phenomenon is called *chattering*, and is well studied when exactly two smoothness domains meet at the singular trajectory in question [5].

In this contribution we consider three smoothness domains A_1 , A_2 and A_3 meeting at a manifold $\mathbf{S}_{123}$ of codimension 2. This situation is equivalent to an optimal control problem with two-dimensional control. The general case of singular extremals for n -dimensional control was explored in [7]. The role of the order is played by a flag of orders. In the present contribution we consider a singular trajectory of intrinsic second order. This work can be seen as a continuation of the paper [6], where this case was first considered and the presence of the chattering phenomenon was proven, and [1], where fractal behaviour of the optimal solution was observed. Here we rigorously study this additional phenomenon, namely, the chaotic behaviour of bounded parts of optimal trajectories. This phenomenon has not yet been seen in optimal control problems. The key to the proof is a new mathematical object: the system of ordinary differential equations for all Poisson brackets up to the fourth order between the restrictions H_i of the Hamiltonian to the domains of continuity A_i neighbouring the singular trajectory. We call this system the *descending system* of Poisson brackets.

Our findings are not limited to optimal control problems, but rather hold for a whole class of piecewise smooth Hamiltonian systems with three smoothness domains joining at singular trajectories of second order. We first consider a particular *model* linear-quadratic optimal control problem whose solution is prototypical for general piecewise continuous Hamiltonian systems. The model problem is given by

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} = u, \quad u \in \Omega,$$

with initial data $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\dot{x}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$. It is affine in the planar control u , which takes values in an equilateral triangle Ω centred at the origin. All optimal trajectories end in finite time at the origin, which is a singular point of intrinsic

second order. Nevertheless the control on some extremals has a chaotic nature: there exists a topological Markov chain Σ_Γ such that the sequence of control switchings on an optimal trajectory corresponds in a one-to-one way to a trajectory through a point of Σ_Γ under the right Bernoulli shift. The set of non-wandering points in the model problem has a fractal structure (as in Smale's horseshoe) and non-integer Hausdorff and box dimensions. The main tool of the proof is a study of the Poincaré return map on the two-dimensional quotient of the switching surface with respect to a continuous one-parametric symmetry group (the Fuller group) and the dihedral symmetry group D_3 of the triangle Ω in the adjoint variables p . The behaviour of this map is fully described and exhibits a Smale horseshoe in the neighbourhood of a homoclinic point.

This phenomenon is then generalized to Hamiltonian systems with discontinuous right-hand side by a resolution of singularities for the Poincaré mapping at the singular point, the so-called *strange point*. For this purpose we introduce an auxiliary descending system of ordinary differential equations on Poisson brackets of the restrictions H_1 , H_2 and H_3 of the Hamiltonian to the domains of smoothness neighbouring the strange point. It turns out that the principal part of the descending system coincides with the equations of the model problem.

We find the hyperbolic domains in the neighbourhood of the homoclinic point and estimate the corresponding contraction–extension coefficients. This allows to calculate the entropy and the Hausdorff dimension of the non-wandering set, which appears to have a Cantor-like structure as in Smale's horseshoe.

The discovered phenomenon appears in the neighbourhood of a generic singularity. We prove a theorem on the structural stability of the synthesis and determine the codimension of the manifold of singularities in question to equal 76.

The work presented here has been published in [8].

References

1. *Hildebrand R.* A control problem with a Smale's horseshoe in the solution // Differential equations and topology: Abstr. Int. Conf. dedicated to the centennial anniversary of L. S. Pontryagin. Moscow State Univ., 2008. P. 253–254.
2. *Lewis R.M.* Definitions of order and junction condition in singular control problems // SIAM J. Control Optim. 1980. V. 18, No. 1. P. 21–32.
3. *Lokutsievskiy L.V.* Generic structure of the lagrangian manifold in chattering problems // Sb. Math. 2014. V. 205, No. 3. P. 432–458.
4. *Gamkrelidze R.V., Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Mishchenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. Wiley, 1962.
5. *Marchal C.* Chattering arcs and chattering controls // J. Optim. Theory Appl. 1973. V. 11, No. 5. P. 441–468.
6. *Melnikov N.B., Zelikin M.I., Hildebrand R.* Topological structure of a typical fibre of optimal synthesis for chattering problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. V. 233. P. 116–142.
7. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., and Hildebrand R.* Geometry of neighbourhoods of singular trajectories in problems with multidimensional control // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 67–83.
8. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., and Hildebrand R.* Typicalness of chaotic fractal behaviour of integral vortexes in hamiltonian systems with discontinuous right-hand side // Contemp. Math. Fundam. Directions. 2015. V. 56. P. 5–128.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА МИНКОВСКОГО (GEOMETRICAL PROPERTIES OF THE MINKOWSKI OPERATOR)*

Г. Е. Иванов (G. E. Ivanov)

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

g.e.ivanov@mail.ru

В работах Л.С. Понтрягина [1, 2] показано, что оптимальные стратегии игроков в линейной дифференциальной игре могут быть определены с помощью альтернированных сумм и альтернированного интеграла Понтрягина. В свою очередь, альтернированные суммы определяются через сумму Минковского. Суммой Минковского множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $C \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A + C = \{a + c : a \in A, c \in C\}$. В работе [3] показано, что оптимальные стратегии в нелинейной дифференциальной игре достаточно общего вида могут быть построены с помощью оператора Минковского.

Значение оператора Минковского для множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и многозначного отображения $G: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\mathcal{M}_G(S) = \bigcup_{x \in S} (x + G(x)).$$

Заметим, что если многозначное отображение G постоянно, т.е. $G(x) = G_0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то значение оператора Минковского совпадает с суммой Минковского: $\mathcal{M}_G(S) = S + G_0$.

Через $B_r(a)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $r \geq 0$ с центром $a \in \mathbb{R}^n$: $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$. Расстоянием от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется число $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Через $\text{cl } A$ и $\text{int } A$ будем обозначать соответственно замыкание и внутренность множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть задано число $R > 0$. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется R -сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения замкнутых шаров радиуса R , т.е. существует множество $C \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $S = \bigcap_{c \in C} B_R(c)$. Замкнутое множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется R -слабо выпуклым, если для любых точек $x_1, x_2 \in S$ таких, что $\|x_1 - x_2\| < 2R$ справедливо неравенство

$$d\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, S\right) \leq R - \sqrt{R^2 - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4}}.$$

Конусом проксимальных нормалей к множеству $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in S$ называется

$$N^P(x_0, S) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \sigma > 0: \langle y, x - x_0 \rangle \leq \sigma \|x - x_0\|^2 \quad \forall x \in S\},$$

где $\langle y, x - x_0 \rangle$ — скалярное произведение векторов y и $x - x_0$.

Замкнутое множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется телесно-гладким с константой $L > 0$, если $S = \text{cl int } S$ и для любых $x_1, x_2 \in \partial S$, $y_1 \in N^P(x_1, S)$, $y_2 \in N^P(x_2, S)$ таких, что $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$, выполнено неравенство

$$\|y_1 - y_2\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00209).

Из результатов работ [5, 6] вытекает следующее предложение о связи слабой выпуклости и телесной гладкости.

Предложение 1. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ телесно, т.е. $S = \text{clint } S$, и $R > 0$. Тогда множество S является телесно-гладким с константой $1/R$ тогда и только тогда, когда множества S и $\mathbb{R}^n \setminus \text{int } S$ являются R -слабо выпуклыми.

Понятия сильно и слабо выпуклых множеств используются в теории дифференциальных игр для построения эффективных алгоритмов. Например, в работе [4] доказано, что сходимость альтернированных сумм к альтернированному интегралу Понтрягина имеет второй порядок при условии, что дифференциальная игра линейна и множество допустимых управлений преследователя сильно выпукло. В статье [6] доказана теорема об альтернативе для линейных дифференциальных игр с сильно выпуклыми множествами допустимых управлений преследователя и убегающего и телесно-гладким терминальным множеством. Указанная теорема об альтернативе утверждает существование седловой точки в классе программных стратегий для рассматриваемых игр.

В следующей теореме сформулированы достаточные условия телесной гладкости значения оператора Минковского. Свойство телесной гладкости множеств, являющихся значениями оператора Минковского, позволяет применять более эффективные алгоритмы аппроксимации таких множеств при построении квазиоптимальных стратегий в нелинейных дифференциальных играх.

Теорема. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ телесно и является R_S -слабо выпуклым, множество $\mathbb{R}^n \setminus S$ является r_S -слабо выпуклым. Пусть множество $P \subset \mathbb{R}^n$ является R_P -сильно выпуклым, пусть функция $a: \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям

$$\left\| \frac{a(x_1, p_1) + a(x_2, p_2)}{2} - a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2}\right) \right\| \leq \gamma_1 \|x_1 - x_2\|^2 + \gamma_2 \|p_1 - p_2\|^2$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \forall p_1, p_2 \in P,$$

$$\|a(x_1, p_1) - a(x_2, p_2)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\| + L_2 \|p_1 - p_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \forall p_1, p_2 \in P,$$

$$\|a(x, p_1) - a(x, p_2)\| \geq \sigma \|p_1 - p_2\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall p_1, p_2 \in P,$$

где $L_1 < 1/2$ и

$$\frac{1 + L_1 + 4R_S\gamma_1}{4R_S} < \frac{(\sigma - 8R\gamma_2)(1 - 2L_1)}{16R_PL_2}.$$

Пусть $G(x) = a(x, P)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда значение оператора Минковского $M_G(S)$ является телесно-гладким множеством.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 // ДАН СССР. 1967. Т. 175, №4. С. 764–766.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.
3. Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, №2. С. 224–255.
4. Иванов Г.Е., Половинкин Е.С. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, №10. С. 1641–1648.

5. *Иванов Г.Е.* Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 6. С. 35–60.
6. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и их свойства // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 60–86.

OPTIMAL CONTROL ON LIE GROUPS AND INTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS

V. Jurdjevic

University of Toronto, Canada

This lecture will be about two natural left invariant variational problems on semi-simple Lie groups G that admit an involutive automorphism σ . In such situations, the set of fixed points of σ is a closed subgroup K of G , and the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G admits a Cartan decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ with $\mathfrak{k}$ equal to the Lie algebra of K , and $\mathfrak{p}$ a vector space subject to Lie algebraic conditions

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{p}. \quad (1)$$

The above decomposition defines two natural distributions on G : the first distribution $\mathcal{H}$ is defined as

$$\mathcal{H}(g) = \{gX : X \in \mathfrak{p}\}, \quad g \in G, \quad (2)$$

while the second distribution $\mathcal{A}$ is affine, and is defined by an element $A \in \mathfrak{p}$ with

$$\mathcal{A}(g) = \{g(A + X) : X \in \mathfrak{k}\}, \quad g \in G. \quad (3)$$

In this notation, gX stands for the left translate by g of an element $X \in \mathfrak{g}$.

In the first case, any two points in G can be connected by a horizontal curve in $\mathcal{H}$ whenever $\mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{g}$, while the same is true in the second case whenever A is regular. In this parlance, curve $g(t)$ in G is an integral curve of a distribution $\mathcal{D}$, or a horizontal curve, if $dg/dt \in \mathcal{D}(g)$.

Then a suitable scalar multiple of the Killing form can be used to define the length on the space of horizontal curves, which, in turn, induces a natural sub-Riemannian metric on G that is central to the geometry of the underlying symmetric space G/K . In the second case, a negative multiple $\langle \cdot, \cdot \rangle$ of the Killing form $\text{Tr}(\text{ad } A \circ \text{Ad } B)$ defines a natural energy function $(1/2) \int_0^T \langle U(t), U(t) \rangle dt$ associated with every horizontal curve $g(t)$ that is a solution of $dg/dt = g(t)(A + U(t))$, which then induces an optimal control problem of finding a horizontal curve that connects two given points in G along which the energy transfer is minimal.

The solutions of this optimal control problem will be the main focus of the lecture. In particular, I will show that the Hamiltonian for this problem, obtained by the Maximum Principle of optimal control, leads to the class of Hamiltonians on $\mathfrak{g}$ that admit spectral parameter representations with important contributions to the theory of integrable Hamiltonian systems. Particular cases provide natural explanations for the classical results of Fock and Moser linking Kepler's problem to the geodesics on spaces of constant curvature, and J. Moser's work on integrability based on isospectral

methods, in which C. Newmann's mechanical problem on the sphere and C. L. Jacobi's geodesic problem on an ellipsoid play the central role. The talk will also address the relevance of this class of Hamiltonians to the elastic curves on spaces of constant curvature.

ДИНАМИКА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ
НА ОСНОВЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
(THE DYNAMICS OF SINGULAR PERTURBED MODELS
BASED ON LOGISTIC EQUATION WITH DELAY)

С. А. Кащенко (S. A. Kaschenko)

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*
kasch@uniyar.ac.ru

Исследуется широкий класс моделей, возникающих в математической экологии. В основе их лежит логистическое уравнение с запаздыванием. Основное предположение состоит в том, что рассматриваемые системы содержат большие или малые параметры, задающие сингулярные возмущения. Известные асимптотические методы оказываются неприменимыми. Для изучения динамических свойств решений разработан специальный метод большого параметра. Суть его состоит в следующем.

В фазовом пространстве исходной системы выделяется некоторое множество $S(x)$, зависящее от векторного параметра x . Затем исследуется асимптотика всех решений с начальными условиями из $S(x)$. Удаётся показать, что через некоторый промежуток времени все эти решения попадают в множество $S(\bar{x})$, причем для $\bar{x}$ выполняются асимптотические равенства вида $\bar{x} = F(x) + o(1)$. В итоге приходим к выводу, что динамика решений из $S(x)$ определяется динамическими свойствами конечномерного отображения $F(x)$. Тем самым по грубым устойчивым периодическим траекториям этого отображения строится асимптотика соответствующего цикла той же устойчивости.

Обратим внимание, что для некоторых из рассматриваемых систем в их фазовом пространстве имеется несколько множеств типа $S(x)$. И для каждого из этих множеств получены результаты о существовании аттракторов и об асимптотике решений из них.

Для ответа на вопрос об устойчивости периодических решений из $S(x)$ исследуется асимптотика мультипликаторов матрицы монодромии линеаризованного (на периодическом решении) уравнения.

Наиболее тонкий момент в методе большого параметра связан с определением множеств $S(x)$. Здесь необходимо использовать некоторую дополнительную информацию о структуре решений. В каждом из рассмотренных уравнений выбор таких множеств оказался довольно естественным.

Отметим, что указанным методом удалось исследовать ряд важных с прикладной точки зрения задач.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ФУЛЛЕРА (MODIFIED FULLER PROBLEM)

**Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev),
С. Н. Аввакумов (S. N. Avvakumov)**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su

Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = a, & x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = b, & x_2(T) = 0, & |u| \leq 1, \\ J[u] = \lambda T + (1 - \lambda) \int_0^T x_1^2(t) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \end{cases} \quad (1)$$

зависящая от параметра $\lambda \in [0, 1]$; параметр $T > 0$ не фиксирован. При $\lambda = 0$ задача (1) превращается в известную задачу Фуллера (см. [1–7]), а при $\lambda = 1$ имеем классическую задачу быстрогодействия для объекта “тележка”. Решения этих двух задач хорошо известны; оптимальный регулятор имеет вид

$$x_1 = \text{sign}[-mx_2|x_2|], \quad (2)$$

причем для задачи Фуллера ($\lambda = 0$) коэффициент регулятора и время суть

$$m_{\text{Full}} = \frac{1}{12} \sqrt{6(\sqrt{33} - 1)} = 0.44 \dots, \quad T_{\text{Full}} = T_{\text{Full}}(a, b),$$

а для задачи “тележка” —

$$m_{\text{тел}} = \frac{1}{2}, \quad T_{\text{тел}} = \begin{cases} b + 2\sqrt{a + b^2/2} & \text{выше л.п.,} \\ -b + 2\sqrt{-a + b^2/2} & \text{ниже л.п.;} \end{cases}$$

для $T_{\text{Full}}(a, b)$ имеется явная формула, которая здесь не приводится. В задаче Фуллера наблюдается эффект *четтеринга*, а в задаче “тележка” оптимальное управление — релейная функция времени со значениями ± 1 и с количеством точек переключения, не превосходящим 1.

Рассматривается задача о нахождении наилучшего регулятора для модели (1) в форме

$$x_1 = \text{sign}[-m(\lambda)x_2|x_2|], \quad \lambda \in [0, 1], \quad m(\lambda)|_{\lambda=0} = m_{\text{Full}}, \quad m(\lambda)|_{\lambda=1} = \frac{1}{2},$$

при исследовании которой используется опыт решения задачи Фуллера (с использованием возможностей среды Maple), описанный в [5–7].

Список литературы

1. Фуллер А.Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 584–605.

2. Wonham W.M., Johnson C.D. Optimal bang-bang control with quadratic performance index: Preprint. Joint Autom. Control Conf. Univ. Minnesota, 1963.
3. MacFarlane A. Tom Fuller: a memoir (Obituary) // Int. J. Control, 2000. V. 73, No. 6. P. 457–463.
4. Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А. Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Оптимальное управление. Тбилиси, 2008. С. 3–55. (Совр. математика и ее приложения; Т. 58).
5. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф. М., 2000. С. 3.
6. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н. Прямое вычисление константы оптимального регулятора и функции Беллмана в задаче Фуллера с привлечением возможностей среды MAPLE // Ломоносовские чтения: Тез. докл. Науч. конф., Москва, ф-т ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–26 апр. 2018 г. М., 2018. С. 66–67.
7. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н. Direct calculation of the optimal regulator's constant and Bellman function in the Fuller problem using the Maple system possibilities // Системный анализ: моделирование и управление: Матер. Междунар. конф., посв. памяти А.В. Кряжмского. М.: МИАН, МАКС Пресс, 2018. С. 51–54.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ КОББА–ДУГЛАСА
(INVESTIGATION OF MULTIDIMENSIONAL OPTIMAL CONTROL
PROBLEMS WITH COBB–DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION)*

Ю. Н. Киселёв (Y. N. Kiselev)^a, М. В. Орлов (M. V. Orlov)^a,
С. М. Орлов (S. M. Orlov)^a, А. П. Бакланов (A. P. Baklanov)^b

^aФакультет вычислительной математики и кибернетики, Московский
государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bИнститут математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия

kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su,
artem.baklanov@gmail.com

Рассматриваются задачи оптимального управления с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{u_i}{\varepsilon_i} F(x) - \mu_i x_i, & x_i(0) = x_{i0} > 0, & i = 1, \dots, n, & n \geq 2, \\ x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1)$$

и различными функционалами, в том числе

$$J \equiv \int_0^T e^{-\nu t} \left(1 - \sum_{i=1}^n u_i \right) F(x) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00454 мол_а).

$$J \equiv \int_0^\infty e^{-\nu t} \ln \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n u_i \right) F(x) \right] dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \quad (3)$$

где x — вектор положительных фазовых переменных, u — вектор переменных управления, подчиненных геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^n$ с областью управления $U = \{u \in \mathbb{R}^n: u_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n u_i \leq 1\}$ при функционале (2) и $U = \{u \in \mathbb{R}^n: u_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n u_i < 1\}$ при функционале (3), $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^\top \in \mathbb{R}_+^n$ — начальное состояние управляемого объекта, $\mu_i, i = 1, \dots, n$, — положительные коэффициенты амортизации, $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. В дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (1) участвует функция $F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, — производственная функция Кобба–Дугласа, в которой положительные коэффициенты эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ удовлетворяют условию $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$. Фазовые переменные характеризуют уровни развития соответствующих секторов экономики, а функционал — интегральный объем потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учетом дисконтирования. Отметим, что в работах [1, 2] при $n = 2$ на заданном конечном горизонте планирования максимизируется функционал $J = x_2(T)$. Задача (1), (2) рассмотрена в [3, 6]. Задача (1), (3) рассмотрена в [4, 5].

В рассмотренных задачах применяется принципа максимума Понтрягина для поиска экстремального решения и возможных особых режимов. Экстремальные решения описываются конструктивно. Во всех случаях обоснована оптимальность построенных экстремальных решений на основе достаточных условий.

Список литературы

1. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа // Диф. уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1749–1765.
2. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации // Диф. уравнения. 2012. Т. 48, № 12. С. 1642–1657.
3. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа при различных коэффициентах амортизации // Диф. уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 671–687.
4. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Исследование краевой задачи принципа максимума Понтрягина в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // ЖВМиМФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1812–1826.
5. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Оптимальные процессы в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // Диф. уравнения. 2017. Т. 53, № 2. С. 250–263.
6. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Оптимальные режимы в многомерной модели экономического роста // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн. 2017. № 2. С. 15–20.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПОДАВЛЕНИЯ
КЛЕТОЧНОГО ДЕЛЕНИЯ В АНТИРАКОВОЙ ТЕРАПИИ
(OPTIMAL STRATEGIES FOR SUPPRESSING CELL DIVISION
IN ANTI-CANCER THERAPY)

А. Д. Клименкова (A. D. Klimenkova)^a,
А. Коробейников (A. Korobeinikov)^b,
Е. Н. Хайлов (E. N. Khailov)^a

^aМосковский государственный университет, Москва, Россия

^bЦентр математических исследований, Барселона, Испания

klimenkovaad@mail.ru, akorobeinikov@crm.cat, khailov@cs.msu.su

В последние десятилетия наблюдается прогресс в выявлении и объяснении процессов, возникающих при развитии раковых заболеваний, а также в разработке методов и средств их ранней диагностики и лечения. Значительный вклад в решение данной проблемы вносит математическое моделирование, которое позволяет смоделировать поведение клеток и органов до болезни, при ее развитии и лечении. Наиболее распространенными являются математические модели, описывающие развитие плотной раковой опухоли с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Представляет интерес рассмотреть пространственное изменения опухоли с точки зрения динамики популяций здоровых и раковых клеток, применяя модель конкуренции Лотки–Вольтерры. При отыскании эффективных в том или ином смысле стратегий лечения раковых заболеваний широко используется теория оптимального управления.

Рассмотрим на заданном отрезке времени $[0, T]$ нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r(1 - \kappa_1 w(t))(1 - x(t) - a_{12}y(t))x(t) - m_1 x(t), \\ \dot{y}(t) = (1 - \kappa_2 w(t))(1 - y(t) - a_{21}x(t))y(t) - m_2 y(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0, y_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

которая описывает взаимодействие здоровых и раковых клеток человеческого организма при антираковой терапии. В этой системе $x(t)$ — концентрация здоровых клеток, $y(t)$ — концентрация раковых клеток, x_0 и y_0 — соответствующие начальные условия, a_{12} , a_{21} , m_1 , m_2 , κ_1 , κ_2 — заданные положительные параметры. Также система (1) содержит управляющую функцию $w(t)$, подчиненную ограничениям

$$0 \leq w(t) \leq w_{\max} < \min\{\kappa_1^{-1}, \kappa_2^{-1}\}. \quad (2)$$

Управление $w(t)$ задает интенсивность антираковой терапии, подавляющей деление клеток. Под множеством допустимых управлений мы понимаем всевозможные измеримые по Лебегу функции $w(t)$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям (2).

Считаем, что в дальнейших рассуждениях выполнены неравенства

$$a_{12} \cdot a_{21} \neq 1, \quad m_2 > m_1, \quad \kappa_2 > \kappa_1.$$

Введем множество

$$\Lambda = \{(x, y): 0 < x < x_0 e^{rT}, 0 < y < y_0 e^T\}.$$

Тогда ограниченность, положительность и продолжимость решений системы (1) устанавливаются следующей леммой.

Лемма 1. Пусть справедливо включение $(x_0, y_0) \in \Lambda$. Для произвольного допустимого управления $w(t)$ соответствующие решения $x(t), y(t)$ системы (1) определены на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют включению $(x(t), y(t)) \in \Lambda$ при всех $t \in (0, T]$.

Для системы (1) на множестве допустимых управлений рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(w) = y(T) - \alpha x(T), \quad (3)$$

который представляет собой взвешенную разность концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент T . Здесь α — положительный весовой коэффициент.

Лемма 1 гарантирует в задаче минимизации (3) существование оптимального управления $w_*(t)$ и отвечающих ему оптимальных решений $x_*(t), y_*(t)$ системы (1). Для их анализа применим принцип максимума Понтрягина. Тогда существует такая вектор-функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$, что

- $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1^*(t) = r(1 - \kappa_1 w_*(t))x_*(t)\psi_1^*(t) + a_{21}(1 - \kappa_2 w_*(t))y_*(t)\psi_2^*(t) + \\ \quad - \{r(1 - \kappa_1 w_*(t))(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t)) - m_1\}\psi_1^*(t), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = ra_{12}(1 - \kappa_1 w_*(t))x_*(t)\psi_1^*(t) + (1 - \kappa_2 w_*(t))y_*(t)\psi_2^*(t) - \\ \quad - \{(1 - \kappa_2 w_*(t))(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t)) - m_2\}\psi_2^*(t), \\ \psi_1^*(T) = \alpha, \quad \psi_2^*(T) = -1; \end{cases} \quad (4)$$

- управление $w_*(t)$ удовлетворяет соотношению

$$w_*(t) = \begin{cases} w_{\max}, & \text{если } L_w(t) > 0, \\ \text{любое } w \in [0, w_{\max}], & \text{если } L_w(t) = 0, \\ 0, & \text{если } L_w(t) < 0, \end{cases} \quad (5)$$

в котором функция

$$\begin{aligned} L_w(t) = & -r\kappa_1(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))x_*(t)\psi_1^*(t) - \\ & - \kappa_2(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))y_*(t)\psi_2^*(t) \end{aligned} \quad (6)$$

является функцией переключений. Она описывает с помощью формулы (5) поведение управления $w_*(t)$.

Анализ формулы (5) показывает возможные виды оптимального управления $w_*(t)$. Оно может иметь релейный вид и переключаться только между значениями 0 и $w_{\max}$. Это имеет место, когда при переходе через точки, в которых функция переключений $L_w(t)$ обращается в нуль, происходит смена знака этой

функции. Кроме того, помимо участков релейного типа, управление $w_*(t)$ может содержать особые участки. Такое происходит, когда функция переключений $L_w(t)$ обращается тождественно в нуль на некотором интервале отрезка $[0, T]$.

Для упрощения последующих рассуждений введем новые сопряженные переменные

$$\phi_1^*(t) = -x_*(t)\psi_1^*(t), \quad \phi_2^*(t) = -y_*(t)\psi_2^*(t)$$

и с их помощью перепишем соответствующие систему (4) и формулу (6):

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1^*(t) = r(1 - \kappa_1 w_*(t))x_*(t)\phi_1^*(t) + a_{21}(1 - \kappa_2 w_*(t))x_*(t)\phi_2^*(t), \\ \dot{\phi}_2^*(t) = ra_{12}(1 - \kappa_1 w_*(t))y_*(t)\phi_1^*(t) + (1 - \kappa_2 w_*(t))y_*(t)\phi_2^*(t), \\ \phi_1^*(T) = -\alpha x_*(T), \quad \phi_2^*(T) = y_*(T); \end{cases} \quad (7)$$

$$L_w(t) = r\kappa_1(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))\phi_1^*(t) + \kappa_2(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))\phi_2^*(t). \quad (8)$$

Анализ системы (7) приводит к обоснованию следующей леммы.

Лемма 2. *Сопряженные переменные $\phi_1^*(t)$, $\phi_2^*(t)$ знакоопределены на отрезке $[0, T]$, т.е. имеют место неравенства*

$$\phi_1^*(t) < 0, \quad \phi_2^*(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Используя дифференциальные уравнения систем (1) и (7), а также формулу (8), находим выражение для производной $L'_w(t)$ функции переключений $L_w(t)$:

$$L'_w(t) = \alpha(x_*(t), y_*(t))\phi_1^*(t) + \beta(x_*(t), y_*(t))\phi_2^*(t),$$

где функции $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ заданы соотношениями

$$\alpha(x, y) = r\kappa_1(m_1x + a_{12}m_2y) + r(\kappa_2 - \kappa_1)a_{12}y(1 - y - a_{21}x),$$

$$\beta(x, y) = \kappa_2(a_{21}m_1x + m_2y) - r(\kappa_2 - \kappa_1)a_{21}x(1 - x - a_{12}y).$$

Также полезными в дальнейшем анализе оказываются формулы, выражающие производную $L'_w(t)$ через функцию $L_w(t)$:

$$\begin{aligned} r\kappa_1(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))L'_w(t) &= \alpha(x_*(t), y_*(t))L_w(t) - \Phi(x_*(t), y_*(t))\phi_2^*(t), \\ \kappa_2(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))L'_w(t) &= \beta(x_*(t), y_*(t))L_w(t) + \Phi(x_*(t), y_*(t))\phi_1^*(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где функция $\Phi(x, y)$ определена соотношением

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= r\kappa_1\kappa_2\{(m_1x + a_{12}m_2y)(1 - y - a_{21}x) - (a_{21}m_1x + m_2y)(1 - x - a_{12}y)\} + \\ &+ r(\kappa_2 - \kappa_1)\{r\kappa_1a_{21}x(1 - x - a_{12}y)^2 + \kappa_2a_{12}y(1 - y - a_{21}x)^2\}. \end{aligned}$$

Теперь изучим существование особого участка у оптимального управления $w_*(t)$. Предположим, что интервал $\Delta \subset [0, T]$ — такой участок. Значит, справедливы равенства

$$L_w(t) = 0, \quad L'_w(t) = 0, \quad t \in \Delta. \quad (10)$$

Рассмотрим эти соотношения как систему линейных однородных уравнений относительно переменных $\phi_1^*(t)$, $\phi_2^*(t)$, которая благодаря лемме 2 при каждом значении $t \in \Delta$ имеет нетривиальное решение. Этот факт приводит к равенству

$$\Phi(x_*(t), y_*(t)) = 0, \quad t \in \Delta, \quad (11)$$

означающему, что кривая $\Phi(x, y) = 0$ является особым множеством. В докладе обсуждается вид этой кривой при различных значениях параметров системы (1).

Далее исследуем на интервале Δ вторую производную $L''_w(t)$ функции переключений $L_w(t)$. Для этого продифференцируем формулы (9) с использованием соотношений (10) и (11). В результате находим выражения

$$\begin{aligned} r\kappa_1(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))L''_w(t) &= -\Phi'_t(x_*(t), y_*(t))\phi_2^*(t), \\ \kappa_2(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))L''_w(t) &= \Phi'_t(x_*(t), y_*(t))\phi_1^*(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Равенство $L''_w(t) = 0$, вытекающее из соотношений (10), примененное в формулах (12) вместе с результатами леммы 2, приводит к формуле $\Phi'_t(x_*(t), y_*(t)) = 0$. В ней интерес представляет знакоопределенность слагаемых, содержащих управление $w_*(t)$. В докладе приводятся результаты соответствующего численного исследования этой знакоопределенности для различных значений параметров системы (1), что позволяет изучить выполнение или невыполнение необходимого условия оптимальности особого участка.

Наконец, в докладе представлены результаты численных расчетов решения задачи минимизации (3), выполненные в среде “БОСОР-2.0.5”.

GUARANTEED RESULT OF CONTROL OF A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH MIXED CONSTRAINT

R. V. Konstantinov

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

konstantinov.rv@mipt.ru

Formulation of the problem. We consider the differential inclusion

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is a vector, $u \in P \subset \mathbb{R}^m$ is a control, and P is a compact set containing the zero vector. The set-valued map F is defined on $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times P$ and has convex and compact values in $\mathbb{R}^n$. In addition, F is continuous in the Hausdorff metric and is Lipschitz in $x \in \mathbb{R}^n$ with a constant $L \geq 0$ uniformly with respect to $t \in [t_0, T]$ and $u \in P$. The piecewise continuous functions $u: [t_0, T] \rightarrow P$ will be called admissible controls. Hence for any admissible control $u(\cdot)$ there exists a partition $\omega(u) = \{t_k\}_{k=0}^N$ of $[t_0, T]$, where $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, such that $u(\cdot)$ is continuous on every interval (t_k, t_{k+1}) and has one-sided limits at its ends. The set of all admissible controls will be denoted by U .

Under all these conditions, for any vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and for any admissible control $u(\cdot) \in U$ there exists a piecewise continuously differentiable function $x: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, that has a continuous derivative on the intervals of the partition $\omega(u)$ and satisfies the inclusion (1) on them (see [1, § 38]). Any such function will be called a solution of the inclusion (1). The collection of all solutions of the inclusion (1) corresponding to an admissible control $u(\cdot)$ and an initial vector x_0 will be denoted

by $X(u(\cdot), x_0)$. We assume that the possible values of the vector $x(t_0) = x_0$ belong to a compact set $X_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Let a closed set $R \subset \mathbb{R}^n \times P$ with $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset R$ be given. In terms of the set R we will determine a mixed constraint for the vector x and control u in the following way. Let $u(\cdot) \in U$ and $x(\cdot) \in X(u(\cdot), x_0)$. The pair $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ will be called R -admissible if the following inclusion holds:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in R \quad \forall t \notin \omega(u). \quad (2)$$

Denote by $X_R(u(\cdot), x_0)$ the set of all $x(\cdot) \in X(u(\cdot), x_0)$ for which the pair $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ is R -admissible.

Let continuous functions $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $G: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}$ be given. For any admissible control $u(\cdot)$ and function $x(\cdot) \in X(u(\cdot), x_0)$ define the value of the functional

$$J(x(\cdot), u(\cdot), x_0) = g(x(T)) + \int_{t_0}^T G(t, x(t), u(t)) dt. \quad (3)$$

The purpose of controlling the differential inclusion (1) with mixed constraint (2) consists in obtaining a value of the functional J as small as possible with a control $u(\cdot) \in U$ such that for any corresponding solution $x(\cdot)$ the inclusion $x(\cdot) \in X_R(u(\cdot), x_0)$ holds. We construct a control of the differential inclusion (1) within the piecewise programmed strategy.

Definition 1. By a piecewise programmed control strategy of the differential inclusion (1) with mixed constraint (2) we will mean a partition $\omega = \{t_k\}_{k=0}^N$ of the segment $[t_0, T]$ and a function u^{str} giving for any $k \in \overline{0, N-1}$ a constant value $u_k \in P$ of the control $u(\cdot)$ on (t_k, t_{k+1}) by the information of the value of the solution $x(t_k)$ realized at t_k , such that the inclusion (2) holds for any solution $x(t)$ of the differential inclusion (1) that corresponds to the control $u(t) = u_k$ for $t \in (t_k, t_{k+1})$.

Definition 2. By a guaranteed result of control of the differential inclusion (1) with mixed constraint (2) we will mean a function $\gamma: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ such that for any vector $x_0 \in X_0$ and any $\alpha > \gamma(x_0)$ there exists a piecewise programmed strategy u_α^{str} which leads to the construction of a control $u_\alpha(\cdot) \in U$ such that for any solution $x(\cdot) \in X(u_\alpha(\cdot), x_0)$ the inequality $J(x(\cdot), u_\alpha(\cdot), x_0) < \alpha$ holds.

Construction of the guaranteed result. We denote by B_r the closed ball in $\mathbb{R}^n$ of radius $r \geq 0$ centered at the origin.

Proposition. *There exist real numbers $r \geq 0$ and $d \geq 0$ such that for any vector $x_0 \in X_0$, control $u(\cdot) \in U$, and solution $x(\cdot) \in X(u(\cdot), x_0)$, the inequality $|x(t)| \leq r$ and inclusion $F(t, x(t), u(t)) \subset B_d$ hold for all $t \in [t_0, T]$.*

We fix an arbitrary $\delta > 0$ and define a set $R_\delta = R \overset{*}{\setminus} (B_{d\delta} \times \{0\})$, where the operation $\overset{*}{\setminus}$ is the geometrical difference of two sets in $\mathbb{R}^n$ (see [1, Ch. 1, § 4, p. 37, Definition 4.3]). Note that the inclusion $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset R$ implies the inclusion $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset R_\delta$. For any $x \in \mathbb{R}^n$ we define a compact set

$$P_\delta(x) = \left\{ u \in P : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in R_\delta \right\}.$$

The inclusion $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset R_\delta$ provides the inclusion $0 \in P_\delta(x)$ for any $x \in \mathbb{R}^n$. We recall that for any compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ its support function is

$$s(p, K) = \max_{x \in K} (p, x), \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

where (p, x) denotes the scalar product of vectors p and x in $\mathbb{R}^n$.

Theorem. *Let there exist a continuously differentiable function*

$$\rho_\delta: [t_0, T] \times B_r \rightarrow \mathbb{R}$$

such that for all $t \in [t_0, T]$ and $x \in B_r$ the inequality

$$\frac{\partial \rho_\delta(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in P_\delta(x)} \left(s \left(\frac{\partial \rho_\delta(t, x)}{\partial x}, F(t, x, u) \right) + G(t, x, u) \right) \leq 0 \quad (4)$$

holds together with the boundary condition

$$g(x) \leq \rho_\delta(T, x) \quad \forall x \in B_r. \quad (5)$$

Then the function $\gamma(x) = \rho_\delta(t_0, x)$, $x \in X_0$, is a guaranteed result of control of the differential inclusion (1) with mixed constraint (2), and for any vector $x_0 \in X_0$ and $\alpha > \rho_\delta(t_0, x_0)$ there exists a partition $\omega = \{t_k\}_{k=0}^N$ of $[t_0, T]$ with refinement less than δ and a piecewise programmed strategy realized by the formula

$$u_k = \arg \min_{u \in P_\delta(x_k)} \left(s \left(\frac{\partial \rho_\delta(t_k, x(t_k))}{\partial x}, F(t_k, x(t_k), u) \right) + G(t_k, x(t_k), u) \right)$$

the application of which guarantees the inequality $J(T, x(T)) < \alpha$ for any solution $x(\cdot) \in X(u(\cdot), x_0)$.

This theorem is based on the Hamilton–Jacobi equation method [2, §3.7] in a problem of finding a solution of the differential inclusion that minimizes a terminal functional (problem P_D in [2, §1.3]), generalized for the considered problem of control of the differential inclusion (1) with mixed constraint (2).

Example. Consider $F(t, x, u) = A(t)x + a(t)u + b(t)[- \beta, \beta]$, where the functions $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a(t) \in \mathbb{R}^n$, and $b(t) \in \mathbb{R}^n$ are continuous on $[t_0, T]$ and $a(t)$ and $b(t)$ are eigenvectors of $A(t)$ with eigenvalues $\lambda_a(t)$ and $\lambda_b(t)$, respectively, for every $t \in [t_0, T]$. Let also $\beta > 0$ and $u \in P = [-\alpha, \alpha]$ where $\alpha > 0$. The set $R \subset \mathbb{R}^n \times P$ for the mixed constraint (2) consists of all vectors $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ satisfying the inequality $|u| \leq f(|x|)$, where $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, \alpha]$ is a decreasing continuous function. Let the functional (3) be given by the formula $J(x(\cdot), u(\cdot), x_0) = (x(T), q)$, where $q \in \mathbb{R}^n$. If we consider the function

$$c(t, z) = \frac{1}{r} (|(a(t), z)|f(r + d\delta) - |(b(t), z)|\beta), \quad t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

and the cone $K(t) = \{z \in \mathbb{R}^n: c(t, z) \geq 0\}$ for every $t \in [t_0, T]$, then one can show that the function $\rho_\delta(t, x) = (x, z(t))$, where $dz(t)/dt \in B_{c(t, z(t))} - A^T(t)z(t)$, $z(t) \in K(t)$ for $t \in [t_0, T]$, and $z(T) = q$, satisfies inequalities (4) and (5). Applying Theorem I-2 from [3], one can show the existence of such a function $z(t)$ if the conditions $q \perp b(T)$ and $\lambda_a(t) \leq \lambda_b(t)$ hold for all $t \in [t_0, T]$. Then the function $\gamma(x) = \rho_\delta(t_0, x)$ is a guaranteed result, and the value $u_k \in P$ at the moment $t_k \in \omega(u)$ under the realized $x(t_k)$ is calculated by the formula $u_k = -\text{sign}(a(t_k), z(t_k))f(|x(t_k)| + d\delta)$.

References

1. *Polovinkin E.S.* Set-valued analysis and differential inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014.
2. *Clarke F.* Optimization and nonsmooth analysis. J. Wiley & Sons, 1983.
3. *Haddad G.* Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory // *Isr. J. Math.* 1981. V. 39. Nos. 1–2. P. 83–100.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ (CONSTRUCTION OF ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOLOMORPHIC COEFFICIENTS IN A NEIGHBORHOOD OF INFINITY)

М. В. Коровина (M. V. Korovina)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия
betelgeuser@yandex.ru*

Работа посвящена построению асимптотики решения обыкновенного дифференциального уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности. Как известно, бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой линейного дифференциального уравнения, именно этот случай мы и будем рассматривать. Асимптотики решения будем строить методами резургентного анализа, основы которого изложены в книге [1], а также методом повторного квантования [2].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с голоморфными коэффициентами

$$H\left(x, \frac{d}{dx}\right)u(x) = 0, \quad \text{где} \quad H(x, p) = p^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)p^i. \quad (1)$$

Через $a_i(x)$ обозначены голоморфные функции в окрестности бесконечности. Это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, в которой функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, разлагаются в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_i^j/x^j$.

Задача построения асимптотик решений уравнения (1) является классической задачей аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Одной из первых работ, в которой были построены асимптотики решения уравнения (1) в окрестности бесконечности, является работа [3]. В этой работе были построены асимптотические разложения решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, когда многочлен $H_0(p) = H(0, p)$ имеет простые корни. Эти асимптотики были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся ряды, однако вопрос об интерпретации полученных расходящихся рядов был оставлен открытым, иными словами, метод суммирования этих расходящихся рядов отсутствовал. Такие асимптотики в дальнейшем

получили названия ВКБ-асимптотик. Это название появилось при решении некоторых задач квантовой механики, где были получены асимптотические разложения такого типа.

В конце 80-х годов прошлого века был получен аппарат, пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа–Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем [4]. Впоследствии данный аппарат активно применялся в работах Б.-В. Шульце, Б.Ю. Стернина и В.Е. Шаталова [5] для исследования вырождающихся уравнений, получающихся при рассмотрении эллиптических уравнений на многообразиях с особенностями типа кловя, а также для построений асимптотик уравнений с малым параметром.

Пусть выполнено условие $b_i^0 = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, иными словами, основной символ дифференциального оператора $H(x, \frac{d}{dx})$ является однородной функцией. Задача (1) путем замены $x = 1/r$ сводится к уравнению с вырождением типа кловя второго порядка, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u(r) + b_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u(r) + b_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u(r) + \dots \\ & \dots + b_{k+1} r^{m+k} u(r) + \sum_{i=1}^m r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^j u(r) + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u(r) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $i + h_i > m + k$, через b_i , b_j^i обозначены соответствующие числа, $a^i(r)$ — голоморфные функции. Число $h = m + k$ называется индексом сингулярности уравнения (1). Пусть выполнено неравенство $h_i + i - h > (m - i) \frac{n-k-m}{m}$. Тогда верна

Теорема. *Асимптотика решения уравнения (1) в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{-\frac{\sigma_j}{n-k}} \sum_l^\infty A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^\infty b_i^j x^{-i},$$

где α_{n-k-m}^j , $j = 1, \dots, n-k$, — корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$, a , A_l^j , σ_i , b_i^j , k_0 и α_i^j , $j = 1, \dots, n-k-1$, — некоторые числа.

Если основной символ не является однородной функцией и имеет несколько корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то надо, последовательно сдвигая каждый из корней в нуль путем замены $u_1(r) = e^{\lambda_i/r} u(r)$, для каждого из корней вычислить индекс сингулярности и с помощью приведенной выше теоремы построить асимптотику.

Список литературы

1. Sternin B., Shatalov V. Borel–Laplace transform and asymptotic theory. Introduction to resurgent analysis. New York: CRC Press, 1996.
2. Коровина М.В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями // Диф. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 60–77.
3. Sternberg W. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen // Math. Ann. 1920. Bd. 81. S. 119–186.
4. Ecalle J. Les fonctions resurgentes. Publ. Math. Orsay, Paris, 1981–1985.

5. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V. Operator algebras associated with resurgent transforms and differential equations on manifolds with singularities // Spectral theory, microlocal analysis, singular manifolds. Berlin: Academie, 1997. P. 300–333.

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ
(ON THE FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A SEMILINEAR
PARABOLIC EQUATION WITH CONTROLLABLE PRINCIPAL PART)

М. С. Коржавина (M. S. Korzhavina), В. И. Сумин (V. I. Sumin)

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия*

maryasha_f@mail.ru, v_sumin@mail.ru

При выводе необходимых условий оптимальности, обосновании численных методов оптимизации и во многих других случаях важную роль играют условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) управляемых краевых задач (см., например, [1–3]; история вопроса кратко описана в [3]). Условиям УСГР краевых задач для полулинейных параболических уравнений при фиксированной главной части с управлением в правой части посвящены работы [4; 1, гл. 2, § 5; 2; 5; 6], с управлением в начальном условии — [7]; случай управляемых гладких коэффициентов главной части рассматривался в [8]. В докладе такие условия формулируются в случае первой краевой задачи для параболического уравнения с управляемыми измеримыми главными коэффициентами.

Пусть заданы числа $T > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ ($d_1 \leq d_2$) и ограниченная односвязная область $Q \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial Q \in C_2$); точки области Q обозначаем через $x = \{x^1, \dots, x^n\}$; $\Pi_\sigma \equiv Q \times (0, \sigma)$, $\sigma \in (0, T)$; $\Pi \equiv \Pi_T$; D — некоторое множество элементов пространства $L_\infty(\Pi)$. Ниже используются обозначения функциональных пространств из [9]. Рассмотрим, например, задачу с однородными начальным и граничным условиями

$$\mathbf{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x, t) y'_{x_j})'_{x_i} = g(\{x, t\}, y(x, t)), \quad \{x, t\} \in \Pi, \quad (1)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in Q, \quad y(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где c_{ij} — управления, $1 \leq i, j \leq n$; функция $g(\{x, t\}, y): \Pi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана. Предполагаем, что функции g и g'_y непрерывны по y , измеримы по $\{x, t\}$ и ограничены на любом ограниченном множестве. Множество $\mathbf{D}$ допустимых управлений $\mathbf{c} \equiv \{c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ состоит из всех тех наборов, для каждого из которых $c_{ij} \in D$, $1 \leq i, j \leq n$, и выполняется условие равномерной параболичности $d_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x, t) \xi^i \xi^j \leq d_2 |\xi|^2$, $\{x, t\} \in \Pi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Чтобы определить понятие

решения задачи (1), (2), рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу для уравнения

$$\mathbf{L}[y] = z(x, t), \quad \{x, t\} \in \Pi, \quad (3)$$

с условиями (2). Для любых $y \in V_2^{1,0}(\Pi)$, $\eta \in W_2^{1,1}(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$, $\xi \in [0, T]$ положим

$$J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] \equiv \int_0^\xi dt \int_Q \left\{ -y\eta'_t + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y'_{xj} \eta'_{xi} - \eta z \right\} dx + \int_Q y(x, \xi) \eta(x, \xi) dx.$$

Следуя [9, гл. 3], функцию $y(\cdot)$ из $\dot{V}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$, $0 < \sigma \leq T$, назовем решением задачи (2), (3) на цилиндре Π_σ , отвечающим управлению $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, если она ограничена на Π_σ и для почти всех $\xi \in [0, \sigma]$ удовлетворяет интегральному тождеству $J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] = 0$, $\eta \in \dot{W}_2^{1,1}(\Pi_\sigma)$. Для любых $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ и $z \in L_\infty(\Pi)$ задача (2), (3) имеет единственное ограниченное обобщенное класса $\dot{V}_2^{1,0}(\Pi)$ решение на цилиндре Π (см. [9, гл. 3]). Оператор, ставящий в соответствие функции z это решение при данном $\mathbf{c}$, обозначим через $A_{\mathbf{c}}$:

$$y(x, t) = A_{\mathbf{c}}[z](x, t), \quad \{x, t\} \in \Pi, \quad z \in L_\infty(\Pi). \quad (4)$$

Из результатов [9, гл. 3, теоремы 2.1, 4.2, 7.1, 8.1] и [1, гл. 2, § 5] следует, что при любом $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ оператор $A_{\mathbf{c}}$ — это линейный ограниченный оператор в $L_\infty(\Pi)$; он квазинильпотентен. Этот оператор вольтерров в том смысле, что для любого Π_σ сужение $A[z]|_{\Pi_\sigma}$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus \Pi_\sigma}$ (здесь используется многомерное обобщение [1] известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра).

Решением задачи (1), (2) на цилиндре Π_σ , $0 < \sigma \leq T$, отвечающим набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, назовем функцию $y(\cdot)$, являющуюся при данном $\mathbf{c}$ и $z(x, t) \equiv g(\{x, t\}, y(x, t))$, $\{x, t\} \in \Pi_\sigma$, ограниченным обобщенным класса $\dot{V}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$ решением задачи (2), (3) на этом цилиндре. На любом цилиндре Π_σ , $0 < \sigma \leq T$, набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ не может отвечать более одного такого решения. Каждому набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ при достаточно малом σ отвечает единственное такое решение на Π_σ задачи (1), (2).

Формула (4), которую можно назвать формулой обращения главной части начально-краевой задачи (1), (2), устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом $L_\infty(\Pi)$ функций $z(x, t)$, $\{x, t\} \in \Pi$, и классом удовлетворяющих условиям (2) функций $y(x, t)$, $\{x, t\} \in \Pi$, пространства $\dot{V}_2^{1,0}(\Pi)$. Поэтому задача (1), (2) эквивалентна вольтеррову функционально-операторному уравнению

$$z(x, t) = g(\{x, t\}, A_{\mathbf{c}}[z](x, t)), \quad \{x, t\} \in \Pi, \quad z \in L_\infty(\Pi), \quad (5)$$

над пространством $L_\infty(\Pi)$.

Пусть Ω — та часть $\mathbf{D}$, каждому элементу $\mathbf{c}$ которой отвечает единственное глобальное (т.е. на цилиндре Π) решение $y_{\mathbf{c}}(\cdot)$ задачи (1), (2). Для $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{c}_0 \in \Omega$ положим $r(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0) \equiv \|A_{\mathbf{c}} - A_{\mathbf{c}_0}\|_{L_\infty(\Pi) \rightarrow L_\infty(\Pi)}$. Вольтеррова функционально-операторная переформулировка (5) задачи (1), (2) позволяет методами работ [1–4] доказать следующую теорему УСГР.

Теорема. Для любого $\mathbf{c}_0 \in \Omega$ существуют числа $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что если для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ выполняется неравенство $r(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0) < \delta$, то $\mathbf{c} \in \Omega$, при этом $\|y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{c}_0}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leq Cr(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0)$.

Список литературы

1. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
2. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I, II, III, IV // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2(21). С. 145–155; 2001. № 1(23). С. 198–204; 2002. № 1(25). С. 164–174; 2004. № 1(27). С. 185–193.
3. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. ННГУ. Математика. 2003. № 1. С. 91–107.
4. *Сумин В.И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1587–1595.
5. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. и техн. науки. 2000. Т. 5. № 4. С. 493–495.
6. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного управляемого параболического уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Матер. Междунар. конф.: Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. С. 187–189.
7. *Коржавина М.С., Сумин В.И.* О краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с управлением в начальном условии // Современные методы теории краевых задач: Матер. Междунар. конф. “Понтрягинские чтения – XXIX”, посв. 90-летию В.А. Ильина. М.: МАКС-Пресс, 2018. С. 129–131.
8. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Современные методы теории краевых задач: Матер. Междунар. конф.: Воронежск. вес. мат. шк. “Понтрягинские чтения – XXVIII”. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. С. 158–160.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ (SOME OPTIMAL CONTROL DESIGN UNDER UNCERTAINTY)

В. В. Кулагин (V. V. Koulaguin)

*Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия*

wkoula@gmail.com

Задача синтеза оптимального управления, сформулированная в работе [1], рассматривается как метод борьбы с неопределенностью начальных данных движения, использующий переход от оптимального управления как функции времени к управлению с обратной связью. В качестве развития данного метода для неопределенностей общего вида (неопределенность понимается как наличие управления

системой со стороны природы, случая, противника) предлагается постановка задачи синтеза оптимального управления, выясняющая возможности управления сохранять минимум функционала качества для максимально возможной области изменений параметра, описывающего неопределенность. В общем виде задача исследуется как задача математического программирования для функции с избыточной переменной [2, 3], рассматривается ее применение к задачам управления [4–9], теории принятия решений [10], теории игр [11–13], теории надежности технических систем [14].

Задача синтеза оптимального управления. Пусть u — управление, v — неопределенность, пара (u, v) — акт их совместного воздействия на систему, который оценивается функционалами $g_i(u, v)$, $h_j(u, v)$, $J(u, v)$.

Пусть A — множество пар (u, v) таких, что

$$g_i(u, v) = 0, \quad (1)$$

$$h_j(u, v) \leq 0, \quad (2)$$

$$J(u, v) = \min_u J_v(u, v), \quad (3)$$

где $J_v(u, v)$ — сечение функции $J(u, v)$ при фиксированном параметре неопределенности v . Заметим, что при фиксированном v задача (1)–(3) есть задача условной минимизации. Каждому управлению u ставится в соответствие множество

$$V(u) = \{v \mid (u, v) \in A\},$$

называемое множеством робастности управления u . Задача состоит в нахождении управления u^* такого, что либо

$$V(u^*) \supseteq V(u) \quad \forall u, \quad (i)$$

либо

$$f(V(u^*)) = \max_u f(V(u)), \quad (ii)$$

где $f(\cdot)$ — некоторая функция множества. Управление u^* называется максимально робастным. Множество $V(u^*)$ и величина $f(V(u^*))$ называются максимально достижимыми показателями робастности данной управляемой системы.

Примечания. 1. В качестве управлений рассматриваются все функции времени, фазовых координат и, возможно, части параметра неопределенности (если допустить к рассмотрению функции от всего параметра неопределенности, то это означает, что управляющая сторона заранее знает значение неопределенности, т.е. неопределенность отсутствует).

2. Параметр неопределенности может принимать значения из всего пространства своих значений (в известных подходах к работе с неопределенностью требуется ограниченность множества значений параметра неопределенности, как, например, в минимаксных задачах).

3. Практика решения задач (i), (ii) показывает, что множества робастности $V(u)$ для функций времени обычно пусты. Решение, если оно существует, достигается на управлениях с обратной связью.

4. Решение задачи синтеза оптимального управления в форме (i) существует не всегда. Вопросы существования решения исследуются в [2, 3]. В [9] для одной задачи механики управляемого движения решение получено в форме (i).

5. В качестве параметра неопределенности может выступать внешнее воздействие как функция времени [6].

6. Функция множества $f(\cdot)$ может быть построена, в частности, следуя технике, изложенной в [4], когда задача (ii) принимает вид

$$\max_u \operatorname{root}_v \rho(u, v) = \operatorname{root}_v \max_u \rho(u, v), \quad (4)$$

где $\operatorname{root} \rho(u, v)$ есть корень функции $\rho(u, v)$ при фиксированном управлении u , имеющий смысл радиуса шара, вписанного в множество $V(u)$ и оценивающего это множество. Соотношение (4) позволяет от исходной задачи синтеза перейти к более простой эквивалентной задаче.

7. Соотношение (4) выражает [11–13] равновесие в антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой и ограниченной платой игры.

Закключение. Данный метод синтеза оптимального управления допускает к рассмотрению в качестве управления любые функции времени, фазовых координат и части параметра неопределенности, что позволяет выявить основную характеристику проектируемой системы — ее предельные возможности оставаться работоспособной при заданном виде неопределенности.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Кулагин В.В. Задача математического программирования для функции с избыточным аргументом // Математическое программирование и приложения: Тез. докл. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 61–62.
3. Koulaguin V.V. On minimum of function with extra variable // Constructive nonsmooth analysis and related topics: Abstr. Int. Conf. dedicated to the memory of V.F. Demyanov. Saint-Petersburg: Euler Int. Math. Inst., 2017. Pt. II. P. 29–31.
4. Koulaguin V.V. Balance point method of design under some kind of uncertainty // Optimal control: Int. Conf. dedicated to the 90th anniversary of L.S. Pontryagin. Moscow: Moscow State Univ., 1998.
5. Кулагин В.В., Слесарь Н.О. К синтезу оптимального управления // Дифференциальные уравнения и топология: Тез. докл. Междунар. конф., посв. 100-летию Л.С. Понтрягина. М., 2008. С. 358–359.
6. Кулагин В.В. Задача оптимального управления при фазовых ограничениях и дефиците информации // Математические вопросы анализа негладких моделей. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 1995. С. 159–170.
7. Koulaguin V.V. Maximal admissible nonparametric uncertainty in a control design problem // Control applications of optimization: Proc. 11th IFAC Int. Workshop, St.-Petersburg, Russia. Elsevier, 2001. P. 193–198.
8. Кулагин В.В. Максимальная робастность в задаче оптимального управления // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. X Междунар. сем. им. Е.С. Пятницкого. М.: Ин-т проблем управления РАН, 2008. С. 153–155.
9. Кулагин В.В., Слесарь Н.О. Максимально робастное перемещение материальной точки вдоль отрезка прямой за заданное время с минимальной скоростью // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(2). С. 189–190.

10. Кулагин В.В. Робастность как показатель эффективности решения, принимаемого в условиях неопределенности. Задача о максимальной робастности // Тр. VIII Моск. междунар. конф. по исследованию операций (ORM2016). М., 2016. С. 43–45.
11. Кулагин В.В. Игровое равновесие как эквивалентность двойных задач для функции двух переменных // Тр. V Моск. междунар. конф. по исследованию операций, 2007. С. 278.
12. Кулагин В.В. Об антагонистической игре двух лиц // Устойчивость и процессы управления: Тр. Междунар. конф., посв. 75-летию В.И. Зубова. СПб., 2005. С. 553–563.
13. Кулагин В.В. Антагонистическая игра на разорение // Дискретная оптимизация и исследование операций: Рос. конф. (DOOR07). Владивосток, 2007. С. 164.
14. Кулагин В.В., Проурзин В.А. Амортизатор, максимально робастный к изменению массы защищаемого объекта // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 34–44.

МОДЕЛЬ РАЗРАБОТКИ НЕВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА (MODEL OF NONRENEWABLE RESOURCE EXTRACTION)

А. В. Кулевский (A. V. Kulevsky)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Москва, Россия*

kulevskyav@cs.msu.su, avkulevskij@fa.ru

Работа посвящена проблеме моделирования оптимальных объемов добычи невозобновляемых ресурсов. Таковыми называют природные ресурсы, образованные в окружающей среде в течение многих лет, восстановление которых невозможно или несравнимо медленнее потребления. Примерами служат ископаемое топливо и сырье для него (нефть, уголь, газ), руды металлов, драгоценные камни. Процесс добычи изучается отдельно от иной деятельности. Модель описана в [1, Sect. 10.1].

Описание модели. В задаче используются следующие обозначения:

$R(t) \geq 0$ — общий текущий (не добытый) запас исчерпаемого ресурса;

$R_0 > 0$ — количество ресурса в начальный момент времени $t = 0$;

$E(t)$ — количество ресурса, добываемое в единицу времени;

$p(t) > 0$ — рыночная цена единицы добытого ресурса;

$r > 0$ — коэффициент дисконтирования;

$C(t) \geq 0$ — затраты на добычу (себестоимость) единицы ресурса.

Фирма (отрасль) добывает и продает ресурс как свой единственный продукт. Интенсивность добычи E — внутреннее управление. Освоение новых месторождений игнорируется, процесс добычи описывается простой детерминированной моделью

$$\dot{R}(t) = -E(t), \quad R(0) = R_0.$$

Фирма выбирает стратегию добычи $E(t)$ с целью максимизировать свою общую дисконтированную прибыль на конечном горизонте планирования $[0, T]$, $T < +\infty$. Именно, целевая функция имеет вид

$$J(E, T) = \int_0^T e^{-rt} [p(t)E(t) - C(E(t), R(t))] dt \rightarrow \max_{T, E(\cdot)},$$

где общая себестоимость единицы ресурса $C(E, R)$ зависит от интенсивности добычи и запаса ресурса. Конкретный вид $C(E, R)$ может быть различным, при этом неотрицательная функция $C(E, R)$ непрерывна и выполнены условия $\partial C / \partial E \geq 0$, $\partial C / \partial R \leq 0$, по которым себестоимость, вообще говоря, возрастает как в процессе добычи, так и с ростом интенсивности. Поведение рыночной цены единицы добытого ресурса $p(t)$ считается наперед известным и не зависящим от деятельности рассматриваемой фирмы; $R(t)$ — фазовая переменная задачи. Стратегия добычи $E(t)$, $t \in [0, T]$, является управляющим параметром задачи, удовлетворяющим ограничениям $0 \leq E(t) \leq E_{\max}$. Заданное максимальное значение интенсивности добычи $E_{\max} > 0$ определяется техническими и финансовыми ограничениями. Момент окончания процесса разработки месторождения $T > 0$ может быть как наперед заданным (что соответствует максимизации прибыли к конкретному сроку), так и произвольным (фирма стремится получить в принципе максимальную отдачу от месторождения).

Получаем задачу оптимального управления: найти оптимальную интенсивность добычи $E^*(t)$ (управление) и оптимальный момент завершения процесса разработки T^* (при нефиксированном T), а также соответствующие оптимальное изменение запаса ресурса $R^*(t)$ (траектория) и максимальный размер прибыли $J^* = J(E^*, T^*)$ (функционал).

Линейная модель без затрат на добычу. Рассматривается модель при $C(E, R) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -E(t), \\ R(0) = R_0, \\ R(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ E(t) \in U = [0, E_{\max}], \quad t \in [0, T], \\ J(E, T) = \int_0^T e^{-rt} p(t)E(t) dt \rightarrow \max_{T, E(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $R_0 > 0$, $r > 0$, $E_{\max} > 0$ — заданные константы. Управление $E(\cdot)$ измеримо, $E(\cdot) \in L^2[0, T]$. Момент $T > 0$ рассматриваем как фиксированным, так и нефиксированным. Функция $p(t) > 0$ задана.

Сформулируем основные результаты для задачи (1).

Теорема 1. В задаче (1) при любой функции $p(\cdot) \in L^2[0, T]$ и любом фиксированном $T > 0$ существует оптимальное управление.

Лемма 1. Равенство $R(T) = 0$ — необходимое условие окончания оптимального процесса при нефиксированном $T > 0$.

Лемма 2. При свободном $T > 0$ и постоянной $p(t) \equiv p_0 > 0$ оптимальное решение задачи (1) имеет вид $T^* \geq \hat{T} = R_0 / E_{\max}$,

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in (\hat{T}, T^*], \end{cases} \quad R^*(t) = \begin{cases} R_0 - tE_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in [\hat{T}, T^*], \end{cases}$$

$$J^* = J(E^*, T^*) = \frac{p_0 E_{\max}}{r} (1 - e^{-r\hat{T}}).$$

Лемма 3. Если произведение $e^{-rt}p(t)$ строго монотонно убывает, функция $p(t)$ дифференцируема и T свободное, то оптимальное решение задачи (1) имеет вид $T^* \geq \hat{T} = R_0/E_{\max}$,

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in (\hat{T}, T^*], \end{cases} \quad R^*(t) = \begin{cases} R_0 - tE_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in [\hat{T}, T^*], \end{cases}$$

$$J^* = J(E^*, T^*) = E_{\max} \int_0^{\hat{T}} e^{-rt} p(t) dt.$$

Замечание. По смыслу задачи (1) в леммах 2, 3 можно считать $T^* = \hat{T}$.

Модель с затратами на добычу, не зависящими от ресурса. Здесь затраты на добычу вида $C(E, R) = C(E)$ не зависят от R :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -E(t), \\ R(0) = R_0, \\ R(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ E(t) \in U = [0, E_{\max}], \quad t \in [0, T], \\ J(E) = \int_0^T e^{-rt} [p(t)E(t) - C(E(t))] dt \rightarrow \max_{E(\cdot)}. \end{cases} \quad (2)$$

Параметры $E(\cdot)$, R_0 , r , $E_{\max}$, $p(t)$ полностью аналогичны задаче (1). Функция $C(E)$ непрерывна на U , момент $T > 0$ фиксирован.

Сформулируем основные результаты для задачи (2).

Теорема 2. Если функция $C(E)$ непрерывна и выпукла на U , то в задаче (2) для любой функции $p(\cdot) \in L^2[0, T]$ существует оптимальное управление.

Теорема 3. В задаче (2) для произвольной функции $p(\cdot) \in L^2[0, T]$ и квадратичной функции $C(E) = c_0 + c_1 E + c_2 E^2$, где $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$, оптимальное управление существует и единственно.

Список литературы

1. Hritonenko N., Yatsenko Y. Mathematical modeling in economics, ecology and the environment. New York: Springer, 2013.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
5. Дмитрук А.В. Лекции по математической теории оптимального управления. М., 2010.

ATTACKER–DEFENDER–TARGET PROBLEM AS A 2×1 LINEAR DIFFERENTIAL GAME*

S. S. Kumkov

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

sskumk@gmail.com

Let us consider a situation of a space intercept with three objects: the attacker A , the defender D , and the target T . Usual assumptions are supposed to be true:

- the vectors of objects' nominal velocities belong to one plane;
- the initial lines-of-sight attacker–defender and attacker–target are almost parallel to the objects' velocities (that is, the angles between the longitudinal axis and the objects velocity vectors are close to 0° or 180°);
- the objects can maneuver applying lateral accelerations, but the accelerations are relatively small; thus in general the longitudinal magnitudes of velocities stay almost the same during the entire process.

All these assumptions allow one to linearize motions along the nominal trajectories. After linearization, the longitudinal motions become uniform and define only the instants of nominal rendezvous of the attacker with the defender and target. Neglecting the longitudinal motions, one can consider only lateral one-dimensional motions of the objects, which are described by linear dynamics:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_\sigma &= A_\sigma \mathbf{z}_\sigma + B_\sigma u_\sigma, \\ t \geq t_0, \quad \mathbf{z}_\sigma &\in \mathbb{R}^{n_\sigma}, \quad u_\sigma \in P_\sigma \subset \mathbb{R}^{p_\sigma}, \quad \sigma \in \{A, D, T\}, \end{aligned} \tag{1}$$

Here, $\mathbf{z}_A$, $\mathbf{z}_D$, and $\mathbf{z}_T$ are the phase vectors of the attacker, defender, and target, respectively. The objects' controls u_A , u_D , and u_T are constrained by convex compact sets P_A , P_D , and P_T in their own spaces. The matrices A_A , A_D , and A_T are square; B_A , B_D , and B_T are, generally speaking, rectangular matrices; if some object has a scalar control, then the corresponding matrix is a column.

Denote by z_A , z_D , and z_T the first components of the vectors $\mathbf{z}_A$, $\mathbf{z}_D$, and $\mathbf{z}_T$ assuming they are the objects lateral geometric coordinates.

Fix two instants t_D and t_T that are the instants of the nominal rendezvous of the attacker with the defender and target. Naturally assume $t_T > t_D$. The interest of the attacker is not to be intercepted by the defender at the instant t_D and to intercept the target at the instant t_T . Denoting by d_D the capture radius of the defender and by d_T the capture radius of the attacker (the radius within which the target can be captured), we can formally define the objective of the attacker:

$$|z_A(t_D) - z_D(t_D)| \geq d_D, \quad |z_A(t_T) - z_T(t_T)| \leq d_T. \tag{2}$$

Consider a zero-sum differential game (called later the *ADT game* or *ADT problem*): the first player (attacker) using the control u_A tries to guide system (1) to the

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410).

target set (2); the second player, combining the defender and the target, tries to hinder this by using the controls u_D and u_T . During the game, both players know the exact values of all phase coordinates. It is necessary to construct the set of initial positions in which the first player guarantees the achievement of its objective (*solvability set*).

The considered problem arises when studying a pursuit in upper atmosphere layers. J. Shinar is one of the first authors who addressed the problems of ADT type (see, for example, [1]). ADT type games with many attackers and/or defenders are considered, in particular, by I. Rusnak in [2]. In [3] the same author considers an ADT game without constraints on the objects' controls, but with an integro-terminal payoff (the integral part of the payoff contains a penalty for large-valued controls). In [4], a situation with attacker and defender with simple motion dynamics and passive defenders in the plane is studied: there are moving obstacles which cannot be passed through by the attacker. The obstacle motion law is known. The authors suggest a numerical algorithm for constructing solvability sets in games of this type. In [5] an ADT problem is considered with objects having simple motion dynamics in the plane. In the paper, the authors suggest an explicit suboptimal solution of the problem.

Let us pass to new coordinates x_1 and x_2 that are the values of the relative coordinates $z_A - z_D$ and $z_A - z_T$ forecasted to the corresponding instants t_D and t_T , respectively, under zero players controls:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_A^1(t_D, t)z_A(t) - X_D^1(t_D, t)z_D(t), \\ x_2(t) &= X_A^1(t_T, t)z_A(t) - X_T^1(t_T, t)z_T(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Here, $X_\sigma^1(t, \theta)$, $\sigma \in \{A, D, T\}$, are the first rows of the fundamental Cauchy matrices $X_\sigma(t, \theta)$ that correspond to the differential equations $\dot{\mathbf{z}}_\sigma = A_\sigma \mathbf{z}_\sigma$.

Differentiating the values $x_i(t)$ with respect to t , we obtain the dynamics in the new coordinates:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_A^1(t_D, t)B_A u_A - X_D^1(t_D, t)B_D u_D, \\ \dot{x}_2 &= X_A^1(t_T, t)B_A u_A - X_T^1(t_T, t)B_T u_T, \\ t &\in [t_0, t_T], \quad u_A \in P_A, \quad u_T \in P_T, \quad u_D \in P_D, \\ |x_1(t_D)| &\geq d_D, \quad |x_2(t_T)| \leq d_T. \end{aligned} \quad (4)$$

From the results of the differential game theory, it follows (see, for instance, [6–8]) that the differential game (4) is equivalent to the differential game with dynamics (1) and target set (2). The equivalence means that the first player can successfully finish the game (1), (2) from some initial position $(t, \mathbf{z}_A(t), \mathbf{z}_D(t), \mathbf{z}_T(t))$ if and only if the first player can successfully finish the game (4) from the position $(t, x_1(t), x_2(t))$, where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are computed by formula (3). Computations with dynamics (4) are more convenient since the dimension of the phase vector $x = (x_1, x_2)^\top$ is 2 and the phase vector x is absent on the right-hand part of system (4).

The author applied numerical algorithms for constructing solvability sets in linear differential games with two-dimensional state vector and a non-convex target set at a fixed termination instant. By means of these algorithms, a series of ADT problems has been numerically investigated for different variants of the game dynamics and parameters. The results of these investigations will be presented in the talk.

References

1. *Lipman Y., Shinar J.* A linear pursuit–evasion game with a state constraint for a highly maneuverable evader // *New trends in dynamic games and applications* / Ed. by G. J. Olsder. Boston: Birkhäuser, 1995. P. 143–164. (Ann. Int. Soc. Dynamic Games; V. 3).
2. *Rusnak I.* The lady, the bandits and the body guards—a two team dynamic game // *Proc. 16th IFAC World Congr.* 2005. V. 38. P. 934–939.
3. *Rusnak I., Weiss H., Hexner G.* Guidance laws in target–missile–defender scenario with an aggressive defender // *Proc. 18th IFAC World Congr.* 2001. V. 44. P. 9349–9354.
4. *Fisac J.F., Sastry S.S.* The pursuit–evasion–defense differential game in dynamic constrained environments // *54th IEEE Conf. on Decision and Control CDC’2015, Osaka, 2015.* P. 4549–4556.
5. *Pachter M., Garcia E., Casbeer D.* Active target defense differential game // *Proc. 52nd Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, Monticello, IL, 2014.* P. 46–53.
6. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional differential games. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
7. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
8. *Bryson A.E., Ho Y.C.* Applied optimal control. Optimization, estimation and control. Hemisphere Publ., J. Wiley and Sons, 1975.

ON ZERO ORDER ASYMPTOTIC SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED LINEAR–QUADRATIC PROBLEMS IN A CRITICAL CASE*

G. A. Kurina^{a,b,c}, N. T. Hoai^d

^a*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

^b*Voronezh Institute of Law and Economics, Voronezh, Russia*

^c*Federal Research Center “Computer Science and Control”
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^d*Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam*

`kurina@math.vsu.ru, nguyenthahoai@hus.edu.vn`

The most part of publications devoted to singularly perturbed optimal control problems deals with a non-critical case when an equation for a fast variable in the degenerate state equation is resolvable with respect to the fast component of the state variable (see, for instance, the reviews [1–3]).

We consider the problem P_ε of minimizing the functional

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (\langle x, W(t, \varepsilon)x \rangle + 2\langle x, g(t, \varepsilon) \rangle + \varepsilon^2 \langle u, R(t, \varepsilon)u \rangle) dt \quad (1)$$

*The work of the first author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01220).

over trajectories of the system

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon^2 B(t, \varepsilon)u + \varepsilon f(t, \varepsilon) \quad (2)$$

with the condition

$$x(0, \varepsilon) = x^0. \quad (3)$$

Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product in the corresponding real spaces, $t \in [0, T]$, $T > 0$ is fixed; $x = x(t, \varepsilon)$, $g(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon) \in X$, $\dim X = m$, and $u = u(t, \varepsilon) \in U$, $\dim U = r$; the real-valued matrices $W(t, \varepsilon)$, $R(t, \varepsilon)$, $A(t, \varepsilon)$, and $B(t, \varepsilon)$ of corresponding dimensions and the vector-functions $g(t, \varepsilon)$ and $f(t, \varepsilon)$ are sufficiently smooth with respect to their arguments; the matrices $W(t, \varepsilon)$ and $R(t, \varepsilon)$ are symmetric; moreover, the matrix $W(t, \varepsilon)$ is positive semi-definite for sufficiently small $\varepsilon \geq 0$ and the matrix $R(t, 0)$ is positive definite. Under these assumptions the problem P_ε is uniquely solvable for sufficiently small $\varepsilon > 0$.

Further the prime means the transposition, I is the identity operator, and the coefficient of ε^i in an expansion of a function $D(t, \varepsilon)$ in powers of ε will be denoted by $D_i(t)$.

We will assume that the matrix $A_0(t)$ has m eigenvalues $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$ for all $t \in [0, T]$ that satisfy the following conditions:

- I. $\lambda_j(t) = 0$ for $j = 1, 2, \dots, k$, $k < m$.
- II. All k eigenvectors $v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)$ of $A_0(t)$ corresponding to $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, are linearly independent.

Let $V(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t))$ and $S(t) = (s_1(t), \dots, s_k(t))$, where $s_1(t), \dots, s_k(t)$ are eigenvectors of the matrix $A_0(t)'$ corresponding to eigenvalues $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1, \dots, k$, such that $V(t)'S(t)$ is the identity $k \times k$ matrix. It is easy to see that $P_0(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$ and $Q_0(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ are orthogonal projectors of the space X onto the subspaces $\ker A_0(t)$ and $\ker A_0(t)'$, respectively, corresponding to the decompositions of the space X into the orthogonal sums

$$X = \ker A_0(t) \oplus \operatorname{im} A_0(t)' = \ker A_0(t)' \oplus \operatorname{im} A_0(t).$$

Let us introduce the notation $M(t) = Q_0(t)A_1(t)P_0(t)$.

We also assume that the following conditions are satisfied for all $t \in [0, T]$:

- III. The operator $(I - P_0(t))A_0(t)(I - P_0(t)) : \operatorname{im} A_0(t)' \rightarrow \operatorname{im} A_0(t)'$ and the operator $(Q_0(t)P_0(t))^{-1}M(t) : \ker A_0(t) \rightarrow \ker A_0(t)'$ are stable.
- IV. The equalities $P_0(t)W_0(t) = 0$ and $P_0(t)g_0(t) = 0$ are valid.

The asymptotic solution of problem (1)–(3) is sought in the form

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1,2} (\Pi_i z(\tau_i, \varepsilon) + Q_i z(\sigma_i, \varepsilon)), \quad (4)$$

where $z = (x', u')'$; $\tau_i = t/\varepsilon^i$, $\sigma_i = (t - T)/\varepsilon^i$, $i = 1, 2$; $\bar{z}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{z}_j(t)$, $\Pi_i z(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} z(\tau_i)$, $Q_i z(\sigma_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{ij} z(\sigma_i)$; $\bar{z}_j(t)$ are regular functions; $\Pi_{ij} z(\tau_i)$ and $Q_{ij} z(\sigma_i)$ are boundary functions of exponential type in the vicinities of $t = 0$ and $t = T$, respectively, that satisfy the inequalities

$$\|\Pi_{ij} z(\tau_i)\| \leq c \exp(-\varkappa \tau_i), \quad \tau_i \geq 0, \quad \|Q_{ij} z(\sigma_i)\| \leq c \exp(\varkappa \sigma_i), \quad \sigma_i \leq 0,$$

with some positive constants c and $\varkappa$ independent of τ_i and σ_i .

It should be noted that an asymptotic solution to the initial value problem

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad x(0, \varepsilon) = x^0,$$

where the matrix $A(t)$ is singular, has been constructed in [4].

In contrast to this paper, a projector approach is used here, which helps us to make the algorithm for constructing the asymptotics clearer.

To construct the asymptotics, we use the so-called direct scheme method [5], which consists in substituting the postulated asymptotic expansion of a solution immediately into the condition of the problem and obtaining problems for finding the asymptotic terms.

Substitute the series (4) into (1) and present the integrand as an asymptotic sum of terms depending on t , τ_i , and σ_i , $i = 1, 2$. We can pass in the integrals of functions of τ_i and σ_i , $i = 1, 2$, to infinite integrals over the corresponding intervals $[0, +\infty)$ and $(-\infty, 0]$.

The functional (1) is represented as

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j J_j. \quad (5)$$

Substituting (4) into (2) and (3) and equating in expansions in powers of ε the coefficients with like powers of ε depending on t , τ_i , and σ_i , $i = 1, 2$, separately, we obtain relations for finding the terms of the series (4). From these relations, using the projector approach, we first get a zero-order asymptotic approximation for the state variable and the functions $(I - P_0(t))\bar{x}_1(t)$, $(I - P_0(0))\Pi_{11}x(\tau_1)$, and $(I - P_0(T))Q_{11}x(\sigma_1)$. For instance, from the equation $A_0(t)\bar{x}_0(t) = 0$ we have $(I - P_0(t))\bar{x}_0(t) = 0$. The coefficients J_0 and J_1 in (5) become known.

Transforming the expressions for J_2 , J_3 , and J_4 , we obtain the problem $\bar{P}_0$ for finding $\bar{u}_0(t)$ and $P_0(t)\bar{x}_1(t)$, two performance indices for the constructed optimal control problems $\Pi_{10}P$ and $Q_{10}P$, and three performance indices for the constructed optimal control problems $\bar{P}_1$, $\Pi_{20}P$, and $Q_{20}P$, respectively.

The following theorem is valid.

Theorem. *Using the direct scheme method, the zero-order asymptotic solution of the form (4) for problem (1)–(3) has been constructed. Moreover, the functions $\bar{u}_0(t)$ and $P_0(t)\bar{x}_1(t)$ can be found as a solution of the minimization problem $\bar{P}_0$, the functions $\Pi_{10}u(\tau_1)$ and $P_0(0)\Pi_{11}x(\tau_1)$ can be found as a solution of the optimal control problem $\Pi_{10}P$, the functions $Q_{10}u(\sigma_1)$ and $P_0(T)Q_{11}x(\sigma_1)$ can be found as a solution of the optimal control problem $Q_{10}P$, the functions $\Pi_{20}u(\tau_2)$ and $(I - P_0(0))\Pi_{22}x(\tau_2)$ can be found as a solution of the optimal control problem $\Pi_{20}P$, and the functions $Q_{20}u(\sigma_2)$ and $(I - P_0(T))Q_{22}x(\sigma_2)$ can be found as a solution of the optimal control problem $Q_{20}P$.*

References

1. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems // Itogi Nauki Tekhn., Mat. Analiz. 1982. V. 20. P. 3–77 (in Russian).
2. Kurina G.A. Singular perturbations of control problems with equation of state not solved for the derivative (a survey) // Izv. Ross. Akad. Nauk, Tekhn. Kibernet. 1992. No. 4. P. 20–48 (in Russian).

3. *Dmitriev M.G., Kurina G.A.* Singular perturbations in control problems // *Avtom. Telemekh.* 2006. No. 1. P. 3–51 (in Russian).
4. *Butuzov V.F., Nefedov N.N.* A problem in singular perturbation theory // *Diff. Uravn.* 1976. V. 12, No. 10. P. 1736–1747 (in Russian).
5. *Belokopytov S.V., Dmitriev M.G.* Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // *Syst. Control Lett.* 1986. V. 8, No. 2. P. 129–135.

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ
ВХОДОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И БЫСТРЫХ УПРАВЛЕНИЙ
(ON THE DYNAMICS OF SYSTEMS UNDER THE INFLUENCE
OF HIGH-ORDER PULSE INPUTS AND FAST CONTROLS)

А. Б. Куржанский (A. B. Kurzhanski)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

`kurzhans@mail.ru`

Рассматривается круг следующих задач:

- управление под воздействием импульсов высокого порядка;
- достижимость при импульсных управлениях и ограничениях на фазовые траектории;
- двойственные переменные при оптимизации импульсных управлений;
- оптимальное управление при ультрагладких управлениях и наличии фазовых ограничений;
- возрастающие и убывающие шкалы используемых пространств в теории двойственности для указанных задач;
- двойственность в теории ультрабыстрых управлений.

SUB-FINSLER PROBLEMS ON CARTAN AND ENGEL GROUPS*

E. Le Donne, Yu. L. Sachkov

*University of Jyväskylä, Finland
Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia
ledonne@msri.org, yusachkov@gmail.com*

We consider the ℓ_∞ left-invariant problem on the 5-dimensional free nilpotent Lie group of rank 2 and step 3 (the Cartan group). The problem is studied as a time-optimal problem via geometric control techniques [1].

We apply the Pontryagin maximum principle and describe optimal abnormal trajectories.

Further, we characterize singular arcs; all singular trajectories are shown to be optimal.

Finally, we study bang–bang trajectories. We construct the bang–bang flow that generates these trajectories. Via second-order optimality conditions, we prove upper bounds for the number of switchings for bang–bang and mixed controls.

As a corollary of the above results, we obtain a uniform upper bound on the number of switchings of optimal trajectories for all terminal points in the Cartan group.

We also obtain similar results for a one-parameter family of left-invariant sub-Finsler problems on the Engel group (4-dimensional nilpotent Lie group of rank 2 and step 3).

References

1. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control theory from the geometric viewpoint. Springer, 2004.

PROGRAM-PREDICTIVE CONTROL FOR DIFFERENTIAL GAMES

Yu. S. Ledyaev

*Department of Mathematics, Western Michigan University, Kalamazoo, USA
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
ledyaev@wmich.edu*

We consider a differential game with dynamics

$$\dot{x} = f(x, u, v)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u \in \mathbb{U}$ is the control of the player $\textcircled{u}$ which minimizes the value of the functional

$$\ell(x(T))$$

*Yu.S. was supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01387. E.L.D. was partially supported by the Academy of Finland (grant 288501 ‘*Geometry of sub-Riemannian groups*’) and by the European Research Council (ERC Starting Grant 713998 GeoMeG ‘*Geometry of Metric Groups*’).

while $v \in \mathbb{V}$ is the control of the player $\textcircled{v}$ which maximizes the value of the functional $\ell(x(T))$.

It is well known that under general assumptions such a differential game has a saddle point in discontinuous feedback control $u = k(t, x)$ and $v = m(t, x)$.

In this talk we discuss a new program-predictive method for a design of ε -optimal feedback $k(t, x)$.

This method is based on a solution of some nonstandard boundary value problem for an extended adjoint system and a generalized ε -maximum principle which characterizes an ε -optimal non-anticipating strategy in the differential game.

SOLUTIONS OF TRIANGULAR SCHLESINGER EQUATIONS

V. P. Leksin

State Social-Humanity University, Kolomna, Russia

lexin_vp@mail.ru

Let $B_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$, be a collection of $p \times p$ functional matrices defined in some neighborhood $U \subset \mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i - a_j = 0\}$ of some point $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) \in U$ of the complex linear space $\mathbb{C}^n$. The Schlesinger equation [1] is the system of Pfaff equations

$$d B_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n [B_i(a), B_j(a)] \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j}. \quad (1)$$

with some initial conditions $B_i(a^0) = B_i^0$.

Here $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ denote the ordinary commutator of matrices.

The Schlesinger equation [1, 3] is the condition of the isomonodromic deformation with respect to parameters $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ of the Fuchsian system

$$\frac{dy(z)}{dz} = \sum_{i=1}^n B_i(a^0) \frac{dy(z)}{z - a_i}.$$

The Schlesinger equation is written as the system of partial differential equations

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_j} = \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_i} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

In the general case the Schlesinger equation is integrable in the Frobenius sense [1]. Locally in a neighborhood of any initial point a^0 it has a holomorphic solution $B(a) = (B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ that by the Malgrange theorem also has an analytic continuation to the whole universal covering $\widetilde{\mathbb{C}}_*^n$ as a meromorphic function with polar

singularities on the Malgrange Θ -divisor. The Malgrange Θ -divisor is defined by the zeros of the Miwa tau-function $\tau(a)$, which is a solution of the equation [1]

$$d \log \tau(a) = \kappa \sum_{i \neq j, i, j=1}^n \operatorname{tr}(B_i(a)B_j(a)) \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j}.$$

We consider the Schlesinger equation in a special case when all matrices $B_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$, are upper triangular or lower triangular. Under additional conditions on the eigenvalues of the initial matrices $B_i(a^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, we prove that the Malgrange Θ -divisor is empty and the entries of all matrices have an integral representation of hypergeometric type. We prove the following theorem (see also [2–5]).

Theorem. *Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be pairwise different complex numbers. If for all $i = 1, 2, \dots, n$ the sequences of eigenvalues $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^p$ of the upper triangular solutions $B_i(a)$ of equations (1) form an arithmetic progression with fixed difference Δ , then the entries $u_i^{k,l}(a)$ of the components of the solutions $B_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$, have the hypergeometric integral form*

$$u_i^{k,l}(a_1, \dots, a_n) = \lambda_i \int_{\gamma_j} (t - a_1)^{\lambda_1} \dots (t - a_n)^{\lambda_n} \frac{dt}{t - a_i},$$

where $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = (l - k)\Delta$. When $\Delta = 1/N \in \mathbb{Q}$, $N \in \mathbb{Z}$, it holds that $u_i^{m,m+k}(a) = k\Delta \int_{\gamma} \frac{w^k dz}{z - a_i}$ is a period of the meromorphic form $\omega_i = k\Delta \frac{w^k dz}{z - a_i}$ on the algebraic curve $\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^N = \prod_{j=1}^n (z - a_j)\}$. The singularities of all integrals are contained in the union of hyperplanes $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{a_i - a_j = 0\}$ and the Malgrange divisor Θ is empty.

References

1. Bolibrukh A.A. Obratnye zadachi monodromii v analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii. Moscow: MTsNMO, 2009.
2. Dragovich V., Schramchenko V. Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems: E-print, arxiv: 1604.01820v2 [math.AG].
3. Gontsov R.R., Leksin V.P. On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 / Ed. by S.V. Rogosin and M.V. Dubatovskaya. Cambridge Sci. Publ., 2014. P. 21–34.
4. Kapovich M., Millson J. Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation // Can. Math. Bull. 2001. V. 44. P. 36–60.
5. Kohno T. Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 339–363.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НАДСТРОЙКИ
И КОНСТРУКЦИИ ПОТОКА РАНГА 1
И ПРОСТОЙ СПЕКТР ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПОТОКОВ
(ALGEBRAIC SPACERS IN A CONSTRUCTION OF A RANK 1 FLOW AND
THE SIMPLE SPECTRUM OF THE TENSOR PRODUCTS OF FLOWS)*

М. С. Лобанов (М. S. Lobanov)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва,
Россия*

misha_msu@mail.ru

В работе [1] высказывалась гипотеза о том, что существуют перемешивающие потоки T_t такие, что произведения $T_t \otimes T_{\alpha t}$ имеют простой спектр при всех $\alpha > 1$. Нам удалось установить, что аналогичная гипотеза верна в более широком классе слабо перемешивающих потоков.

Однопараметрическим потоком $T_t, t \in \mathbb{R}$, называется непрерывное вложение $\mathbb{R}$ в группу $\text{Aut}(X, \mu)$ автоморфизмов пространства (X, μ) . Поток T_t , сохраняющий меру, индуцирует унитарный поток $T_t f(x) = f(T_t x)$ на $L_2(X, \mu)$, оба потока далее обозначаются одинаково.

T_t имеет простой спектр, если существует $f(x) \in L_2(X, \mu)$ такая, что замыкание линейной оболочки $\{T_t f: t \in \mathbb{R}\}$ дает $L_2(X, \mu)$.

Оператор в $L_2(X, \mu)$, являющийся ортогональной проекцией на подпространство констант, обозначается через Θ , I — тождественный оператор, H — ортогональное дополнение к подпространству констант.

Поток T_t называется *жестким*, если для некоторой последовательности $\tau_j \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$T_{\tau_j} \rightarrow_w I.$$

Если же, кроме того, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и любой последовательности $\{t_j\}$, $t_j \in [\varepsilon \tau_j, (1 - \varepsilon) \tau_j]$ выполнено условие

$$T_{t_j} \rightarrow_w \Theta,$$

то мы будем говорить, что поток обладает *лакунарной жесткостью*.

Оператор P является *специальным слабым пределом* потока T_t , если для любого числа $\alpha > 1$ найдется последовательность $\{t_j\}$ такая, что

$$T_{t_j} \rightarrow_w P, \quad T_{\alpha t_j} \rightarrow_w P.$$

Прямым произведением потоков T_t и $T_{\alpha t}$ называется поток $T_t \otimes T_{\alpha t}$, действующий на пространстве $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ следующим образом:

$$T_t \otimes T_{\alpha t}(x, y) = (T_t x, T_{\alpha t} y).$$

Отвечающий ему унитарный поток на пространстве $L_2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ является тензорным произведением $T_t \otimes T_{\alpha t}$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-6222.2018.1).

Теорема. *Существует поток T_t с простым спектром, обладающий свойством лакунарной жесткости, причем для всех $\beta > 0$ операторы*

$$(T_\beta + 2I + T_{-\beta})/4$$

являются специальными слабыми пределами потока T_t . Для такого потока тензорное произведение $T_t \otimes T_{\alpha t}$ имеет простой спектр при любом $\alpha > 1$.

Указанный в теореме поток был построен с использованием конструкции потока ранга 1 с разными типами надстроек на разных подпоследовательностях этапов. В частности, для получения указанных специальных слабых пределов были использованы надстройки, выбранные с использованием отображения в конечных полях, задаваемых функцией следа.

Результаты получены докладчиком совместно с Валерием Валентиновичем Рыжиковым.

Список литературы

1. Рыжиков В.В. Простой спектр тензорного произведения степеней перемешивающего автоморфизма // Тр. Моск. мат. о-ва. 2012. Т. 73, № 2. С. 229–239.

CONVEX TRIGONOMETRY WITH APPLICATIONS TO SUB-FINSLER GEOMETRY*

L. V. Lokutsievskiy

*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

lion.lokut@gmail.com

I plan to speak about a new convenient method of describing an arbitrary flat convex compact set Ω by special functions $\cos_\Omega$ and $\sin_\Omega$ which generalize the classical trigonometric functions $\cos$ and $\sin$ from the unit circle. Apparently, this method may be very useful for explicit description of solutions of optimal control problems with two-dimensional control lying in Ω . Using this method it is possible to explicitly integrate a series of sub-Finsler problems with two-dimensional control lying in an arbitrary convex set Ω . Namely, sub-Finsler problems on the Heisenberg, Engel, and Cartan groups as well as Grushin's and Martinet's cases are considered. New functions can be easily computed for a wide class of compact convex sets including arbitrary polygons.

References

1. Lokutsievskiy L.V. Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry: E-print, arXiv:1807.08155.

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 17-01-00805.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ
ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ
(ON THE CONTROLLABILITY PROBLEM WITH STATE CONSTRAINTS)*

Л. Н. Лукьянова (L. N. Lukianova)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва,
Россия*

lln@cs.msu.su

Приведены достаточные условия на параметры нелинейной системы, при которых для начальной позиции существует решение задачи уклонения от столкновения с препятствием при движении к целевому множеству. Конструкция управления, решающего такую задачу, опирается на исследования [1–8].

Постановка задачи. Рассматривается динамическая управляемая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\gamma(x(t))[v(t) - \alpha(x(t))], \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где $t \geq 0$, $x \in E^n$, $v \in Q \subset E^p$, E^n есть n -мерное евклидово пространство, Q — выпуклое компактное телесное множество в E^p , $\text{Int } Q \ni 0$, v — параметр управления, A , B — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times p$ соответственно, функции $\alpha(x): E^n \rightarrow E^p$, $\gamma(x): E^n \rightarrow E^{p \times p}$ определены в области $D \subset E^n$, содержащей начало координат и $(p \times p)$ -матрица $\gamma(x)$ невырождена для всех $x \in D$. Под допустимыми управлениями будем понимать измеримые по Лебегу функции $v(t)$ со значениями в множестве Q . В пространстве E^n заданы целевое множество M_1 и препятствие M_2 . Для их задания введем ненулевую матрицу π размера $q \times n$, $2 \leq q \leq n$. Предположим, что $M_i = M^1 + M_i^2$, $i = 1, 2$, где $M^1 = \{x \in E^n: \pi x = 0\}$, M_i^2 — звездное [9] ограниченное открытое множество из подпространства $\pi E^n = L^1$; $x^0 \notin M_i$, $i = 1, 2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Определение. Для начальной позиции x^0 линейной динамической системы (1) существует решение задачи уклонения от столкновения с препятствием M_2 при движении вектора $x(t)$ к множеству M_1 , если найдутся допустимое управление $v(t)$ и конечный момент времени $T \geq 0$ такие, что $x(T) \in M_1$ и $x(t) \notin M_2$, $t \in [0, T]$.

Рассматривается задача о нахождении *достаточных условий* на параметры системы (1), при которых для начальной позиции x^0 существует решение задачи уклонения от столкновения с препятствием M_2 при движении к множеству M_1 .

Описание управления, решающего задачу. В силу определения множеств M_1 , M_2 выполнение включения $x \in M_i$ эквивалентно соотношению $\pi x \in M_i^2$. Обозначим через $k \geq 0$ такое целое число, что $\pi A^k B \neq 0$, а $\pi A^i B = 0$ при $i = 0, \dots, k-1$, если $k \geq 1$.

Предположение 1. Существует выпуклое компактное телесное множество P в E^p такое, что для всех $x \in D$ справедливо включение $Q \supset \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)P$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 14-11-00539).

Предлагаемый подход к решению поставленной задачи состоит в выборе управления v в форме

$$v = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)(u_1 + u_2), \quad u_i \in P_i, \quad i = 1, 2, \quad P_1 + P_2 \subset P, \quad (2)$$

где u_1, u_2 выбираются следующим образом. Пусть P_1, P_2 — выпуклые компакты, $P = P_1 + P_2$, $\text{Int } P_1 \neq \emptyset$, $\text{Int } P_2 \neq \emptyset$, $0 \in P_1$, $0 \in P_2$, $u_1 \in P_1$, $u_2 \in P_2$, $m_1 \in M_1$. Построение управления u_1 , решающего задачу управляемости для системы (1) на множество M_1 , проведем на основе метода погружающих функций, опирающегося на результаты работ [7, 8].

Если $\pi e^{At}x^0 \notin M_1^2$ для всех $t > 0$, то управление $u_1(t) \in P_1$ и функцию $\pi m_1(t) \in M_1^2$ при $t \in [0, \theta]$ выберем как решение уравнения

$$\pi e^{A(\theta-t)}Bu_1(t) = -\lambda(\theta, t, x^0, P_1)(\pi e^{A\theta}x^0 - \pi m(t)). \quad (3)$$

Здесь $\lambda(t, s, x^0, P_1)$ — неотрицательная функция, определенная при $\pi e^{At}x^0 \notin M_1^2$ для всех $t > 0$, измеримая по совокупности аргументов $t, s \in [0, t]$ и такая, что

$$-\lambda(t, s, x^0, P_1)(\pi e^{At}x^0 - M_1^2) \cap \pi e^{A(t-s)}BP_1 \neq \emptyset. \quad (4)$$

Функцию $\lambda(t, s, x^0, P_1)$ далее назовем *погружающей функцией* для параметров управляемой системы (1). Погружающими функциями являются максимизирующие функции, примененные в работе [7, с. 95], и разрешающие функции работы [8]. Отсутствие свойства экстремума у погружающей функции делает ее удобной для применения в задачах с фазовыми ограничениями.

Функция $\lambda(t, s, x^0, P_1)$ согласно (4) равномерно ограничена по $s \in [0, t]$ и, следовательно, суммируема на отрезке $[0, t]$ (см. [3]). Таким образом, функция $\lambda(t, s, x^0, P_1)$ интегрируема по s , что позволяет определить для $t > 0$ функцию

$$\beta(t, x^0) = 1 - \int_0^t \lambda(t, s, x^0, P_1) ds. \quad (5)$$

Предположение 2. Для позиции x^0 системы (1) существуют множество $P_1 \subseteq P$ и погружающая функция $\lambda(t, s, x^0, P_1)$ такие, что уравнение $\beta(t, x^0) = 0$ имеет положительный корень θ .

Положим $y(t) = \pi e^{At}x^0 + \int_0^t \pi e^{A(t-s)}Bu_1(s) ds$, $t \in [0, \theta]$. Множество $\bar{M}_2^2$ по постановке задачи является звездным множеством. На поведение опорной кривой $y(t)$ относительно множества $\bar{M}_2^2$ наложим следующее условие.

Предположение 3. Существуют целое число N и константы t_{i1}, t_{i2} , $i = 1, \dots, N$: $0 < t_{11} \leq t_{12} < t_{21} \leq t_{22} < \dots < t_{i1} \leq t_{i2} < \dots < t_{N1} \leq t_{N2} < T$, такие, что $y(t) \in \bar{M}_2^2$, $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, $i = 1, \dots, N$, $y(t) \notin \bar{M}_2^2$, $t \notin [t_{i1}, t_{i2}]$, $i = 1, \dots, N$.

Если множество $\bar{M}_2^2$ является звездным телом и опорная кривая $y(t)$ пересекает его при некоторых $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, $i = 1, \dots, N$, то доказывается, что существует точка $\mathbf{a} \in S_\varepsilon(b) \subset \bar{M}_2^2$ такая, что $y(t) \neq \mathbf{a}$ для $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, $i = 1, \dots, N$.

Если множество $\bar{M}_2^2$ является только звездным множеством и не является телом, а опорная кривая $y(t)$ пересекает его при некоторых $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, $i = 1, \dots, N$, то наложим следующее

Предположение 4. $y(t) \neq \mathbf{a}$, $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, где $\mathbf{a}$ — центр звездного множества $\bar{M}_2^2$.

Управление $u_2(\cdot)$ на отрезке $[0, \theta]$ выберем как решение интегрального уравнения первого рода типа Вольтерра

$$\int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_2(s) ds = \varphi(t)(y(t) - a) \quad (6)$$

в классе измеримых функций $u_2(\cdot) \in U$, где U — класс p -мерных измеримых по Лебегу векторных функций, ограниченных по модулю на $[0, \theta]$.

Здесь $\varphi(t)$ — *гладкая оценочная функция* для функции $\mu(t)$, удовлетворяющая следующим условиям: $\varphi(t) \geq \mu(t)$, $\varphi(t)$ дифференцируема $k + l + 1$ раз, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(k+l+1)}(0) = 0$, $\varphi(\theta) = 0$.

Функция $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin [t_{i1}, t_{i2}], \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{l(y(t) - a, \bar{M}_2^2 - a)}{\|y(t) - a\|} - 1, & \text{если } t \in [t_{i1}, t_{i2}], \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (7)$$

$l(\eta, G)$ — лучевая функция звездного множества G (см. [9]).

Лемма 1. Для функции $\varphi(t)(y(t) - a)$ существует решение уравнения (6) при $t \in [0, \theta]$ в классе U , и для этого решения справедлива оценка

$$\|u_2(t)\| \leq \|(\pi A^k B)^+\| \Lambda e^{\Delta t},$$

где $(\pi A^k B)^+$ — псевдообратная матрица для матрицы $\pi A^k B$,

$$\Lambda = \max_{t \in [0, \theta]} \|f(t)\|, \quad f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (\varphi(t)(y(t) - a)),$$

$$\Delta = \max_{0 \leq s \leq t \leq \theta} \|\pi A^{k+1} e^{(t-s)A} B (\pi A^k B)^+\|.$$

Пусть $t \in [t_{i1}, t_{i2}]$, $\lambda_i = \max_{t \in [t_{i1}, t_{i2}]} \lambda(t)/t^{k+l+2}$. Согласно построению $\lambda(t) = 0$, $t \in [0, t_{11}]$, $\lambda(t) = 0$, $t \in [t_{N2}, \theta]$, $t_{11} > 0$. Таким образом, λ_i конечно.

Функция $\varphi(t)$ может быть построена с использованием срезающей функции $\xi(t, \delta, i)$ отрезка $[t_{i1} - 2\delta, t_{i2} + 2\delta]$,

$$\|u_2(t)\| \leq R_3(t) = \Lambda_1(1 + \Omega_1)t. \quad (8)$$

При заданных функциях $\varphi(t)$, $\pi z(t)$ из соотношения (8) получаем величину ограничения на управление $u_2(t)$, $t \in [0, T]$, при котором можно реализовать маневр обхода, соответствующий этим функциям:

$$P_2 \supseteq S_G(0). \quad (9)$$

Здесь $S_G(0)$ — сфера радиуса G с центром 0, $G = \min(G_1, G_2)$,

$$G_i = \max_{t \in [0, T]} R_i(t), \quad i = 1, 2, \quad R_1(t) = \Lambda e^{\Delta t}, \quad R_2(t) = \Lambda_1 e^{\Delta_1 t}.$$

Предположение 5. Множество P_2 удовлетворяет включению (9).

Сформулируем *достаточные условия существования решения* в задаче уклонения от столкновения с препятствием в виде звездного множества.

Теорема. Если множество $\bar{M}_2^2$ является звездным телом и для системы (1) в позиции x^0 выполнены предположения 1–5, то для позиции x^0 существует решение задачи уклонения от столкновения.

Автор выражает благодарность профессору М.С. Никольскому за обсуждение работы.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
4. Никольский М.С. Исследование обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 211–217.
5. Лукьянова Л.Н. К решению задачи выживания траектории линейной управляемой системы // Диф. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1637–1645.
6. Лукьянова Л.Н. К решению задачи выживания траектории нелинейной динамической системы // Труды МИАН. 2008. Т. 262. С. 146–155.
7. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Мир, 1990.
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
9. Касселс Дж.В.С. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

OPTIMAL GUARANTEED RESULT IN CONTROL PROBLEMS OF NEUTRAL-TYPE SYSTEMS*

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia

nyul@imm.uran.ru, a.r.plaksin@gmail.com

Within the positional approach [1–7], we consider a problem of control under disturbances for the functional differential system of a neutral type

$$\frac{d}{d\tau}(x(\tau) - g(\tau, x_\tau(\cdot))) = f(\tau, x_\tau(\cdot), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in [t_0, \vartheta],$$

$$x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k, \quad v(\tau) \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m,$$

the initial condition

$$x(t + \xi) = w(\xi), \quad \xi \in [-h, 0],$$

and the quality index

$$\gamma = \sigma(x_\vartheta[\cdot]).$$

Here τ is the current time; $t \in [t_0, \vartheta]$ is the initial time; $x(\tau)$ is the state of the system at the time τ ; $x_\tau(\cdot)$ is the motion history on the interval $[\tau - h, \tau]$ defined by

*This work is supported by the program of the Presidium of the Russian Academy of Sciences no. 01 “Fundamental Mathematics and its Applications” under grant PRAS-18-01.

$x_\tau(\xi) = x(\tau + \xi)$, $\xi \in [-h, 0]$, where $h > 0$ is the delay constant; $u(\tau)$ is the current control action; $v(\tau)$ is the unknown disturbance action; $\mathbb{U}$ and $\mathbb{V}$ are given compact sets. The goal of the control is to minimize the quality index γ .

Below, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product, $\|\cdot\|$, the Euclidean norm, $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^n)$ is the space of Lipschitz continuous functions from $[a, b]$ to $\mathbb{R}^n$, $\text{Lip} = \text{Lip}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, and $\mathbb{G} = [t_0, \vartheta] \times \text{Lip}$. The space Lip is equipped with the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$.

The initial motion history is Lipschitz continuous, i.e., $x_t(\cdot) = w(\cdot) \in \text{Lip}$. The mappings $g: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{G} \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$, and $\sigma: \text{Lip} \mapsto \mathbb{R}$ are continuous and satisfy the following conditions:

- there exist $\lambda_g \in (0, 1)$, $h_0 \in (0, h)$, and $\alpha_g > 0$ such that

$$\|g(\tau, w(\cdot)) - g(\xi, r(\cdot))\| \leq \lambda_g \max_{\eta \in [-h, -h_0]} \|w(\eta) - r(\eta)\| + \alpha_g (1 + \|w(\cdot)\|_\infty) |\tau - \xi|;$$

- there exists $\alpha_f > 0$ such that

$$\|f(t, w(\cdot), u, v)\| \leq \alpha_f (1 + \|w(\cdot)\|_\infty);$$

- for any $\nu > 0$, one can find $\lambda_f, \lambda_\sigma > 0$ such that

$$\begin{aligned} \|f(t, w(\cdot), u, v) - f(t, r(\cdot), u, v)\| &\leq \lambda_f \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty, \\ |\sigma(w(\cdot)) - \sigma(r(\cdot))| &\leq \lambda_\sigma \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

for any $w(\cdot), r(\cdot) \in D_\nu$, where

$$D_\nu = \{r(\cdot) \in \text{Lip}: \|r(\cdot)\|_\infty \leq \nu, \|r(\tau) - r(\xi)\| \leq \nu |\tau - \xi|, \tau, \xi \in [-h, 0]\}.$$

By an admissible control strategy, we mean a pair $\{U, \Delta\}$ where U is a function from $\mathbb{G}$ to $\mathbb{U}$ and Δ is a partition of the control interval $[t, \vartheta]$, i.e.,

$$\Delta = \{\tau_i: \tau_1 = t, \tau_i < \tau_{i+1}, i = \overline{1, k}, \tau_{k+1} = \vartheta\}.$$

The strategy $\{U, \Delta\}$ determines the control actions according to the feedback rule

$$u(\tau) = U(\tau_i, x_{\tau_i}(\cdot)), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{1, k}.$$

The value of the optimal guaranteed result is defined by

$$\varphi(t, w(\cdot)) = \inf_{\{U, \Delta\}} \sup_{v(\cdot)} \gamma,$$

where $\sup$ is taken over all measurable functions $v(\cdot) = \{v(\tau) \in \mathbb{V}, \tau \in [t, \vartheta]\}$.

The paper is devoted to the study of infinitesimal properties that characterize the value functional $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$.

One of the main results is the following.

Let $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $z(\cdot) \in \text{Lip}([t, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, and let L be a nonempty convex compact set in $\mathbb{R}^n$. Define

$$H(t, w(\cdot), s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, w(\cdot), u, v), s \rangle, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

$$X(t, w(\cdot)) = \{x(\cdot) \in \text{Lip}([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n): x(t + \xi) = w(\xi), \xi \in [-h, 0]\},$$

$$D^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) \mid z(\cdot), L \} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{x(\cdot) \in \Omega_\varepsilon} \liminf_{\tau \rightarrow t+0} \frac{\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\tau - t},$$

$$D^+ \{ \varphi(t, w(\cdot)) \mid z(\cdot), L \} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x(\cdot) \in \Omega_\varepsilon} \limsup_{\tau \rightarrow t+0} \frac{\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\tau - t},$$

where

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x(\cdot) \in X(t, w(\cdot)) : \frac{d}{d\tau} (x(\tau) - z(\tau)) \in [L]^\varepsilon \text{ for a.e. } \tau \in [t, \vartheta] \right\}.$$

Here $[L]^\varepsilon$ denotes the ε -neighborhood of the set L in $\mathbb{R}^n$.

Let $\bar{x}(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ be such that $\bar{x}(\tau) = w(0)$ for $\tau \in [t, \vartheta]$. Put

$$z(\tau \mid t, w(\cdot)) = g(\tau, \bar{x}_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Theorem. *Let $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$ be nonempty sets. Let the convex compact set-valued mappings $F^* = F^*(t, w(\cdot), q) \subset \mathbb{R}^n$ and $F_* = F_*(t, w(\cdot), p) \subset \mathbb{R}^n$, where $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $p \in \mathbb{P}$, and $q \in \mathbb{Q}$, be Hausdorff continuous with respect to $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ for any $p \in \mathbb{P}$ and $q \in \mathbb{Q}$ and satisfy the following conditions:*

(i) *there exists $\alpha_F > 0$ such that*

$$\sup \{ \|f\| : f \in F^*(t, w(\cdot), q) \cup F_*(t, w(\cdot), p) \} \leq \alpha_F (1 + \|w(\cdot)\|_\infty);$$

(ii) *for any $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ and $s \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\sup_{q \in \mathbb{Q}} \min_{f \in F^*(t, w(\cdot), q)} \langle f, s \rangle = H(t, w(\cdot), s) = \inf_{p \in \mathbb{P}} \max_{f \in F_*(t, w(\cdot), p)} \langle f, s \rangle.$$

Then, a functional $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ is the functional of the optimal guaranteed result in the considered control problem if and only if it is continuous, satisfies the condition

$$\varphi(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \text{Lip},$$

and satisfies the following differential inequalities:

$$\sup_{q \in \mathbb{Q}} D^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) \mid z(\cdot \mid t, w(\cdot)), F^*(t, w(\cdot), q) \} \leq 0,$$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}} D^+ \{ \varphi(t, w(\cdot)) \mid z(\cdot \mid t, w(\cdot)), F_*(t, w(\cdot), p) \} \geq 0$$

for $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ and $t < \vartheta$.

References

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
2. Krasovskii N.N. Control of a dynamical system: problem on the minimum of guaranteed result. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
3. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1971. V. 196, No. 4. P. 779–782.
4. Subbotin A.I. Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. Lukoyanov N.Yu. Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information. Ekaterinburg: Ural Fed. Univ., 2011 (in Russian).

6. *Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.* Existence of a value and a saddle point in positional differential games for neutral-type systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 299, Suppl. 1. P. 37–48.
7. *Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I., Plaksin A.R.* Hamilton–Jacobi functional equations and differential games for neutral-type systems // Dokl. Math. 2017. V. 96, No. 3. P. 654–657.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ
 ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
 С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
 (DIFFERENTIAL GAMES OF PURSUIT FOR THE TWO-DIMENSIONAL
 HEAT EQUATION WITH DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER)

М. Ш. Маматов (M. Sh. Mamatov)

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
 Ташкент, Узбекистан
 mamatovmsh@mail.ru*

Рассматривается управляемая распределенная система, описываемая уравнениями дробного порядка [1]

$$D_{0t}^{\alpha} z = C_x D_{0x}^{\beta} z + C_y D_{0y}^{\beta} z - u + v, \quad (t, x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$z|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{G}, \quad (2)$$

$$z|_L = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{G}, \quad (3)$$

где z — неизвестная функция из класса $C^2(\Omega)$, $\Omega = G \times (0, T]$, $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ — прямоугольник с границей L , $t \in [0, T]$, T — произвольная положительная константа; C_x , C_y — коэффициенты теплопроводности; $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$;

$$D_{0t}^{\alpha} z(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0t}^{1-\alpha}, \quad D_{0x}^{\beta} z(t, x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 I_{0x}^{2-\beta}, \quad D_{0y}^{\beta} z(t, x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 I_{0y}^{2-\beta}$$

— частные дробные производные Римана–Лиувилля;

$$I_{0+}^{\alpha} z(t, x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{z(s, x, y)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

— частные дробные интегралы Римана–Лиувилля по соответствующей переменной [2], u , v — управляющие параметры, u — управляющий параметр преследующего игрока, $u \in P \subset \mathbb{R}$, v — управляющий параметр убегающего игрока, $v \in Q \subset \mathbb{R}$, P и Q — компакты. Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество $M = \overline{M} + \varepsilon S$, где $\varepsilon > 0$, $S = [-1, 1]$. Цель преследующего игрока — вывести z на множество M , убегающий игрок стремится этому помешать. Игра считается оконченной, если z попадает в M : $z \in M$.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция с областью определения Ω . Тогда имеет место конечно-разностное определение производной порядка $\beta \in \mathbb{R}$ в точке $x \in D(f)$ (см. [3]):

$$D_{ax}^\beta f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{x-a} \right)^\beta \sum_{k=0}^n q_k f \left(x - \frac{x-a}{n} k \right),$$

где $1 < \beta \leq 2$; $q_0 = 1$, $q_k = (-1)^k \beta(\beta-1) \dots (\beta-k+1)/k!$. Согласно [3] если $f \in C^2(\Omega)$, то производная Грюнвальда совпадает с производной Римана–Лиувилля. Для аппроксимации дробных производных Римана–Лиувилля по переменным x, y при $1 < \beta < 2$ на отрезке $[0, 1]$ воспользуемся формулой Грюнвальда–Летникова со смещением [4, 5]:

$$D_{ax}^\beta f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{[x/h]} q_k f(x - (k-1)h), \quad (4)$$

где $h = x/M$. Формула (4) обеспечивает более точную аппроксимацию, чем стандартная формула Грюнвальда–Летникова.

Воспользовавшись формулой (4), для производных дробного порядка Римана–Лиувилля по пространственным переменным в случае $1 < \beta < 2$ получим

$$D_{0x}^\beta z(t, x, y)|_{x_n} \approx \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{n+1} q_j z(t, x_{n-j+1}, y), \quad (5)$$

$$D_{0y}^\beta z(t, x, y)|_{y_m} \approx \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{m+1} q_j z(t, x, y_{m-j+1}), \quad (6)$$

где $x_{n-j+1} \approx x_n - (j-1)h$, $y_{m-j+1} \approx y_m - (j-1)h$.

Пользуясь достаточным признаком существования дробной производной Римана–Лиувилля [3] при $0 < \alpha \leq 1$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ получим

$$D_{0t}^\alpha z(t, x, y)|_{t_k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{z(t_k, x, y)}{(t_{k+1} - t_k)^\alpha} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{z'(x, s) ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \right), \quad (7)$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (8)$$

Представляя производную $z'(\tau, x, y)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ в виде конечной разности

$$\left(\frac{dz}{d\tau} \right)_k \approx \frac{z(t_{k+1}, x, y) - z(t_k, x, y)}{\tau},$$

разностную аппроксимацию производной дробного порядка α на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_{0t}^\alpha z(t, x, y)|_{t_k} &\approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{z(t_k, x, y)}{(t_{k+1} - t_k)^\alpha} + \frac{z(t_{k+1}, x, y) - z(t_k, x, y)}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^\alpha} \right) = \\ &= \frac{z(t_{k+1}, x, y) - \alpha z(t_k, x, y)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения решения задачи (1)–(3) в области

$$\overline{\Omega} = \{(x, y, t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

введем сетку

$$\varpi_{h_x, h_y, \tau} = \{(x_n, y_m, t_k): x_n = nh_x, y_m = mh_y, t_k = k\tau, n = 0, 1, \dots, n_0, \\ h_x = 1/n_0, m = 0, 1, \dots, m_0, h_y = 1/m_0, k = 0, 1, \dots, T/k_0\}$$

с шагом h_x по x , h_y по y и τ по t . Введем обозначения

$$z_{n,m}^{(k)} \approx z(t_k, x_n, y_m), \quad z_{n-j+1}^k \approx z(t_k, x_{n-j+1}, y_m), \quad z_{m-j+1}^k \approx z(t_k, x_n, y_{m-j+1}), \\ u_{n,m}^{(k)} \approx u(t_k, x_n, y_m), \quad v_{n,m}^{(k)} \approx v(t_k, x_n, y_m).$$

Воспользовавшись равенствами (5), (6), (9) для уравнения (1), запишем явную разностную схему

$$\frac{z_{n,m}^{(k+1)} - \alpha z_{n,m}^{(k)}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} = \frac{C_x}{h_x^\beta} \left(z_{n+1,m}^{(k)} - \beta z_{n,m}^{(k)} + \sum_{j=2}^{n+1} q_j z_{n-j+1,m}^{(k)} \right) + \\ + \frac{C_y}{h_y^\beta} \left(z_{n,m+1}^{(k)} - \beta z_{n,m}^{(k)} + \sum_{j=2}^{m+1} q_j z_{n,m-j+1}^{(k)} \right) - u_{n,m}^{(k)} + v_{n,m}^{(k)}. \quad (10)$$

Известно, что разностная схема (10) устойчива, когда

$$\tau^\alpha \left(\frac{C_x}{h_x^\beta} + \frac{C_y}{h_y^\beta} \right) \leq \frac{\alpha + 1}{(2 + \beta)\Gamma(2 - \alpha)}, \quad \text{где } 0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < \beta \leq 2.$$

Разлагая функции $z_{i+1,j}^{k+1}$, $z_{i,j}^{k+1}$, $z_{i,j}^k$, $z_{i-1,j}^{k+1}$, $z_{i,j+1}^{k+1}$, $z_{i,j-1}^{k+1}$ в ряд Тейлора и подставляя полученные соотношения в разностную схему (10), получим

$$\frac{\partial^\alpha z}{\partial t^\alpha}(t^k, x_i, y_j) = C_x \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}(t^k, x_i, y_j) + C_y \frac{\partial^\beta z}{\partial y^\beta}(t^k, x_i, y_j) - \\ - u_{i,j}^k + v_{i,j}^k + a(\tau^{2-\alpha}) + b(h_x^2) + c(h_y^2),$$

где a , b , c — некоторые константы. Следовательно, разностная схема (10) аппроксимирует уравнение (1) с порядком $2 - \alpha$ по времени и вторым порядком по координатам x, y .

В случае квадратной сетки, т.е. когда $h_x = h_y = h$, $C_x = C_y = C$, для разностной схемы (10) имеем

$$z_{n,m}^{(k+1)} = (\alpha - 2\gamma\beta)z_{n,m}^{(k)} + \gamma \left(z_{n+1,m}^{(k)} + \sum_{j=2}^{n+1} q_j z_{n-j+1,m}^{(k)} + z_{n,m+1}^{(k)} + \sum_{j=2}^{m+1} q_j z_{n,m-j+1}^{(k)} \right) + \\ + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha (-u_{n,m}^{(k)} + v_{n,m}^{(k)}), \quad (11)$$

$$z_{0,m}^{(k)} = \varphi(0, y_m), \quad z_{N,m}^{(k)} = \varphi(1, y_m), \\ z_{n,0}^{(k)} = \varphi(x_n, 0), \quad z_{n,M}^{(k)} = \varphi(x_n, 1), \quad z_{n,m}^{(0)} = \psi(x_n, y_m), \quad (12)$$

где $\gamma = \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha C/h^\beta$.

Разностная схема (11) устойчива, когда

$$\tau^\alpha \leq \frac{(\alpha + 1)h^\beta}{(2 + \beta)\Gamma(2 - \alpha)C}, \quad \text{где } 0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < \beta \leq 2.$$

Дискретная игра (11), (12) аппроксимирует дифференциальную игру (1)–(3). Дискретная игра (11), (12) считается оконченной, если для некоторых n, m, k будет выполнено включение $z_{n,m}^{(k)} \in \overline{M}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если в игре (11) из начального положения (12) возможно завершение преследования, то в игре (1) возможно завершение преследования из начального положения (2), (3).

Список литературы

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90, № 3. С. 354–368.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторых их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
4. Agrawal O.P. A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems // J. Vibr. Control. 2008. V. 14, No. 9–10. P. 1291–1299.
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
6. Mamatov M., Durdiev D., Alimov Kh. Fractional integro-differential calculation and its appendices in the theory of differential games of prosecution of the fractional order // Amer. Sci. J. 2016. No. 4(4). P. 72–77.
7. Mamatov M.Sh., Alimov H.N. Differential games of persecution of frozen order with separate dynamics // J. Appl. Math. Phys. 2018. V. 6. P. 475–487.

SINGULAR SOLUTIONS FOR A TIMOSHENKO BEAM*

L. Manita^a, M. Ronzhina^{b,c}

^a*National Research University Higher School of Economics, MIEM HSE,
Moscow, Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^c*Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University),
Moscow, Russia*

lmanita@hse.ru, maryaronzhina@gmail.com

We consider a linear model of a rotating Timoshenko beam [1]

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) - \frac{1}{\gamma} w_{xx}(x, t) + \frac{1}{\gamma} \varsigma_x(x, t) &= g_1(x, t), \\ \varsigma_{tt}(x, t) - \varsigma_{xx}(x, t) + \frac{1}{\gamma} \varsigma(x, t) - \frac{1}{\gamma} w_x(x, t) &= g_2(x, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Here the X -axis coincides with the beam when it is at rest, $w(x, t)$ is the displacement of the center line of the beam in the direction that is perpendicular to the X -axis and $\varsigma(x, t)$ is the rotation angle of the cross-section area at $x \in [0, 1]$ and time t . The controls are introduced as forcing terms $g_1(x, t)$ and $g_2(x, t)$ in the right sides of both equations. Assume that for all $t \geq 0$

$$\int_0^1 (g_1^2(x, t) + g_2^2(x, t)) dx \leq 1. \quad (2)$$

The initial state and the boundary conditions of the beam are

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad \varsigma(x, 0) = \varsigma_0(x), \quad \varsigma_t(x, 0) = \varsigma_1(x), \quad (3)$$

$$w(0, t) = \varsigma(0, t) = 0, \quad w_x(1, t) - \varsigma(1, t) = 0, \quad \varsigma_x(1, t) = 0. \quad (4)$$

The boundary conditions (4) mean that the beam is clamped at the left end and free at the right end. We study the minimization problem for the deviation of the beam from the equilibrium state in the sense of the functional

$$\int_0^\infty \int_0^1 (w^2(x, t) + \varsigma^2(x, t)) dx dt. \quad (5)$$

Problem (1)–(5) with the external forces in the form $g_i(x, t) = u(t)f_i(x)$ was considered in [2, 3]. The optimal synthesis containing singular extremals and extremals with accumulation of switchings was constructed. In this talk we show that for some initial conditions, the solutions of (1)–(5) have similar singularities. Using the Fourier method, we reduce the control problem for partial differential equations to a control problem for the corresponding Fourier coefficients. Then we apply the technique developed in [4] and the results obtained in [5].

*This research was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 17-01-00805.

References

1. *Gugat M.* Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 333–360.
2. *Zelikin M.I., Manita L.A.* Accumulation of switchings in distributed parameter problems // J. Math. Sci. 2008. V. 151, No. 6. P. 3506–3542.
3. *Borisov V., Zelikin M., Manita L.* Optimal synthesis in an infinite-dimensional space // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. V. 271. P. 34–52.
4. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right-hand side // J. Math. Sci. 2017. V. 221, No. 1. P. 1–136.
5. *Lokutsievskiy L., Manita L., Ronzhina M.* Optimal solutions in a neighborhood of a singular extremal for a problem with two-dimensional control // Mathematical theory of optimal control: Mater. Int. Conf. dedicated to the 90th birthday of R. V. Gamkrelidze, Moscow, June 1–2, 2017. Moscow: Steklov Math. Inst., 2017. P. 94–96.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR THE FIRST-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS

M. J. Mardanov^a, Y. A. Sharifov^{b,a}

^a*Institute of Mathematics and Mechanics, ANAS, Baku, Azerbaijan*

^b*Baku State University, Baku, Azerbaijan*

misirmardanov@yahoo.com, sharifov22@rambler.ru

The multipoint boundary value problems for ODEs and their systems are intensively investigated in the recent years. This is associated with their strong relation to a wide range of applications in different fields of physics and mathematics [1, 2]. As examples of applications, one can note the vibrations of a uniform cross-section string composed of N parts of different densities, some problems in the theory of elastic stability [3], etc. In mathematical formulations these problems are described by multipoint boundary value problems.

The study of multipoint boundary value problems for linear second-order ordinary differential equations was initiated by Il'in and Moiseev [4]. Since then, nonlinear multipoint boundary value problems have been studied by several authors using the Leray–Schauder continuation theorem, nonlinear Leray–Schauder alternatives, coincidence degree theory, and the fixed point theorem in cones.

In this work for the first time the Green function is constructed for the first-order nonlinear differential equations with multipoint boundary conditions and the considered problem is reduced to equivalent integral equations. Unlike the works of Muly and Sivasundaram [5], we do not use the fundamental matrix of the equation. The advantage of this fact is that we do not require the existence of the derivative of the right-hand side of the equation with respect to the phase coordinates.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

with multipoint boundary conditions

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

with multipoint boundary conditions

$$\sum_{i=0}^m l_i x(t_i) = \alpha, \quad (2)$$

where $l_0, l_1, \dots, l_n$ are constant square matrices of order n such that $\det N = \det(\sum_{i=0}^m l_i) \neq 0$; $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a given function; $\alpha \in \mathbb{R}^n$; and $t_0, t_1, \dots, t_m$ are points satisfying the condition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$. We denote by $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ the Banach space of all continuous functions from $[0, T]$ into $\mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, T]\}$, where $|\cdot|$ is the norm in the space $\mathbb{R}^n$.

The purpose of this paper is to prove new existence and uniqueness results using the Banach contraction principle and Schaefer's fixed point theorem. We define the solution of problem (1), (2) as follows.

Definition 1. A function $x \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ is said to be a solution of problem (1), (2) if $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ for each $t \in [0, T]$ and the boundary conditions (2) are satisfied. For the sake of simplicity, we can consider the following differential equation:

$$\dot{x} = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Lemma 1. *Let $y \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$. The unique solution of the boundary value problem for the differential equation (3) with boundary conditions (2) is given by*

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau)y(\tau) d\tau,$$

where

[illegible]

with

$$G_i(t, \tau) = \begin{cases} N^{-1}l_0, & t_0 \leq \tau < t_1, \\ N^{-1}(l_0 + l_1), & t_1 \leq \tau < t_2, \\ \dots\dots\dots \\ N^{-1}\sum_{k=0}^i l_k, & t_i \leq \tau < t, \\ -N^{-1}\sum_{k=i+1}^m l_k, & t \leq \tau < t_{i+1}, \\ -N^{-1}\sum_{k=i+2}^m l_k, & t_{i+1} \leq \tau < t_{i+2} \\ \dots\dots\dots \\ -N^{-1}l_m, & t_{m-1} \leq \tau < T, \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m.$$

Lemma 2. Assume that $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$. Then the function $x(t)$ is a solution of the boundary value problem (1), (2) if and only if $x(t)$ is a solution of the integral equation

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau)f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

We introduce the following conditions.

(H1) There exist a continuous function $M(t) \geq 0$ such that

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M(t)|x - y|$$

for each $t \in [0, T]$ and all $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(H2) The function $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous.

(H3) There exists a constant $N_1 > 0$ such that $|f(t, x)| \leq N_1$ for each $t \in [0, T]$ and all $x \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 1. Assume that assumption (H1) holds and

$$L = TSM < 1,$$

where

$$M = \max_{[0, T]} M(t), \quad S = \max_{[0, T] \times [0, T]} \|G(t, \tau)\|.$$

Then the boundary value problem (1), (2) has a unique solution on $[0, T]$.

Theorem 2. Assume (H2) and (H3) hold. Then the boundary value problem (1), (2) has at least one solution on $[0, T]$.

Similar problems for two-point boundary value problems are considered in [6, 7].

References

1. Cannon J.R., Perez S.E., Van der Hoek J. A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24, No. 3. P. 499–515.
2. Cannon J.R. The one-dimensional heat equation. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984. (Encycl. Math. Appl.; V. 23).
3. Timoshenko S. Theory of elastic stability. New-York: McGraw-Hill, 1961.
4. Il'in V.A., Moiseev E.I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm–Liouville operator // Diff. Eqns. 1987. V. 23, No. 8. P. 979–987.
5. Murty K.N., Sivasundaram S. Existence and uniqueness of solutions to three-point boundary value problems associated with nonlinear first order systems of differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 173. P. 158–164.
6. Ashyralyev A., Sharifov Y. A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Adv. Diff. Eqns. 2013. Paper. 173.
7. Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Molaei H.H. Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions // Electron. J. Diff. Eqns. 2014. No. 259. P. 1–8.

OPTIMAL CONTROL OF LARGE BUILDINGS USING A HYBRID MODEL PREDICTIVE CONTROL APPROACH

O. Yu. Maryasin

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

`maryasin2003@list.ru`

The microclimate and energy consumption control system of a modern building includes both continuous (heat exchangers, radiators, convectors) and discrete (thermostats, fans, pumps) elements operating on the on/off principle. In addition, the microclimate of buildings can be influenced by various internal or external events related to people's living functions, equipment operation and other factors. From the point of view of the mathematical description, the modern building is a continuous-discrete or hybrid dynamical system consisting of interacting elements of various nature whose behavior is described by both continuous and discrete processes.

Formally, logical-dynamical models can be described as discrete hybrid automata (DHA). A special case of DHA is the class of piecewise affine (PWA) systems. Such systems are also often called switched linear systems. According to [1], the system of logical conditions can be transformed into a system of integer linear inequalities, and the logical-dynamical model, into a mixed logical-dynamical one (MDL). As shown in [1], the MDL model form encompasses a large class of hybrid dynamic systems.

At present, in the scientific literature, optimal control systems, model predictive control (MPC) systems, as well as systems based on fuzzy logic, neurocontrollers and some others are widely proposed for climate control and energy consumption of buildings [2]. At the same time, the greatest number of publications deals with the systems using the MPC approach. These systems allow for better management of the building's microclimate, taking into account the constraints, with a minimum of energy costs.

In cases when some of the system variables are discrete in nature (e.g., some actuators can only be turned on/off), the use of the so-called hybrid MPC approach is required. To implement a hybrid MPC controller using the MDL model, it is necessary to solve the problem of mixed-integer programming (MIP). One of the drawbacks in the hybrid MPC lies in the resulting computational burden that may be prohibitive for real-time implementation. This is the case in large scale applications. In such situations, the resulting hybrid MPC optimization problem is hard to solve given restrictions on computational resources in terms of time and memory. On the other hand, it can be unsuitable to centralize the calculation of the optimal solution of a large process in one controller.

To control large buildings consisting of multiple interconnected zones, distributed versions of MPC are used, such as distributed MPC and hierarchical distributed MPC [3]. Of these, only hierarchical, distributed MPC algorithm allows to achieve a minimum of the global quality criterion for the whole system, with due regard to the interrelations between the subsystems. When implementing a hierarchical distributed MPC algorithm, within each step of its implementation, there arises the problem of coordinated solution for the mathematical programming problems for each of the subsystems.

The author proposes a method for solving the global mathematical programming problem, performed at each step of the hierarchical, distributed hybrid MPC algorithm, based on the decomposition method via resource sharing [4]. The author proves that under certain assumptions on sets of admissible solutions for local problems, if the local optimization problems have a solution, then the coordination problem will have an admissible optimal solution. If random factors influence the fulfillment of constraints in local problems, then a one-step stochastic programming problem with soft constraints can be put in place [5].

The author used the proposed method for solving the problem of managing energy consumption and the microclimate of large multi-zone buildings. The mathematical model of the microclimate of a large multi-zone building is based on the equations of thermal and material balance, and is described by a system of ordinary differential equations. To ensure the required microclimate in the building, various types of energy resources, including renewable ones, can be used. For each type of energy resources, there are restrictions for both individual zones and the entire building. Therefore, the energy input for managing the microclimate within a building will depend on the consumption of energy resources for other, including domestic, needs. Since the consumption of energy resources for domestic needs is accidental, the restrictions on the consumption of energy resources for managing the climate will be accidental as well.

The results of numerical experiments showed the advantages of using the method proposed by the author for controlling the microclimate of large multi-zone buildings.

References

1. *Bemporad A., Morari M.* Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints // *Automatica*. 1999. V. 35, No. 3. P. 407–427.
2. *Shaikh P.H., Nor N.M., Nallagowngan P., Elamvazuthi I., Ibrahim T.* A review on optimized control systems for building energy and comfort management of smart sustainable buildings // *Renewable and Sustainable Energy Rev.* 2014. V. 34. P. 409–429.
3. *Scattolini R.* Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control—A review // *J. Process Control*. 2009. V. 19, No. 5. P. 723–731.
4. *Lasdon L.* Optimization of large systems. Moscow: Nauka, 1975.
5. *Ostrovsky G.M., Ziyatdinov N.N., Lapteva T.V.* Optimization of technical systems. Moscow: KNORUS, 2012.

SUB-RIEMANNIAN GEODESICS ON THE GROUP OF RIGID BODY MOTIONS*

A. P. Mashtakov

Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Russia
alexey.mashtakov@gmail.com

We consider a sub-Riemannian problem on the Lie group $\text{SE}(3)$ of rigid body motions in $\mathbb{R}^3$. Given two orthonormal frames $N_0 = \{v_0^1, v_0^2, v_0^3\}$ and $N_1 = \{v_1^1, v_1^2, v_1^3\}$ attached respectively at two given points $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ and $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in space $\mathbb{R}^3$, we aim to find an optimal motion that transfers q_0 to q_1 such that the frame N_0 is transferred to the frame N_1 . The frame can move forward or backward along one of the vectors chosen in the frame and rotate simultaneously about the remaining two (of the three) prescribed axes. The required motion should be optimal in the sense of minimal length in the space $\text{SE}(3) \cong \mathbb{R}^3 \rtimes \text{SO}(3)$.

The problem is to find a Lipschitzian curve $\gamma: [0, t_1] \rightarrow \text{SE}(3)$ such that

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= u_3 \mathcal{A}_3 + u_4 \mathcal{A}_4 + u_5 \mathcal{A}_5, \\ \gamma(0) &= \text{Id}, \quad \gamma(t_1) = g, \\ l(\gamma) &= \int_0^{t_1} \sqrt{\xi^2 u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} dt \rightarrow \min,\end{aligned}$$

where $\mathcal{A}_i$ are left-invariant vector fields in $\text{SE}(3)$, the controls u_3, u_4, u_5 are real-valued functions in $L_\infty(0, t_1)$, the terminal time $t_1 > 0$ is free, Id is the identical transformation of $\mathbb{R}^3$, and $\xi > 0$ is a parameter balancing the spatial and angular displacement.

The vertical part of the Hamiltonian system of the Pontryagin maximum principle is given by

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_3 u_5, \\ \dot{u}_2 = u_3 u_4, \\ \dot{u}_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4, \\ \dot{u}_4 = \frac{u_2 u_3}{\xi^2} - u_5 u_6, \\ \dot{u}_5 = u_4 u_6 - \frac{u_1 u_3}{\xi^2}, \\ \dot{u}_6 = 0. \end{cases}$$

We prove Liouville integrability of the Hamiltonian system of the PMP and present explicit formulas for the extremal controls $u_1, \dots, u_5$ in the particular case $u_6 = 0$. This case is important in applications: in tracking neural fibers and blood vessels in MRI and CT images of human brain, and in a motion planning problem for an aircraft that can move forward/backward.

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01387 and performed in Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

Next, we show a relationship between the sub-Riemann problem in $SE(3)$ and problem **Pcurve** of minimizing the compromise between length and absolute curvature for a curve in $\mathbb{R}^3$ with fixed boundary points and directions. We give explicit formulas for extremals in problem **Pcurve** and investigate their geometric properties.

The talk is based on joint works [1, 2] with R. Duits, A. Ghosh, T. Dela Haije and A. Popov.

References

1. *Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A.* On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // J. Dyn. Control Syst. 2016. V. 22, No. 4. P. 771–805.
2. *Mashtakov A.P., Popov A.Yu.* Extremal controls in the sub-Riemannian problem on the group of motions of Euclidean space // Regular Chaotic Dyn. 2017. V. 22, No. 8. P. 952–957.

CONJUGACY OF SMALE SEMI-CHAOTIC HOMEOMORPHISMS AND DIFFEOMORPHISMS

V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma

National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
medvedev@uic.nnov.ru, zhuzhoma@mail.ru

Given a closed topological n -manifold M^n , $n \geq 2$, we introduce the class of Smale semi-chaotic homeomorphisms $Ssch(M^n)$ of M^n and give necessary and sufficient conditions of conjugacy of homeomorphisms from $Ssch(M^n)$. The class $Ssch(M^n)$ contains the class of Smale regular homeomorphisms $SRH(M^n)$, which contains all Morse–Smale homeomorphisms and diffeomorphisms of M^n .

The study was implemented in the framework of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics in 2018.

УСТОЙЧИВОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО
МЕТОДА ФЕЯ–ТЕЙЛОРА В ДИНАМИЧЕСКИХ
МОДЕЛЯХ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ
(ROBUSTNESS AND EFFICIENCY OF THE PARALLEL FAIR–TAYLOR
METHOD IN DYNAMIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS)*

Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия
melnikov@cs.msu.ru

В докладе будет дан обзор численных методов и новых возможностей, связанных с использованием параллельных вычислений в динамических моделях общего экономического равновесия.

Динамическая модель общего экономического равновесия представляет собой нелинейную краевую задачу на бесконечном промежутке времени. После дискретизации и ограничения на конечный отрезок времени получается нелинейная система уравнений большой размерности. Для решения таких задач в основном используются методы ньютоновского типа. При умеренной размерности задачи эти методы дают выигрыш в быстродействии по сравнению с методами первого порядка типа Якоби и Гаусса–Зейделя (см., например, [1]). Однако в многосекторных и многорегиональных моделях переменные задачи могут иметь разный порядок величины и их трудно отмасштабировать. В результате у методов ньютоновского типа возникают проблемы со сходимостью.

Для улучшения сходимости в многосекторных и многорегиональных моделях используется модифицированный метод Фея–Тейлора [2]. Метод является комбинацией метода типа Гаусса–Зейделя (внешний цикл) и методов ньютоновского типа для решения систем уравнений, возникающих на очередном шаге метода Гаусса–Зейделя (внутренний цикл). Метод Фея–Тейлора обладает устойчивостью к возмущениям параметров модели, но не обладает достаточным быстродействием.

Суть параллельного метода Фея–Тейлора состоит в том, что системы уравнений внутреннего цикла, отвечающие разным временным интервалам, решаются независимо. В работе [3] описана реализация параллельного метода Фея–Тейлора для систем с общей памятью. На примере *однорегиональной* модели общего экономического равновесия РЕТ [3, 4] было показано, что быстродействие параллельного метода Фея–Тейлора примерно такое же, как у методов ньютоновского типа.

Для дальнейшего анализа ускорения, которое дает параллельный метод Фея–Тейлора по сравнению с последовательной версией, используется *многорегиональная* модель общего экономического равновесия РЕТ [2]. Рассматривается типовая задача. Сначала параметры модели калибруются таким образом, чтобы

*Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерных комплексов МГУ и Национального центра атмосферных исследований (Бoulder, США).

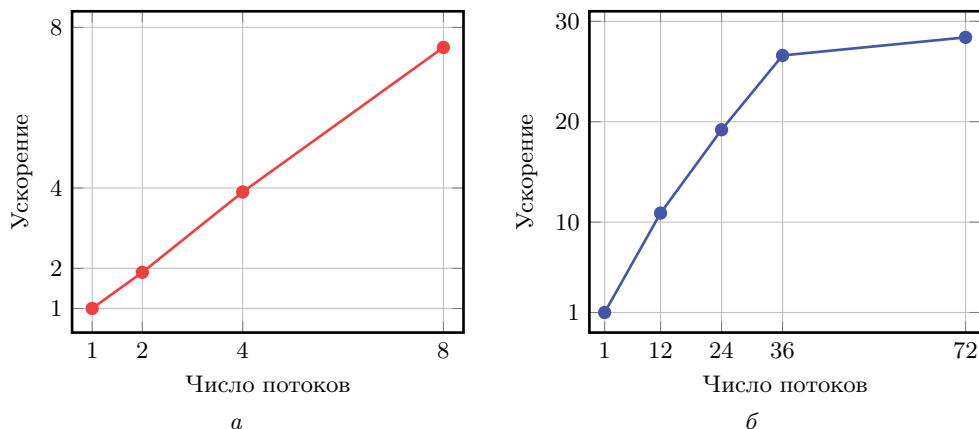


Рис. 1. Ускорение при использовании параллельного метода Фей–Тейлора в модели РЕТ: *а* — суперкомпьютер Ломоносов; *б* — суперкомпьютер Шайенн

воспроизвести один из базовых сценариев, SSP5 [2]. Затем берутся возмущенные значения параметров, для которых необходимо вычислить новое равновесие. При этом равновесие, отвечающее базовому сценарию SSP5, используется в качестве начального приближения (подробности см. в [5]).

Расчеты проводились для модели РЕТ с фиксированным числом временных интервалов, превышающим число доступных потоков. Ускорение параллельного алгоритма растет линейно при использовании до восьми потоков обычного узла на суперкомпьютере Ломоносов [6] (рис. 1, *а*). Ускорение продолжает расти почти линейно вплоть до 36 потоков на обычном узле суперкомпьютера Шайенн [7] (рис. 1, *б*). При дальнейшем увеличении числа потоков происходит насыщение, связанное с использованием гиперпоточности.

Использование параллельного метода Фей–Тейлора позволило значительно ускорить процесс калибровки параметров модели РЕТ в прикладных задачах [2, 5, 8].

Список литературы

1. Juillard M. et al. An algorithm competition: First-order iterations versus Newton-based techniques // J. Econ. Dynamics Control. 1998. V. 22. P. 1291–1318.
2. Ren X. et al. Avoided economic impacts of climate change on agriculture: Integrating a land surface model (CLM) with a global economic model (iPETS) // Climatic Change. 2016. V. 146. P. 517–531.
3. Melnikov N. et al. Parallel algorithm for solving large-scale dynamic general equilibrium models // Proc. 1st Russ. Conf. on Supercomputing – RuSCDays, Moscow, MSU, 2015. P. 84–95.
4. Melnikov N.B. et al. Accounting for household heterogeneity in general equilibrium economic growth models // Energy Econ. 2012. V. 34. P. 1475–1483.
5. Gruzdev A. et al. Parallel solution and calibration algorithms in dynamic general equilibrium models // Comput. Econ. 2018 (submitted).
6. Sadovnichy V. et al. “Lomonosov”: Supercomputing at Moscow State University // Contemporary high performance computing: From petascale toward exascale, Boca Raton: CRC, 2013.

7. Computational and information systems laboratory, 2017. Cheyenne: HPE/SGI ICE XA System (NCAR Community Computing). Boulder, CO: National Center for Atmospheric Research. doi:10.5065/D6RX99HX.
8. Melnikov N.B. et al. Downscaling heterogeneous household outcomes in dynamic CGE models for energy-economic analysis // Energy Econ. 2017. V. 65. P. 87–97.

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(ON THE LAPLACE INVARIANTS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS)

**А. Н. Миронов (A. N. Mironov),
Л. Б. Миронова (L. B. Mironova)**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт, Елабуга, Россия
miro73@mail.ru, lbmironova@yandex.ru*

Линейными уравнениями с доминирующей частной производной называют [1] уравнения вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ \alpha_s \leq m_s, s=\overline{1, n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad (1)$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — декартовы координаты точки x , $m = m_1 + \dots + m_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $m_s, \alpha_s, s = \overline{1, n}$, — целые неотрицательные числа, $m > 1$, $u(x)$ — искомая, а a_α, f — известные функции. Другими словами, уравнение (1) содержит доминирующую производную (первое слагаемое в правой части), а все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Простейшим представителем этого класса уравнений является гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y).$$

При $m_s = 1, s = \overline{1, n}$, уравнение (1) называется уравнением Бианки [2, с. 5–13].

Частные случаи уравнений (1) возникают при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие, они применяются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почве, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах (см., например, библиографические ссылки в [3]).

Приложения инвариантов Лапласа в теории гиперболических уравнений хорошо известны. В частности, инварианты Лапласа играют определяющую роль в классификации указанных уравнений методами группового анализа дифференциальных уравнений [4, с. 116–125]. Инварианты Лапласа для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка и их приложения рассмотрены в [3, 5–7]. В [8] предложен алгоритм построения инвариантов Лапласа для уравнений Бианки произвольного порядка. Для гиперболических систем также представляет интерес построение инвариантов Лапласа [9].

Данная работа посвящена инвариантам Лапласа и их приложениям для уравнений с доминирующей частной производной, содержащей кратное дифференцирование. Некоторые из этих результатов опубликованы в [10–12]. В частности, построены инварианты Лапласа $h_1, \dots, h_{17}$ для уравнения

$$\begin{aligned} &u_{xxyz} + a_{210}(x, y, z)u_{xxy} + a_{201}(x, y, z)u_{xxz} + a_{111}(x, y, z)u_{xyz} + \\ &+ a_{200}(x, y, z)u_{xx} + a_{110}(x, y, z)u_{xy} + a_{101}(x, y, z)u_{xz} + a_{011}(x, y, z)u_{yz} + \\ &+ a_{100}(x, y, z)u_x + a_{010}(x, y, z)u_y + a_{001}(x, y, z)u_z + a_{000}(x, y, z)u = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которое изучалось в [13, 14].

Определяющие уравнения для уравнения (2) вычисляются по стандартному алгоритму [4, с. 66]. Применение продолженного оператора X_4 , где

$$X = \xi^1(x, y, z)\partial_x + \xi^2(x, y, z)\partial_y + \xi^3(x, y, z)\partial_z + \sigma(x, y, z)u\partial_u,$$

к уравнению (2) и расщепление относительно свободных параметров приводят к определяющим уравнениям

$$\begin{aligned} &\xi_y^1 = 0, \quad \xi_z^1 = 0, \quad \xi_x^2 = 0, \quad \xi_z^2 = 0, \quad \xi_x^3 = 0, \quad \xi_y^3 = 0, \\ &2\sigma_x + (a_{111}\xi^1)_x + a_{111y}\xi^2 + a_{111z}\xi^3 - \xi_{xx}^1 = 0, \\ &\sigma_y + a_{201x}\xi^1 + (a_{201}\xi^2)_y + a_{201z}\xi^3 = 0, \\ &\sigma_z + a_{210x}\xi^1 + a_{210y}\xi^2 + (a_{201}\xi^3)_z = 0, \\ &\sigma_{xx} + a_{111}\sigma_x + (a_{011}\xi^1)_x + a_{011y}\xi^2 + a_{011z}\xi^3 + a_{011}\xi_x^1 = 0, \\ &2\sigma_{xy} + 2a_{201}\sigma_x + a_{111}\sigma_y + (a_{101}\xi^1)_x + (a_{101}\xi^2)_y + a_{101z}\xi^3 - a_{201}\xi_{xx}^1 = 0, \\ &2\sigma_{xz} + 2a_{210}\sigma_x + a_{111}\sigma_z + (a_{110}\xi^1)_x + a_{110y}\xi^2 + (a_{110}\xi^3)_z - a_{210}\xi_{xx}^1 = 0, \\ &\sigma_{yz} + a_{210}\sigma_y + a_{201}\sigma_z + a_{200x}\xi^1 + (a_{200}\xi^2)_y + (a_{200}\xi^3)_z = 0, \\ &\sigma_{xxy} + a_{201}\sigma_{xx} + a_{111}\sigma_{xy} + a_{101}\sigma_x + a_{011}\sigma_y + (a_{001}\xi^1)_x + (a_{001}\xi^2)_y + a_{001z}\xi^3 + a_{001}\xi_x^1 = 0, \\ &\sigma_{xxz} + a_{210}\sigma_{xx} + a_{111}\sigma_{xz} + a_{110}\sigma_x + a_{011}\sigma_z + (a_{010}\xi^1)_x + a_{010y}\xi^2 + (a_{010}\xi^3)_z + a_{010}\xi_x^1 = 0, \\ &2\sigma_{xyz} + 2a_{210}\sigma_{xy} + 2a_{201}\sigma_{xz} + a_{111}\sigma_{yz} + 2a_{200}\sigma_x + a_{110}\sigma_y + \\ &+ a_{101}\sigma_z + (a_{100}\xi^1)_x + (a_{100}\xi^2)_y + (a_{100}\xi^3)_z - a_{200}\xi_{xx}^1 = 0, \\ &\sigma_{xxyz} + a_{210}\sigma_{xxy} + a_{201}\sigma_{xxz} + a_{111}\sigma_{xyz} + a_{200}\sigma_{xx} + a_{110}\sigma_{xy} + a_{101}\sigma_{xz} + a_{011}\sigma_{yz} + \\ &+ a_{100}\sigma_x + a_{010}\sigma_y + a_{001}\sigma_z + (a_{100}\xi^1)_x + (a_{100}\xi^2)_y + (a_{100}\xi^3)_z + a_{000}\xi_x^1 = 0. \end{aligned}$$

Все определяющие уравнения (начиная с седьмого) могут быть записаны в инвариантной форме (в терминах инвариантов Лапласа). Например, семнадцатое уравнение из выписанных выше можно представить в трех формах

$$\begin{aligned}h_{8\xi_{xx}} + (h_{15\xi^1})_x + h_{15\xi_x^1} + (h_{15\xi^2})_y + (h_{15\xi^3})_z &= 0, \\h_{9\xi_{xx}} + (h_{16\xi^1})_x + h_{16\xi_x^1} + (h_{16\xi^2})_y + (h_{16\xi^3})_z &= 0, \\h_{10\xi_{xx}} + (h_{17\xi^1})_x + h_{17\xi_x^1} + (h_{17\xi^2})_y + (h_{17\xi^3})_z &= 0.\end{aligned}$$

Список литературы

1. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014.
2. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1987.
3. Джохадзе О.М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Диф. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 58–68.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Миронов А.Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1144–1149.
6. Миронов А.Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 389–400.
7. Миронов А.Н. О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Диф. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1572–1581.
8. Athorne C., Yilmaz H. Invariants of hyperbolic partial differential operators // J. Phis. A: Math. Theor. 2016. V. 49, No. 13. Paper 135201.
9. Жибер А.В., Старцев С.Я. Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 848–857.
10. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Изв. вузов. Математика. 2014. № 10. С. 27–34.
11. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для обобщенного уравнения Буссинеска-Лява // Диф. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 131–135.
12. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Мат. заметки. 2016. Т. 99, вып. 1. С. 89–96.
13. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Диф. уравнения. 2002. Т. 38, № 1. С. 93–97.
14. Жегалов В.И., Миронов А.Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Известия вузов. Математика. 2002. № 5. С. 23–30.

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
(ON THE COMPLETENESS OF SINE AND COSINE SYSTEMS
IN THE SPACE OF INTEGRABLE FUNCTIONS)*

Е. И. Моисеев (E. I. Moiseev), Д. А. Гуляев (D. A. Gulyaev)

*Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский
государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

smc@cs.msu.su, gulden@cs.msu.ru

Рассматривается вопрос о полноте систем синусов и косинусов с нецелочисленными и, более того, комплексными индексами в пространстве интегрируемых по Лебегу функций. Найдены критерии на величину отклонения от целого числа, при котором системы синусов и косинусов полны.

В пространстве интегрируемых функций известен следующий результат для функции $f(x)$ интегрируемой по Лебегу на $[0, \pi]$. Если

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $f(x)$ почти всюду равна нулю на $[0, \pi]$.

Аналогичный результат получен для системы косинусов. Если

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то $f(x)$ также почти всюду равна нулю на $[0, \pi]$.

Список литературы

1. Zygmund A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press, 2002. V. 1.
2. Moiseev E.I. On the basis property of systems of sines and cosines // Sov. Math., Dokl. 1984. V. 29. P. 296–300.
3. Devdariani G.G. The basis property of a trigonometric system of functions // Diff. Uravn. 1986. V. 22, No. 1. P. 168–170.
4. Moiseev E.I., Gulyaev D.A. The completeness of the eigenfunctions of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with the Frankl gluing condition // Integral Transforms and Special Functions. 2016. V. 27, No. 11. P. 893–898.
5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Graylock Press, 1965.
6. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. New York: McGraw-Hill, 1953. V. 2.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (16-11-10194).

WEAK AND STRONG NILPOTENTIZABILITY
IN THE MONSTER TOWERS HOSTING FLAG DISTRIBUTIONS

P. Mormul

University of Warsaw, Warsaw, Poland
mormul@mimuw.edu.pl

Control systems linear in controls, with linearly independent generators of vector fields, sometimes happen to be locally nilpotentizable. That is, to locally possess bases that generate (over reals, not over functions) nilpotent algebras of vector fields. The existence of a nilpotent basis may be somehow mischievously hidden in the nature of a system. When it exists and is at hand, a number of key control problems related with the system (e.g., motion planning) become much simpler. As Lafferriere & Sussmann put it in a 1990 report: ‘(...) *that one look for new classes of nilpotentizable systems, and also that one improve the existing nilpotentization results by making them as explicit as possible.*’

We call nilpotentizable systems (for 15 years already [3]) *weakly* nilpotent. When a system Σ is given globally on a manifold M , by weakly nilpotent points in M we mean those around which Σ is weakly nilpotent.

In turn, *strongly* nilpotent are those points p in M around which Σ is equivalent to its *nilpotent approximation* at p . Naturally, ‘strongly’ implies ‘weakly’, but not vice versa: ‘strongly’ appears to be a much more stringent property (cf., in particular, the paragraph after next).

An important class of weakly nilpotentizable distributions are *Goursat* distributions—members of Goursat *flags* which live on so-called Monster Manifolds [2]. Local nilpotent bases found for Goursat distributions allow for more—in the line of Lafferriere & Sussmann’s suggestion—the effective computation of the *nilpotency orders* (sometimes also called ‘indices’, sometimes ‘steps’) of the real Lie algebras generated by those bases; details are in [3].

It was among Goursat distributions where the first examples of weakly but not strongly nilpotent points were exhibited. They were found in the fourth stage of the Monster. Not strongly nilpotent points form a codimension 1 hypersurface in that stage. In the kinematic presentation of Laumond–Risler–Jean (cf. more on it in, e.g., [6]) those were instantaneous configurations of *three* trailers and a car such that $\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi/2$ and $(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2) \neq \pi^2/8$. The nilpotency order of those points is 7, while the analogous order of the nilpotent approximation at those points is 6. In other words, using the notion of *tangentiality* [3, Definition 4], those were not tangential points in that Monster’s stage.

In my abstract to the Pontryagin’s 100th Anniversary Conference in 2008 there was put forward the following

Conjecture. ‘*Strongly nilpotent*’ and ‘*tangential*’ are synonyms in the *Goursat world*.

This conjecture is by now confirmed. All strongly nilpotent points in the Goursat Monster are already known; in particular, their equations in the kinematic presentation angles are effectively known. We would like, in the first place, to present and recapitulate those findings during the conference.

In parallel, much ampler classes of globally weakly nilpotent distributions are being furnished by so-called *special m -flags*, $m \geq 2$. Those are induced by rather particular rank- $(m+1)$ subbundles $D \subset TM$, $\dim M = (r+1)m+1$, r being the length of a flag. The defining conditions demand that the tower of consecutive Lie squares of D

$$D \subset [D, D] \subset [[D, D], [D, D]] \subset \cdots \subset TM \quad (1)$$

grow in ranks, at every point of M , in the arithmetical progression $m+1, 2m+1, 3m+1, \dots, (r+1)m+1 = \dim M$ and that the associated subtower of Cauchy-characteristic subdistributions $L(D) \subset L([D, D]) \subset L([[D, D], [D, D]]) \subset \cdots$ also grow in ranks arithmetically $m, 2m, 3m, \dots, (r-1)m, rm$. (The biggest term in this subtower is, strictly speaking, not Cauchy-characteristic but is a so-called *covariant subdistribution* of the one before last term in the main tower (1). For more on that see, e.g., [1] and [4].)

Much like for Goursat structures, there exist huge manifolds locally universal for the special m -flags of any fixed length r . Upon floating r , one gets a tower of such manifolds. Each member of any special m -flag is locally materialized—up to the local diffeo equivalence—somewhere on a certain stage of the tower. This is precisely the mentioned local universality of the tower. All such distributions are globally weakly nilpotent, and relevant local nilpotent bases for them can be effectively constructed. They depend on a natural stratification of germs of special m -flags into so-called *singularity classes* [5]. The Lie algebras that are generated depend *but* on singularity classes, and the same, obviously, holds for the nilpotency orders. Those orders are effectively written down and computed in [4].

In contrast, the following is not known (except for a number of relatively simple sub-cases):

- What points in the Special m -Flags' Monster Towers are strongly nilpotent?
- What are the dimensions of the nilpotent real Lie algebras mentioned in the present abstract, both for Goursat flags and for special multi-flags?

The nilpotency orders of the underlying Lie algebras are tractable (cf. again Laf-ferriere & Sussmann's suggestion of 1990), but not the real dimensions.

References

1. *Kumpera A., Rubin J.* Multi-flag systems and ordinary differential equations // Nagoya Math. J. 2002. V. 166. P. 1–27.
2. *Montgomery R., Zhitomirskii M.* Points and curves in the monster tower. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. (Mem. AMS; V. 956).
3. *Mormul P.* Goursat distributions not strongly nilpotent in dimensions not exceeding seven // Lect. Notes Control Inf. Sci. 2003. V. 281. P. 249–261.
4. *Mormul P.* Multi-dimensional Cartan prolongation and special k -flags // Banach Cent. Publ. 2004. V. 65. P. 157–178.
5. *Mormul P.* Singularity classes of special 2-flags // SIGMA. 2009. V. 5. Paper 102.
6. *Mormul P.* Car + trailers' kinematical systems, and the local nilpotentizability of the underlying rank-2 distributions // XII Vseros. Soveshchanie po Problemam Upravleniya. Trudy. 2014. P. 1517–1523.

A CONTROL BASED MATHEMATICAL STUDY
ON THE ROLE OF REGULATORY T CELLS IN THE INHIBITION
OF PSORIASIS USING UVB EXPOSURE THERAPY*

**Sanchari Mukherjee^a, Amit Kumar Roy^a, Ellina Grigorieva^b,
Evgenii Khailov^c, Priti Kumar Roy^{a,d}**

^a*Centre for Mathematical Biology and Ecology, Department of Mathematics,
Jadavpur University, Kolkata, India*

^b*Department of Mathematics and Computer Sciences,
Texas Woman's University, Denton, USA*

^c*Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^d*pritiyu@gmail.com*

Psoriasis is a chronic, long-lasting skin condition characterized by inflammatory patchy skin and erythematous raised plaques. It is a T-cell mediated disease initiated by an abnormally overactive immune system that ultimately triggers uncontrolled differentiation of keratinocytes (skin cells). The mechanism of regulatory T cells in inhibiting psoriatic inflammation justifies a crucial role by restraining the activation of a T-cell generated pro-inflammatory environment. Here, we have formulated a mathematical model exploring the interplay between the immune suppressive role of regulatory T cells with activated NK cells and lymphocytes. We have further observed the impacts of the bidirectional cross-effect between activated NK cells and Treg cells during disease progression. The ultimate prevention of excessive keratinocyte growth induced by the Treg mediated control of pro-inflammatory immune response has been investigated, followed by the numerical and analytical study of the system. Finally, the therapeutic dimension of the system has been explored using UVB radiation exposure by emphasizing its ability to induce regulatory T cell proliferation for the better management of the normal keratinocyte cell population growth.

The mathematical model. To formulate our mathematical model, we consider four cell populations, i.e., lymphocytes (excluding NK cells and Treg cells) $L(t)$, activated Natural Killer (NK) cells $N_A(t)$, regulatory T (Treg) cells $T_r(t)$, and keratinocytes $K(t)$. In our model, we have considered a constant growth rate of lymphocytes in the human immune system, denoted by r_1 . A parameter α is assumed to be the rate at which Treg cells suppress the growth rate of lymphocytes. The natural rate of apoptosis of lymphocytes is denoted by μ_1 . Thus, the dynamics of the lymphocytes are governed by the following equation:

$$\frac{dL}{dt} = r_1 - \alpha L T_r - \mu_1 L.$$

Since activated NK cells and Treg cells form a major part of the family of lymphocytes in the human immune system, it is obvious that their proliferation will be dependent on the population of lymphocytes. It is assumed that the family of lymphocytes

*The research is supported by the Indo-Russian joint research project no. INT/RUS/RFBR/306 organized by DST-RFBR 2018, Govt. of India and Govt. of Russian Federation.

contributes to the populations of NK cells and Tregs at rates r_2 and r_3 , respectively. Keratinocytes release the cytokine IL-15, the effect of which leads to the proliferation of activated NK cells at the rate η_1 . Due to the suppressing effect of Treg cells, the population of activated NK cells decreases at the rate η_2 . Further, the suppression of NK cells by Treg cells is responded simultaneously by a negative cross effect of NK cells on the Treg cell population, which finally inhibits the growth of Treg cells at the rate ξ_1 . The release of IL-2 by lymphocytes enhances the growth of Treg cells at a rate ξ_2 . Activated NK cells and Treg cells possess natural decay rates μ_2 and μ_3 , respectively. The equations representing the growth of NK cells and Treg cells are given by

$$\begin{aligned}\frac{dN_A}{dt} &= r_2L + \eta_1KN_A - \eta_2N_AT_r - \mu_2N_A, \\ \frac{dT_r}{dt} &= r_3L - \xi_1T_rN_A + \xi_2T_rL - \mu_3T_r.\end{aligned}$$

Due to the constant migration of cells from the dermal layer to the epidermal layer, it is assumed that r_4 is the growth rate of keratinocytes. The positive effect of the vast IFN- γ released by activated NK cells helps to proliferate the keratinocytes at a rate β_1 , and at the same time, Treg cells inhibit the proliferation of keratinocytes at the rate of β_2 due to its immune suppression role in the entire immune system. The entire family of lymphocytes comprises cells, some of which release pro-inflammatory cytokines and others release anti-inflammatory cytokines. However, since the overall pro-inflammatory effect of lymphocytes largely exceeds the anti-inflammatory effect on the immune system, it has been considered that it ultimately causes the proliferation of keratinocytes at rate γ . The apoptosis rate of keratinocytes is represented by the term μ_4 . The dynamics of keratinocytes are thus denoted by the following equation:

$$\frac{dK}{dt} = r_4K + \frac{\beta_1N_A}{1 + \beta_2T_r} + \gamma LK - \mu_4K,$$

Thus we have the following mathematical model:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= r_1 - \alpha LT_r - \mu_1L, \\ \frac{dN_A}{dt} &= r_2L + \eta_1KN_A - \eta_2N_AT_r - \mu_2N_A, \\ \frac{dT_r}{dt} &= r_3L - \xi_1T_rN_A + \xi_2T_rL - \mu_3T_r, \\ \frac{dK}{dt} &= r_4K + \frac{\beta_1N_A}{1 + \beta_2T_r} + \gamma LK - \mu_4K,\end{aligned}$$

with the initial conditions $L(0) > 0$, $N_A(0) > 0$, $T_r(0) > 0$, and $K(0) > 0$, and all the parameters are assumed to be non-negative.

Control induced mathematical model. In this section, we want to analyze our formulated model with addition of a control parameter, the effect of UVB radiation, but we do not study the deviation or side effects of this therapy. By optimizing a particular performance, we usually solve these types of problems through finding the time dependent profiles of the control variable. It is apparent from our preceding

discussion that to control psoriasis, it is obligatory to increase the regulatory T cell and its immune suppression effect. We have taken our control set, defined on $[t_{\text{start}}; t_{\text{finish}}]$ subject to the condition $0 < u^{\min} \leq u(t) \leq u^{\max} < 1$, where t_{start} and t_{finish} are starting and finishing time of treatment, respectively. Thus we have the following control induced model:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= r_1 - u_1 \alpha L T_r - \mu_1 L, \\ \frac{dN_A}{dt} &= r_2 L + \eta_1 K N_A - u_1 \eta_2 N_A T_r - \mu_2 N_A, \\ \frac{dT_r}{dt} &= u_1 r_3 L - \xi_1 T_r N_A + \xi_2 T_r L - \mu_3 T_r, \\ \frac{dK}{dt} &= r_4 K + (1 - u_1) \frac{\beta_1 N_A}{1 + \beta_2 T_r} + \gamma L K - \mu_4 K.\end{aligned}$$

Here $L(0) > 0$, $N_A(0) > 0$, $T_r(0) > 0$, and $K(0) > 0$, and all the parameters are assumed to be non-negative. The cost function is formulated as

$$J(u) = \int_{t_s}^{t_f} [K(t) + 0.5B(u(t))^2] dt.$$

In this problem, we are seeking the optimal control parameter u^* such that

$$J(u^*) = \min\{J(u^*): u \in U\}.$$

Here U is the control set and we determine the optimal control u^* . If $u^*(t)$ is the optimal control, then the *Pontryagin minimum principle* may be functional for the reversed control approach.

Conclusion. Our analytical and numerical findings reveal that UVB radiation therapy enhances the regulatory T cell population which effectively limits the keratinocyte population growth under control.

О ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ (ON THE GEOMETRY OF THE REACHABILITY SET OF VECTOR FIELDS)

А. Я. Нарманов (A. Ya. Narmanov)

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

narmanov@yandex.ru

Пусть M — гладкое многообразие размерности n , $V(M)$ — множество всех гладких векторных полей, определенных на M . Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли. Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞ .

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D . Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \rightarrow X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X , проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \rightarrow X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset \mathbb{R}$, которая в общем случае зависит от поля X и от начальной точки x .

В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \rightarrow X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем. В этом случае поток векторного поля порождает динамическую систему.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x , определяется как множество таких точек y из M , для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_k$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)).$$

Определение 2. Точка

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)) \in L(x)$$

называется T -достижимой из точки $x \in M$, если $\sum_i t_i = T$.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T -достижимы из точки x .

Изучению структуры множества достижимости и орбиты систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, динамических системах, геометрии и теории слоений [1–5].

В работах [4, 5] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса C^r , $r \geq 1$) с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой, по отношению к которой она является гладким многообразием класса C^r , гладко погруженным в M .

Используя идею работы [5] Суссмана, где он доказал, что орбита является гладким многообразием, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности 1 или 0.*

Напомним, что если в определении 1 потребовать, чтобы числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ были неотрицательными, то мы получим определение положительной полуорбиты $L^+(x)$.

Еще одним существенным вкладом Г. Суссмана в изучение геометрии множества достижимости является следующая теорема, которая доказана им совместно с Н. Левиттом [3].

Теорема 2. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности n . Существует система D , состоящая из двух векторных полей, такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

С помощью теоремы 2 нами доказана следующая

Теорема 3. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geq 2$. Существует система D , состоящая из трех векторных полей, такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Для многообразий с ненулевой эйлеровой характеристикой получен следующий результат.

Теорема 4. Пусть M — гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geq 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует система D , состоящая из двух векторных полей, такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Следующий пример показывает, что на компактном связном многообразии M с нулевой эйлеровой характеристикой также может существовать система D , состоящая из двух векторных полей, такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Пусть трехмерная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, где x, y, z, w — декартовы координаты в $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим систему на S^3 , состоящую из двух векторных полей

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w}, \quad Y = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля являются полями Киллинга, т.е. локальные диффеоморфизмы $x \rightarrow X^t(x)$, $x \rightarrow Y^t(x)$ при каждом t являются изометриями сферы S^3 . Скобка Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y имеет следующий вид:

$$[X, Y] = -w \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial w}.$$

Векторные поля $X, Y, [X, Y]$ принадлежат подалгебре Ли $A(D)$, которая является минимальной подалгеброй Ли алгебры Ли $V(M)$, содержащей множество D .

В точке $p(1, 0, 0, 0) \in S^3$ векторы $X(p), Y(p), [X, Y](p)$ линейно независимы, т.е. подпространство $A_p(D) = \{X(p) : X \in A(D)\}$ трехмерно. Поэтому орбита $L(p)$ является трехмерной. В силу того, что X, Y — векторные поля Киллинга, орбита $L(p)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^4$ (следовательно, в S^3) [2]. С другой стороны, как вытекает из доказательства теоремы 1, в силу максимальности размерности орбита $L(p)$ является открытым подмножеством в S^3 . Следовательно, орбита совпадает с S^3 .

Теперь рассмотрим множества $A_q(0)$ для $q \in S^3$. Если множества A_q являются подмногообразиями коразмерности 1, в силу того, что векторные поля X, Y являются векторными полями Киллинга, они порождают двумерное риманово слоение на S^3 [2]. Как следует из результатов работы [7], на трехмерной сфере не существует двумерных римановых слоений. Следовательно, множество $A_q(0)$ совпадает с S^3 для всех $q \in S^3$.

Список литературы

1. Азамов А.А., Нарманов А.Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей // Диф. уравнения. 2004. Т. 40, № 2. С. 257–260.
2. Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1582–1589.
3. Levitt N., Sussmann H. On controllability by means of two vector fields // SIAM J. Control. 1975. V. 13, No. 6.
4. Stefan P. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 29. P. 694–713.

5. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. P. 197–199.
6. *Sussmann H.* Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations // J. Diff. Eqns. 1976. V. 20. P. 292–315.
7. *Нарманов А.Я., Косимов О.* О геометрии римановых слоений сфер малых размерностей // Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. 2013. №2. С. 6–7.

ASYMPTOTIC METHOD OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES AND ITS APPLICATIONS IN NONLINEAR WAVE THEORY*

N. N. Nefedov

*Department of Mathematics, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

nefedov@phys.msu.ru

We present recent results for some classes of initial boundary value problems for some classes of Burgers-type equations, for which we investigate moving fronts by using the developed comparison technique. We also present our recent results on singularly perturbed reaction–advection–diffusion problems, which are based on a further development of the asymptotic comparison principle (see [1–4]). For these initial boundary value problems, the existence of moving fronts and their asymptotic approximation are investigated. The results are illustrated by the problem

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, t, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t, \varepsilon) &= u^0(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1(t), \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1)$$

An asymptotic approximation of solutions with a moving front for specific forms of equation (1) in the case of modular and quadratic nonlinearity and nonlinear amplification is constructed. Such problems are typical in numerous applications of nonlinear wave theory (see [5] and references therein). Note that the applications make use of a more natural formulation of problem (1) in which the coordinate and time are swapped (“wave formulation”). Then the equation describes quadratically nonlinear or modular waves propagating in a non-dispersive medium with cubically nonlinear amplification. The influence exerted by nonlinear amplification on the front propagation and collapse is determined. The front localization and the collapse time are estimated. In particular, we have shown that the following Burgers-type equation with cubic amplification exhibits the blow-up of the front-type solution:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - u^3, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 0.3], \\ u(0, t) &= -2, \quad u(1, t) = \frac{1}{3}, \quad u(x, 0) = \frac{7}{6} \tanh \frac{x - 1/4}{\varepsilon} - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

*This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00042).

The following case of modular nonlinearity and cubic amplification was also investigated:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial |u|}{\partial t} - u^3, & x \in (0, d), \quad t \in [t_0, t_1], \\ u(x, t_0, \varepsilon) &= u^0 < 0, \quad u(x, t_1, \varepsilon) = u^1 > 0, & x \in [0, d], \\ u(0, t, \varepsilon) &= u_{\text{init}}(t, \varepsilon), & t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

The functions φ^l and φ^r have the form

$$\varphi^l = -\left(-\frac{1}{2t + c_0}\right)^{1/2}, \quad \varphi^r = \left(\frac{1}{2t + c_1}\right)^{1/2}, \quad \text{where } c_0 = -\frac{1}{(u_0)^2}, \quad c_1 = \frac{1}{(u_1)^2}.$$

Blow-up points for φ^l and φ^r are $t_{cl} = -c_0/2 > 0$ and $t_{cr} = -c_1/2 < 0$, respectively. The equation of front motion is

$$\frac{dt_0}{dx} = -\frac{\varphi^r(t_0) + \varphi^l(t_0)}{\varphi^r(t_0) - \varphi^l(t_0)} = V(t_0), \quad t_0(0) = t_{00}, \quad t_{00} \in (t_{cr}, t_{cl}). \quad (3)$$

Thus, problem (2) has a solution with a sharp front, and its observation time depends on the coordinate and is determined by problem (3).

References

1. *Nefedov N.* Comparison principle for reaction–diffusion–advection problems with boundary and internal layers // *Lect. Notes Comput. Sci.* 2013. V. 8236. P. 62–72.
2. *Vasileva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.* Singularly perturbed problems with boundary and internal layers // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. V. 268. P. 258–273.
3. *Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction–advection–diffusion equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2013. V. 405. P. 90–103.
4. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // *Russ. J. Math. Phys.* 2015. V. 22, No. 2. P. 215–226.
5. *Nefedov N.N., Rudenko O.V.* On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // *Dokl. Math.* 2018. V. 97. P. 99–103.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ
(ON ESTIMATING THE ATTAINABLE SET
FOR SOME CONTROL OBJECTS)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`mnii@mi.ras.ru`

В математической теории управления важную роль играет множество достижимости управляемого объекта $D(x_0, T)$, где x_0 — начальное состояние управляемого объекта при $t = 0$, $T > 0$ — время движения этого объекта (см., например, [1]). Знание $D(x_0, T)$ или его оценки при $T > 0$ позволяет, например, оценить динамические возможности управляемого объекта, что представляет интерес для различных приложений. В литературе известно несколько постановок задач оценивания $D(x_0, T)$ (см., например, [2–4]). Отметим, что в линейном случае для описания множества $D(x_0, T)$ и его оценок можно с успехом применять аппарат опорных функций (см., например, [5]).

В этой работе мы будем заниматься оцениванием $D(x_0, T)$ сверху по включению. Рассмотрим управляемый объект (см. [1]) вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$. На нелинейную функцию $f(x, u)$ накладываются обычные требования гладкости (см., например, [1]). Отметим, что одна из первых оценок сверху для множества $D(x_0, T)$ была построена в [6] в виде шара с центром в нуле. Другой общий подход к оцениванию сверху $D(x_0, T)$ с помощью функций $V(x)$ ляпуновского типа изложен в работе [4]. При таком подходе важно удачно подобрать подходящую функцию $V(x)$. Тут могут помочь многочисленные результаты по классической теории устойчивости неуправляемых систем (см., например, [7]). В работе [8] было использовано свойство Важевского квазимоноотонного неубывания векторной функции для получения покоординатных оценок сверху для изучаемого множества $D(x_0, T)$.

Приведем два примера, иллюстрирующих сказанное.

Пример 1. Рассмотрим двумерный управляемый объект вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) + u, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $g(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^2$, $u \in [p, q]$, $p < q$. Предположим, что частная производная g_{x_1} неотрицательна на $\mathbb{R}^2$ и выполнено неравенство $x_2 g(x_1, x_2) \leq c(1 + |x|^2)$ при $x \in \mathbb{R}^2$, где c — некоторая неотрицательная константа. Отметим, что из наложенных на функцию g требований вытекает, что векторная функция $h(x_1, x_2)$ с компонентами $x_2, g(x_1, x_2)$ является квазимоноотонно неубывающей в смысле Важевского. С помощью результатов [8] обосновывается следующий факт: для векторов z , принадлежащих множеству достижимости $D(x_0, T)$, выполняются векторные неравенства

$$\xi(T) \leq z \leq \eta(T), \quad (3)$$

где $\xi(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = g(\xi_1, \xi_2) + p$$

с начальным условием $\xi(0) = x_0$, $\eta(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = g(\eta_1, \eta_2) + q$$

с начальным условием $\eta(0) = x_0$. Напомним, что $u \in [p, q]$. Векторные неравенства (3) обеспечивают покомпонентные оценки векторов $z \in D(x_0, T)$. Они определяют прямоугольник $P(T)$, содержащий множество достижимости $D(x_0, T)$. Нетрудно видеть, что среди всех содержащих множество $D(x_0, T)$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, построенный прямоугольник $P(T)$ имеет наименьшую площадь.

Пример 2. Рассмотрим двумерный управляемый объект (см. [7, с. 66])

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) + u, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где функции $g(x_1)$, $h(x_2)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^1$, $u \in [p, q]$, причем $p < q$. Рассмотрим функцию Ляпунова вида (см. [7, с. 66])

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(s) ds. \quad (5)$$

Потребуем выполнения неравенств $g(x_1)x_1 \geq 0$ для всех x_1 из $\mathbb{R}^1$, $h(x_2)x_2 \geq 0$ для всех x_2 из $\mathbb{R}^1$. При сделанных предположениях функция $V(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируема и неотрицательна на $\mathbb{R}^2$. Используя выкладки из [7, с. 66], для непрерывно дифференцируемой функции $v(t) = V(x_1(t), x_2(t))$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — компоненты решения задачи Коши (4), соответствующего произвольному непрерывному управлению $u(t) \in [p, q]$ и начальному условию $x(0) = x_0$, получаем на $[0, T]$ неравенство

$$\dot{v}(t) \leq x_2(t)u(t) \leq rv(t)^{1/2}, \quad (6)$$

где $r = 2^{1/2} \max(|p|, |q|)$.

Поставим в соответствие этому неравенству уравнение сравнения

$$\dot{w} = r|w|^{1/2} \quad (7)$$

с начальным условием

$$w(0) = V_0 = V(x_1(0), x_2(0)). \quad (8)$$

Можно обосновать, что для максимального решения $\tilde{w}(t)$ задачи Коши (7), (8) при $t \in [0, T]$ справедлива формула

$$\tilde{w}(t)^{1/2} = V_0^{1/2} + \frac{rt}{2}. \quad (9)$$

Теперь с помощью известной теоремы сравнения (см. [9, с. 40, теорема 4.1]) получаем при $t \in [0, T]$ неравенство вида $v(t) \leq \tilde{w}(t)$. Отсюда, используя определение функций $V(x_1, x_2)$, $v(t)$, получаем при $t \in [0, T]$ неравенство

$$|x_2(t)| \leq b(t) = 2^{1/2} \left(V_0^{1/2} + \frac{rt}{2} \right). \quad (10)$$

При выводе оценки (10) мы считали, что допустимое управление $u(t)$ непрерывно на $[0, T]$. Можно обосновать, что и для измеримых допустимых управлений $u(t)$ неравенство (10) имеет место. Используя первое из уравнений системы (4), на основании сказанного мы получаем при произвольных допустимых измеримых управлениях $u(t)$ оценку вида

$$|x_1(T) - x_1(0)| \leq \int_0^T b(s) ds. \quad (11)$$

Таким образом, с помощью неравенств (10), (11) возникает оценка сверху по включению множества достижимости для управляемого объекта (4) в виде прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат.

Список литературы

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
3. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhäuser, 1997.
4. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
5. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001.
6. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия. 1959. № 2. С. 25–38.
7. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
8. *Никольский М.С.* О покоординатном оценивании множества достижимости управляемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2018. № 2. С. 31–35.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970.

ЗАДАЧА О ФОРМИРОВАНИИ ОБЩЕСТВЕННОГО МНЕНИЯ ИНВЕСТИРОВ В РАМКАХ ТЕОРИИ MEAN FIELD GAMES (THE PROBLEM OF FORMING THE INVESTOR PUBLIC OPINION WITHIN A MEAN FIELD GAMES FRAMEWORK)

С. И. Никулин (S. I. Nikulin)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

sergey.nikuline@mail.ru

Мы рассматриваем рынок, на котором действует большое число инвесторов, управляющих собственным портфелем ценных бумаг, состоящим из рискового актива и банковского депозита. Каждый инвестор решает задачу о максимизации общей для всех HARA-функции полезности от капитала портфеля к некоторому

моменту времени $T > 0$ (см. [1]). Стоимость рискового актива описывается, как обычно, стохастическим уравнением Орнштейна–Уленбека $dS/S = \mu dt + \sigma d\omega$, где ω — стандартный винеровский процесс, μ и $\sigma > 0$ — постоянные тренд и волатильность. Спецификой задачи является то, что инвесторы управляют портфелем, опираясь на собственные представления о значении тренда и волатильности, которые могут не совпадать с принятыми на начальный момент времени значениями этих величин. Считается, что мнения инвесторов о правильном значении тренда распределены нормально на всей оси, максимум первоначально находится в точке μ_0 . Значения волатильности подчинены некоторому положительному распределению и также имеют максимум в некоторой точке $\sigma_0 > 0$. В процессе управления начальные распределения тренда и волатильности меняются при стремлении максимизировать темп роста капитала. При этом инвесторы получают штраф как за отклонение от мнения большинства, так и за отклонение от “истинных” значений тренда и волатильности, инвесторам неизвестным. Задача состоит в изучении поведения максимумов распределений тренда и волатильности в зависимости от времени, т.е. в отслеживании того, как мнение большинства инвесторов о характеристиках актива меняется в ответ на способ управления.

Мы решаем эту задачу в рамках теории Mean field games [2, 3], т.е. исследуем систему двух уравнений в частных производных, одно из которых — уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка описывает плотность распределения мнений об характеристиках актива ($m(t, \mu)$ или $m(t, \sigma)$), а другое — уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана возникает при решении оптимизационной задачи. Для первого уравнения ставится условие при $t = 0$, а для второго — при $t = T$.

При некоторых допущениях описанная задача имеет аналитическое решение и сводится к решению матричного уравнения Риккати с начально-финальными условиями. Мы находим условия, при которых это уравнение имеет решение при всех $T > 0$. При этом если T достаточно велико, то максимум распределения при $0 < T_1 < t < T_2 < T$ близок к “истинному” значению соответствующих величин. Это происходит, если штраф за отклонение от “истинного” значения велик. Таким образом, общественное мнение находит правильное значение характеристики актива.

В остальных случаях система уравнений Риккати имеет решение не при всех $T > 0$. Тем не менее положение максимумов распределений может быть найдено для всех $T > 0$, оно колеблется возле “истинного” значения характеристики, возможно, сильно отклоняясь от него. Иными словами, на рынке не может сложиться правильное мнение об активе.

Список литературы

1. Øksendal B.K., Sulem A. Applied stochastic control of jump diffusions. Berlin: Springer, 2005. Exercise 11.2.5.
2. Guéant O., Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games and applications // Paris–Princeton lectures on mathematical finance 2010. Berlin: Springer, 2011. P. 205–266.
3. Cardaliaguet P. Notes on mean field games: Tech. rep., 2010.

M. Orieux, R. Roussarie

*Paris Dauphine University, Paris, France**Bourgogne University, Dijon, Paris*

michael.orieux@dauphine.fr, rober.roussarie@ubfc.fr

This talk will focus on recent developments on optimal time control-affine control systems, with in mind application to the controlled Kepler and circular restricted three-body problems (CRTBP). We are interested in minimizing the final time for affine control systems,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u_1(t)F_1(x(t)) + u_2(t)F_2(x(t)), & t \in [0, t_f], \quad u \in B, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \\ t_f \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

where the control u is contained in the euclidean ball B , the F_i are smooth vector fields, and the phase space M is a four-dimensional manifold. (Most results are valid for $2m$ -dimensional manifolds with m controls.) The Pontrjagin Maximum Principle provides the following necessary condition: Optimal trajectories are projections on M of so-called extremals, that is, of solutions of the Hamiltonian system defined on T^*M by

$$H^*(z) = H_0(z) + \sqrt{H_1^2(z) + H_2^2(z)}, \quad z = (x, p) \in T^*M,$$

with $H_i(x, p) = \langle p, F_i(x) \rangle$, $i = 0, 1, 2$. The associated control is

$$u = \frac{1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2).$$

The set $\Sigma = \{z \in T^*M, H_1(z) = H_2(z) = 0\}$ defines a singular locus, and we are interested in the behaviour of the Hamiltonian flow in the neighborhood of Σ . When this set is crossed, the control admits a discontinuity, called a switch. We partition Σ into three subsets Σ_- , Σ_+ , and Σ_0 , on which we study the flow. We make the following generic assumption:

$$\det(F_1(x), F_2(x), F_{01}(x), F_{02}(x)) \neq 0 \quad \text{for almost all } x \in M. \quad (\text{A})$$

This assumption is in particular valid for every second-order controlled mechanical system of the form (V denotes a potential)

$$\ddot{q} + \nabla V(q) = u. \quad (2)$$

We use a blow-up and give a normal form for the extremal system, which allows us to prove

Theorem 1. *Assume (A) holds; then there is a unique extremal (with a switch) passing through each $\bar{z} \in \Sigma_-$; the extremal flow is locally well defined and there exists a stratification of the phase space such that the flow is smooth on each stratum. Furthermore, when crossing the strata, the flow admits log-type singularities (and thus belongs to the log-exp category).*

In a tubular neighborhood of Σ_+ , the flow is smooth and no extremal crosses Σ_+ (there is no switch, thus). Actually, we will show that the whole situation can be seen as a bifurcation around a point $\bar{z} \in \Sigma_0$. For those points we have

Theorem 2. *For generic systems (1), either there exists a unique trajectory passing through $\bar{z}$, or there exists a unique trajectory going out of Σ_0 at $\bar{z}$. In the first case, this trajectory is connected to the singular flow in Σ_0 .*

Furthermore, the flow is regular in the following sense.

Theorem 3. *In a neighborhood $O_{\bar{z}}$ of a point $\bar{z} \in \Sigma_0$, the flow is well defined, continuous, and piecewise smooth. More precisely, there exists a stratification*

$$O_{\bar{z}} = S_0 \cup S_1 \cup S_1^0$$

where

- S_1^0 is the submanifold of codimension 2 of initial conditions leading to Σ_0 ;
- S_1 is the submanifold of codimension 1 of initial conditions leading to Σ_- ;
- $S_0 = O_{\bar{z}} \setminus (S_1^0 \cup S_1)$.

The extremal flow $z|_{S_0 \times [0, t_f]}$, $z|_{S_1 \times [0, t_f] \setminus \Delta}$, $z|_{S_1^0 \times [0, t_f] \setminus \Delta^0}$ is smooth, and

$$\Delta^{(0)} = \{(\bar{t}(z_0), z_0), z_0 \in S_1^{(0)}\}.$$

References

1. Orioux M., Roussarie R. Bifurcation around nilpotent equilibrium for optimal time affine control systems: Preprint, 2018.
2. Caillau J.-B., Féjóz J., Orioux M., Roussarie R. On singularities of min time control affine systems // J.E.P. (submitted).

CONTROL SET SMOOTHING METHOD FOR PROGRAM PACKAGE ELEMENTS CALCULATION*

S. M. Orlov, N. V. Strelkovskii

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenbrug, Austria
sergey.orlov@cs.msu.ru, strelkon@iiasa.ac.at*

A fixed-time package guidance problem on a convex and closed set for a linear controlled dynamic system [1] is considered. A (program) package is a family of open-loop controls with their values in the predefined convex compact, parametrized by admissible initial states from a predefined finite set and satisfying the non-anticipatory condition for the linear observations of system (1) described by a function $y(t) = Q(t)x(t)$, where $Q(t)$ is piecewise left-continuous matrix function. These observations, in general, do not give full information about the exact initial state of the system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in P, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (1)$$

*Supported by the Russian Science Foundation under project 14-11-00539.

The solvability criterion for this problem comprises a finite-dimensional problem of maximizing a concave function over a convex compact set [2], which can be solved with standard optimization methods. If the problem is solvable, the modified method of successive approximations can be used for calculating the program package elements [3]. However, this method can be applied only to regular clusters of the initial state set.

Definition. A cluster of initial states $X_{0j}(\tau_k)$, $j = 1, \dots, J$, is called regular when the left-hand side of the minimum condition is non-zero for the entire $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, i.e.,

$$\sum_{x_0 \in X_{0j}(\tau_k)} B^T(t)F^T(\vartheta, t)l_{x_0}^* \neq 0, \quad t \in [\tau_{k-1}, \tau_k];$$

here τ_k , $k = 1, \dots, K$, are the uniform signal (which corresponds to the cluster $X_{0j}(\tau_k)$) splitting moments, $l_{x_0}^*$ are support vectors for the corresponding initial state x_0 , and $F(\vartheta, t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, is the fundamental matrix of system (1). Clusters which are not regular are called singular.

To calculate the program package elements for singular clusters, a modification of the method for singular controls [4] was proposed. However, the computational difficulty of the method and limited classes of problems addressed (in which the control set is a parallelepiped) hinder its effective use.

In general, the challenges associated with computing the guiding program package elements for singular clusters of the initial state set are associated with a non-strict convexity of the attainability set and an empty interior of the set $(B(t)P)_{x_0 \in X_0}$, which implements the non-anticipatory conditions on the control set reflecting the incomplete information about the exact initial realization of the initial state of system (1). These properties do not allow to use the Pontryagin maximum principle in the method of successive approximations.

To circumvent the issues with singular clusters, it is proposed to approximate the control set $(B(t)P)_{x_0 \in X_0}$ (the set P is assumed to be a polyhedron, a more general case than the one considered in [4]) by a sequence of smoothed strictly convex sets with non-empty interiors using the methods presented in [5]. For instance, for a special case of the symmetric segment $[-b, b]$ in n -dimensional space and for a small parameter $\varepsilon > 0$ the smoothed set with non-empty interior will be a set with a support function

$$c(l) = \sqrt{l^T \left(\varepsilon E + \left(1 - \frac{\varepsilon}{|b|^2} \right) bb^T \right) l}.$$

We prove that the method of successive approximations applied to a sequence of package guidance problems with smoothed sets approximates the guaranteeing program package of the initial package guidance problem with singular clusters.

References

1. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 144–159.
2. Kryazhimskiy A.V., Strelkovskii N.V. An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems // Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 2014. V. 20, No. 3. P. 132–147.

3. *Strelkovskii N.V., Orlov S.M.* Algorithm for constructing a guaranteeing program package in a control problem with incomplete information // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2018. V. 42, No. 2. P. 69–79.
4. *Strelkovskii N., Orlov S.* A method for calculation of program package elements for singular clusters // Systems Analysis: Modeling and Control: Materials Int. Conf. in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy, Moscow, May 31–June 1, 2018. P. 97–99.
5. *Avvakumov S.N.* Smooth approximation of convex compact sets // Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 1996. V. 4. Pp. 184–200.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЧАСТНОЙ
НЕУСТОЙЧИВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
(APPROXIMATE SOLUTION OF A PARTICULAR
UNSTABLE OPTIMAL CONTROL PROBLEM)

А. И. Осинский (A. I. Osinsky)

Институт вычислительной математики имени РАН, Москва, Россия

sasha_o@list.ru

Цель работы — получение приближенного решения следующей задачи оптимального управления:

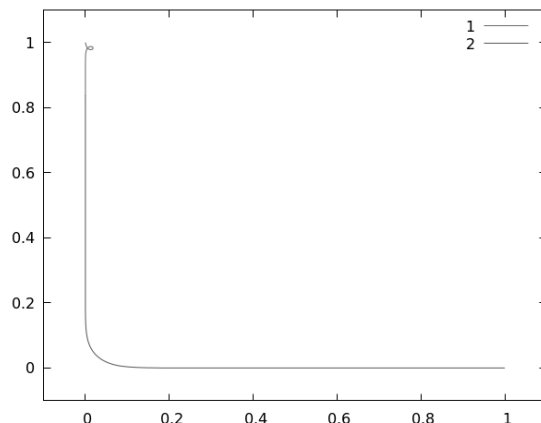
$$\begin{cases} \dot{x} = l \cos \theta, & \dot{y} = l \sin \theta, \\ \dot{z} = \frac{d}{dt'} \int_{x(t)}^{x(t+t')} \int_0^{y(t)} xy \, dx \, dy = \frac{y^2}{2} x \dot{x} = \frac{y^2}{2} x l \cos \theta, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad y(1) = 0, \quad z(1) = 0, \\ l \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1)$$

Задача состоит в поиске кривой минимальной длины l с началом в точке $(0, 1)$, концом в точке $(1, 0)$ и нулевым значением интеграла $\iint xy \, dx \, dy$ под кривой.

Данная задача является задачей поиска кратчайшей кривой на трехмерном субримановом многообразии глубины 4. Известно, что есть ровно одна аномальная геодезическая (т.е. кривая, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина с $\lambda_0 = 0$) — это кривая длины 2, идущая вдоль координатных осей. Она не может быть оптимальной, так как содержит угол (см. [2, Theorem 3.1]). Других аномальных геодезических, соединяющих данные точки, нет, поэтому кратчайшая кривая (которая должна существовать по теореме Филиппова) является нормальной. Принцип максимума Понтрягина с $\lambda_0 = 1$ приводит к уравнению

$$\frac{d\theta}{ds} = rxy,$$

где $s = tl$ играет роль длины кривой. Однако решение системы (1) методом стрельбы по r и $\theta(0)$ является затруднительным из-за неустойчивости, возникающей в связи с хаотичностью системы (см. [3, Theorem 2]).



Приближенное решение задачи (1). Цветами выделены первый и второй участки ломаной

Тем не менее удалось получить приближенное решение задачи в виде ломаной с использованием величин $\theta(t_i)$, $t_i = \tau i$, $i = \overline{1, N}$, $\tau = 1/N = 0.001$, как управления, а длины $l < l_{\min}$ как параметра.

Ломаная была разбита на два участка: первый участок длины l_1 начинался в точке $(0, 1)$, а второй длины l_2 начинался в точке $(1, 0)$. Так как $l = l_1 + l_2 < l_{\min}$, то расстояние между первым и вторым участком всегда было положительным. Его квадрат и был выбран в качестве минимизируемого функционала:

$$(x_1(1) - x_2(1))^2 + (y_1(1) - y_2(1))^2 \rightarrow \min.$$

Опуская детали, отметим, что системы уравнений для первого и второго участка решались поочередно методом покомпонентного градиентного спуска.

Полученное решение изображено на рисунке. Длина изображенной ломаной составляет $l \approx 1.98714$, а $\theta(0) = 0.16 - \pi/2$.

Сходимость к данному решению наблюдается как при начальных данных с одной произвольного размера петель на произвольной высоте, так и при наличии в начале нескольких петель.

Значения r в области петли и в области $x, y \ll 1$ различались менее чем на 4%.

Несмотря на то, что точность найденных r и θ_0 недостаточна для прямой проверки найденного решения методом стрельбы, устойчивость решения дискретной задачи и небольшое различие в коэффициенте r позволяют предположить, что найденное решение близко к локальному или даже глобальному минимуму поставленной задачи.

Использованные в данной задаче приемы могут позволить получить приближенные решения и в более сложных неустойчивых задачах оптимального управления.

Список литературы

1. *Monti R.* The regularity problem for sub-Riemannian geodesics // Geometric control theory and sub-Riemannian geometry / Ed. by G. Stefani et al. Cham: Springer, 2014. P. 313–332. (Springer INdAM Ser.; V. 5).

2. *Leonardi G.P., Monti R.* End-point equations and regularity of sub-Riemannian geodesics // *Geom. Funct. Anal.* 2008. V. 18, No. 2. P. 552–582.
3. *Lokutsievskiy L.V., Sachkov Yu.L.* Liouville integrability of sub-Riemannian problems on Carnot groups of step 4 or greater // *Sb. Math.* 2018. V. 209, No. 5. P. 672–713.

JOINT OPTIMIZATION OF SMOOTH AND NONSMOOTH FUNCTIONALS ON BEAMS OF TRAJECTORIES

D. A. Ovsyannikov, M. A. Mizintseva, A. D. Ovsyannikov

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

d.a.ovsyannikov@spbu.ru, m.mizintseva@spbu.ru

The problems of control of the ensemble of trajectories of discrete and continuous dynamic systems are well studied in numerous works by different authors. Let us mention some of them [1–6]. Those works consider both smooth and nonsmooth functionals separately. The main feature of the current paper is the use of a combination of smooth and nonsmooth functionals [7, 8] for the problem of simultaneous optimization of the program motion and the ensemble of disturbed motions [9, 10]. That sort of problems can occur in modeling and optimization of the dynamics of different entities. In this paper the problem of the optimization of the charged particle beam dynamics in a linear accelerator is considered [6–12].

Let us introduce a controlled dynamic system, described by the following ordinary differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t, x, y, u), \quad y(0) = y_0 \in M_0. \quad (2)$$

Here x_0 and y_0 are the initial conditions, $t \in T_0 = [0, T] \subset \mathbb{R}^1$ is an independent variable (as a rule, time); $x \in \mathbb{R}^n$ and $y \in \mathbb{R}^m$ are phase vectors with respective dimensions n and m ; $u \in \mathbb{R}^r$ is an r -dimensional control vector function; T is a fixed value. The vector functions $f(t, x, u)$ and $F(t, x, y, u)$ are assumed to be smooth enough. The set M_0 is a compact set of nonzero measure.

Jointly with system (1), (2) let us consider the equation for the particle distribution density $\rho = \rho(t) = \rho(t, y(t))$ along the trajectories of subsystem (2) (see [6]):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}_y F(t, x, y, u), \quad (3)$$

with a density distribution law $\rho_0(y_0)$ given on the initial set M_0 :

$$\rho(0) = \rho(0, y(0)) = \rho_0(y_0), \quad y_0 \in M_0.$$

Here $\rho_0(y_0)$ is some nonnegative continuous function.

Let us suppose that the allowed controls $u = u(t)$, $t \in T_0$, comprise a class D of piecewise continuous vector functions on $[0, T]$ with values in a compact manifold

$U \subset \mathbb{R}^r$. Let us also assume that system (1), (2) has a unique solution of the Cauchy problem with a fixed x_0 and arbitrary $y_0 \in M_0$ on the interval T_0 for all allowed controls $u \in D$.

Here and further let us call the solution of subsystem (1) the *program* (or *selected/calculated*) *motion*. The solutions of subsystem (2) with initial conditions $y_0 \in M_0$ and a fixed program motion will be called the *disturbed motions*.

It should be especially noted that the choice of the control function and, as a consequence, of the program motion influences the solutions of subsystem (2), which depends on them directly and which in particular can be considered as an equation in deviations from the program (calculated) motion. That is why it is not always reasonable in a step by step manner to search first for the program motion and then to solve the problems of optimization and stabilization of transition processes, caused, for instance, by the deviations of the initial data. Hence the problem of simultaneous optimization of a program motion and an ensemble of disturbed motions arises.

Let us proceed to the mathematical statement of the problem of simultaneous optimization. On the solutions of system (1), (2) and equation (3) with given initial conditions and a control vector function $u(t)$ let us introduce the following functionals:

$$I_1(u) = \int_0^T \phi_1(t, x(t), u(t)) dt + g_1(x(T)), \quad I_2(u) = \int_0^T \Phi(w_1(t)) dt + G(w_2),$$

$$I_3(u) = \max_{y_T \in M_{T,u}} g_3(y_T, \rho(T, y_T)),$$

where

$$w_1 = \int_{M_{t,u}} \phi_2(t, x(t), y_t, \rho(t, y_t), u(t)) dy_t, \quad w_2 = \int_{M_{T,u}} g_2(y_T, \rho(T, y_T)) dy_T.$$

Here set $M_{t,u}$ is the cross-section of the beam of trajectories of subsystem (2), evolving from the initial set M_0 with a given control $u(t)$ and corresponding program motion $x(t)$ at the moment t . The functions Φ , G , ϕ_1 , ϕ_2 , g_1 , g_2 , and g_3 are nonnegative continuously differentiable functions of their arguments.

Let us introduce the following functional:

$$I(u) = c_1 I_1(u) + c_2 I_2(u) + c_3 I_3(u), \quad (4)$$

which allows to evaluate simultaneously the dynamics of the program motion and the ensemble of trajectories considering the particle distribution density for the subsequent joint optimization. Here c_1 , c_2 , and c_3 are nonnegative constants.

We shall call the problem of minimizing the functional (4) on controls $u \in D$ the *problem of simultaneous optimization of the program motion and disturbed motions*.

In the current paper the variation of the functional (4) is presented as well as the necessary optimality conditions, allowing to construct various methods of directional optimization.

References

1. Ananyina T.F. The problem of control in case of partial data // Diff. Eqns. 1976. V. 2, No. 4. P. 612-620.
2. Vinogradova T.K., Demyanov V.F. On the minimax principle in optimal control problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1973. V. 213, No. 3. P. 512.

3. *Kotina E.D.* Discrete optimization problem in beam dynamics // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 2006. V. 558, No. 1. P. 292–294.
4. *Kurzhan'sky A.B.* Control in case of uncertainty. Moscow: Fizmatlit, 1977.
5. *Ovsyannikov A.D.* On one class of optimizational problems in a electrostatic field // Dokl. Akad. Nauk. 2013. V. 453, No. 4. P. 383.
6. *Ovsyannikov D.A.* Mathematical methods of beam control. Leningrad: LSU, 1980.
7. *Balabanov M.Yu., Mizintseva M.A., Ovsyannikov D.A.* Beam dynamics optimization in a linear accelerator // Vestn. Sankt-Peterb. Univ., Prikl. Mat. Inform. Prots. Upravl. 2018. V. 14. No. 1. P. 4–13.
8. *Mizintseva M., Ovsyannikov D.* Minimax problem of simultaneous optimization of smooth and non-smooth functionals // Constructive non-smooth analysis and related topics: Proc. Conf. CNSA 2017. IEEE, 2017. P. 218–222.
9. *Ovsyannikov A. D.* Control of program and disturbed motions // Vestn. Sankt-Peterb. Univ., Prikl. Mat. Inform. Prots. Upravl. 2006. No. 4. P. 111–124.
10. *Ovsyannikov A.D.* Control of the beam of charged particles considering their interaction // Vestn. Sankt-Peterb. Univ., Prikl. Mat. Inform. Prots. Upravl. 2009. No. 2. P. 82–92.
11. *Ovsyannikov, D.A., Altsybeyev, V.V.* On the beam dynamics optimization problem for an alternating-phase focusing linac // Phys. Part. Nuclei Lett. 2016. V. 13, No. 7. P. 775–779.
12. *Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Vorogushin M.F., Svistunov Yu.A., Durkin A.P.* Beam dynamics optimization: models, methods and applications // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 2006. V. 558, No. 1. P. 11–19.

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА
 ДЛЯ ОДНОЙ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
 (ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS OF THE RIEMANN PROBLEM
 FOR A NON-STRICTLY HYPERBOLIC SYSTEM)

В. В. Палин (V. V. Palin)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
 Москва, Россия*

grey_stranger84@mail.ru

Рассмотрим задачу Римана

$$\begin{cases} \phi_t = 0, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \phi \right)_x = 0, \\ \phi|_{t=0} = -\theta(x), \quad u|_{t=0} = u_- + (u_+ - u_-)\theta(x), \end{cases} \quad (1)$$

где u_- и u_+ — известные константы, $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Нетрудно видеть, что матрица коэффициентов при производных по x для этой системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial V_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & u \end{pmatrix},$$

одно из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ всегда равняется нулю, второе совпадает с u , и система (1) является нестрогим гиперболической по Петровскому (т.е. все ее собственные значения вещественны). Однако при $u = 0$ матрица $\mathbf{A}$ становится жордановой клеткой, и потому система (1) не является нестрогим гиперболической по Фридрихсу (т.е. не существует полного базиса из собственных векторов). По этой причине стандартная техника построения решений неприменима.

Для того чтобы построить обобщенное решение задачи (1), предлагается новый метод.

Теорема. Полная структура множества решений задачи Римана (1) в зависимости от набора констант u_- , u_+ имеет следующий вид.

1. При $u_- \geq 0$, $u_+ = \sqrt{u_-^2 + 2}$ или $u_- \leq 0$, $u_+ = -\sqrt{u_-^2 + 2}$ — однофронтное решение, совпадающее с начальными данными:

$$u = u_- + (u_+ - u_-)\theta(x).$$

2. При $u_- \geq 0$, $-\sqrt{2} < u_+ < \sqrt{u_-^2 + 2}$ или $u_- > 0$, $-\sqrt{u_-^2 + 2} < u_+ \leq -\sqrt{2}$ — двухфронтное немонотонное решение:

$$u = u_- + (\sqrt{u_-^2 + 2} - u_-)\theta(x) + (u_+ - \sqrt{u_-^2 + 2})\theta(x - \sigma t), \quad \sigma = \frac{u_+ + \sqrt{u_-^2 + 2}}{2}.$$

3. При $u_+ < -\sqrt{2}$, $|u_-| < \sqrt{u_+^2 - 2}$ — двухфронтное монотонное решение:

$$u = u_- - (\sqrt{u_+^2 - 2} + u_-)\theta(x - \sigma t) + (u_+ + \sqrt{u_+^2 - 2})\theta(x), \quad \sigma = \frac{u_- - \sqrt{u_+^2 - 2}}{2}.$$

4. При $u_- \geq 0$, $u_+ > \sqrt{u_-^2 + 2}$ — волна разрежения с последующим скачком:

$$u = u_- + (\sqrt{u_-^2 + 2} - u_-)\theta(x) + \left(\frac{x}{t} - \sqrt{u_-^2 + 2}\right)\theta(x - \sqrt{u_-^2 + 2}t) + \left(u_+ - \frac{x}{t}\right)\theta(x - u_+t).$$

5. При $u_+ < -\sqrt{2}$, $u_- < -\sqrt{u_+^2 - 2}$ — скачок с последующим постоянным состоянием и волной разрежения:

$$u = u_- + \left(\frac{x}{t} - u_-\right)\theta(x - u_-t) - \left(\frac{x}{t} + \sqrt{u_+^2 - 2}\right)\theta(x + \sqrt{u_+^2 - 2}t) + (u_+ + \sqrt{u_+^2 - 2})\theta(x).$$

6. При $u_- < 0$, $u_+ = -\sqrt{2}$ — скачок с последующей волной разрежения:

$$u = u_- + \left(\frac{x}{t} - u_-\right)\theta(x - u_-t) - \left(\sqrt{2} + \frac{x}{t}\right)\theta(x).$$

7. При $u_- < 0$, $u_+ = \sqrt{2}$ — скачок с последующей волной разрежения:

$$u = u_- + \left(\frac{x}{t} - u_-\right)\theta(x - u_-t) + \left(\sqrt{2} - \frac{x}{t}\right)\theta(x).$$

8. При $u_- < 0$, $|u_+| < \sqrt{2}$ — два скачка с последующей волной разрежения:

$$u = u_- + \left(\frac{x}{t} - u_-\right)\theta(x - u_-t) + \left(\sqrt{2} - \frac{x}{t}\right)\theta(x) + (u_+ - \sqrt{2})\theta(x - \sigma t), \quad \sigma = \frac{u_+ + \sqrt{2}}{2}.$$

9. При $u_+ > \sqrt{2}$, $u_- < 0$ — две волны разрежения со скачком между ними:

$$u = u_- + \left(\frac{x}{t} - u_-\right)\theta(x - u_-t) + \left(\sqrt{2} - \frac{x}{t}\right)\theta(x) + \left(\frac{x}{t} - \sqrt{2}\right)\theta(x - \sqrt{2}t) + \left(u_+ - \frac{x}{t}\right)\theta(x - u_+t).$$

Список литературы

1. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.
2. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
3. Лакс П.Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Ижевск: НИЦ "РХД", 2010.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах (от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации). М.: Мир, 1979.
6. Radkevich E.V. On the nature of bifurcations of one-front solutions of the truncated Euler system // J. Math. Sci. 2014. V. 196, No. 3. P. 388–404.

USING THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN CONSTRUCTING REACHABLE SETS FOR DUBINS CAR*

V. S. Patsko, A. A. Fedotov

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*
patsko@imm.uran.ru

In the work, the Pontryagin maximum principle (PMP) [1] is used for constructing reachable sets at instant for the nonlinear control system called the Dubins car. Usually, when someone uses the term "Dubins car", this implies a certain model of motion regardless of the type of task (payoff functional, etc.). For the history of the topic, we give references to works by A. A. Markov [2], R. Isaacs [3, 4], and L. Dubins [5].

Let the dynamics of a controlled object (Dubins car) in the plane x, y be described by the third-order system of differential equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad u_2 = 1, \quad u_1 \in [-1, 1].\end{aligned}\tag{1}$$

Here, x and y are the coordinates of the geometric position of the object; φ is the velocity direction angle counted counterclockwise from the axis x ; u is the scalar control; u_1 and u_2 are parameters. The magnitude of the linear velocity equals 1.

Representation (1) with $u_2 = 1$ can be obtained from an arbitrary controlled system of the third order with constant magnitude of the linear velocity and given range of the turn angular velocity. To this end, one should scale geometric coordinates and time. Without loss of generality, at the initial instant $t_0 = 0$, the initial phase state is the origin: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 18-01-00410.

As feasible controls $u(\cdot)$, we consider measurable functions depending on the time and having their values $u(t)$ in the segment $[u_1, u_2]$. It is assumed that the angular coordinate φ takes its values in the entire axis $(-\infty, \infty)$.

For the Dubins car, by the *reachable set* $G(t_f)$ at instant t_f we will mean the collection of all points of the *three-dimensional* phase space such that the system can reach each of them at the instant t_f from the given initial state (which is assumed to be the origin, without loss of generality) under some feasible control. The reachable set at instant should be distinguished from the reachable set *up to instant*. The latter is the union of all reachable sets at instant corresponding to the instants from 0 to t_f .

It is known [6] that the controls which guide the system to the boundary of the reachable set $G(t_f)$ obey the PMP. Namely, this makes it possible to effectively construct and investigate the structure of the reachable set.

Depending on the parameter u_1 , we distinguish three principally different cases: $u_1 \in [-1, 0)$, $u_1 = 0$, and $u_1 \in (0, 1)$. For each of them, we have obtained sufficiently complete results.

The following facts have been established.

1. The case $u_1 < 0$. We consider the “symmetric” variant with $u_1 = -1$, and the “asymmetric” variant with $u_1 \in (-1, 0)$. For each of them, a piecewise constant control leads to the reachable set boundary (taking extreme values or zero value) with at most two switches. Only the following six types of control sequences are possible:

- (1) $u_2, 0, u_2$; (2) $u_1, 0, u_2$; (3) $u_2, 0, u_1$;
(4) $u_1, 0, u_1$; (5) u_2, u_1, u_2 ; (6) u_1, u_2, u_1 .

Justification of this fact is available in [7–9].

For any instant t_f , the whole three-dimensional reachable set and its sections with respect to the angle coordinate φ are nonconvex. Sets of the values u_1 and t_f have been found for which the set $G(t_f)$ is not simply connected. A control satisfying the PMP does not always lead the system to the boundary of the reachable set. So, in the case $u_1 < 0$, the PMP is a necessary condition for transfer to the boundary, but not a sufficient one.

2. The case $u_1 = 0$. It is proved [10] that in this case any point on the boundary of the set $G(t_f)$ can be reached by means of a piecewise constant control with at most two switches. With that, the following two types of control sequences are possible:

- (1) $u_2, 0, u_2$; (2) $0, u_2, 0$.

The three-dimensional reachable set is nonconvex for any t_f . Nevertheless, every φ -section of it is convex, and such a section represents either a circle or a circular segment. Every piecewise constant control satisfying the PMP leads to the boundary of the reachable set. However, there is no uniqueness of the controls leading to the boundary.

3. The case $u_1 > 0$. Here, we can only claim the finiteness of the number of switches of controls leading to the boundary. There is an upper estimate for the number of switches. This estimate shows the growth of the number of switches with increasing instant t_f . Four control types are used to construct the boundary:

- (1) $u_1, u_2, u_1, \dots, u_2$; (2) $u_2, u_1, u_2, \dots, u_1$;
(3) $u_1, u_2, u_1, \dots, u_2, u_1$; (4) $u_2, u_1, u_2, \dots, u_1, u_2$.

Ellipsis means a sequence of alternating controls u_1 and u_2 .

The convexity of φ -sections of the reachable sets is proved. It is also established that all φ -sections can be separated into nine types [11]. The boundary of every φ -section is smooth for $t_f > 2\pi$. For the values of φ that are multiples of 2π , the boundary is a circle. As in the case $u_1 = 0$, the maximum principle is a sufficient condition for transfer of the system to the reachable set boundary. Moreover, the corresponding control is unique among piecewise constant controls.

In all these three cases, fragments of the boundary of the reachable set can be specified as a two-parameter family of points. This makes it possible to draw the reachable set $G(t_f)$ in the three-dimensional space with coloring its boundary according to the types of controls leading to the corresponding points. On the whole, the reachable set is similar to a snail shell.

As mentioned above, we assume that $\varphi \in (-\infty, \infty)$. If the angle φ is calculated modulo 2π , then the corresponding reachable set can be built very simply with the help of cuts of the set $G(t_f)$ constructed under the assumption $\varphi \in (-\infty, \infty)$.

The results of numerical constructions of the three-dimensional reachable sets are presented.

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Interscience, 1962.
2. *Markov A.A.* A few examples of solving special problems on the largest and smallest values // Commun. Kharkov Math. Soc. Ser. 2. 1889. V. 1, No. 2. P. 250–276 (in Russian).
3. *Isaacs R.* Games of pursuit: Sci. rep. RAND Corp., Santa Monica, 1951.
4. *Isaacs R.* Differential Games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
5. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79, No. 3. P. 497–516.
6. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. New York: J. Wiley and Sons, 1967.
7. *Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system // J. Comput. Systems Sci. Int. 2003. V. 42, No. 3. P. 320–328.
8. *Fedotov A., Patsko V., Turova V.* Reachable sets for simple models of car motion // Recent advances in mobile robotics / Ed. by A. V. Topalov. Rijeka (Croatia): InTech, 2011. P. 147–172. http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
9. *Simonenko A.S., Fedotov A.A.* Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control // Modern problems in mathematics and its applications: Proc. 48th Int. Youth Sch.–Conf., Yekaterinburg, 2017. P. 79–87. (CEUR Workshop Proc.; V. 1894). <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf> (in Russian).
10. *Patsko V.S., Fedotov A.A.* Reachable set at a certain time for a Dubins car in the case of a one-sided turn // Proc. Inst. Math. Mech. 2018. V. 24, No. 1. P. 143–155 (in Russian).
11. *Patsko V.S., Fedotov A.A.* Attainability set at instant for one-side turning Dubins car // Proc. 17th IFAC Workshop on control applications of optimization, Yekaterinburg, Russia. 2018.

ОСОБЕННОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ
В МЕТРИКАХ ПЕРЕМЕННОЙ СИГНАТУРЫ: 2D и 3D
(SINGULARITIES OF GEODESIC FLOWS
IN VARIABLE-SIGNATURE METRICS: 2D AND 3D)*

**Н. Г. Павлова (N. G. Pavlova)^{a,б,в},
А. О. Ремизов (A. O. Remizov)^а**

^а*Институт проблем управления РАН, Москва, Россия*

^б*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

^в*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*

natasharussia@mail.ru, alexey-remizov@yandex.ru

Мы представляем недавние результаты об особенностях геодезических потоков в метриках переменной сигнатуры, часто называемых псевдоримановыми. Это метрики с гладкими коэффициентами, вырождающиеся (в ситуации общего положения) на некотором подмногообразии Γ коразмерности 1.¹

Геодезический поток, порожденный псевдоримановой метрикой, имеет особенности в точках вырождения. В этих точках нарушаются стандартные условия существования и единственности, что приводит к интересному явлению: геодезические не могут выходить из точки вырождения в произвольных направлениях (как в случае римановой или лоренцевой метрики), но лишь в определенных *допустимых* направлениях. При этом как число геодезических, выходящих с разными направлениями, так и их свойства, могут радикально отличаться.

Мы представляем результаты в размерностях 2 (исследованы все особенности коразмерностей 1 и 2, см. [2, 3]) и 3 (частично исследованы лишь особенности коразмерности 1, см. [4]). Все представленные здесь результаты имеют локальный характер, некоторые глобальные свойства геодезических в псевдоримановых метриках рассмотрены в [5].

Начнем с двумерного случая. В локальных координатах x, y метрика имеет вид

$$ds^2 = a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2, \quad (1)$$

коэффициенты a, b, c предполагаются C^∞ -гладкими. Введя координату $p = dy/dx$, уравнение непараметризованных геодезических в метрике (1) удобно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{M}{2\Delta}, \quad M(q, p) = \sum_{i=0}^3 \mu_i(q) p^i, \quad (2)$$

где $\Delta = ac - b^2$ — гладкая функция точки $q = (x, y)$ и M — кубический многочлен по p , коэффициенты которого выражаются через a, b, c и их производные первого порядка. Будем предполагать, что кривая вырождения $\Gamma = \{\Delta(q) = 0\}$ регулярна и (локально) разделяет (x, y) -плоскость на области R и L с римановой и лоренцевой сигнатурой соответственно.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00849).

¹Разрывные метрики также рассматривались (например, в [1]).

В каждой точке области L определены два *изотропных* направления, обращающие метрику в нуль, на Γ они сливаются в единственное изотропное направление $p_0 = -a/b = -b/c$. Область L заполнена сетью *изотропных линий* (нуль-кривых), которые имеют особенность в точках кривой вырождения Γ . Почти всегда это касп (точки типа C), но в отдельных точках сеть линий кривизны имеет более сложную особенность: сложенный узел, седло или фокус (назовем их точками типа D). Изотропные линии являются геодезическими (нулевой длины).²

Предложение 1. *Допустимые направления в точке $q \in \Gamma$ суть те, которые являются вещественными корнями многочлена $M(q, p)$. При этом изотропное направление p_0 всегда допустимо: $M(q, p_0) = 0$ для любой $q \in \Gamma$. Точки типов C и D различаются тем, что в первых изотропное направление p_0 трансверсально кривой Γ (p_0 — простой корень M), а во вторых — касается ее (p_0 — двойной корень M).*

Теорема 1. *Из любой точки типа C в каждую из областей R и L в изотропном направлении выходит пучок (однопараметрическое семейство) геодезических, имеющих вид полукубических парабол с общей касательной. Пучок геодезических, выходящих в L , содержит все три типа: одну изотропную геодезическую и бесконечное число времениподобных и пространственноподобных.*

Точки типа C делятся на три типа C_1, C_2, C_3 в зависимости от числа вещественных корней кубического многочлена M . В случае C_1 геодезических, отличных от описанных в теореме 1, нет.

Теорема 2. *В случае C_3 , кроме p_0 , существуют два неизотропных допустимых направления $p_{1,2}$. В каждом из этих направлений проходит одна регулярная геодезическая, трансверсальная линии вырождения.*

Типичная (коразмерности 2) точка типа C_2 локально делит кривую вырождения Γ на две части, одна из которых целиком заполнена точками C_1 , а другая — точками C_3 . В самой точке типа C_2 многочлен M имеет простой корень p_0 и двойной корень $p_1 = p_2$, которому отвечает неизотропное допустимое направление, касающееся кривой Γ .

Теорема 3. *Из типичной точки типа C_2 в неизотропном допустимом направлении выходит одна геодезическая — полукубическая парабола, ветви которой касаются кривой Γ и лежат по разные стороны от нее. Это полукубическая парабола выходит в сторону, заполненную точками типа C_3 .*

Фазовые портреты геодезических в окрестностях точек типа D устроены гораздо сложнее, см. [6]. Отметим лишь, что через точки типа D в неизотропном допустимом направлении (простой корень M) проходит одна регулярная геодезическая, трансверсальная Γ , а в изотропном направлении p_0 (двойной корень M) в область L выходит одно- или двухпараметрическое семейство геодезических, касающихся Γ , а в область R не выходит ни одной. Таким образом, в точках D имеется странная асимметрия между областями R и L , которой нет в точках типа C .

В трехмерном случае ситуация существенно сложнее. В [4] показано, что в типичной вырожденной точке всегда существует одно изотропное направление, в котором из данной точки выходит двухпараметрическое семейство геодезических,

²Это утверждение верно только в двумерном случае. В размерности 3 и выше существуют изотропные линии, не являющиеся геодезическими.

аналогичное пучку из теоремы 1. (Отметим, что в трехмерном случае число изотропных направлений в вырожденной точке равно 1 или ∞ .)

Кроме этого направления, еще может быть конус A , целиком состоящий из допустимых направлений. В каждом из них, кроме тех, которые касаются также и поверхности вырождения Γ , проходит одна регулярная геодезическая. В направлении конуса A , касающемся поверхности Γ , из данной точки выходит одна геодезическая, имеющая вид полукубической параболы, ветви которой лежат по разные стороны от Γ .

Список литературы

1. Ghezzi R., Remizov A.O. On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // J. Dyn. Control Syst. 2012. V. 18, No. 1. P. 135–158.
2. Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Полная классификация типичных особенностей геодезических потоков на 2-поверхностях с псевдоримановыми метриками // УМН. 2017. Т. 72, №3. С. 195–196.
3. Pavlova N.G., Remizov A.O. A brief survey on singularities of geodesic flows in smooth signature changing metrics on 2-surfaces // Advances in Singularities and Foliations: Geometry, Topology and Applications. Springer, 2018. P. 135–155. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 222).
4. Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Геодезические на гиперповерхностях в пространстве Минковского: особенности смены сигнатуры // УМН. 2011. Т. 66, №6. С. 193–194.
5. Remizov A.O. On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics // Diff. Geom. Appl. 2015. V. 39. P. 36–58.
6. Remizov A.O., Tari F. Singularities of the geodesic flow on surfaces with pseudo-Riemannian metrics // Geom. Dedicata. 2016. V. 185, No. 1. P. 131–153.

PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE FOR CONTROL OF OPEN QUANTUM SYSTEMS

A. N. Pechen

*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
National University of Science and Technology "MISiS", Moscow, Russia*

apechen@gmail.com

Control of atomic and molecular systems with quantum dynamics attracts high interest in connection with both fundamental problems and various existing and prospective applications in quantum technologies. Applications of quantum control range from laser assisted isotope separation to control of chemical reactions and quantum information [1–4].

Quantum systems can be closed, i.e., isolated from the environment, and open, i.e., interacting with the environment. Consider a quantum system which has n energy levels. If this system is open, then its state is described by a density matrix ρ , an $n \times n$ complex Hermitian matrix which is positive, $\rho \geq 0$, and has unit trace, $\text{Tr } \rho = 1$. There are two types of control for open quantum systems: coherent controls (e.g., a shaped

coherent laser field) which enter the Hamiltonian part of the dynamics and tend to preserve quantum coherence, and incoherent controls (e.g., produced by an engineered environment) which enter the dissipative part of the dynamics and generally tend to induce decoherence in the system. An example of incoherent control is spectral density in frequency ω at time t , $n(\omega, t)$, of incoherent photons surrounding the system [5].

If the system evolves under the action of coherent control $u(t)$ and interacts with the environment of incoherent photons, its density matrix in the Markovian approximation satisfies the master equation

$$\frac{d\rho_t}{dt} = -i[H_0 + H_{n(\omega, t)} + u(t)V, \rho_t] + \mathcal{L}_{u(t), n(\omega, t)}(\rho_t). \quad (1)$$

Here H_0 , $H_{n(\omega, t)}$ and V are the free and interaction Hamiltonians ($n \times n$ Hermitian matrices) and the dissipative superoperator $\mathcal{L}$ describes the influence of the environment of incoherent photons with spectral density $n(\omega, t)$; it may also depend on coherent control $u(t)$.

One typical class of quantum control problems is steering the initial density matrix ρ_0 into a predefined target density matrix ρ_{target} in minimum time. The principal possibility to realize steering of an arbitrary initial density matrix into an arbitrary final density matrix for systems governed by (1) was shown under certain conditions [6], without attempts to minimize time. For the problem of minimal time control, the natural method is the Pontryagin maximum principle [7]. It was applied to various problems in control of quantum systems, e.g., in [8–10]. We will discuss applications of this method to the problem of minimum time state-to-state control of open quantum systems evolving under the action of coherent and incoherent controls [11] based on the model [5, 6].

References

1. *Brif C., Chakrabarti R., Rabitz H.* Control of quantum phenomena: past, present and future // *New J. Phys.* 2010. V. 12. Paper 075008.
2. *Dong D., Petersen I.R.* Quantum control theory and applications: a survey // *IET Control Theory Appl.* 2010. V. 4. P. 2651–2671.
3. *Bonnard B., Sugny D.* Optimal control with applications in space and quantum dynamics. Springfield: Amer. Inst. Math. Sci., 2012.
4. *Koch C.P.* Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations // *J. Phys.: Condensed Matter.* 2016. V. 28. Paper 213001.
5. *Pechen A., Rabitz H.* Teaching the environment to control quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 73. Paper 062102.
6. *Pechen A.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // *Phys. Rev. A.* 2011. V. 84. Paper 042106.
7. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. New York; London: J. Wiley & Sons, 1962.
8. *Boscain U., Chambrion T., Gauthier J.-P.* Optimal control on an N-level quantum system // *IFAC Proc. Vols.* 2003. V. 36. P. 129–134.
9. *Romano R., D’Alessandro D.* Minimum time control of a pair of two-level quantum systems with opposite drifts // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2016. V. 49. Paper 345303.
10. *Van Damme L., Ansel Q., Glaser S. J., Sugny D.* Robust optimal control of two-level quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2017. V. 95. Paper 063403.
11. *Pechen A., Morzhin O.* Pontryagin’s maximum principle for control of open quantum systems (in preparation).

OPTIMALITY CONDITIONS FOR DIFFERENTIAL GAMES WITH CONTINUOUS UPDATING*

O. Petrosian

St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

`petrosian.ovanes@yandex.ru`

Fundamental models considered in the classical theory of differential games are related to the problems defined on a fixed time interval (players have all the information on a closed time interval) [4], problems on an infinite time interval with discounting (players have information on an infinite time interval) [1], and problems defined on a random time interval (players have information on a given time interval, but the terminating instant is a random variable) [3]; also one of the first works in the theory of differential games is devoted to the pursuit–evasion game (payoff of the player depends on the time of catching opponents) [8]. In all the above models and suggested solutions, it is assumed that players at the beginning of the game know all the information about the dynamics of the game (motion equations) and about the preferences of the players (payoff functions). However, this approach does not take into account the fact that in many real life processes, players at the initial instant do not know all the information about the game. Thus, existing approaches such as the Bellman equation [2] or the Pontryagin maximum principle [5] cannot be directly used to construct a sufficiently large range of real life game-theoretic models.

Most of real life conflict processes evolve continuously in time, and their participants continuously receive updated information and adapt. In this paper, the approach for constructing optimal strategies is presented for the first time and the question of constructing the optimal control for game models with continuous updating is studied. In the game models with continuous updating it is assumed that the players

- (1) have information about the motion equations and payoff functions on the truncated time interval $[t, t + \overline{T}]$ with length of information horizon $\overline{T}$ and current time instant t ;
- (2) continuously receive updated information about the motion equations and utility functions (payoff functions) with time $t \in [t_0, T]$, and as a result continuously adapt to the updated information.

Obviously, it is difficult to obtain optimal controls due to the lack of a fundamental approach for control problems with moving information horizon. Until now only a class of games with dynamic updating was studied in the papers [6, 7], where the authors laid the foundation for further studies of the class of games with dynamic updating. It is assumed that the information about the motion equations and payoff functions is updated at discrete time instants, and the interval on which the players know the information is defined by the value of the information horizon.

In the current work, a game model with continuous updating is defined and optimality conditions in the form of Hamilton–Jacobi–Bellman equations for the feedback Nash equilibrium are presented.

*The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-00081).

Game model with continuous updating. Consider an n -player differential game $\Gamma(x_0, t_0, \bar{T})$ defined on the interval $[t_0, +\infty)$, where $0 < \bar{T} < +\infty$.

The motion equations have the form

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= f(s, x, u), \\ x(t) &= x_t^* \quad (x(t_0) = x_0), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad s \in [t, t + \bar{T}], \\ x &\in \mathbb{R}^l, \quad u = (u_1, \dots, u_n), \quad u_i = u_i(t, s, x) \in U_i \in \text{comp } \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (1)$$

The payoff function of the i th player ($i \in \mathbb{N}$) is defined as

$$K_i^t(x_t^*, t; u) = \int_t^{t+\bar{T}} g^i[s, x(s), u(s, x(s))] ds, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

The time parameter $t \in [t_0, +\infty)$ evolves continuously; as a result, the players continuously receive updated information about the motion equations and payoff functions.

An essential difference between the game model with continuous updating and the classical differential game $\Gamma(x_0, T - t_0)$ is that the players in the initial game are guided by the payoff that they will eventually obtain on the interval $[t_0, T]$, but in the case of a game with continuous updating they at each time instant t are guided by the expected payoff (2), which is based on the knowledge of the process on the interval $[t, t + \bar{T}]$.

Problem statement. By optimal strategies in the game $\Gamma(x_0, t_0, \bar{T})$ (in particular, the feedback Nash equilibrium) we will mean strategies $u^*(t, x) = (u_1^*(t, x), \dots, u_n^*(t, x))$ that are optimal for each t in the game defined on the interval $[t, t + \bar{T}]$.

It is necessary to determine optimal strategies (feedback Nash equilibrium) such that

- for each $t \in [t_0, T]$, $u^*(t, x) = (u_1^*(t, x), \dots, u_n^*(t, x))$ are optimal in the game defined by (1), (2) on the interval $[t, t + \bar{T}]$.

A direct application of the classical optimization techniques is not sufficient, because of the following problems:

- consider two intervals $[t, t + \bar{T}]$ and $[t + \epsilon, t + \bar{T} + \epsilon]$, $\epsilon \ll \bar{T}$;
- according to the problem statement, $u^*(t, x)$ should be optimal on the interval $[t, t + \bar{T}]$, and $u^*(t + \epsilon, x)$ should be optimal on the interval $[t + \epsilon, t + \epsilon + \bar{T}]$, $t \in [t_0, T]$.

Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equations with continuous updating.

In order to find the feedback Nash equilibrium $\tilde{u}^{\text{NE}}(t, x) = \tilde{u}^{\text{NE}}(t, s, x)|_{s=t}$ in the game $\Gamma(x_0, t_0, \bar{T})$, we use a modernized or adapted method of dynamic programming. We define Bellman functions $V^i(t, \tau, x)$ as the payoff of the i th player in the feedback Nash equilibrium $\tilde{u}^{\text{NE}}(t, s, x)$ in the subgame starting at the time instant s in position x of the game defined on the interval $[t, t + \bar{T}]$.

Theorem 1. $\tilde{u}^{\text{NE}}(t, x) = \tilde{u}^{\text{NE}}(t, \tau, x)|_{\tau=t}$ is a feedback Nash equilibrium in the differential game $\Gamma(x_0, t_0, \bar{T})$ if there exist continuous differentiable functions $V^i(t, \tau, x): [t_0, +\infty) \times [t, t + \bar{T}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, satisfying the following system

of equations:

$$\begin{aligned}
-V_{\tau}^i(t, \tau, x) &= \max_{\phi_i} \{g^i(\tau, x, \tilde{u}_{-i}^{\text{NE}}) + V_x^i(t, \tau, x)f(\tau, x, \tilde{u}_{-i}^{\text{NE}})\} \\
&= g^i(\tau, x, \tilde{u}^{\text{NE}}) + V_x^i(t, \tau, x)f(\tau, x, \tilde{u}^{\text{NE}}), \\
V^i(t, t + \overline{T}, x) &= 0, \quad i \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{3}$$

where $\tilde{u}_{-i}^{\text{NE}} = (\tilde{u}_1^{\text{NE}}, \dots, \phi_i, \dots, \tilde{u}_n^{\text{NE}})$.

References

1. *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic noncooperative game theory. Academic Press, 1995.
2. *Bellman R.* Dynamic programming. Princeton Univ. Press, 1957.
3. *Shevkoplyas E.V.* Optimal solutions in differential games with random duration // J. Math. Sci. 2014. V. 199, No. 6. P. 715–722.
4. *Kleimenov A.F.* Non-antagonistic positional differential games. Science, 1993.
5. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Mathematical theory of optimal processes. New York: Wiley, 1962.
6. *Petrosian O.L.* Looking forward approach in cooperative differential games // Int. Game Theory Rev. 2016. V. 18. P. 1–14.
7. *Petrosian O.L., Barabanov A.E.* Looking forward approach in cooperative differential games with uncertain-stochastic dynamics // J. Optim. Theory Appl. 2017. V. 172. P. 328–347.
8. *Petrosyan L.A., Murzov N.V.* Game-theoretic problems in mechanics // Lithuanian Mathematical Collection. 1966. V. 3. P. 423–433.

COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAMES

L. A. Petrosyan

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

l.petrosyan@spbu.ru

Game theory has greatly enhanced our understanding of decision making. As socioeconomic and political problems increase in complexity, further advance in the analytical content of the theories, methodology, techniques and applications as well as case studies and empirical investigations are urgently required. In the social sciences, economics and finance are the fields which most vividly display the characteristics of games.

The origin of differential games traces back to the late 1940s. Rufus Isaacs modeled missile versus enemy aircraft pursuit schemes in terms of descriptive and navigation variables (state and control).

For various reasons Isaacs' work did not appear in print until 1965 [3]. In the meantime control theory reached its maturity in the optimal control theory of Pontryagin et al. [9] (1962) and Bellman's dynamic programming [1] (1957). Research in differential games focused in the first place on extending control theory to incorporate

strategic behavior. First papers about differential games appeared in the Soviet Union in 1962–1967 (Pontryagin [8], Krasovskii [4], Petrosyan [5]).

Research in differential game theory continues to extend over a large number of fields and areas. Some non-zero games were first investigated by Petrosyan and Murzov [6] (1967), Case [2] (1969), and Starr and Ho [10] (1969), where as a solution the Nash equilibrium was considered.

It is well known that non-cooperative behavior among participants would, in general, lead to an outcome which is not Pareto-optimal. Worse still, highly undesirable outcomes (like the prisoners dilemma) and even devastating results (like tragedy of commons) could appear when the involved parties only care about their self-interests in a non-cooperative situation. In a dynamic world, non-cooperative behavior guided by short-sighted individual rationality could be a source for series of disastrous consequences in the future. Cooperation suggests the possibility of obtaining socially optimal and group efficient solutions to decision problems involving strategic actions.

However, dynamic cooperation cannot be sustainable if there is no guarantee that the participants will be always better off within the entire duration of the cooperation. More than anything else, it is due to the lack of this kind of guarantees that cooperative schemes fail to last till their end. Dynamic cooperation represents one of the most intriguing forms of optimization analysis. To ensure that the cooperation will take place in the game during the whole time interval, the solution concepts (optimality principles) must be time or subgame consistent. But unfortunately solutions taken from the classical one-shot cooperative game theory are time or subgame inconsistent. And by using them in differential cooperative games we cannot be sure that the cooperation will be sustained on the whole time interval.

To overcome this problem, we introduced in 1979 a new control variable IDP (imputation distribution procedure) which prescribes a payment distribution over time in such a way that cooperation at each time instant is more preferable than non-cooperative behavior of players. For different game-theoretical models, the approach was successfully used by Petrosyan and Zaccour [7] (2003) and Yeung and Petrosyan [11, 12] (2012, 2016).

In this presentation we shall stress our attention to new directions and problems in cooperative differential and dynamic games and show the way of constructing time-consistent (subgame-consistent) and strongly time-consistent cooperative solution concepts.

References

1. *Bellman R.* Dynamic programming. Princeton Univ. Press, 1957.
2. *Case J.H.* Toward a theory of many player differential games // *SIAM J. Control Optim.* 1969. V. 7. P. 179–197.
3. *Isaacs R.* Differential games. Wiley, 1965.
4. *Krasovskii N.N.* Ob odnoi zadache presledovaniya // *Prikl. Mat. Mekh.* 1962. Vol. 26, No. 2.
5. *Petrosyan L.A.* Ob odnom semeistve differentsial'nykh igr na vyzhivanie v prostanstve R^n // *Dokl. Akad. Nauk.* 1965. V. 161, No. 1.
6. *Petrosyan L.A., Murzov N.V.* Differentsial'naya igra na peretyagivaniye // *Vestn. Leningr. Univ. Ser. 1.* 1967. No. 1.
7. *Petrosyan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // *J. Econ. Dyn. Control.* 2003. V. 27, No. 3. P. 381–398.

8. Pontryagin L.S. On the theory of differential games // Usp. Mat. Nauk. 1966. V. 21. P. 219–274.
9. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publ., 1962.
10. Starr A.W., Ho Y.C. Nonzero-sum differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. V. 3. P. 184–206.
11. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. Subgame consistent economic optimization. Birkhäuser, 2012.
12. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. Subgame consistent cooperation. A comprehensive treatise. Springer, 2016.

К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ (TO THE PROBLEM OF GROUP PURSUIT WITH FRACTIONAL DERIVATIVES)*

Н. Н. Петров (N. N. Petrov)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

kma3@list.ru

Одним из направлений современной теории дифференциальных игр преследования является разработка методов решения задач конфликтного взаимодействия группы преследователей с группой убегающих [1–3]. Следует отметить, что, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работе [4] рассматривалась задача преследования двух лиц, описываемая уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями всех участников в дифференциальной игре, описываемой уравнениями с дробными производными. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, причем поимку каждого убегающего должны осуществить заданное число преследователей.

Определение 1 [5]. Пусть $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — функция такая, что f' абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$, $\mu \in (1, 2)$. Производной по Капуто порядка μ функции f называется функция $D^{(\mu)}f$ вида

$$(D^{(\mu)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} \int_0^t \frac{f''(s)}{(t-s)^{\mu-1}} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-51-41005) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\mu)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = x_i^1, \quad u_i \in V. \quad (1)$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\mu)}y_j = ay_j + v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \dot{y}_j(0) = y_j^1, \quad v_j \in V. \quad (2)$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число, $\mu \in (1, 2)$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j .

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей ($r \geq 1$, $1 \leq q \leq m$) при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geq rq$, $m \geq q$.

Многократная поимка убегающего исследовалась в работах [6, 7], а задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, — в работах [8, 9]. Задача преследования одного убегающего с фазовыми ограничениями и дробными производными порядка $\mu \in (0, 1)$ рассматривалась в [10].

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$D^{(\mu)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad \dot{z}_{ij}(0) = z_{ij}^1 = x_i^1 - y_j^1.$$

Положим $z^0 = (z_{ij}^0, z_{ij}^1)$.

Определение 2. В игре *происходит r -кратная поимка* (при $r = 1$ поимка) убегающего E_β , если существует $T > 0$, при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $j \in J$, $t \in [0, \infty)$, убегающих E_j , $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_r \in [0, T]$ и попарно различные натуральные числа $i_1, \dots, i_r \in I$ такие, что $z_{i_p\beta}(\tau_p) = 0$ для всех $p = 1, \dots, r$.

Определение 3. В игре *происходит r -кратная поимка* (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, убегающих найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad \{N_\alpha, \alpha \in M\}, \quad N_\alpha \subset I, \quad |N_\alpha| = r \quad \text{для всех } \alpha \in M,$$

$$N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset \quad \text{для всех } \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им непойманными.

Введем следующие обозначения: $\text{Int } A$ и $\text{co } A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A ,

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z \in V - v\},$$

$$\Omega_N(p) = \{(i_1, \dots, i_p) \mid i_\alpha \in N \text{ для всех } \alpha = 1, \dots, p \text{ и попарно различны}\},$$

$$\delta_N(\beta) = \min_{\gamma \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(\gamma z_{\alpha\beta}^1, v).$$

Теорема 1. Пусть $t = 1$, $a \leq 0$ и $\delta_I(1) > 0$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка.

Теорема 2. Пусть $a \leq 0$ и для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, найдется множество M , $|M| = q - p$, такое, что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 3. Пусть $a \leq 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, существует множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, такое, что

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Int co}\{z_{\alpha\beta}^1, \alpha \in \Lambda\}$$

для всех $\beta \in M$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Список литературы

1. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
4. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №3. С. 262–278.
5. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. No.13. P. 529–539.
6. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 1983. №1. С. 41–47.
7. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // ПММ. 1997. Т. 61, №5. С. 725–732
8. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Диф. уравнения. 1987. Т. 23, №4. С. 724–726.
9. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С. 48–54.
10. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2017. Т. 27, №1. С. 54–59.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МОРСА–СМЕЙЛА (TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF MORSE–SMALE SYSTEMS)*

О. В. Починка (O. V. Pochinka)

НИУ “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия

olga-pochinka@yandex.ru

Системы Морса–Смейла — структурно-устойчивые системы с конечным множеством неблуждающих орбит — являются фундаментальным объектом в теории динамических систем. Определение системы Морса–Смейла восходит к необходимым и достаточным условиям грубости (т.е. сохранения качественных свойств решений при малых изменениях правых частей) систем дифференциальных уравнений, заданных в конечной части плоскости, полученных в 1937 г. А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [1]. Динамическая система с непрерывным или дискретным временем на замкнутом многообразии называется *системой Морса–Смейла*, если ее неблуждающее множество состоит из конечного числа неподвижных и периодических орбит, все они гиперболические, а их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. При этом оказывается, что каждая точка объемлющего многообразия лежит как в неустойчивом многообразии, так и в устойчивом многообразии какой-нибудь периодической орбиты. Простейшим примером потока (диффеоморфизма) Морса–Смейла является градиентный поток (сдвиг на единицу времени градиентного потока) типичной функции Морса.

На первый взгляд представляется, что глобальная динамика системы Морса–Смейла и топология несущего многообразия хорошо определяются локальным поведением системы в окрестности периодических орбит по аналогии с тем, как топология многообразия определяется информацией о критических точках функции Морса, заданной на этом многообразии. Для систем с непрерывным временем эти ожидания отчасти оправдываются в классе *градиентно-подобных* потоков — потоков Морса–Смейла без периодических траекторий. С. Смейл [2] показал, что такой поток является градиентным для некоторой функции Морса, если он локально градиентный в окрестности неподвижных точек.

В случае дискретного времени даже в классе *градиентно-подобных* диффеоморфизмов — диффеоморфизмов Морса–Смейла, размерность пересечения инвариантных многообразий различных периодических точек которого отлична от нуля, склейка локальной динамики в окрестностях периодических точек может быть весьма нетривиальной с топологической точки зрения. Тем не менее динамические характеристики каскадов Морса–Смейла имеют тесную связь с топологией несущего многообразия. Отчасти этим обстоятельством объясняются пристальное внимание к системам Морса–Смейла и большое количество работ по данной тематике (см., например, обзор [3]).

Кроме того, системы Морса–Смейла естественным образом возникают в приложениях при математическом моделировании процессов с регулярной динамикой. Например, в цепочках связанных отображений, описывающих реакции диффузии (см. [4]), или при изучении топологии магнитных полей в проводящей

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01041

среде (см. обзор авторов [5]), в частности при исследовании вопроса существования сепараторов в магнитных полях хорошо проводящих сред (см. [6]).

Поскольку математические модели в форме систем Морса–Смейла появляются при описании процессов, имеющих разную природу, первым шагом в изучении таких моделей является выделение свойств, не зависящих от физического контекста, но определяющих разбиение фазового пространства на траектории. Отношение, сохраняющее разбиение на траектории с точностью до гомеоморфизма, называется *топологической эквивалентностью*, а отношение, сохраняющее дополнительно время движения по траекториям (непрерывное в случае потоков и дискретное в случае каскадов), называется *топологической сопряженностью*. Задача топологической классификации динамических систем состоит в поиске *инвариантов*, однозначно определяющих класс эквивалентности или сопряженности для заданной системы.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов по топологической классификации систем Морса–Смейла на замкнутых многообразиях, включая результаты, полученные автором в последнее время. Также приведены недавние результаты автора, относящиеся к взаимосвязи между глобальной динамикой таких систем и топологической структурой несущих многообразий.

Список литературы

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. 1961. V. 74. P. 199–206.
3. Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Системы Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 61. С. 5–40.
4. Песин Я.Б., Юрченко А.А. Некоторые физические модели, описываемые уравнениями реакции-диффузии, и цепочки связанных отображений // УМН. 2004. Т. 59, № 3. С. 81–114.
5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 3. С. 455–474.
6. Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 294. P. 1–5.

A. V. Podobryaev

A.K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalesskiy, Russia

alex@alex.botik.ru

Geometric control theory (see, for example, [1]) deals with left-invariant optimal control problems on a Lie group G . Consider a family of left-invariant vector fields F_u that depend analytically on $u \in U \subset \mathbb{R}^n$. Consider also a left-invariant analytic function $\varphi: G \times U \rightarrow \mathbb{R}$, a point $q_1 \in G$, and a fixed time $t_1 > 0$. The problem is to find a control $u \in L^\infty([0, t_1], U)$ and a Lipschitz curve $q_u: [0, t_1] \rightarrow G$ such that

$$\int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{q}_u(t) = F_{u(t)}(q_u(t)), \quad q_u(0) = \text{id}, \quad q_u(t_1) = q_1 \in G.$$

The Pontryagin maximum principle [2, 1] gives a necessary condition of optimality. Let H be an analytic maximized Hamiltonian of the Pontryagin maximum principle, and $\vec{H}$ be a corresponding analytic Hamiltonian vector field. Due to the left invariance of the problem, the Hamiltonian system is triangular (the conjugate subsystem does not depend on state variables).

Symmetries of the problem that are induced from symmetries of the conjugate subsystem play a critical role in the investigation of optimality of extremal trajectories. We get some conditions for the existence of an extension of symmetries of the conjugate subsystem to symmetries of an exponential map. Let us give some necessary definitions.

Definition 1. A *Maxwell point for an optimal control problem* is a point where two distinct extremal trajectories meet each other with the same value of the cost functional and the time. This time is called a *Maxwell time*.

Definition 2. The *exponential map of the optimal control problem* is the map

$$\text{Exp}: \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G, \quad \text{Exp}(p, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\text{id}, p), \quad (p, t) \in \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+,$$

where $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of the Lie group G , and $e^{t\vec{H}}$ is the flow of the Hamiltonian vector field $\vec{H}$.

Definition 3. A *symmetry of the exponential map* is a pair of diffeomorphisms

$$s: \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+, \quad S: G \rightarrow G \quad \text{such that} \quad \text{Exp} \circ s = S \circ \text{Exp}.$$

It is well known (see, for example, [3]), that an extremal trajectory cannot be optimal after a Maxwell point. That is why the description of Maxwell points plays an important role in investigation of optimality of extremal trajectories. In particular, the first Maxwell time is an upper bound for the time of loss of optimality (the cut time). A natural reason for the appearance of Maxwell points is a symmetry of extremal trajectories. One can try to find the first Maxwell time for symmetries and then try to prove that this first Maxwell time is the cut time. This method

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01387 and performed in A.K. Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

does not guarantee success. But it works in several optimal control problems on Lie groups: generalized Dido problem [3], sub-Riemannian problem on Engel group [4], free nilpotent sub-Riemannian problem with growth vector (3, 6) [5], sub-Riemannian problems on the Lie groups $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, SO_3 , and SU_2 [6], Riemannian problems on the Lie groups $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, SO_3 , and SU_2 [7, 8], sub-Riemannian problem on the Lie groups SE_2 [9, 10] and SH_2 [11], and the problem of a rolling sphere on the plane without twisting and slipping [12]. In the problems listed above an extension of symmetries of the conjugate subsystem to symmetries of the exponential map was constructed by explicit formulas for the map Exp (i.e., an explicit parametrization of extremal trajectories) or by an explicit form of the Hamiltonian system. The existence of such an extension was not guaranteed a priori. We introduce conditions for the existence of such an extension.

Consider the trivialization of the cotangent bundle via left shifts:

$$\tau: G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow T^*G, \quad \tau(g, p) = dL_{g^{-1}}^* p \in T^*G, \quad g \in G, \quad p \in \mathfrak{g}^*,$$

where $L_g: G \rightarrow G$ is the left shift by an element $g \in G$.

The Hamiltonian H is left-invariant, so we assume that $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. A Hamiltonian vector field is a sum of the *horizontal* and *vertical parts* [1]:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\tau(g, p)) &= \vec{H}_{\mathrm{hor}}(\tau(g, p)) + \vec{H}_{\mathrm{vert}}(\tau(g, p)), \\ \vec{H}_{\mathrm{hor}}(\tau(g, p)) &= dL_g d_p H, \quad \vec{H}_{\mathrm{vert}}(\tau(g, p)) = dL_{g^{-1}}^*(\mathrm{ad}^* d_p H)p, \end{aligned}$$

where $d_p H \in T_p \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ is the differential of H at a point p .

Recall that a Lie group G is called *exponential* if the map $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ is surjective.

Theorem. *Let G be an exponential Lie group, H be a left-invariant Hamiltonian, and an operator $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ be such that σ^* preserves the Hamiltonian H and one of the following two conditions holds:*

- (a) $\sigma^*(\vec{H}_{\mathrm{vert}}) = \vec{H}_{\mathrm{vert}}$ and σ^* is an inner automorphism of the Lie algebra $\mathfrak{g}$;
- (b) $\sigma^*(\vec{H}_{\mathrm{vert}}) = -\vec{H}_{\mathrm{vert}}$ and σ^* is an inner anti-automorphism of the Lie algebra $\mathfrak{g}$.

Then the pair of diffeomorphisms (s_σ, S_σ) is a symmetry of the exponential map, where

$$s_\sigma(p, t) = \begin{cases} (\sigma p, t) & \text{in case (a),} \\ (\sigma e^{t\vec{H}_{\mathrm{vert}}} p, t), & \text{in case (b),} \end{cases} \quad S_\sigma(\exp \xi) = \exp(\sigma^* \xi), \quad \xi \in \mathfrak{g}.$$

Remark. The diffeomorphism S_σ is well defined, because the Lie group G is exponential and the (anti)automorphism σ^* preserves fibers of the map $\exp$.

Everywhere below we consider symmetries (s_σ, S_σ) of the exponential map such that σ satisfies the hypotheses of the theorem.

Corollary 1. *Let G be a connected compact Lie group. If a normal extremal trajectory meets a geodesic of the Killing metric, then the symmetric extremal trajectory meets the symmetric geodesic of the Killing metric at the same instant of time.*

Corollary 2. *Let G be a connected compact Lie group. The Maxwell sets corresponding to symmetries in the image of the exponential map are subsets of the Maxwell sets corresponding to symmetries of the Riemannian problem for the Killing metric.*

Corollary 3. *Assume that there are two left-invariant optimal control problems on a connected compact Lie group. If two extremal trajectories corresponding to these problems meet each other, then the symmetric trajectories meet each other as well with the same values of time and the cost functional.*

References

1. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control theory from the geometric viewpoint. Springer, 2004.
2. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Oxford: Pergamon Press, 1964.
3. Sachkov Yu.L. Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem // Sb. Math. 2006. V. 197, No. 6. P. 901–950.
4. Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Maxwell strata and cut locus in sub-Riemannian problem on Engel group // Regular Chaotic Dyn. 2017. V. 22, No. 8. P. 909–936.
5. Myasnichenko O. Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem // J. Dyn. Control Syst. 2002. V. 8, No. 4. P. 573–597.
6. Boscaïn U., Rossi F. Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
7. Podobryaev A.V., Sachkov Yu.L. Cut locus of a left invariant Riemannian metric on $SO(3)$ in the axisymmetric case // J. Geom. Phys. 2016. V. 110. P. 436–453.
8. Podobryaev A.V., Sachkov Yu.L. Symmetric Riemannian problem on the group of proper isometries of hyperbolic plane // J. Dyn. Control Syst. 2018. V. 24, No. 3. P. 391–423.
9. Moiseev I., Sachkov Yu.L. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2010. V. 16. P. 380–399.
10. Sachkov Yu.L. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2011. V. 17. P. 293–321.
11. Butt Ya.A., Sachkov Yu.L., Bhatti A.I. Cut locus and optimal synthesis in sub-Riemannian problem on the Lie group $SH(2)$ // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. V. 23. P. 155–196.
12. Sachkov Yu.L. Maxwell strata and symmetries in the problem of optimal rolling of a sphere over a plane // Sb. Math. 2010. V. 201, No. 7. P. 1029–1051.

ПРЯМОЙ МЕТОД ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ
(PONTRYAGIN'S DIRECT METHOD FOR OPTIMIZATION PROBLEMS
WITH DIFFERENTIAL INCLUSION)*

Е. С. Половинкин (E. S. Polovinkin)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

`polovinkin.es@mipt.ru`

В знаменитой работе Л.С. Понтрягин и его коллеги [1] использовали очень эффективный прямой метод доказательства необходимых условий оптимальности, получивших название “принцип максимума Понтрягина”. В основе этого метода заложена линеаризация нелинейной управляемой динамической системы около оптимальной траектории. В результате для полученной линейной системы дифференциальных уравнений в вариациях была построена сопряженная система дифференциальных уравнений и доказано, что при определенных граничных условиях соответствующее решение сопряженной системы в каждый момент времени является нормальным вектором к множеству достижимости исходной управляемой системы в точках оптимальной траектории, что аналитически было записано в виде принципа максимума, условий трансверсальности и некоторых других свойств сопряженной системы.

В дальнейшем другие авторы при решении более общих оптимизационных задач (когда правая часть управляемой системы не является гладкой по фазовой переменной) использовали другие методы доказательства необходимых условий оптимальности, основанные на различных типах гладких аппроксимаций исходных задач (см., например, [2–4]).

Первые попытки развития прямого метода Понтрягина для исследования оптимизационных задач при отсутствии гладкости управляемой системы были сделаны в работах Б.Н. Пшеничного [5] и В.И. Благодатских [6] для управляемой динамической системы, представленной в виде дифференциального включения. В.И. Благодатских получил необходимые условия оптимальности на языке опорных функций при условиях, что правая многозначная часть дифференциального включения принимает выпуклые компактные значения и ее опорная функция удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной.

Автор и Г.В. Смирнов в работах [7, 8] обобщили прямой метод исследования и получили необходимые условия оптимальности в оптимизационных задачах с дифференциальным включением в случае, когда правая часть дифференциального включения принимает компактные (возможно, невыпуклые) значения и удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа.

В данной работе, продолжая исследования работ [9–12], мы развиваем прямой метод Понтрягина на случай оптимизационных задач с дифференциальным включением, многозначная правая часть которого принимает неограниченные невыпуклые значения, измеримо зависит от времени и псевдолипшицева по фазовой переменной.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00209а).

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М.: Наука, 1971.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
4. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
5. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.
6. Благодатских В.И. Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 23–43.
7. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 944–954.
8. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, № 8. С. 1351–1365.
9. Половинкин Е.С. Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипищевой правой частью // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 121–141.
10. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014.
11. Половинкин Е.С. Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 237–252.
12. Polovinkin E.S. Time optimum problems for unbounded differential inclusion // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, Issue 25 P. 150–155.

l-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ЗАДАННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ОПЕРАТОРАМИ ЭРДЕЙИ–КОБЕРА (*l*-PROBLEM OF MOMENTS FOR ONE-DIMENSIONAL SYSTEMS DEFINED BY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ERDÉLYI–KOBBER OPERATORS)

С. С. Постнов (S. S. Postnov)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
postnov.sergey@inbox.ru

Сегодня активно проводятся исследования динамики систем, заданных уравнениями дробного порядка, в том числе систем с управлением, для которых в последние 10–15 лет был предложен целый ряд подходов к поиску оптимального управления [1–4]. При этом в большинстве случаев рассматривались модели, заданные уравнениями с дробными производными Римана–Лиувилля и Капуто. Модели же реальных физических систем зачастую требуют применения более сложных операторов, таких как операторы Эрдейи–Кобера [5]. Эти

операторы возникают и при анализе симметрий уравнений с производными Римана–Лиувилля [6].

В данной работе рассматриваются уравнения с операторами Эрдейи–Кобера, содержащие в правой части управление. Для таких уравнений демонстрируется возможность постановки и решения l -проблемы моментов, к которой, как известно [7], может быть сведена задача оптимального управления.

Будем рассматривать далее одномерные линейные динамические системы трех типов. Системы первого типа представляют собой интегратор дробного порядка:

$$D_{\beta}^{\alpha, \delta} q(t) = u(t), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где функции $q(t)$ и $u(t)$ — состояние и управление соответственно; $T > 0$. Оператор дробного дифференцирования $D_{\beta}^{\alpha, \delta}$, $\alpha \in [0, 1]$, $\delta \in (0, 1]$, $\beta > 0$, понимается как левосторонний оператор дробного дифференцирования Эрдейи–Кобера [8].

Другой тип систем описывается уравнением

$$t^{-\beta \delta} D_{\beta}^{\alpha, \delta} q(t) - \lambda q(t) = u(t), \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

где λ — коэффициент.

Третий тип систем задается интегро-дифференциальным уравнением следующего вида:

$$t^{-\delta} D_1^{\alpha, \delta} q(t) - \lambda t^{\nu} I_1^{\alpha - \nu, \nu} q(t) = u(t), \quad t \in (0, T]. \quad (3)$$

Рассматривается случай $u(t) \in L_p(0, T]$, $1 < p < \infty$, или $u(t) \in L_{\infty}(0, T]$; $q(t) \in C_{\beta \mu}^1$, $\mu > \max(0, -\alpha - \delta) - 1$.

Для уравнений (1)–(3) известны точные аналитические решения [9–11], на основе которых можно записать проблему моментов следующего вида:

$$\int_0^T g(\tau) u(\tau) d\tau = c, \quad (4)$$

где функция $g(\tau) \in L_{p'}(0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, и момент (действительное число) $c \neq 0$ определяются видом решений. Если добавить к уравнению (4) ограничение на норму управления

$$\|u(t)\| \leq l \quad (5)$$

(l — действительное положительное число), то получится l -проблема моментов, к которой, как известно, сводятся задача поиска оптимального управления с минимальной нормой и задача быстрогодействия с ограничением на норму оптимального управления [7, 12].

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть задана система (1). Тогда проблема моментов (4), (5) для системы (1) может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + 1) > \frac{1}{p}. \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть задана система (2). Тогда проблема моментов (4), (5) для системы (2) может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + \delta + 1) > \frac{1}{p}. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть задана система (3). Тогда проблема моментов (4), (5) для системы (3) может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:

$$\alpha - \nu + \delta + 1 > \frac{1}{p}, \quad 2(\nu + \delta) > \frac{1}{p}, \quad \alpha + \delta + 1 > \frac{1}{p}. \quad (8)$$

Замечание 1. Условия (6)–(8) остаются справедливыми и в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$. При этом нужно положить $1/p = 0$.

Теорема 4. Пусть задана система (1) и выполнены условия теоремы 1. Тогда решение проблемы моментов (4), имеющее минимальную норму при заданном интервале $t \in (0, T]$, дается формулой

$$u(t) = \frac{c\Gamma(\delta)(T^\beta - t^\beta)^{(p'-1)(\delta-1)}t^{[\beta(\alpha+1)-1](p'-1)}}{T^{(p'-1)[\beta(\alpha+\delta)-1]}B(\frac{1}{\beta} + p'(\alpha + 1 - \frac{1}{\beta}), p'(\delta - 1) + 1)}; \quad (9)$$

решение проблемы моментов (4), (5), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, дается формулой

$$u(t) = l^{p'} \left| \frac{\beta(T^*)^{-\beta(\alpha+\delta)}}{c\Gamma(\delta)} ((T^*)^\beta - t^\beta)^{\delta-1} t^{\beta(\alpha+1)-1} \right|^{p'-1} \text{sign}(c), \quad (10)$$

где T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{T|c|\Gamma(\delta)}{\beta} \left(\frac{\beta}{B(\frac{1}{\beta} + p'(\alpha + 1 - \frac{1}{\beta}), p'(\delta - 1) + 1)T} \right)^{1/p'} = l.$$

Теорема 5. Пусть задана система (2), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и выполнены условия теоремы (2). Тогда решение проблемы моментов (4), имеющее минимальную норму при заданном интервале $t \in (0, T]$, дается формулой

$$u(t) = \frac{c}{T^{\beta\delta}\Gamma(\alpha + \delta + 1)E_{\delta, \alpha+2\delta+1}(\lambda T^{\beta\delta})}; \quad (11)$$

решение проблемы моментов (4), (5), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, дается формулой

$$u(t) = l \text{sign}(c), \quad (12)$$

где T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{|c|}{T^{\beta\delta}\Gamma(\alpha + \delta + 1)E_{\delta, \alpha+2\delta+1}(\lambda T^{\beta\delta})} = l.$$

В работе изучены свойства полученных аналитических решений и их зависимость от показателей операторов Эрдейи–Кобера.

Список литературы

1. Agrawal O.P. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems // Nonlinear Dyn. 2004. V. 38. P. 323–337.
2. Kamocki R. Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. V. 37, No. 11. P. 1668–1686.
3. Kubyshkin V.A., Postnov S.S. The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. 2015. V. 4, No. 4. P. 429–443.
4. Malinowska A.B., Odziejewicz T., Torres D.F.M. Advanced methods in the fractional calculus of variations. Berlin: Springer, 2015.
5. Plociniczak L. Approximation of the Erdélyi–Kober operator with application to the time-fractional porous medium equation // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74, No. 4. P. 1219–1237.
6. Lashkarian E., Reza Hejazi S. Group analysis of the time fractional generalized diffusion equation // Physica A. 2017. V. 479. P. 572–579.
7. Крейн М.Г., Худельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
9. Luchko Yu., Trujillo J.J. Caputo-type modification of the Erdélyi–Kober fractional derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2007. V. 10. P. 249–267.
10. Al-Saqabi B., Kiryakova V. Explicit solutions of fractional integral and differential equations involving Erdélyi–Kober operators // Appl. Math. Comput. 1998. V. 95. P. 1–13.
11. Kiryakova V. Fractional order differential and integral equations with Erdélyi–Kober operators: explicit solutions by means of the transmutation method // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1410. P. 247–258.
12. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА (OPTIMAL CONTROL FOR LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER)

Е. А. Постнова (E. A. Postnova)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
postnova@ipu.ru

Данная работа является продолжением исследования задач об оптимальном управлении линейными динамическими системами дробного порядка [1]:

- 1) одномерной системы общего вида;
- 2) двумерной системы частного вида — двойного интегратора.

Поведение этих систем было рассмотрено для двух различных случаев: $u(t) \in L_2[t_0, T]$ и $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$ ($u(t)$ — управление). Начальные и конечные условия были заданы параметрически, т.е. являлись некоторыми функциями, зависящими от временного параметра T [2].

Первая из рассматриваемых систем описывается уравнением следующего вида:

$${}^C D_t^\alpha q(t) = aq(t) + bu(t),$$

где $q(t)$ — фазовая координата системы, D_t^α — оператор дробного дифференцирования, понимаемый в смысле Капуто, $u(t)$ — искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$, a, b — некоторые константы.

Вторая линейная система нецелого порядка (двойной интегратор) представляется в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t), \\ {}^C D_t^\beta q_2(t) = u(t). \end{cases} \quad (1)$$

В работе начальные и конечные условия были выбраны для четырех различных случаев, которые при $\alpha = \beta = 1$ соответствуют переводу систем из состояния покоя в равномерное, равноускоренное и периодическое движения, а также из равномерного движения в равноускоренное [2].

Исследовалась задача поиска функции управления с минимальной нормой. При этом применялся метод моментов [3], который сводит поставленную задачу к задаче условной минимизации. Далее задача сводится к безусловной минимизации функции $F(\xi_2)$, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(\xi_2) = & \frac{2\alpha}{(\alpha + \beta)\Gamma(\beta + 1)} \left[\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} \right]^{\beta/\alpha} \left(\frac{C_2\xi_2 - 1}{C_1} \right)^{-\beta/\alpha} \xi_2^{1+\beta/\alpha} + \\ & + \frac{T^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \frac{C_2\xi_2 - 1}{C_1} - \frac{T^\beta \xi_2}{\Gamma(\beta + 1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Константы C_1 и C_2 определяются начальными и конечными условиями, а также параметрами задачи [3].

Теорема 1. *Минимум функции (2) существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$C_2\xi_2 \neq 1,$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{C_1\xi_2}{C_2\xi_2 - 1} \right)^{\beta/\alpha} = 0, \quad \text{или, что эквивалентно,} \quad \frac{C_1\xi_2}{C_2\xi_2 - 1} \geq 0.$$

Следствие 1. *Если $C_1C_2 < 0$, то условие теоремы не выполняется и функция $F(\xi_2)$ не имеет минимума на множестве действительных чисел. Если $C_1C_2 > 0$, то точка минимума функции $F(\xi_2)$ принадлежит интервалу $(-\infty; -1/C_2)$ при $C_2 < 0$ и интервалу $(1/C_2; +\infty)$ при $C_2 > 0$.*

Следует отметить, что решение задачи оптимального управления для системы (1), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Адамара, сводится к задаче минимизации функции вида [4]:

$$F(\xi_2) = \frac{1 - \xi_2 c_2}{c_1 \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \left[\left(\ln \frac{T}{t_0} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} - 2 \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\xi_2 c_1}{\xi_2 c_2 - 1} \right)^{(\alpha_1 + \alpha_2)/\alpha_1} \right] +$$

$$+ \frac{\xi_2}{\Gamma(\alpha_2 + 1)} \left[\left(\ln \frac{T}{t_0} \right)^{\alpha_2} - 2 \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\xi_2 c_1}{\xi_2 c_2 - 1} \right)^{\alpha_2/\alpha_1} \right]. \quad (3)$$

Функция (3) зависит от переменной ξ_2 таким же образом, как и функция (2). Поэтому для нее можно сформулировать аналогичные условия существования минимума.

Теорема 2. *Минимум функции (3) существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$C_2 \xi_2 \neq 1, \\ \operatorname{Im} \left(\frac{C_1 \xi_2}{C_2 \xi_2 - 1} \right)^{\beta/\alpha} = 0, \quad \text{или, что эквивалентно,} \quad \frac{C_1 \xi_2}{C_2 \xi_2 - 1} \geq 0.$$

Следствие 2. *Если $C_1 C_2 < 0$, то условие теоремы не выполняется и функция $F(\xi_2)$ не имеет минимума на множестве действительных чисел. Если $C_1 C_2 > 0$, то точка минимума функции $F(\xi_2)$ принадлежит интервалу $(-\infty; -1/C_2)$ при $C_2 < 0$ и интервалу $(1/C_2; +\infty)$ при $C_2 > 0$.*

В ходе проведенных исследований были получены следующие результаты. Построено решение поставленной задачи оптимального управления движением, получены явные формулы для управления и вычислена его норма. Исследовано поведение нормы и времени оптимального управления в зависимости от показателей дробного дифференцирования и продемонстрировано, что во всех случаях перевода систем из состояния равномерного движения в равноускоренное норма управления имеет экстремум на малых временах ($T < 1$). Физически это может означать, что существуют такие параметры, при которых внешнее управляющее воздействие достигает минимального значения. Сравнение норм управлений для неклассического и классического случаев ($\alpha = 1, \beta = 1$) выявило резкое отличие в поведении систем на малых временах и аналогичное — на больших.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчетах управления для систем нецелого порядка. Практическое применение результатов может привести к экономии энергетических затрат на управление всей системы в целом.

Список литературы

1. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.
2. Постнова Е.А. Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором нецелого порядка // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 40–46.
3. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.
4. Postnov S.S. Optimal control problem for linear fractional-order systems, described by equations with Hadamard-type derivative. // J. Physics: Conf. Ser. 2017. V. 918, No. 1. Paper 012026.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА
 ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
 В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
 (OPTIMAL CONTROL AND THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR OPERATOR
 EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN BANACH SPACES)

А. И. Прилепко (А. I. Prilepko)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
 Москва, Россия*

prilepko.ai@yandex.ru

Даны рефлексивные и строго выпуклые банаховы пространства U , E и их сопряженные U^* , E^* .

Задача управления. Найти точное решение $\Leftrightarrow$ *точное управление* (иначе *управление*) $u_e \in U$ из уравнения

$$Au = e, \quad A \in \mathcal{L}(U, E), \quad \text{элемент } e \in E \text{ задан.}$$

Множество всех управлений обозначим через $U_e \subset U$, а минимальное по норме управление назовем *оптимальным управлением* и обозначим через $u_e^{\text{opt}} = u_e^o$, так, что $\|u_e^o\|_U = \inf\{\|u_e\|_U \mid u_e \in U_e\}$.

Сопряженную задачу

$$\mathcal{A}^* e^* = u^*, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(E^*, U^*),$$

называем *задачей наблюдения*. Основная цель для задачи наблюдения — получить обратное неравенство, состоящее в нахождении $\mu > 0$ такого, что $\|\mathcal{A}^* e^*\|_{U^*} \geq \mu \|e^*\|_{E^*}$ для всех $e^* \in E^*$. Последнее равносильно существованию левого обратного оператора $(\mathcal{A}^*)_1^{-1}$ и выполнению оценки $\|(\mathcal{A}^*)_1^{-1}\| \leq 1/\mu$. В этом случае сопряженная задача называется *непрерывно наблюдаемой*.

Обозначим через $J_U \in (U^* \rightarrow U)$ дуальное отображение пространства U^* на U (см. [1]). Введем оператор оптимальности $\Lambda \in (E^* \rightarrow E)$ по правилу $\Lambda e^* = \mathcal{A} J_U \mathcal{A}^* e^*$ (см. [1]).

Теорема. *Существование управления $u_e \neq 0$ при $e \neq 0 \Leftrightarrow$ непрерывная наблюдаемость сопряженной задачи $\Leftrightarrow$ существование биективного отображения $\Lambda^{-1} \in (E \rightarrow E^*) \Leftrightarrow$ существование единственного оптимального управления $u_e^o = J_U u_e^*$, где $u_e^* = \mathcal{A}^* \tilde{e}^* = \mathcal{A}^* \Lambda^{-1} e$, причем выполнено неравенство $\|u_e^o\| \leq \mu^{-1} \|e\| \Leftrightarrow$ выполнен принцип максимума*

$$\max_{u_e \in U_e} P(\mathcal{A}, u_e, u_e^*, \tilde{e}^*) = P(\mathcal{A}, u_e^o, u_e^*, \tilde{e}^*),$$

$$\text{где } P(\mathcal{A}, u_e, u_e^*, \tilde{e}^*) \equiv \langle u_e, u_e^* \rangle_{UU^*} + \langle \mathcal{A} J_U u_e^*, \tilde{e}^* \rangle_{EE^*} - \alpha \|u_e\|_U^\beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Замечание. В задачах нахождения оптимальных управлений с применением теории полугрупп или групп оператор $\Lambda \in (E^* \rightarrow E)$ является разрешающим оператором специальной обратной задачи (см. [2]).

Список литературы

1. Прилепко А.И. Метод Банаха и метод монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных (В)-пространствах // ДАН. 2017. Т. 476, № 4. С. 377–380.
2. Прилепко А.И. Задачи оптимального управления и обратные задачи для уравнений первого порядка в банаховых пространствах // Системный анализ: моделирование и управление. М.: МИАН; МАКС Пресс, 2018. С. 88–89.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // SIAM Rev. 1988. V. 30, No. 1. P. 1–68.

ДИНАМИКА АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА ПРИ ИЗОТРОПНОЙ ЭМИССИИ ЕГО МОМЕНТА ИМПУЛЬСА (DYNAMICS OF ASYMMETRIC TOP UNDER ISOTROPIC EMISSION OF ITS ANGULAR MOMENTUM)*

А. Э. Рассадин (А. Е. Rassadin)

Нижегородское математическое общество, Нижний Новгород, Россия

`brat_ras@list.ru`

Как правило, в классической механике при описании движения твердого тела не делается никаких предположений о характере этого тела с точки зрения электродинамики сплошных сред [1]. Между тем в докладах [2–4] показано, что если материал твердого тела обладает свойством спонтанной поляризации (электрической или магнитной), то такие системы приобретают качественно новые свойства по сравнению с телами из металлов или диэлектриков той же формы и с тем же распределением массы за счет возможности излучения такими объектами электромагнитных волн (в том числе хаотических). Однако это излучение приводит к потере энергии и момента импульса этим телом, что в работах [2–4] никак не учитывалось.

В представленном докладе рассмотрено движение асимметрического волчка [1] с ферромагнитными и/или сегнетоэлектрическими включениями, теряющего свой момент импульса $\vec{M}$ согласно уравнению

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{M} = -\nu(\vec{M}^2) \vec{M}. \quad (1)$$

Здесь $\nu(\vec{M}^2)$ — функция, принимающая только положительные значения, $\times$ — символ векторного произведения, $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения волчка, через которую выражается его вектор момента импульса $\vec{M} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, где $I_1 < I_2 < I_3$ — компоненты тензора инерции волчка в главных осях инерции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01356-а).

Согласно классической электродинамике скорость потери момента импульса системой электрических зарядов равна [5]

$$\frac{d'\vec{M}}{dt'} = \frac{|\vec{R}_0|^3}{4\pi} \int \{ \vec{n} \times \vec{E} \vec{n} \cdot \vec{E} + \vec{n} \times \vec{H} \vec{n} \cdot \vec{H} \} do, \quad (2)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы электрического и магнитного полей соответственно в точке их наблюдения с радиус-вектором $\vec{R}_0$, $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении $\vec{R}_0$, точка обозначает скалярное произведение двух векторов, интегрирование ведется по всему телесному углу, а дифференцирование по времени производится по отношению к неподвижной системе координат (это обстоятельство отмечено штрихом).

Особенности взаимного расположения ферромагнитных и сегнетоэлектрических включений в волчке могут потребовать учета не только дипольного и магнито-дипольного вкладов в напряженности электромагнитного поля, излучаемого рассматриваемой системой, но и вкладов высших мультипольных моментов, что может привести к чрезвычайно сложному виду выражения (2). Именно поэтому в правую часть уравнения (1) вместо интеграла (2), носящего фундаментальный характер, введена феноменологическая функция $\nu(\vec{M}^2)$.

В этом случае зависимость квадрата момента импульса волчка от времени определяется интегралом

$$-2t = \int_{\vec{M}_0^2}^{\vec{M}^2} \frac{d\vec{M}^2}{\vec{M}^2 \nu(\vec{M}^2)},$$

а механическая энергия волчка $E = (M_1^2/I_1 + M_2^2/I_2 + M_3^2/I_3)/2$ связана с его моментом импульса следующим образом:

$$\frac{E(t)}{E_0} = \frac{\vec{M}^2(t)}{\vec{M}_0^2} \equiv m^2(t),$$

где индексом 0 обозначено значение физической величины в момент времени $t = 0$.

Оказывается, что справедлива

Теорема. Система уравнений (1) имеет следующее точное решение:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= m(t) \sqrt{\frac{2E_0 I_3 - \vec{M}_0^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn}[\Theta(t), k_0], & \omega_2(t) &= m(t) \sqrt{\frac{2E_0 I_3 - \vec{M}_0^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn}[\Theta(t), k_0], \\ \omega_3(t) &= m(t) \sqrt{\frac{\vec{M}_0^2 - 2E_0 I_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn}[\Theta(t), k_0], \end{aligned}$$

где

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(\vec{M}_0^2 - 2E_0 I_1)}{I_1 I_2 I_3}} \int_0^t m(\tau) d\tau,$$

а модуль эллиптических функций Якоби равен

$$k_0 = \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2E_0 I_3 - \vec{M}_0^2)}{(I_3 - I_2)(\vec{M}_0^2 - 2E_0 I_1)}}.$$

В представленном докладе это точное решение подробно исследовано для двух различных функций $m(t)$, соответствующих двум различным зависимостям $\nu = \nu(\vec{M}^2)$. А именно, для простейшей функции $\nu(\vec{M}^2) = \nu_0$ нормированный модуль момента импульса асимметрического волчка есть

$$m(t) = \exp(-\nu_0 t). \quad (3)$$

Функция $\nu(\vec{M}^2) = \nu_0 + \nu_1 \vec{M}^2$ порождает для нормированного модуля момента импульса более сложное выражение

$$m(t) = \frac{\sqrt{\nu_0} \exp(-\nu_0 t)}{\sqrt{\nu_0 + \nu_1 \vec{M}_0^2 [1 - \exp(-2\nu_0 t)]}}. \quad (4)$$

Также в докладе рассмотрено поведение углов Эйлера θ , ψ , φ , определяющих положение асимметрического волчка в неподвижной системе координат, как при подстановке в найденное точное решение функции (3), так и при подстановке в него функции (4).

Полученные результаты могут быть применены не только для грубых оценок потери энергии и момента импульса механоэлектродинамическими системами, описанными в [2–4], но и для построения теории квантово-механического асимметрического волчка [6] с линейной потерей момента импульса в рамках схемы, предложенной в статье [7].

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.
2. Рассадин А.Э. Генераторы хаотических электромагнитных колебаний механоэлектродинамического типа // Радиоэлектронные средства получения, обработки и визуализации информации: Тр. IV Всерос. конф. (с междунар. уч.), Нижний Новгород, 24–26 сент. 2014 г. Москва: БРИС-М, 2014. С. 105–107.
3. Рассадин А.Э. Генераторы хаотических электромагнитных колебаний, устойчивые к экстремальным условиям эксплуатации // Докл. II Всерос. микроволн. конф. М: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2014. С. 46–51.
4. Рассадин А.Э., Потапов А.А., Ракуть И.В., Степанов А.В. Излучение электромагнитных волн ферромагнитным или сегнетоэлектрическим волчком Суслова космического базирования // Актуальные проблемы физической и функциональной электроники: Матер. 20-й Всерос. молодежн. науч. шк.-сем., Ульяновск, 5–7 дек. 2017 г. Ульяновск: УлГТУ, 2017. С. 80–81.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989.
7. Kanai E. On the quantization of the dissipative systems // Prog. Theor. Phys. 1948. V. 3. P. 440–442.

L. I. Rodina

Vladimir State University, Vladimir, Russia

LRodina67@mail.ru

Since the 1970s, problems of optimal harvesting of a resource in stochastic models have attracted interest of scientists. One of the first works devoted to this subject is apparently [1], in which it is shown that a stochastic fish population can be harvested until a certain level (escapement level) is achieved that does not depend on the current size of the population. A review of the literature devoted to questions of optimal harvesting of populations given by various stochastic models is presented in [2].

We consider models of harvesting a renewable resource given by differential equations with impulse actions which depend on random parameters. In the absence of harvesting the population development is described by the differential equation $\dot{x} = g(x)$ which has an asymptotically stable solution $\varphi(t) \equiv K$, $K > 0$. We assume that the lengths of the intervals $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ between the moments of impulses τ_k are random variables and the sizes of impulse actions depend on random parameters v_k , where $\theta_k \in \Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, $0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \infty$, and $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$. It is possible to exert influence on the process of gathering by stopping gathering in the case where its share becomes large enough, to keep some part of the resource to increase the size of the next gathering. In this case the share of the extracted resource will be equal to

$$\ell_k = \begin{cases} v_k & \text{if } v_k < u_k, \\ u_k & \text{if } v_k \geq u_k. \end{cases}$$

Thus, we consider the stochastic model given by the differential equation with impulse actions

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), & t &\neq \tau_k, \\ x(\tau_k) &= (1 - \ell(v_k, u_k))x(\tau_k - 0), & k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Let us denote $U \doteq \{\bar{u}: \bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)\}$, where $u_k \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &\doteq (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots), & \theta_k &\in \Omega_1, & \bar{v} &\doteq (v_1, \dots, v_k, \dots), & v_k &\in \Omega_2, \\ \omega_k &= (\theta_k, v_k), & \bar{\ell} &\doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots). \end{aligned}$$

Let $X_k = X_k(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0)$ be the amount of the resource before gathering at the moment τ_k , $k = 1, 2, \dots$, which depends on the lengths of the intervals $\theta_1, \dots, \theta_k$ between the moments of gathering, the resource shares $\ell_i = \ell(v_i, u_i)$, $i = 1, \dots, k-1$, collected at the previous time moments, and the initial value x_0 . For any $x_0 \geq 0$ we will define a limit

$$H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \theta_k} \sum_{k=1}^n X_k(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \ell_k, \quad (2)$$

*The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00346-a).

which we call the *average time profit* from resource extraction. If this limit does not exist, we will consider the lower limit.

We construct the control $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)$ which limits the share of an extracted resource at each time moment τ_k so that the amount of the remaining resource, starting with some moment τ_{k_0} , is no less than a given value $x > 0$. For a given control, we estimate the average time profit and find conditions under which the positive limit (2) exists with probability one. Thus, we describe a way of long-term extraction of a resource for the gathering mode in which some part of the population necessary for its further reproduction is constantly preserved and there is a limit of the average time profit with probability one.

The stochastic model corresponding to the differential equation with random parameters (1) is described in [3].

Let $\varphi(t, x)$ be the solution of the differential equation $\dot{x} = g(x)$ satisfying the initial condition $\varphi(0, x) = x$, where $t \geq 0$ and $x \geq 0$. If $\theta \in \Omega_1$, then the function $\varphi(\theta, x)$ is a random variable on the set Ω_1 . For any $m \in \mathbb{N}$ we define $\sigma_m \doteq (\omega_1, \dots, \omega_m)$ and random variables $A_m = A_m(\sigma_m, x)$ and $B_m = B_m(\sigma_m, x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi(\theta_1, x), & A_{k+1} &= \varphi(\theta_{k+1}, A_k(1 - \ell_k)), \\ B_1 &= K, & B_{k+1} &= \varphi(\theta_{k+1}, B_k(1 - \ell_k)), \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Here

$$\ell_k = \ell_k(\sigma_k, x) = \begin{cases} v_k & \text{if } v_k < u_k, \\ u_k & \text{if } v_k \geq u_k = 1 - \frac{x}{A_k(\sigma_k, x)}. \end{cases} \quad (3)$$

We also define $\ell_m = \ell_m(\sigma_m, x)$ by (3). The letter M will denote the expectation of a random variable, so $M\theta$ is the expectation of the lengths of the intervals $\theta_1, \theta_2, \dots$.

Theorem 1. *Let the following conditions be satisfied:*

- (1) *the equation $\dot{x} = g(x)$ has an asymptotically stable solution $\varphi(t) \equiv K$, and an interval (K_1, K_2) is the area of attraction of this solution ($0 \leq K_1 < K < K_2 \leq +\infty$);*
- (2) *$\Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$ and $\Omega_2 \subseteq [\alpha_2, \beta_2]$, where $0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \infty$ and $0 < \alpha_2 \leq \beta_2 \leq 1$.*

Then for all $m \in \mathbb{N}$, $x \in (K_1, K)$, and $x_0 \in (K_1, K_2)$, there is a control $\bar{u} \in U$ such that the inequalities

$$\frac{1}{m \cdot M\theta} \sum_{k=1}^m M(A_k \ell_k) \leq H_*(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \leq H^*(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \leq \frac{1}{m \cdot M\theta} \sum_{k=1}^m M(B_k \ell_k)$$

are satisfied with probability one.

Theorem 2. *Let the conditions of Theorem 1 be satisfied and $g'(x) < 0$ for all $x \in (L_1, L_2)$, where $K_1 < L_1 < K < L_2$. Then for all $(x, x_0) \in (L_1, K) \times (K_1, K_2)$ and some control $\bar{u} \in U$ there exists with probability one a positive limit*

$$H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) = \frac{1}{M\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} M(A_n \ell_n) = \frac{1}{M\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} M(B_n \ell_n),$$

which does not depend on the initial value $x_0 \in (K_1, K_2)$.

References

1. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // *J. Environ. Econ. Manage.* 1979. V. 6. P. 350–363.
2. *Kapaun U., Quaas M.F.* Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // *Econ. Working Paper.* 2012. V. 9. P. 1–40.
3. *Rodina L.I.* Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource // *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki.* 2018. V. 28, No. 2. P. 213–221.

MATHEMATICAL STUDY ON CTL GENERATED CONTROL INDUCED DELAY MODEL FOR HPV ASSOCIATED CERVICAL CANCER

Priti Kumar Roy, Sudip Chakraborty

*Centre for Mathematical Biology and Ecology, Department of Mathematics,
Jadavpur University, Kolkata, India*

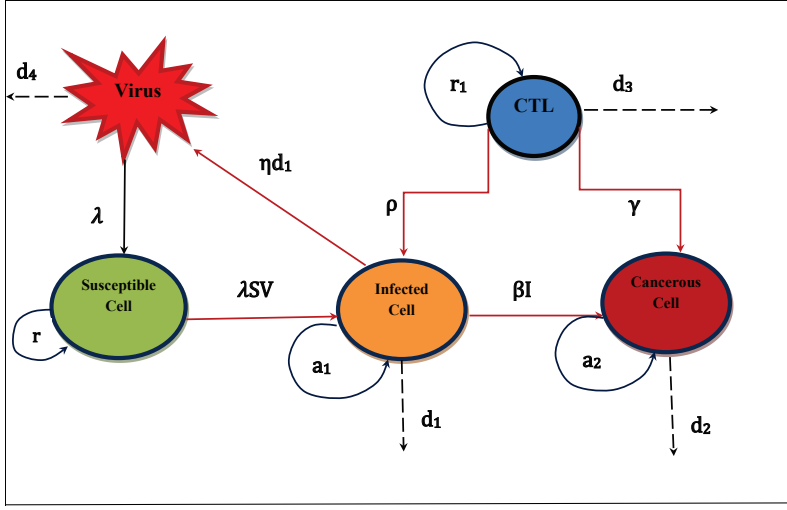
pritiiju@gmail.com

This article deals with a new mathematical model on cervical cancer dynamics that describes the interactions between susceptible cell, cancerous cell, cytotoxic T lymphocytes (CTL) and human papilloma virus (HPV). Intercellular delays have been incorporated when the virus targets a susceptible cell, infected cell becomes cancerous and also when CTL interacts with both infected as well as cancerous cells. The qualitative analysis of the solutions of the delay system and the stability of each possible steady state is described in this article. The occurrence of a limit cycle of the system around the equilibrium point is discussed by the application of Hopf bifurcation by using the delay as a bifurcation parameter. We also show that the intracellular delay affects the value of the basic reproduction ratio R_0 . The theoretical and numerical outcomes have been supported through experimental data from different publications. Furthermore, a delay induced control strategy has been introduced based on two drugs which provides a significant prevention to overcome the large enhancement of cancerous cells.

Formulation of the delay model. We formulate a human papilloma virus (HPV) induced cervical cancer model at the cellular level considering susceptible cells (S), infected cells (I), cancerous cells (C), the CTL population (T) and HPV (V).

HPV infects the epithelial cells causing cervical cancer [1]. Here we consider the epithelial cells as a susceptible cell compartment (S). During the time of HPV infection the total number of epithelial cells gets constantly replaced every week [2]. To ensure this behaviour, we assume that the susceptible cell population grows in a logistic fashion with intrinsic growth rate r and carrying capacity K (assumed as the total epithelial cells of the cervix) which is related upon S and I .

Susceptible cells are infected by virus (V) via a mass action term λ [3]. It takes time for virus to infect the susceptible cell after entering to the cervix. To ensure the time delay behaviour of virus, we include a delay parameter τ_1 at the interaction



A diagram of the interactions between different populations.

term of susceptible cell by virus. At a rate a_1 , the infected cell population proliferates producing new infected cells, and d_1 is the apoptosis rate of infected cells.

Once the susceptible cells transform into the infected, there is a risk of developing cancer by high risk types of HPV. β is the progression rate at which infected cells become cancerous. The progression from infected cell to cancerous cell passes through different stages like CIN1, CIN2, and CIN3. Due to the in-between time it takes the infected cell to pass through the intermediate stages before it converts into the cancerous stage, we include a time delay parameter τ_2 in the progression term β . When the cancer cells are formed, they also grow at a rate of a_2 , and d_2 is the natural death rate by apoptosis of cancerous cells.

We assume the growth of the CTL population takes in a logistic fashion with maximum per capita rate r_1 and carrying capacity K_1 . The parameters ρ and γ are the rate at which the CTL interacts with the infected and cancerous cells, respectively, and kills them. CTL cannot kill infected and cancerous cells instantly, and there is a time delay in the interaction with the infected and cancerous cells. We assume that the interaction lags by a delay τ_3 with both infected and cancerous cells. And d_3 is the natural death rate of the CTL population.

New virus is produced from the dead infected cells upon lysis. In fact the cancerous cells cannot produce new virus. The parameter η is the birth rate of virus, and d_4 is the clearance rate of HPV.

Thus we have the following mathematical model:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S+I}{K} \right) - \lambda SV(t - \tau_1), \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SV(t - \tau_1) + a_1 I - d_1 I - \beta I(t - \tau_2) - \rho I(t - \tau_3) T(t - \tau_3), \\ \frac{dC}{dt} &= \beta I(t - \tau_2) + a_2 C - \gamma C(t - \tau_3) T(t - \tau_3) - d_2 C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= r_1 IT \left(1 - \frac{T}{K_1}\right) - d_3 T, \\ \frac{dV}{dt} &= \eta d_1 I - d_4 V,\end{aligned}$$

with initial conditions $V(t - \tau_1) = 0$, $I(t - \tau_2) = 0$, $T(t - \tau_3) = 0$, $C(t - \tau_3) = 0$, $S(0) > 0$, $I(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$, $T(0) \geq 0$, and $V(0) \geq 0$, and all the parameters are assumed to be nonnegative.

Control induced delay model. Here we introduce two drugs $u_1(t)$ and $u_2(t)$ in our mathematical model. We have considered that chemo reduces the proliferation rate of cancerous cells by $1 - u_1(t)$ where $u_1(t)$ is the control input doses of the chemotherapeutic drug. IL-2 treatment is given by the control input parameter $u_2(t)$ which enhances the CTL population to help killing the infected cells as well as cancerous cells.

Thus we have the following control induced delay model:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \lambda SV(t - \tau_1), \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SV(t - \tau_1) + a_1 I - d_1 I - \beta I(t - \tau_2) - \rho I(t - \tau_3)T(t - \tau_3), \\ \frac{dC}{dt} &= \beta I(t - \tau_2) + a_2(1 - u_1(t))C - \gamma C(t - \tau_3)T(t - \tau_3) - d_2 C, \\ \frac{dT}{dt} &= r_1 IT \left(1 - \frac{T}{K_1}\right) + u_2(t)T - d_3 T, \\ \frac{dV}{dt} &= \eta d_1 I - d_4 V.\end{aligned}$$

Here $S(0) > 0$, $I(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$, $T(0) \geq 0$, and $V(0) \geq 0$, and all the parameters are assumed to be nonnegative. The cost function is formulated as

$$J[u_1(t), u_2(t)] = \int_{t_s}^{t_f} \frac{1}{2} [P u_1^2(t) + Q u_2^2(t) - T^2 + C^2] dt.$$

In this problem, we are seeking the optimal control pair (u_1^*, u_2^*) such that $J(u_1^*, u_2^*) = \min\{J(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in U\}$. Here U is the control set defined by $U = U_1 \times U_2$, where $U_1 = U_2 = \{u(t) : u_1 \text{ and } u_2 \text{ are measurable, } 0 \leq u_1(t) \leq 1, 0 \leq u_2(t) \leq 1, t \in [t_s, t_f]\}$. To determine the optimal control u_1^* and u_2^* , we use the *Pontryagin minimum principle*.

References

1. Woodman C.B.J., Collins S.I., Young L.S. The natural history of cervical HPV infection: unresolved issues // Nat. Rev. Cancer. 2007. V. 7. P. 11–22. doi:10.1038/nrc2050.
2. Wright T.C., Ferenczy A. Anatomy and histology of the cervix // Blaustein's pathology of the female genital tract. 5th ed. New York: Springer, 2002. P. 207–224.
3. Asih T.S.N. et al. The dynamics of HPV infection and cervical cancer cells // Bull. Math. Biol. 2016. V. 78, No. 1. P. 4–20. doi:10.1007/s11538-015-0124-2.

САМОПОДОБНЫЕ ПОТОКИ,
НЕСКОЛЬКО СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ
(SELF-SIMILAR FLOWS, SOME SPECTRAL EFFECTS)*

В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)

Московский государственный университет, Москва, Россия

vryzh@mail.ru

Сохраняющий меру поток T_t самоподобен, если для некоторого $a > 0$ он изоморфен потоку T_{at} . Здесь, как и в работе [1], подразумевается сохраняющий меру изоморфизм. В случае, если фазовое пространство потока имеет бесконечную меру, удобно не требовать от изоморфизма сохранения меры, а ограничиться его несингулярностью. Это ослабление приводит к интересным примерам бесконечных самоподобных динамических систем. В [2] были предложены соответствующие конструкции ранга 1, обладающие самоподобием при $a > 2$. Рассмотрение гауссовских и пуассоновских надстроек над такими бесконечными системами позволяет обнаруживать потоки на вероятностном пространстве с необычными спектральными свойствами.

Теорема. *А. Существует поток $\{T_t\}$ с вероятностной инвариантной мерой такой, что произведения $T_t \otimes T_{at}$ для одного бесконечного набора параметров a имеют сингулярный спектр, а для другого бесконечного набора параметров обладают лебеговской компонентой в спектре.*

Б. *Для этого потока наборы спектральных кратностей унитарных операторов, отвечающих элементам потока T_t , существенно зависят от времени $t > 0$.*

Список литературы

1. *Danilenko A.I., Ryzhikov V.V.* On self-similarities of ergodic flows // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 2012. V 104, No. 3. P. 431–454.
2. *Ryzhikov V.V.* Chacon's type ergodic transformations with unbounded arithmetic spacers: E-print, 2013. arXiv:1311.4524.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-6222.2018.1).

АНОРМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ
В СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ С ВЕКТОРОМ РОСТА (2, 3, 5, 8)
(ABNORMAL TRAJECTORIES IN THE SUB-RIEMANNIAN PROBLEM
WITH THE GROWTH VECTOR (2, 3, 5, 8))*

Ю. Л. Сачков (Y. L. Sachkov), Е. Ф. Сачкова (E. F. Sachkova)

*Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский, Россия*

yusachkov@gmail.com, efsachkova@mail.ru

Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5, 8) как задача оптимального управления в восьмимерном пространстве состояний с двумерным линейным управлением. Эта задача является простейшей нильпотентной субримановой задачей ранга 2 на четырехступенной группе Ли и задает нильпотентную аппроксимацию произвольной субримановой структуры ранга 2 в восьмимерном пространстве состояний в окрестности точки общего положения.

Для исследования задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Получена параметризация аномальных экстремальных пар: вырожденных (аннулирующих куб распределения) и невырожденных.

Равномерно пробегаемые аномальные экстремальные траектории исследованы на строгую аномальность. Доказано, что все вырожденные аномальные экстремальные траектории нестрого аномальны. Для исследования невырожденных аномальных экстремальных траекторий доказан критерий строгой аномальности, который разделяет эти траектории на строго и нестрого аномальные согласно некоторому свойству кривизны проекций этих траекторий на плоскость распределения.

Равномерно пробегаемые аномальные экстремальные траектории исследованы на оптимальность. Доказано, что нестрого аномальные траектории оптимальны либо на определенном отрезке, либо до бесконечности и заполняют гладкие трехмерное и два симметричных двумерных многообразия. Все аномальные экстремальные траектории являются субримановыми геодезическими.

Список литературы

1. Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Диф. уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 362–374.
2. Gauthier J.-P., Sachkov Yu.L. On the free Carnot (2, 3, 5, 8) group // Программные системы: теория и приложения. Переславль-Залесский: ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, 2015. Т. 6, № 2. С. 45–61.
3. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в ИПС им. А.К. Айламазяна РАН.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ В МЕТОДЕ С.А. ЛОМОВА
(REGULARIZATION OF INTEGRAL OPERATORS IN SINGULARLY
PERTURBED PROBLEMS IN S. A. LOMOV'S METHOD)

В. Ф. Сафонов (V. F. Safonov)

Московский энергетический институт, Москва, Россия

SafonovVF@yandex.ru

В работе [1] подчеркивалось, что при обобщении метода регуляризации С.А. Ломова [2] на интегральные и интегродифференциальные сингулярно возмущенные задачи типа

$$\varepsilon \frac{dy(t, \varepsilon)}{dt} = A(t)y(t, \varepsilon) + \int_0^\alpha K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + h(t, x), \quad (1)$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0 \quad (t \in [0, T], \alpha = t, \alpha = T < +\infty, \mu(t) \leq 0),$$

$$\varepsilon y(t, \varepsilon) = A(t)y(t, \varepsilon) + \int_0^\alpha K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad (1a)$$

основная трудность заключается в регуляризации интегральных операторов. В случае их отсутствия, т.е. при наличии только дифференциального оператора $L_\varepsilon \equiv \varepsilon \frac{d}{dt} + A(t)$, регуляризация соответствующей сингулярной задачи производится обычно по спектру $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$ с помощью известной формулы сложного дифференцирования. При этом расширенный оператор будет иметь вид $\tilde{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial}{\partial \tau_j} + A(t)$. Для интегральных операторов аналога формулы сложного дифференцирования нет, поэтому напрямую построить расширение интегрального оператора не представляется возможным. Применяя операцию интегрирования по частям к интегралу от каждого элемента пространства $U = \{y = \sum_{j=1}^n y_j(t)e^{\tau_j} + y_0(t), y_j(t) \in C^\infty([0, T], C^n)\}$, используемого в дифференциальных системах для решения итерационных задач, С.А. Ломов приходит к выводу, что пространство, инвариантное относительно интегрального оператора, должно быть расширено и иметь вид пространства U , но в котором коэффициенты $y_j(t)$ каждого его элемента $y(t, \tau)$ должны быть асимптотическими степенными рядами по ε , равномерно сходящимися по $t \in [0, T]$. При этом расширение $\tilde{J}$ интегрального оператора J будет определено на множестве асимптотических рядов $y(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k y_k(t, \tau)$ с коэффициентами $y_k(t, \tau) \in U$, а сам оператор $\tilde{J}$ будет иметь довольно сложную структуру

$$\tilde{J}\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^\infty \varepsilon^\nu \sum_{r=0}^\nu R_{\nu-r} y_r(t, \tau),$$

где $R_m: U \rightarrow U$ — операторы порядка по ε :

$$R_0 y(t, \tau) \equiv R_0 \left(\sum_{j=1}^n y_j(t) e^{\tau_j} + y_0(t) \right) = \int_0^t K(t, s) y_0(s) ds,$$

$$R_m y(t, \tau) = (-1)^m \varepsilon^{m+1} \sum_{j=1}^n \left[\left(I_j^m(K(t, s)y_j(s)) \right)_{s=t} e^{\tau_j} - \left(I_j^m(K(t, s)y_j(s)) \right)_{s=0} \right],$$

$$I_j^0 = \frac{1}{\lambda_j(s)}, \quad I_j^m = \frac{1}{\lambda_j(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_j^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной (1):

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{y} - \tilde{J} \tilde{y} = h(t), \quad y(0, 0, \varepsilon) = y^0.$$

Если же хотя бы одно из собственных значений обращается в нуль в изолированной точке отрезка $[0, T]$ (например, если $\lambda_1(t) = -t^k l_0(t)$, $l_0(t) > 0 \forall t \in [0, T]$), то возникают существенные трудности при регуляризации интегрального оператора. Напрямую применить идею регуляризации С.А. Ломова не представляется возможным, так как операция интегрирования по частям в этом случае не работает. Поэтому развивается регуляризация с помощью нормальных форм, основная идея которой состоит в том, что регуляризирующие переменные вводятся не непосредственно по спектру предельного оператора $A(t)$, а вычисляются опосредованно с помощью дифференциальной нормальной формы

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_1}{dt} &= \lambda_1(t) u_1 + \sum_{r=1}^{l+1} \varepsilon^r g_r(t), & u_1(0, \varepsilon) &= 1, \\ \varepsilon \frac{du_j}{dt} &= \lambda_j(t) u_j, & u_j(0, \varepsilon) &= 1, & j &= \overline{2, n}, \end{aligned}$$

где функции $g_r(t)$ вычисляются в процессе построения регуляризованного асимптотического решения исходной задачи (1). Решение этой формы записывается в квадратурах. Процедура регуляризации интегрального оператора основана на следующем утверждении.

Лемма. Пусть функции $a(t), \mu(t) \in \mathbf{C}[0, T]$ таковы, что $a(t) \neq \mu(t)$ при $t \in [0, T]$ и функция $g(t, \varepsilon)$ непрерывна по $t \in [0, T]$ при каждом $\varepsilon > 0$. Если функция $u = u(t, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \dot{u}_1 = a(t) u_1 + g(t, \varepsilon),$$

то при любых $t \in [0, T]$ и $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{a(t) - \mu(t)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(\theta) d\theta \right) \frac{d}{dt} \left[\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(\theta) d\theta \right) u_1(t, \varepsilon) \right] - \\ &\quad - \frac{g(t, \varepsilon)}{a(t) - \mu(t)}. \end{aligned}$$

Применение этой леммы позволило провести полную регуляризацию интегральных операторов и построить регуляризованное асимптотическое решение

даже в случае континуальной неустойчивости спектра, например, в задаче

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dy}{dt} &= a(t)y + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_0(\theta) d\theta\right) K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + \\ &+ p(t) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_1(\theta) d\theta\right) q(s)y(s, \varepsilon) ds + h(t), \\ y(0, \varepsilon) &= y^0, \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

(см. [3]), с быстро изменяющимися ядрами, одно из которых имеет неустойчивое спектральное значение ($\mu_1(t) \equiv 0 \forall t \in \bar{S} \subset [0, T]$).

Список литературы

1. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с контрастными структурами // Мат. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 29–56.
2. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011.
3. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Уравнения с неустойчивым спектральным значением ядра интегрального оператора и контрастные структуры // Диф. уравнения. 2006. Т. 42, № 5. С. 660–673.

КЛАССИФИКАЦИЯ РАСШИРЕНИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА ТОРЕ (CLASSIFICATION OF EXTENSIONS OF QUASIPERIODIC TORUS FLOWS)

А. Н. Сахаров (A. N. Sakharov)

*Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия,
Нижний Новгород, Россия
ansakharov2008@yandex.ru*

Доклад посвящен вопросам топологической классификации потоков на трехмерном торе, порождаемых векторными полями вида

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta), \tag{1}$$

где (φ, θ) — угловые координаты на торе $\mathbb{T}^3$, вектор $\omega \in \mathbb{R}^2$ имеет рационально независимые компоненты, $v(\varphi, \theta)$ — непрерывная периодическая по всем переменным функция. Таким образом, система (1) порождает поток, являющийся расширением квазипериодического потока на торе.

Будем рассматривать задачу классификации для потоков с одним и тем же вектором ω . Класс таких потоков обозначим через $\mathcal{C}_\omega$. Классификация потоков из этого класса производится по отношению *последовательной топологической сопряженности*, т.е. потоки f^t и g^t сопряжены, если существует гомеоморфизм $h: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что $h(\varphi, \theta) = (\varphi, H_\varphi(\theta))$, где $H_\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ — гомеоморфизм S^1 , и $h(f^t(\varphi, \theta)) = g^t(\varphi, H_\varphi(\theta))$. Если же отображение H_φ не гомеоморфизм, а только

гомоморфизм (непрерывное отображение на), то говорят о *послойной полуспряженности* потоков f^t и g^t .

Для исследования потока $f^t \in \mathcal{C}_\omega$ удобно использовать его поднятие на универсальное накрытие тора $\mathbb{T}^3$, которое представимо в виде $\Phi(t, \varphi) = \varphi + \omega t$, $\Theta(t, \varphi, \theta) = \theta + F^t(\varphi, \theta)$, где F^t — периодическая по φ, θ функция. Известно, что любой поток из класса $\mathcal{C}_\omega$ имеет единственный *вектор вращения*

$$\rho = (\omega_1, \omega_2, \varrho), \quad \varrho = \lim_{t \rightarrow \infty} F^t(\varphi, \theta)/t, \quad (2)$$

где ϱ (*число вращения слоя*) не зависит от начальных данных (φ, θ) (см. [1, 2]). Другой важной характеристикой, используемой при классификации, является свойство *регулярности*: поток $f^t \in \mathcal{C}_\omega$ регулярен, если существует число $c > 0$ такое, что

$$|F^t(\varphi, \theta) - t\varrho| < c. \quad (3)$$

Свойство (3) означает, что траектория потока на накрытии имеет конечное отклонение от поднятия соасимптотической геодезической на торе.

Вектор вращения ρ называется *нерезонансным*, если его компоненты рационально независимы. В противном случае он называется *резонансным*.

Классификация А. Пуанкаре потоков на двумерном торе основана на описании динамики гомеоморфизма окружности, являющейся глобальной секущей¹. Поток $f^t \in \mathcal{C}_\omega$ также имеет глобальную секущую, поэтому изучение потока можно свести к изучению гомеоморфизма (отображения последования) тора $\mathbb{T}^2$:

$$\phi_1 = \phi + \alpha, \quad \theta_1 = \theta + B(\phi, \theta), \quad (4)$$

где $\alpha = \omega_1/\omega_2$. Очевидно, что этот гомеоморфизм также имеет вектор вращения $(\alpha, \varrho/\omega_2)$ и наследует свойство регулярности. Эти свойства и были использованы для (частичной) классификации гомеоморфизмов (4) (см. [3–5] и приведенную там библиографию). Основной результат, полученный в указанных публикациях, заключается в следующем.

Предложение. *Если гомеоморфизм (4) регулярен и вектор вращения нерезонансный, то он полуспряжен сдвику*

$$\phi_1 = \phi + \alpha, \quad \theta_1 = \theta + \varrho/\omega_2.$$

Этот результат, естественно, справедлив и для потоков из $\mathcal{G}_\omega$.

В докладе формулируется ряд уточнений, касающихся классификации потоков из $\mathcal{C}_\omega$. При этом будем использовать еще две характеристики динамики этих потоков. Будем говорить, что поток $f^t \in \mathcal{G}_\omega$ *послойно дистален*, если для всех $\varphi \in \mathbb{T}^2$ и $\theta_1 \neq \theta_2$ существует $\delta(\theta_1, \theta_2) > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\Theta(t, \varphi, \theta_1) - \Theta(t, \varphi, \theta_2)| \geq \delta(\theta_1, \theta_2).$$

Если же в слоях существуют асимптотические траектории, то поток называется *послойно проксимальным*.

¹В случае, рассмотренном А. Пуанкаре, свойство регулярности потока автоматически выполняется.

Теорема 1. Пусть поток $f^t \in \mathcal{C}_\omega$ регулярен и его вектор вращения нерезонансный. Тогда

- (1) если поток f^t послойно дистален, то он топологически сопряжен линейному

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi + \omega, \theta + \varrho); \quad (5)$$

- (2) если поток f^t послойно проксимален, то он топологически полусопряжен линейному потоку (5).

Пусть вектор вращения резонансный, т.е.

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\varrho = 0.$$

Тогда замена

$$\theta_1 = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + l\theta$$

преобразует векторное поле (1) в векторное поле

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta}_1 = \tilde{v}(\varphi, \theta_1) \quad (6)$$

на l -листном накрытии тора $\mathbb{T}^3$. Поток, порождаемый этим полем, имеет нулевое число вращения слоя.

Теорема 2. Пусть поток $f^t \in \mathcal{C}_\omega$ регулярен и число вращения слоя $\varrho = 0$. Тогда

- (1) если поток f^t послойно дистален, то он топологически сопряжен линейному потоку

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi + \omega, \theta);$$

- (2) если поток f^t послойно проксимален, то он топологически полусопряжен потоку, порождаемому векторным полем

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = \sin(m\theta).$$

Утверждение (2) теоремы 2 является частным случаем теоремы 3, сформулированной в [6].

Доказательства этих результатов опираются на обобщенную теорему Готшалка–Хедлунда [5] о существовании непрерывных решений аддитивных гомологических уравнений.

Список литературы

1. Вереме́нюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, № 6, С. 1073–1076.
2. Вереме́нюк В.В. Формула для числа вращения уравнения первого порядка с квазипериодической по времени правой части // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 158–159.
3. Jäger T., Stark J. Towards a classification for quasiperiodically forced circle homeomorphisms // J. London Math. Soc. 2006. V. 73, No. 2. P. 727–744.
4. Jäger T. Linearization of conservative toral homeomorphisms // Invent. math. 2009. V. 176, No. 3. P. 601–616.

5. *Aliste-Prieto J., Jäger T.* Almost periodic structures and the semiconjugacy problem // *J. Diff. Eqns.* 2012. V. 252. P. 4988–5001.
6. *Сахаров А.Н.* Топологическая классификация диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными множествами // *Системы Аносова и современная динамика: Тез. докл. междунар. конф. М: МИАН, 2016. С. 100–103.*

OPTIMIZATION OF INTERPLANETARY FLIGHT TO PHOBOS ON THE BASIS OF MAXIMUM PRINCIPLE

A. S. Samokhin, M. A. Samokhina

Moscow State University, Moscow, Russia

*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

RUDN University, Moscow, Russia

kipt35@gmail.com, parabolic.hyperboloid@gmail.com

The topical optimization problem of three-dimensional transfer to Phobos is considered [1]. In the first version of the Phobos-Grunt project, the combined propulsion system comprising low thrust (LT) jet engines was supposed to be used [2]. Maneuvers near Mars and the return stage were implemented with the use of a big thrust (BT) engine. Later this promising scheme with combining BT and LT jet engines was rejected [3]; however, the problem of designing and optimizing combined propulsion schemes of interplanetary missions remains.

On the one hand, this problem is related to the real mission to Phobos, which the Russian Federation is going to implement in the next few years. On the other hand, development of the methods of the interplanetary trajectory optimization is a question of present interest.

In other studies of such problems, planetocentric parts of trajectories are usually neglected, and there is no through optimization of the whole mission. In this paper, as an example of such a problem, the problem of designing the expedition to Phobos with these features taken into account is solved by Pontryagin's extremal design method. Namely, the cosmodynamics problem is formalized as an optimal control problem; then the boundary problem of Pontryagin's maximum principle is solved numerically by the shooting method. Certain trajectories are designed.

Problems with the combined propulsion system and the efficiency of using LT in interplanetary expeditions are known for a long time [4, 5]. The possible gain due to using combined propulsion in comparison with using only BT engines is calculated for the mission to Phobos.

We suppose that the spacecraft (SC) starts from the artificial Earth satellite orbit corresponding to a start from Baikonur between 2020 and 2030 and arrives at Phobos in some time. The total duration of an expedition is limited. The coordinates of the Earth, Mars and Phobos correspond to ephemeris DE424 and MAR097. The gravitational fields of the Sun, Earth and Mars are considered to be Newtonian. The moments of the SC start and finish are optimized. The SC is equipped with BT and LT engines. The control is realized by the value and the direction of a jet thrust vector.

After the end of each trajectory part on which the propulsion system is used, it dumps instantly. The SC angular position on an initial starting circle and the moments of switching the thrust on and off are optimized. Weight losses are minimized.

Rigid conditions of phasing are supposed at two trajectory end points. The SC lands on or flies up from the natural satellite. At the end of the mission, hit-the-point type condition of rendezvous with the Earth is considered. The SC and Phobos are supposed to be non-attracting material points; their coordinates and velocity vectors at the time of meeting coincide.

The considered cosmodynamics problem was formalized as an optimal control problem for a variable structure dynamic system [6] and was solved on the basis of Pontryagin's maximum principle. The six-point boundary value problem was reduced to the point-to-point problem and was solved numerically with the use of the shooting method. The root of the vector function was found with the use of Newton's method with Isaev-Sonin's modification and Fedorenko's normalization in the convergence conditions. The Cauchy problems of the shooting method were solved numerically by the explicit eighth order Runge-Kutta's method based on Dormand-Prince's 8(7) calculating formulae with the automatic step choice. The external gradient optimization methods were used in extremal creating. The calculation scheme is presented in [7].

One of the main difficulties in solving such problems is to construct a good approximation for the initial parameter values. The original problem is multiextremal. First, note that a launch window to the Earth from Mars opens every two years. Therefore, at the beginning of the solution, global optimization was made: the SC flight was approximated with a series of close Lambert's problems with consideration of different impulse numbers in the Mars sphere of influence [8]. The best years for the SC start were calculated. A comparison to the absolute minimum of the maneuver was made. In addition, a locally optimal trajectory exists for each revolution of Phobos around Mars. The method of finding the best of them is represented in [9]. The external optimization with the use of a combination of gradient methods and a method of continuation of the solution with respect to the parameter was made for time optimization at the bound point with a phasing condition.

Then the problem was solved in a pulse statement on the basis of the Lagrange principle with consideration of the Sun and Mars attraction on each part of the trajectory. On the basis of the pulse solution, the extremals with limited thrust in the original problem were constructed [10]. The transversality conditions of the maximum principle were effective for the time optimization on the trajectory end with hit-the-point condition.

Another difficulty to be overcome during the decision creation is the restructuring of a trajectory. A specific method is given.

The through optimization with respect to the task parameters was made. The possible gain from using the combined thrust in comparison with using only BT engines was estimated.

Finally, the original problem has been solved, and specific numerical results are given. Pontryagin's extremals are singled out as a result of solving a boundary value problem. The analysis depending on the problem parameters is carried out.

Note that using combined high and low thrust propulsion for space missions allows to increase the useful weight and makes the project cheaper, which is important now.

Expeditions to Mars and its natural satellites can help to provide a solution of a wide range of physics problems of the Solar system.

Consideration of the complex trajectory optimization problems demanding the synthesis of local and multiextremal optimization methods, optimal control, cosmodynamics, mechanics of space flight, gravitational astronomy and numerical methods makes a significant contribution to the theory of solutions of such problems.

References

1. *Eneev T.M.* Actual problems of deep space exploration // *Cosmic Res.* 2005. V. 43, No. 6. P. 403–407.
2. *Avduevsky V.S., Akim E.L., Kremnev R.S., Kulikov S.D.* Space project “Phobos-Grunt”: main characteristics and development of strategy // *Kosmonavtika Raketostr.* 2000. V. 19. P. 8–21.
3. The space mission project. Moscow: “NPO. S.A. Lavochkin” Roscosmos, Rus. Acad. Sci. Space Res. Inst., 2011. V. 1, 2.
4. *Edelbaum T.N.* The use of high- and low-thrust propulsion in combination for space missions // *J. Astron. Sci.* 1962. V. 9, No. 2. P. 49–69.
5. *Bolle A., Circi C., Corrao G.* Optimal Mars transfers for small payload transportation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2006. V. 106. P. 183–196.
6. *Grigoriev I.S., Grigoriev K.G.* Conditions of the maximum principle in the problem of optimal control over an aggregate of dynamic systems and their application to solution of the problems of optimal control of spacecraft motion // *Cosmic Res.* 2003. V. 41, No. 3. P. 285–309.
7. *Grigoryev I.S., Zapletin M.P., Samokhin A.S., Samokhina M.A.* Optimization of Phobos mission with hybrid propulsion returning to the Earth // *Eng. J.: Sci. Innovation.* 2017. No. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1639.
8. *Samokhin A.S.* Optimization of expedition to Phobos using the impulse control and solution to Lambert problems taking into account attraction of the Earth and Mars // *Moscow Univ. Math. Bull.* 2014. V. 69, No. 2. P. 84–87.
9. *Samokhina M.A., Samokhin A.S., Zapletin M.P., Grigoriev I.S.* Method of optimal trajectories design for a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in problems with the phasing condition // *Adv. Astron. Sci.* 2018. V. 161. P. 711–730.
10. *Grigoriev I.S., Grigoriev K.G.* The use of solutions to problems of spacecraft trajectory optimization in impulse formulation when solving the problems of optimal control of trajectories of a spacecraft with limited thrust engine. I // *Cosmic Res.* 2007. V. 45, No. 4. P. 339–347.

STATIONARITY CONDITIONS IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM
RELATED TO AUTONOMOUS OBJECTS GROUP TARGET ORBITING
BY CARRIER OBJECT*

I. A. Samylovskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

In this work, we deal with the following problem:

$$A: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & \text{on } \Delta_0 = [t_0, T], \\ \dot{y}^i = g^i(y^i, v^i) & \text{on } \Delta_i = [t_i, T], \quad i = 1, \dots, n, \\ \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, & i = 1, \dots, n \\ \varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \quad \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0, \\ \phi(u) \leq 0, \quad \omega^i(v^i) \leq 0, \\ J_A := J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) \rightarrow \min_{u, v^1, \dots, v^n}. \end{cases}$$

Here, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the carrier object state vector at time t and $y^i(t) \in \mathbb{R}^n$ is the i th payload object state vector at time t . We consider a situation when the carrier moves from its initial orbit to its target orbit “dropping” payloads at times t_i . The base goal is to realize an optimal inter-orbit transfer which is set by the conditions

$$\varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \quad \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0$$

and drop payloads with respect to a prescribed “distribution” which is set by the conditions

$$\Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

For simplicity, for process $w^0 = (x^0, y^{10}, \dots, y^{n0}, u^0, v^{10}, \dots, v^{n0})$ we consider the case of extended weak minimum. Our goal is to obtain stationarity conditions. To do this, introduce new (normalized) time $\tau \in [0, 1]$ and consider the time variable t on the segments Δ_i as a new variable t_i subject to the equation

$$\frac{t_i}{d\tau} = \rho_i(\tau),$$

where $\rho_i(\tau) > 0$ are additional controls. Then, on the segment $[0, 1]$ we introduce variables

$$z_i = x(t_i(\tau)), \quad \eta_i^j = y^j(t_i(\tau)), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, i-1,$$

and new controls

$$\xi_i = u(t_i(\tau)), \quad w_i^j = v^j(t_i(\tau)), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

*This work is supported in part by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 18-31-00091.

Thus, we replicate the original variables and transform the original problem to a problem on the fixed time interval $[0, 1]$:

$$B: \begin{cases} \frac{dz_i}{d\tau} = \rho_i f(z_i, \xi_i), & \frac{d\eta_i^j}{d\tau} = \rho_i g^j(\eta_i^j, w_i^j), & \frac{dt_i}{d\tau} = \rho_i, \\ i = 1, \dots, n+1, & j = 1, \dots, i-1 \\ z_i(1) - z_{i+1}(0) = 0, & i = 1, \dots, n-1, \\ \eta_i^j(1) - \eta_{i+1}^j(0) = 0, & i = 2, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, i-1, \\ t_1(0) = t_0, \quad t_n(1) = T, & t_i(1) - t_{i+1}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \Phi_i(z_i(0), \eta_i^i(t_i)) = 0, & \Psi_i(z_i(0), \eta_i^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ \varphi_1(z_1(0), z_n(1)) = 0, & \varphi_2(z_1(0), z_n(1)) \leq 0, \\ \phi(\xi_i) \leq 0, & \omega^j(v_i^j) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, i-1, \\ J_B = J(z_1(0), z_{n+1}(1), \eta_1^1(0), \eta_{n+1}^1(1), \dots, \eta_1^n(0), \eta_{n+1}^n(1)) \rightarrow \min_{\xi, w^1, \dots, w^n}. \end{cases}$$

Formulating stationarity conditions for Problem B, we introduce Lipschitz adjoint variables $\psi_{z_i}(\tau)$, $\psi_{\eta_i^j}(\tau)$, $\psi_{t_i}(\tau)$ and measurable bounded functions $h_i(\tau)$, $\sigma_i^j(\tau)$ generating the augmented Pontryagin function

$$\bar{\Pi} = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i \left(\psi_{z_i} f(z_i, \xi_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\psi_{\eta_i^j} g^j(\eta_i^j, w_i^j) - \sigma_i^j \omega^j(w_i^j) \right) + \psi_{t_i} - h_i \phi(\xi_i) \right).$$

Rewriting the stationarity conditions in the original time, we get the endpoint Lagrange function

$$\begin{aligned} l = & \alpha_0 J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \\ & + \alpha_{n+1} \varphi_1(x(t_0), x(T)) + \sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) + \beta_{n+1} \varphi_2(x(t_0), x(T)), \end{aligned}$$

the Pontryagin function

$$H = \psi_x f(x, u) + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{y^j} g(y^j, v^j) \quad \text{on } \Delta_i = [t_{i-1}, t_i],$$

and the augmented Pontryagin function

$$\bar{H} = \psi_x f(x, u) + \sum_{j=1}^{i-1} (\psi_{y^j} g(y^j, v^j) - m^j \omega^j(v^j)) - h \phi(v) \quad \text{on } \Delta_i = [t_{i-1}, t_i],$$

where $i = 1, \dots, n+1$ and by definition $t_{n+1} := T$.

The adjoint variables $\psi_x(t)$ and $\psi_{y^i}(t)$ satisfy the transversality conditions

$$\begin{cases} \psi_x(t_0) = \alpha_0 J'_{x(t_0)} + \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(t_0)} + \beta_{n+1} \varphi'_{2x(t_0)}, \\ \psi_x(T) = -\alpha_0 J'_{x(T)} - \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(T)} - \beta_{n+1} \varphi'_{2x(T)}, \\ \psi_{y^i}(t_i) = \alpha_0 J'_{y^i(t_i)} + \alpha_i \Phi'_{y^i(t_i)} + \beta_i \Psi'_{y^i(t_i)}, \quad \psi_{y^i}(T) = -\alpha_0 J'_{y^i(T)} \end{cases}$$

and the jump conditions

$$\Delta\psi_x(t^i) = l'_{x^i(t_i)} = \alpha_i\Phi'_{x^i(t_i)} + \beta_i\Psi'_{x^i(t_i)}.$$

The stationarity conditions take the form

$$\begin{cases} \psi_x f_u - h\phi_u = 0 & \text{on } [t_0, T], \\ \psi_{y^i} g_{v^i}^i - \sigma^i \omega_{v^i}^i = 0 & \text{on } \Delta^i := [t_i, T], \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

while the energy conservation law takes the form

$$\psi_x f + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{y^j} g^j = c \quad \text{on } \Delta_i := [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n+1.$$

An important modification of Problem A is Problem C with terminal cost related to the “widest” final distribution of payloads. Here, we get payload dynamics in the inertial form

$$\ddot{y}^i = g(y^i, \dot{y}^i, v^i)$$

and the quadratic cost

$$J_C = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n-1} (y^i(T) - y^j(T))^2 \rightarrow \min.$$

References

1. *Denbow C.H.* A generalized form of the problem of Bolza // Contributions to the calculus of variations, 1933–1937. Chicago: Univ. Chicago Press, 1937. P. 449–484.
2. *Warga J.* The reduction of certain control problems to an “ordinary differential” type // SIAM Rev. 1968. V. 10, No. 2. P. 219–222.
3. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints // Comput. Math. Model. 2011. V. 22, No. 2. P. 180–215.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ (INTEGRABLE VARIABLE DISSIPATION DYNAMICAL SYSTEMS)

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n -мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе

на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1].

В качестве класса изучаемых динамических систем рассмотрим следующую систему с гладкой правой частью с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = -z_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_n = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \dots \\ \quad \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ \dot{z}_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \dots \\ \quad \dots - \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{z}_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \dots \\ \quad \dots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots s(\beta_{n-4})z_2z_3 - \\ \quad - \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ \dot{z}_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} - \\ \quad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \dots \\ \quad \dots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3})z_1z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_{n-1}f(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \quad \dots \\ \dots, \quad \dot{\beta}_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \end{array} \right. \quad (1)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots \\ \quad \dots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0, \quad W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha). \end{array} \right.$$

Параллельно выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства (см. также [1–3]).

Пусть справедливы равенства

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \dots \equiv \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots = \Gamma_n(\alpha), \quad (2)$$

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (3)$$

После замены переменных

$$\begin{aligned} w_n &= z_n, & w_{n-1} &= \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, & w_{n-2} &= \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} &= \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, & \dots, & & w_1 &= \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}}, \end{aligned}$$

система (1) распадается:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), & \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2, \\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] w_{n-1}w_n, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \pm w_{n-1} \sqrt{1 + w_s^2} f(\alpha) \dots [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot{\beta}_s = \pm \frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_s^2}} f(\alpha) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_{n-2}^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (6)$$

где в системе (5) многоточием показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \dots$, зависящая от соответствующего угла β_s . Для полной интегрируемости системы (4)–(6) достаточно указать два независимых интеграла системы (4), по одному — для систем (5) (меняя независимые переменные; их количество равно $n-2$) и интеграл, “привязывающий” уравнение (6) (т.е. всего $n+1$ интегралов).

Теорема. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (1) при выполнении условий (2), (3) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Так, при $\kappa = -1$ интегралы следующие:

$$\Theta_1(w; \alpha) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1,$$

$$\Theta_2(w; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2,$$

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2}, \quad s = 1, \dots, n-2,$$

$$\Theta_{n+1}(w; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1}.$$

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является или собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид

трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости систем со знакопеременной диссипацией в явном виде (см. также [4, 5]).

Список литературы

1. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2015. Т. 464, №6. С. 688–692.
2. Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2016. Т. 470, №3. С. 288–292.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471, №5. С. 547–551.
4. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474, №2. С. 177–181.
5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475, №5. С. 519–523.

STRUCTURALLY STABLE PROPERTIES OF CONTROL SYSTEMS

Shiva Shankar

Chennai Mathematical Institute, Chennai (Madras), India

sshankar@cmi.ac.in

We study properties of control systems that are stable with respect to perturbations. These ideas go back to the notion of structural stability of autonomous systems due to Andronov and Pontryagin. In contrast, control systems usually admit inputs, and are therefore non-autonomous.

We study linear systems defined by partial differential or difference equations. These are systems defined over the ring $A = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ of partial differential operators, or the ring $B = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n, \sigma_n^{-1}]$ of Laurent polynomials, respectively. More precisely:

(i) Let $P \subset A^k$ be an A -submodule, and suppose it is generated by $p_1, \dots, p_\ell$. Let $p_i = (p_{i1}(\partial), \dots, p_{ik}(\partial))$, and let $P(\partial)$ be the $\ell \times k$ matrix whose rows are the p_i . Let $\mathcal{C}^\infty$ be the space of smooth functions on $\mathbb{R}^n$. Then

$$P(\partial): (\mathcal{C}^\infty)^k \rightarrow (\mathcal{C}^\infty)^\ell, \quad f \mapsto P(\partial)f \quad (1)$$

is an A -module map. The *distributed system* $\mathcal{B}(P)$ defined by P is the kernel $\{f \mid P(\partial)f = 0\}$ of the above map (it does not depend on the choice of generators for P which defined the matrix $P(\partial)$; indeed, $\mathcal{B}(P) \simeq \text{Hom}_A(A^k/P, \mathcal{C}^\infty)$).

Remark. More generally, we can replace $\mathcal{C}^\infty$ by any A -submodule $\mathcal{F}$ of the space $\mathcal{D}'$ of distributions on $\mathbb{R}^n$, and study the system $\text{Hom}_A(A^k/P, \mathcal{F})$. Examples include the spaces $\mathcal{S}'$ of tempered distributions, $\mathcal{S}$ of rapidly decreasing functions, the inverse limit $\tilde{\mathcal{H}}$ of the Sobolev spaces, etc. The answers to the questions we address

depend on the choice of $\mathcal{F}$ (see, for instance, [5]). We confine ourselves here to the space $\mathcal{C}^\infty$, and the classical result of Malgrange and Palamodov that it is an injective, cogenerating A -module is of crucial importance [3].

(ii) Let $\mathbb{Z}^n$ be the integer lattice, and let $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}^n}$ be the set of all functions $w: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. The term $\sigma_i \in B$ acts on w by shift:

$$\sigma_i(w)(m_1, \dots, m_n) = w(m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_n).$$

Composition then defines the action of a monomial, and by linearity extends to an action of B on $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}^n}$. The n -D system $\mathcal{B}(P)$ defined by a submodule $P \subset B^k$ is the kernel of

$$P(\sigma, \sigma^{-1}): (\mathbb{C}^k)^{\mathbb{Z}^n} \rightarrow (\mathbb{C}^\ell)^{\mathbb{Z}^n} \quad (2)$$

where the ℓ rows of the matrix $P(\sigma, \sigma^{-1})$ generate P . Again, we have $\mathcal{B}(P) \simeq \text{Hom}_B(B^k/P, (\mathbb{C})^{\mathbb{Z}^n})$. Here it is elementary that $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}^n}$ is an injective cogenerating B -module.

We interpret the above formulation: let R denote either the ring A or B , and $\mathcal{F}$ denote $\mathcal{C}^\infty$ or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$. A system is described by some k ($\mathbb{C}$ -valued) attributes at various points of $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{Z}^n$, each such description is an *evolution* of the system. A priori, perhaps the system could evolve according to any $f \in \mathcal{F}^k$, but the laws governing the system restrict the possible evolutions f to a subset of $\mathcal{F}^k$. Here the set of laws governing the system is a submodule P of R^k , and to say that f must satisfy these laws is to say that it lies in the kernel of equation (1) or (2) above.

Example 1. State space systems: the state $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ of the system evolves according to $\frac{d}{dt}x = Xx + Uu$, where $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ is the input, X and U are $\ell \times \ell$ and $\ell \times m$ matrices with entries in $\mathbb{R}$. The possible evolutions $f = (x, u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\ell+m}$ that can occur are the kernel of

$$\left(\frac{d}{dt}I_{\ell \times \ell} - X, -U \right): (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))^{\ell+m} \rightarrow (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))^\ell.$$

We wish to study perturbations of such systems; hence we need to topologise the set of all systems. In the context of (i), we need to topologise the set of all submodules $P \subset A^k$, and towards this, we need to first topologise the set $\mathcal{M}_k$ of all matrices with k columns and entries from the ring A . We consider *structured* perturbations; here it means that we consider matrices with a fixed number ℓ of rows. Denote this subset by $\mathcal{M}_{\ell,k}$.

Let $\mathcal{M}_{\ell,k}(d)$ be the subset of those matrices in $\mathcal{M}_{\ell,k}$ whose entries are all bounded in degree by d . There are $\binom{n+d}{n}$ monomials of degree at most d in n indeterminates; hence we identify $\mathcal{M}_{\ell,k}(d)$ with the $\mathbb{C}$ -affine space of dimension $\ell k \binom{n+d}{n}$ with the Zariski topology. For $d_1 < d_2$, $\mathcal{M}_{\ell,k}(d_1) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\ell,k}(d_2)$ as a Zariski closed subspace, and as d tends to infinity, the direct limit $\mathcal{M}_{\ell,k}$ is equipped with the direct limit topology. A similar construction equips the set of all $\ell \times k$ matrices with entries from the Laurent polynomial ring B with the Zariski topology. These topologies descend to submodules of A^k and B^k , and hence to distributed and n -D systems, respectively (details appear in [6, 7]).

We can now ask if a certain property of a distributed or n -D system is *generic* with respect to the above topology. In other words, we ask if the property holds for an open dense set of systems.

In this talk, I ask whether the property of being *controllable* is generic for distributed systems [6]. The question whether the *degree of autonomy* of an n -D system is generic is answered in [7].

Definition 1 [8]. The distributed system $\mathcal{B}(P)$ defined by a submodule $P \subset A^k$ is controllable if for any two subsets U_1 and U_2 of $\mathbb{R}^n$ whose closures do not intersect, and any two elements f_1 and f_2 of $\mathcal{B}(P)$, there is an element f in $\mathcal{B}(P)$ such that $f = f_1$ on some neighbourhood of U_1 and $f = f_2$ on some neighbourhood of U_2 .

This definition generalizes the definition of a controllable state space system (Example 1) introduced by Kalman [1] in 1960, here in Moscow!

Theorem 1 [4]. *The distributed system $\mathcal{B}(P)$ is controllable if and only if A^k/P is torsion free.*

Definition 2. The distributed system $\mathcal{B}(P)$ is *strictly underdetermined* if the submodule $P \subset A^k$ can be generated by fewer than k elements (i.e., $\ell < k$ in the notation of (i)). Otherwise, it is *overdetermined*.

Theorem 2 [6]. *A generic strictly underdetermined system is controllable, for this set of systems contains a Zariski open set. Conversely, a generic overdetermined system is uncontrollable.*

This follows from the following characterisation of controllability:

Theorem 3 [6]. *Let P be a submodule of A^k , and let $P(\partial)$ be any $\ell \times k$ matrix whose ℓ rows generate P . Suppose the ideal $\mathfrak{i}_\ell$ of $\ell \times \ell$ minors of $P(\partial)$ is nonzero (so that $\ell \leq k$). Then the system $\mathcal{B}(P)$ is controllable if and only if the codimension of the variety of $\mathfrak{i}_\ell$ is greater than or equal to 2.*

The paper [7] considers the important notion of the degree of autonomy of an n -D system, and shows that this degree is a generic property with respect to the Zariski topology. To prove this, it is first shown that while it is difficult to calculate the dimension of the variety of a specific ideal of the ring A , generically a variety is a complete intersection.

References

1. Kalman R.E. On the general theory of control systems // Proc. 1st World Congr. Int. Fed. Autom. Control, Moscow, 1960. P. 481–493.
2. Oberst U. Multidimensional constant linear systems // Acta Appl. Math. 1990. V. 20. P. 1–175.
3. Palamodov V.P. A remark on exponential representation of solutions of differential equations with constant coefficients // Math. USSR Sb. 1968. V. 5. P. 401–416.
4. Pillai H., Shankar S. A behavioural approach to control of distributed systems // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 37. P. 388–408.
5. Shankar S. On the dual of a flat module in TOP // Linear Algebra Appl. 2010. V. 433. P. 1077–1081.
6. Shankar S. The Hautus test and genericity results for controllable and uncontrollable behaviors // SIAM J. Control Optim. 2014. V. 52. P. 32–51.
7. Shankar S., Rocha P. The generic degree of autonomy // SIAM J. Appl. Algebra Geom. 2018. V. 2. P. 410–427.
8. Willems J.C. The behavioral approach to open and interconnected systems // IEEE Control Syst. Mag. 2007. V. 27. P. 46–99.

M. B. Skopenkov

NRU Higher School of Economics, Moscow, Russia
Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia

mikhail.skopenkov@gmail.com

A basis for numerical analysis is discretization, that is, approximation of differential equations by difference ones. Discretizations exhibiting exact (not just approximate) conservation laws have been proved to be most successful for computational purposes.

Usually conservation laws are obtained from symmetries using the Noether theorem of 1918. In particular, conservation of energy is obtained from the translational symmetry, which is necessarily broken during discretization. There was a folklore belief that no conserved discrete energy–momentum tensor exists; e.g., in 2016 D. Chelkak, A. Glazman, and S. Smirnov introduced a “halfway” conserved tensor. But we construct an exactly conserved discrete energy–momentum tensor, approximating the continuum one at least for free fields.

Most part of the talk is elementary. No knowledge of physics is required.

References

1. Chelkak D., Glazman A., Smirnov S. Discrete stress-energy tensor in the loop $O(n)$ model, arXiv:1604.06339 [math-ph].
2. Kraus M., Maj O. Variational integrators for nonvariational partial differential equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. V. 310. P. 37–71.
3. Mansfield E., Pryer T. Noether-type discrete conserved quantities arising from a finite element approximation of a variational problem // *J. Found. Comput. Math.* 2017. V. 17, N 3. P. 729–762.
4. Suzuki H. Energy-momentum tensor on the lattice: recent developments, arXiv:1612.00210 [hep-lat].

*This research was prepared within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University “Higher School of Economics” (HSE) in 2018–2019 (grant no. 18-01-0023) and within the Russian Academic Excellence Project “5-100”.

ON APPLICATIONS OF HAMILTON–JACOBI EQUATIONS
AND OPTIMAL CONTROL THEORY TO PROBLEMS
OF CHEMOTHERAPY OF MALIGNANT TUMORS

N. N. Subbotina^{a,b}, N. G. Novoselova^{a,b}

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS,
Yekaterinburg, Russia*

^b*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*
subb@uran.ru, n.g.novoselova@gmail.com

The following model of chemotherapy of a malignant tumor [1] is considered:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h), & m(t_0) = m_0, \quad \gamma = \text{const} > 0, \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \quad \alpha = \text{const} > 0, \end{cases} \quad (1)$$

where m is the quantity of malignant cells, h is the quantity of drug, and $u(t)$ is a restricted control:

$$0 \leq u(t) \leq Q, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

It is assumed that the tumor is growing according to the generalised logistic law

$$g(m) = rm \left[1 - \left(\frac{m}{\theta} \right)^\beta \right], \quad r, \theta, \beta = \text{const} > 0, \quad (3)$$

and the non-monotone therapy function $f(h)$ describing the influence of drug on the tumor has the following properties:

- A1. The function $f(h)$ is continuously differentiable and positive on the interval $[0, L]$. It has two maximum points $\hat{h}_1$ and $\hat{h}_3$ and one minimum point $\hat{h}_2$ inside this interval,

$$0 < \hat{h}_1 < \hat{h}_2 < \hat{h}_3 \leq L.$$

Outside the interval $[0, L]$ this function $f(h)$ is equal to zero.

- A2. If $h < \hat{h}_1$ then $f'(h) > 0$, and if $h > \hat{h}_3$ then $f'(h) < 0$.

- A3. $0 < \alpha \hat{h}_i < Q$, $i = 1, 2, 3$.

- A4. $f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3)$.

The goal of the therapy problem is to minimize the quantity of malignant cells at the given final instant T , namely, to minimize the terminal cost function $\sigma(m(T)) = m^2(T, t_0, m_0, h_0; u(\cdot))$. Here

$$t_0 \in [0, T], \quad m_0 = m(t_0), \quad h(t_0) = h_0,$$

and $u(\cdot): [t_0, T] \mapsto [0, Q]$ is an admissible control, i.e., a piecewise constant function. We denote the set of all admissible controls by U . By $m(t) = m(t; t_0, m_0, h_0, u(\cdot))$, $t \in [t_0, T]$, and $h(t) = h(t, t_0, h_0, u(\cdot))$, $t \in [t_0, T]$, we mean the solutions of system (1) with the initial conditions (t_0, m_0, h_0) , generated under the influence of an admissible control $u(t) \in U$.

It is proved that the following formula is valid:

$$\begin{aligned}\sigma(m(T)) &= m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \\ &= \frac{\theta^2 m_0^2 \exp\{2 \int_{t_0}^T [r - \gamma f(h(\tau))] d\tau\}}{(\theta^2 + \beta m_0^\beta r \int_{t_0}^\tau \exp\{\beta \int_\tau^T [r - \gamma f(h(y))] dy\} d\tau)^{2/\beta}}.\end{aligned}\quad (4)$$

A construction of an upper estimate for the value function $\text{Val}(t, h, m)$ in the problem of optimal control (optimal therapy) of the nonlinear system (1)–(3) with piecewise monotone dynamics is suggested,

$$\text{Val}(t_0, m_0, h_0) = \inf_{u(\cdot) \in U} m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)). \quad (5)$$

A continuous function $\varphi(t, h)$ is constructed by gluing together a finite number of smooth functions obtained with the help of the Cauchy characteristics method for the corresponding linear Hamilton–Jacobi equations [2, 3]. It is proved that the constructed function $\varphi(t, h)$ coincides with the minimax (viscosity) solution $V(t, h)$ [4] of the following Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial V}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} u \frac{\partial V}{\partial h} = 0, \\ V(T, h) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

The function $\varphi(t, h)$ provides an upper estimate for the value function $\text{Val}(t, h, m)$ in the problem of optimal therapy. A feedback on the base of the constructed upper estimate [2] guarantees the upper estimation for any initial state.

References

1. *Bratus A.S., Chumerina E.S.* Optimal control in therapy of solid tumor growth // Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48, No. 6. P. 892–911.
2. *Subbotina N.N., Novoselova N.G.* Optimal result in a control problem with piecewise monotone dynamics // Proc. Inst. Math. Mech. 2017. V. 23, No. 4. P. 265–280.
3. *Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Yekaterinburg: RIO UrO RAN, 2013.
4. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ
ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ
(REGULARIZATION OF CLASSICAL OPTIMALITY CONDITIONS
IN OPTIMAL CONTROL)

М. И. Сумин (M. I. Sumin)

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия*

m.sumin@mail.ru

Когда мы ведем речь об условиях оптимальности в задачах на условный экстремум, представляется естественным учитывать следующие два важных обстоятельства. Первое из них проявляется в характерном свойстве классических условий оптимальности (КУО), заключающемся в их неустойчивости и состоящем в том, что сколь угодно малым возмущениям исходных данных оптимизационной задачи могут отвечать сколь угодно большие возмущения выделяемых этими условиями элементов [1, 2]. Прежде всего это является следствием неустойчивости самих оптимизационных задач, различные содержательные примеры которой можно найти, например, в [3]. В свою очередь, второе обстоятельство связано с возможной невыполнимостью КУО в разрешимых задачах условной оптимизации с бесконечномерными ограничениями (т.е. с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами), различные примеры которой хорошо известны и могут быть найдены, в частности, в [1, 2, 4]. Указанные обстоятельства в полной мере характерны для задач оптимального управления. Задачи оптимального управления, в которых имеет место неустойчивость классических принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП), в большом числе возникают в различных естественнонаучных приложениях. К таким задачам следует прежде всего отнести задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. К задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями-равенствами, по сути дела, относятся самые разнообразные обратные задачи естествознания, без умения эффективно решать которые трудно представить современные научные исследования. Тем самым неустойчивость КУО не позволяет непосредственно использовать их для решения большого класса актуальных естественнонаучных задач, в которых погрешности исходных данных жестко увязываются с физической сутью их постановок. Следующий простой, но содержательный пример характеризует сказанное выше.

Пример. Рассмотрим задачу оптимального управления с поточечным фазовым ограничением типа равенства, представляющую собой, по сути дела, простейшую обратную задачу

$$\|u\|^2 \rightarrow \min, \quad x[u] = p, \quad \dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad u \in D, \quad (P_p)$$

где $D \in L_2(0, 1)$ — выпуклое замкнутое множество, $p \in L_2(0, 1)$ — параметр. Рассмотрим два варианта задачи (P_p) .

Вариант 1. Положим $p = 0$, $D \equiv \{u \in L_2(0, 1): u(t) \in [-1, 1] \text{ при п.в. } t \in (0, 1)\}$. В этом случае решением задачи является $u_0(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Как показано в [2,

пример 0.4], это оптимальное управление удовлетворяет при $p = 0$ регулярному ПЛ (так как выпуклая функция значений задачи как функция p субдифференцируема при $p = 0$)

$$L_p(u_0, \lambda) \leq L_p(u, \lambda) \quad \forall u \in D, \quad L_p(u, \lambda) \equiv \|u\|^2 + \langle \lambda, Au - p \rangle, \quad u \in D,$$

где $A[u](t) \equiv x[u](t) \equiv \int_0^t u(s) ds$, эквивалентному регулярному ПМП

$$(2u_0(t) + \eta(t))(v - u^0(t)) \geq 0 \quad \forall v \in [-1, 1] \text{ п.в. на } [0, 1], \quad \dot{\eta} = \lambda(t), \quad \eta(1) = 0.$$

В то же время, как показано там же [2, пример 0.4], существуют такие $p^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для которых в аппроксимирующих задачах при $p = p^k$ справедливы утверждения регулярных ПЛ и ПМП, аналогичных сформулированным выше для задачи (P_0) , но одновременно оптимальные “аппроксимирующие” управления не сходятся к решению невозмущенной задачи (P_0) ни по аргументу, ни по функции.

Вариант 2. Положим $D \equiv L_2(0, 1)$. Так как операторы $A: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$, $A^*: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ являются линейными ограниченными и инъективными, то с учетом равенства $(A^*)^* = A$ имеют место равенства $\overline{R(A)} = L_2(0, 1)$, $\overline{R(A^*)} = L_2(0, 1)$, т.е. исходное и сопряженное уравнения плотно разрешимы, но $R(A) \neq L_2(0, 1)$, $R(A^*) \neq L_2(0, 1)$. Пусть $\bar{u} \in L_2(0, 1) \setminus R(A^*)$ — произвольный элемент. Тогда ПЛ в задаче $(P_{x[\bar{u}]})$ при $p = x[\bar{u}]$ не выполняется. Предположим, что это не так. Тогда существует невырожденная пара множителей $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}_+^1 \times L_2(0, 1)$ такая, что $2\lambda_0\bar{u} + A^*\lambda = 0$. В этом случае при $\lambda_0 = 0$ получаем $\lambda = 0$ в силу инъективности A^* , а при $\lambda_0 = 1$ соответственно противоречивое равенство $\bar{u} = -A^*\lambda/2$, что и доказывает невыполнимость ПЛ.

Итак, можно утверждать, что ни ПЛ, ни ПМП в их привычных классических формах не могут быть непосредственными инструментами для решения задачи (P_p) , равно как и для решения многих других существенно более сложных аналогичных обратных задач, задач оптимального управления. Это порождает мотивацию к их такой естественной “корректировке”, которая приводит к следующим двум “ожидаемым” свойствам:

- 1) “скорректированные” условия должны быть устойчивы к возмущениям исходных данных оптимизационной задачи;
- 2) они должны быть структурно устроены так же, как их классические аналоги.

Очевидно, что исправление данных природой “недостатков” классических ПЛ и ПМП должно быть связано с применением теории регуляризации.

В докладе обсуждается, как применение методов двойственной регуляризации [1, 2, 5, 6] и одновременный переход к понятию минимизирующей последовательности допустимых элементов (как основному в оптимизационной теории) открывают возможность такой естественной трансформации КУО, которая приводит к их секвенциальным обобщениям в терминах классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина. Указанные обобщения

- 1) обладают устойчивостью по отношению к ошибкам исходных данных задач;
- 2) полностью сохраняют общую структуру своих классических аналогов;
- 3) приводят к классическим КУО “в пределе”.

Такие трансформированные ПЛ и ПМП мы называем устойчивыми секвенциальными или, другими словами, регуляризованными ПЛ и ПМП [6–10]. Тем самым трансформирование КУО в утверждения секвенциального характера, являющиеся одновременно устойчивыми к ошибкам исходных данных регуляризующими алгоритмами решения задач, позволяет принципиально расширить сферу действия оптимизационной теории, основанной на привычных конструкциях функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина.

Список литературы

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
2. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х книгах. М.: МЦНМО, 2011.
4. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
5. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
6. *Сумин М.И.* Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, № 12. С. 2083–2102.
7. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. I: Оптимизация сосредоточенной системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 4. С. 474–486.
8. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. II: Оптимизация распределенной системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 1. С. 26–41.
9. *Кутерин Ф.А., Сумин М.И.* Устойчивый итерационный принцип Лагранжа в выпуклом программировании как инструмент для решения неустойчивых задач // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57, № 1. С. 55–68.
10. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57, № 2. С. 187–209.

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ (VOLTERRA FUNCTIONAL EQUATIONS AND OPTIMIZATION OF DISTRIBUTED SYSTEMS)

В. И. Сумин (V. I. Sumin)

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Ниžний Новгород, Россия*

v_sumin@mail.ru

В [1] было предложено описание *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) в виде *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ)

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi), \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ и $f(\cdot, \cdot, \cdot): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$ — управление; $A: L_p^m \rightarrow L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$ (это непосредственное многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра); $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФУ (1) с достаточно богатыми системами T обращением главной части приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.; см. [2–7]); как правило, управление $v(\cdot)$ в (1) соответствует распределенному управлению в УНКЗ, а, например, наличие управляемых старших коэффициентов УНКЗ означает, что управляемым будет и оператор A . Переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам теории оптимального управления распределенными системами. Как эквиваленты УНКЗ в теории оптимизации бывают удобны и другие ВФУ (см. [7]). В докладе дается обзор полученных методом ВФУ результатов теории оптимизации распределенных систем. Коротко остановимся на некоторых из этих результатов.

При выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО), при обосновании численных методов решения задач оптимального управления и во многих других случаях возникает вопрос о достаточных условиях *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) УНКЗ. Если для сосредоточенных управляемых систем теория таких достаточных условий довольно хорошо проработана, то для распределенных систем это не так (история вопроса кратко описана в [5]). Поэтому в [2, 3, 8, 10] была представлена общая схема получения конструктивных достаточных условий УСГР УНКЗ, основанная на приведении УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1); разнообразные конкретные примеры применения схемы см., например, в [2–6]. Распространение теории УСГР, использующей переформулировку УНКЗ в виде (1), с изначально рассматривавшегося случая $p = q = k = \infty$ (см. [1–3, 5, 7]) на охватывающий существенно более широкий круг УНКЗ общий случай $1 \leq p, q, k \leq \infty$ (см. [4–6, 8, 10]) потребовало введения [8] и подробного изучения [8, 10] нового понятия “равностепенной квазинильпотентности семейства операторов”.

В [2] с помощью теорем УСГР [1] для широкого класса оптимизационных задач с ограниченным множеством допустимых значений управления было дано обоснование применению градиентных методов при произвольных порядках роста каратеодориевских “правых частей” УНКЗ по “фазовым” и управляющим переменным (как известно, часто применяемое дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа L_2 требует, вообще говоря, линейных порядков роста).

При выводе НУО переход от УНКЗ к ВФУ (1) бывает удобен уже потому, что дифференциальные операторы УНКЗ, действующие в пространствах типа W_p^l , заменяются на операторы, действующие в более удобных для построения “сопряженной задачи” данного НУО лебеговых пространствах. При этом сопряженная задача также имеет вид ВФУ, но не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме, подобной форме первоначальной УНКЗ (см. [13]).

Ж.-Л. Лионсом [9] предложено УНКЗ называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли единственное глобальное решение данной УНКЗ. В этом случае для вывода НУО в [9] предлагается переходить от классического случая “управление $\rightarrow$ состояние” к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар “управление, состояние” и ограничение в виде управляемого уравнения “снимать” методом адаптированного штрафа. Вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в [9, гл. 1, 2]). В [4] показано, что ряд УНКЗ, рассматриваемых в [9] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО придерживаться классической схемы, используя ВФУ (1) и теоремы УСГР; так, в [4] удалось решить ряд поставленных в [9] задач получения “сингулярных НУО”.

В [11–13] показано, что для задач оптимизации систем (1) достаточно характерно “сильное вырождение” так называемых *особых управлений* (ОУ), когда вместе с вырождением НУО первого порядка (например, поточечного принципа максимума — НУО первого порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и НУО второго порядка. Описан компактный способ вывода НУО таких ОУ, использующий тензорные произведения лебеговых пространств и позволивший с единых позиций взглянуть на известные НУО ОУ для сосредоточенных и распределенных задач, получить ряд новых НУО ОУ для распределенных задач.

Выше кратко перечислены некоторые полученные автором лично и в соавторстве результаты. Ряд интересных результатов по теме (множества глобальной разрешимости УНКЗ, обоснование численных методов распределенной оптимизации, связанные с ВФУ “распределенные” игры и др.) получил в последние годы А.В. Чернов (см., например, обзор [7]).

Список литературы

1. Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.

2. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.
3. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
4. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I, II, III, IV // Вестн. ННГУ. Мат. моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2(21). С. 145–155; 2001. № 1 (23). С. 198–204; 2002. № 1 (25). С. 164–174; 2004. № 1 (27). С. 185–193.
5. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. ННГУ. Математика. 2003. № 1. С. 91–107.
6. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Диф. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 858–870.
7. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: Тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2014). Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, УРФУ, 2015. С. 293–300.
8. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестн. ННГУ. Мат. моделирование и оптимальное управление. 1998. № 2 (19). С. 138–151.
9. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
10. *Сумин В.И.* Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения // Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. и техн. науки. 2010. Т. 15, № 1. С. 453–466.
11. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 2. С. 295–299.
12. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2010. Т. 20, № 3. С. 70–80.
13. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2015. Т. 25, № 4. С. 483–494.

MATRIX RICCATI EQUATION IN THE STABILIZATION PROBLEM OF HAMILTONIAN SYSTEMS

A. M. Tarasyev^{a,b}, A. A. Usova^a

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia*

^b*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*

tam@imm.uran.ru, anastasy.ousova@gmail.com

The work is devoted to the stability analysis of the Hamiltonian systems arising in the optimal control problems related to the growth models. Specifically, we establish conditions guaranteeing the asymptotic stability of the Hamiltonian system in the vicinity of a steady state by solving the matrix Riccati equation of special form.

In the study, we suppose that the growth model is described by the following dynamic equations:

$$\dot{x}(t) = F(x(t))u(t) + G(x(t)) = \Phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the vector of main production factors and the functional matrix $F(x) = \{f_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n,m}$ and the vector function $G(x) = \{g_i(x)\}_{i=1}^n$ consist of twice continuously differentiable functions. The symbol $u = (u_1, \dots, u_m)$ stands for the regulating parameter (*or* control). The quality of the control process is estimated by a functional of the form

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(x(t), u(t)) dt, \quad (2)$$

where $c(x, u)$ is determined by the equality

$$c(t) = \prod_{i=1}^m (1 - u_i(t) - w_i(x(t))) f(x(t)). \quad (3)$$

Here $f(x)$ and $w_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) are twice continuously differentiable functions. In the economic growth models, the function $f(x)$ is called the *production function*. Due to the structure of the quality functional (2), we impose an additional restriction of the controls u_i in (3), specifically

$$0 < \sum_{i=1}^m u_i(t) < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{u}_i \in (0, 1): \quad u_i(t) \in [0, \bar{u}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

In the growth models, these restrictions follow from the closedness assumption for the designed system. Based on the introduced dynamics (1) and the quality functional (2), one can formulate the following control problem.

Problem [P]. The problem is to construct a control process $(x^0(t), u^0(t))$ that maximizes the quality functional (2) along the trajectories of system (1) under the control restriction (4).

The problem is investigated within the framework of the Pontryagin maximum principle extended to control problems with infinite time horizon (see [4, 1]).

The stationary Hamiltonian function constructed for the control problem [P] has the form

$$H(\cdot) = \sum_{i=1}^m \ln(1 - u_i - w_i(x)) + \ln f(x) + \psi^T \Phi(x, u), \quad (5)$$

where $\psi \in \mathbb{R}^n$ is a vector of adjoint parameters. Due to the strict concavity of the Hamiltonian function with respect to the control parameters u (see [5]) and the restrictions (4), there exist controls u^0 satisfying constraints (4) that provide maximum to the Hamiltonian function (5):

$$u_j^0(x, \psi) = \begin{cases} 0, & (x, \psi) \in \Delta_j^1, \\ 1 - w_j(x) - \Gamma_j(x, \psi), & (x, \psi) \in \Delta_j^2, \\ \bar{u}_j, & (x, \psi) \in \Delta_j^3, \end{cases} \quad (6)$$

$$\Delta_j^1 = \{(x, \psi): w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \geq 1\}, \quad \Gamma_j(x, \psi) = (\psi^T F_j(x))^{-1},$$

$$\Delta_j^2 = \{(x, \psi): 1 - \bar{u}_j \leq w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \leq 1\},$$

$$\Delta_j^3 = \{(x, \psi): w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \leq 1 - \bar{u}_j\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

As is seen, there exist 3^m domains with different control regimes. Using the properties of the functions generating the maximized Hamiltonian function

$$H_0(x, \psi) = H(x, \psi, u^0), \quad (7)$$

one can verify that the function $H_0(x, \psi)$ is continuous and smooth in the variables x and ψ in all domains corresponding to different control regimes.

The Hamiltonian system is determined as follows:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi}(t) = \rho \psi - \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial x}. \quad (8)$$

Assuming the existence of a steady state $P^* = (x^*, \psi^*)$ of the Hamiltonian system (8) with positive phase coordinates $x^* \in \mathbb{R}_{>0}^n$, we linearize system (8) in the neighborhood O_δ^* of the steady state P^* and obtain the following system:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{\psi}, & \tilde{x}(t) = x(t) - x^*, \\ \dot{\tilde{\psi}} = C\tilde{x} + (\rho \mathbb{E}_n - A^T)\tilde{\psi}, & \tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi^*, \end{cases} \quad (9)$$

using the Jacobi matrix

$$J^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \rho \mathbb{E}_n - A^T \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$A = \frac{\partial^2 H_0(P^*)}{\partial \psi \partial x}, \quad B = \frac{\partial^2 H_0(P^*)}{\partial \psi^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 H_0(P^*)}{\partial x^2}.$$

Regarding the stabilization problem of the linearized dynamics (9), its solution can be reduced to searching a matrix X that connects the phase and conjugate variables $\tilde{\psi} = X\tilde{x}$ in the vicinity O_δ^* and makes the following system asymptotically stable (see [2]):

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BX)\tilde{x}, \quad \tilde{\psi} = X\tilde{x}. \quad (11)$$

In order to prove the existence of a matrix X , we introduce an auxiliary linear system

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \left(A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right)\xi + Bz, & \xi = \tilde{x} e^{-(\rho/2)t}, \\ \dot{z} = C\xi - \left(A^T - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right)z, & z = \tilde{\psi} e^{-(\rho/2)t}, \end{cases} \quad (12)$$

and suppose that the eigenvalues of the Jacobi matrix M of system (12) satisfy the condition

$$|\operatorname{Re}(\lambda(M))| > \frac{\rho}{2}, \quad \text{where} \quad M = \begin{pmatrix} A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n & B \\ C & \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n - A^T \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Finally, the existence of a matrix X is established in the theorem.

Theorem. *A matrix X stabilizing the dynamics (9) does exist and can be found as a solution of the following matrix Riccati equation:*

$$C - X\left(A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right) + \left(\frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n - A^T\right)X - XBX = 0. \quad (14)$$

Moreover, system (11) is asymptotically stable for any initial state x_0^* such that $(x_0^*, \psi^* + X(x_0^* - x^*)) \in O_\delta$ if condition (13) holds.

Proof. A solution of the Riccati equation (14) is constructed by the eigenvectors of the matrix M , which is a Hamiltonian matrix whose spectrum is symmetric with respect to the imaginary axis [3]. Due to condition (13), the matrix M does not have pure imaginary eigenvalues. As is well known, this ensures the existence of a matrix X that stabilizes system (12). This implies that $\xi(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. Moreover, condition (13) guarantees the convergence of $\xi(t)e^{\rho t/2}$ to zero as time goes to infinity. Consequently, $\tilde{x}(t) = \xi e^{\rho t/2} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. Thus, the proof is complete. $\square$

The theorem allows one to design a controller $u = u^0(x, \psi(x))$ (see (6)) for $(x, \psi(x)) \in O_\delta^*$ and $\psi(x) = \psi^* + X(x - x^*)$ that ensures the asymptotic stability of the Hamiltonian system (8) in the vicinity of the steady state.

References

1. Aseev S., Kryazhimskiy A. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. V. 257.
2. Ledyayev Yu. On analytical solutions of matrix Riccati equations. // Proc. Steklov Inst. Math. 2011. V. 273. P. 214–228.
3. Paige C., Loan C.V. A Schur decomposition for Hamiltonian matrices. // Linear Algebra Appl. 1981. V. 41. P. 11–32.
4. Pontryagin L. et al. The mathematical theory of optimal processes. New York: Interscience, 1962.
5. Tarashev A., Usova A. Structure of the Jacobian in economic growth models // Proc. 16th IFAC Workshop CAO 2015, Germany. Elsevier, 2015. P. 191–196.

ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА (ON GENERAL PRINCIPLES OF EXTREMUM THEORY)

В. М. Тихомиров (V. M. Tikhomirov)

*Механико-математический факультет, Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

vmtikh@gmail.com

В докладе будет рассказано о некоторых темах, обсуждавшихся на семинаре докладчика по теории экстремума. Руководящими целями семинара всегда были базовые принципы теории экстремума. Они освещены в книгах [1–3]. В докладе будет сделана попытка взглянуть на всю проблематику с современной точки зрения и обозреть результаты, о которых шла речь на семинаре в последние несколько лет.

Список литературы

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979; 3-е изд. М.: Физматлит, 2007.
3. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003.

SUPERSTABLE SEMIGROUPS IN NONLOCAL PROBLEMS FOR EVOLUTION EQUATIONS*

I. V. Tikhonov, Vu Nguyen Son Tung

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia

ivtikh@mail.ru, vnsontung@mail.ru

Let E be a Banach space with the norm $\|\cdot\|$. We consider the problem of finding an unknown function $u: [0, +\infty) \rightarrow E$ from the relations

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^{+\infty} \eta(t)u(t) dt = u_1. \quad (1)$$

Here A is a closed linear operator with the domain $D(A)$ dense in E . Suppose that A generates a semigroup $U(t)$ of class C_0 (see [1]). For the chosen weight function $\eta(t)$, the integral of $|\eta(t)| \cdot \|U(t)\|$ over the interval $[0, +\infty)$ must be finite. Problem (1) for the given element $u_1 \in E$ is called a *nonlocal problem*.

We call the vector function $u(t) = U(t)u_0$ a *generalized solution* of the nonlocal problem (1), where the element $u_0 \in E$ is found so that the integral of (1) gives the true identity. In this case, if $u_0 \in D(A)$, then the solution $u(t) = U(t)u_0$ is called

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00236).

classical. For problems of this kind, see [2]. Recently it was found that the nonlocal problem (1) admits a full study under two special assumptions.

Assumption 1. The semigroup $U(t)$ is *superstable* in the space E ; i.e., it has infinite negative exponential type $\omega_0 = -\infty$ (see [3, 4]).

Assumption 2. The function $\eta(t)$ belongs to $BV[0, \tau]$ for each $\tau > 0$, and the estimate $\text{Var} \{\eta(t)\}|_0^\tau \leq C e^{\gamma\tau}$ is satisfied for some constants $C \geq 0$ and $\gamma \geq 0$. We also require the value $\beta \equiv \eta(0+0)$ to be nonzero.

Under the above assumptions, the nonlocal problem (1) reduces to the operator equation $\beta u_0 - Bu_0 = -Au_1$ with respect to the unknown initial state $u_0 \equiv u(0)$. The operator

$$B = - \int_0^{+\infty} U(t) d\eta(t) \quad (2)$$

turns out to be quasinilpotent. This gives the following result.

Theorem. *Suppose that Assumptions 1 and 2 are satisfied. Then for each element $u_1 \in D(A)$ the nonlocal problem (1) has a unique generalized solution $u(t) = U(t)u_0$ with the initial state*

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k (-Au_1) \in E. \quad (3)$$

If $u_1 \in D(A^2)$, then $u_0 \in D(A)$ and the solution $u(t) = U(t)u_0$ is classical. If $u_1 \in E \setminus D(A)$, then problem (1) is not solvable.

Assumption 1 on the superstability of the semigroup $U(t)$ plays the main role. It guarantees the quasinilpotency of the operator (2) and the good convergence of the Neumann series (3).

The formulated theorem admits a number of additions and corollaries. The above abstract scheme is of interest to nonlocal problems connected with the transport equation. One of the possible examples is in [5], where the Neumann series (3) turns into a finite sum.

References

1. Krein S.G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967.
2. Tikhonov I.V. Solvability of a problem with a nonlocal integral condition for a differential equation in a Banach space // Diff. Eqns. 1998. V. 34, No. 6. P. 841–843.
3. Balakrishnan A.V. On superstability of semigroups // Systems modelling and optimization: Proc. 18th IFIP Conf. Chapman and Hall, 1999. P. 12–19. (CRC Res. Notes Math.).
4. Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. The solvability of the inverse problem for the evolution equation with a superstable semigroup // RUDN J. Math. Inf. Sci. Phys. 2018. V. 26, No. 2. P. 103–118.
5. Tikhonov I.V., Vu Nguyen Son Tung. Formulas for an explicit solution of the model nonlocal problem associated with the ordinary transport equation // Yakutian Math. J. 2017. V. 24, No. 1. P. 57–73.

ON A QUANTUM HEAVY PARTICLE

D. V. Treschev

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

`treschev@mi-ras.ru`

We consider the Schrödinger equation for a particle on a flat n -torus in a bounded potential, depending on time. The mass of the particle equals $1/\mu^2$, where μ is a small parameter. We show that the Sobolev H^ν -norms, $\nu \geq 1$, of the wave function grow approximately as t^ν on the time interval $t \in [0, t_*]$, where t_* is slightly less than $O(1/\mu)$.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ (STARTING CONTROL OPTIMIZATION PROBLEM FOR THE DISTRIBUTION OF HEAT IN THE ROD)*

М. Тухтасинов (M. Tukhtasinov),
Г. М. Абдуалимова (G. M. Abduolimova)

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Ташкент, Узбекистан*

*Андижанский государственный университет им. З. Бабура,
Андижан, Узбекистан*

`mumin51@mail.ru, abduolimova81@inbox.ru`

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Cz, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, C — постоянная квадратная матрица. Далее, пусть даны постоянная матрица B (порядка $r \times n$), число T (> 0) и действительнозначная векторная функция $m(t) = (m_1(t), \dots, m_r(t))'$, $0 \leq t \leq T$ (штрих — знак транспонирования).

Задача стартового управления состоит в следующем. Найти начальный вектор $z^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, чтобы для всех $t \in [0, T]$ имело место равенство

$$Bz(t) = m(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, — решение (1), удовлетворяющее условию $z(0) = z^0$.

Рассмотрим семейство

$$\Sigma = \{Be^{tC}a, 0 \leq t \leq T: a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Задача стартового управления сводится к изучению структуры множества

$$R = \{z^0 \in \mathbb{R}^n: Be^{tC}z^0 = m(t), 0 \leq t \leq T\}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Республики Узбекистан (ОТ Ф-4-33).

Введем в рассмотрение линейный оператор $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$,

$$Fz^0 = Be^{tC}z^0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Заметим, что одноточечность множества R эквивалентна тому, что $\ker F = \{0\}$.

Теорема 1. Для того чтобы $\ker F = \{0\}$, необходимо и достаточно выполнение условия $\text{rank } K = n$, где $K = (B, BC, BC^2, \dots, BC^{n-1})'$ — матрица размерности $np \times n$.

Пусть в системе (1) матрица C трехдиагональная, точнее,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица B содержит в каждой строке только один ненулевой элемент. Если через $i_1, i_2, \dots, i_s$ ($s \leq r$) обозначить номера столбцов матрицы B , которые содержат ненулевой элемент, то имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. Для того чтобы множество R состояло из единственного элемента, необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\text{НОД}(i_1, i_2, \dots, i_s, N+1) = 1.$$

Предложение 2. Множество R состоит из векторов, разность любых двух из которых имеет вид

$$(a_1, \dots, a_{p-1}, 0, -a_{p-1}, \dots, -a_1, \dots, a_{p-1}, 0, \dots),$$

где a_i , $i = 1, \dots, p-1$, — действительные числа.

Следующая оптимизационная задача разрешима:

$$\min \|a\|, \quad a \in R. \quad (2)$$

Теорема 2. Решением задачи (2) является

$$a_{kp-j}^0 = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} i \psi_{(j-1)(q-1)+1} + \sum_{i=k}^{q-1} (-1)^i \psi_{(j-1)(q-1)+1},$$

$$k = 2, 4, \dots, q-1,$$

$$a_{kp+j}^0 = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} i \psi_{(j-1)(q-1)+1} + \sum_{i=k+1}^{q-1} (-1)^i \psi_{(j-1)(q-1)+1},$$

$$k = 0, 2, 4, \dots, q-1,$$

$$a_{kp}^0 = \psi_{(q-1)(p-1)+k}, \quad k = 1, 2, \dots, q-1, \quad j = 1, 2, \dots, p-1,$$

где числа ψ_i , $i = 1, 2, \dots, (q-1)p$, p, q , находятся с помощью функций $m_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, s$, и их производных.

Пример. Система (1) имеет вид [1] $\dot{z}_1 = z_2 + z_3$, $\dot{z}_2 = -\alpha z_2$, $\dot{z}_3 = -\beta z_3$, где $z_i \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $i = 1, 2, 3$; α, β — константы. Пусть $B = (\bar{I}, \bar{0}, \bar{0})$, где $\bar{I}$

и $\tilde{0}$ — единичная и нулевая квадратные матрицы порядка n соответственно. Пусть $e_1(t) = \int_0^t e^{-\alpha s} ds$, $f_1(t) = \int_0^t e^{-\beta s} ds$. Тогда

$$\Sigma = \{Bz(t): Bz(t) = z_{10} + e_1(t)z_{20} + f_1(t)z_{30}\}.$$

Если $m(\cdot) \in \Sigma$, то задача стартового управления, очевидно, разрешима.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ПЛАТОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛА (DIFFERENTIAL GAMES WITH A PAYOFF DEPENDING ON THE MODULUS OF A LINEAR FUNCTION AND AN INTEGRAL)*

**В. И. Ухоботов (V. I. Ukhobotov),
И. В. Измest'ев (I. V. Izmet's'ev)**

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия.

ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{x} = A(t)x + \phi B(t)\xi + \eta, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \leq p. \quad (1)$$

Здесь p — момент окончания игры, а $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные при $t \leq p$ матрицы размерностей $m \times m$ и $m \times n$ соответственно.

Задано число $q > 1$. Пусть задан начальный момент времени t_0 . Допустимым управлением первого игрока являются неотрицательная функция $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольная функция $\xi: [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \rightarrow M$, где множество M связно и симметрично относительно начала координат в $\mathbb{R}^n$. Допустимым управлением второго игрока является произвольная функция $\eta: [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \rightarrow Q$, где $Q \subset \mathbb{R}^m$ — связный компакт.

Плата задается формулой

$$G(|\langle \psi_0, x(p) \rangle - C|) + \int_{t_0}^p \phi^q(r) dr, \quad (2)$$

где $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$, C — заданное число, $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная функция. Первый игрок минимизирует величину (2), а второй игрок ее максимизирует.

Пусть $\psi(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(p) = \psi_0, \quad t_0 \leq t \leq p.$$

Положим

$$a(t) = \max_{\xi \in M} \langle \psi(t), B(t)\xi \rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta \in Q} \langle \psi(t), \eta \rangle, \quad b_-(t) = \min_{\eta \in Q} \langle \psi(t), \eta \rangle.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00264_а).

Тогда $a(t) \geq 0$. Из связности компактов M и Q следует, что

$$\langle \psi(t), B(t)\xi \rangle = -a(t)u, \quad |u| \leq 1, \quad (3)$$

$$\langle \psi(t), \eta \rangle = \frac{1}{2}(b_+(t) + b_-(t)) + b(t)v, \quad |v| \leq 1, \quad b(t) = \frac{1}{2}(b_+(t) - b_-(t)) \geq 0. \quad (4)$$

Введем новую переменную

$$z = \langle \psi(t), x \rangle + \frac{1}{2} \int_t^p (b_+(r) + b_-(r)) dr - C \in \mathbb{R} \quad (5)$$

и рассмотрим одномерную дифференциальную игру

$$\dot{z} = -\phi(t)a(t)u + b(t)v, \quad \phi(t) \geq 0, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \quad (6)$$

с платой

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p \phi^q(r) dr \rightarrow \min_u \max_v. \quad (7)$$

Если $\phi_0(t)$, $u_0(t, z)$, $v_0(t, z)$ — оптимальные управления в игре (6), (7), то оптимальные управления игроков в игре (1), (2) определяются с помощью формул (3)–(5).

Отметим, что движения $x(t)$ в (1) и $z(t)$ в (6) определяются с помощью ломаных [2].

Зафиксируем неотрицательную функцию $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и число $\varepsilon \geq 0$. Рассмотрим игру (6) с условием окончания $|z(p)| \leq \varepsilon$. Для такой игры Л.С. Понтрягин построил [1] альтернированный интеграл $W(t_0)$. Из его вида следует, что $z(t_0) \in W(t_0)$ тогда и только тогда, когда

$$f(\phi(\cdot)) = \max \left(|z(t_0)| + \int_{t_0}^p (b(r) - \phi(r)a(r)) dr; \max_{t_0 \leq t \leq p} \int_t^p (b(r) - \phi(r)a(r)) dr \right) \leq \varepsilon.$$

Предложение. Функция $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной, строго возрастает, и $G(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим задачу

$$G(\varepsilon) + \int_{t_0}^p \phi^q(r) dr \rightarrow \min, \quad f(\phi(\cdot)) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \phi(\cdot) \in L_q[t_0, p], \quad \phi(t) \geq 0. \quad (8)$$

Теорема 1. Решение в задаче (8) существует.

Теорема 2. Пусть ε_* и $\phi_*(t)$ — решение задачи (8). Тогда оптимальными управлениями игроков в игре (6), (7) являются $\phi_0(t) = \phi_*(t)$, $u_0 = v_0 = \text{sign } z$, где в качестве $\text{sign } 0$ можно брать 1 или -1 .

Теорема 3. Пусть ε^* и $\phi^*(t)$ удовлетворяют неравенствам (8). Пусть существуют число $\lambda \geq 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\theta(t)$ такие, что

$$\theta(t_0) = 0; \quad G(\varepsilon^*) - G(\varepsilon) \leq (\lambda + \theta(p))(\varepsilon^* - \varepsilon) \quad \text{при любом } \varepsilon \geq 0,$$

$$\lambda \left(\int_{t_0}^p \theta(r)(b(r) - \phi^*(r)a(r)) dr + |z(t_0)| - \varepsilon^* \right) = 0,$$

$$\int_{t_0}^p \theta(r)(b(r) - \phi^*(r)a(r)) dr = \theta(p)\varepsilon^*; \quad \phi^*(t) = \left(\frac{a(t)}{q}(\lambda + \theta(t)) \right)^{1/(q-1)}. \quad (9)$$

Тогда ε^* и $\phi^*(t)$ являются решением задачи (8).

Теорема 4. Пусть функция $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла. Тогда существует решение ε^* , $\phi^*(t)$ задачи (8), для которого найдутся число $\lambda \geq 0$ и неубывающая функция $\theta: [t_0, p] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям (9).

Пример. К оси ротора электромотора жестко прикреплен один конец стержня так, что стержень может вращаться вместе с ротором вокруг его оси в вертикальной плоскости.

Пусть x_1 — угол поворота стержня. Момент электромагнитных сил, приложенных к ротору со стороны статора, равен $c_1\gamma - c_2\dot{x}_1$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$ (см. [3]). Здесь γ — подаваемое на двигатель напряжение.

Уравнение Лагранжа, которое описывает движение стержня, имеет вид

$$\ddot{x}_1 = -\delta \sin x_1 - k\dot{x}_1 + \beta\gamma, \quad \delta > 0, \quad k > 0, \quad \beta > 0. \quad (10)$$

Целью выбора подаваемого напряжения γ является минимизация значения

$$|x_1(p) - C|f + \int_0^p \gamma^2(t) dt, \quad f > 0, \quad p > 0.$$

Интеграл задает значение расхода энергии.

Следуя [4], возьмем нелинейное слагаемое в уравнении (10) в качестве управления второго игрока $\eta = -\delta \sin x_1$. Положим $x_2 = \dot{x}_1$, $\xi = \text{sign } \gamma$, $\phi = |\gamma|$. Получим игру

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \eta, \quad |\eta| \leq \delta,$$

с критерием качества

$$|x_1(p) - C|f + \int_0^p \phi^2(t) dt \rightarrow \min_{\xi, \phi} \max_{\eta}.$$

С помощью условий (9) найдены оптимальные управления игроков.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Озоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление маятником при помощи маховика // Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 170–195.
4. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 457–472.

HARVESTING A REMOTE RENEWABLE RESOURCE

Thorsten Upmann^{a,b,c}, Stefan Behringer^d

^a*Helmholtz-Institute for Functional Marine Biodiversity
at the University of Oldenburg (HIFMB), Oldenburg, Germany*

^b*Bielefeld University, Faculty of Business Administration and Economics, Germany*

^c*CESifo, München, Germany*

^d*Sciences Po, Department of Economics, Paris, France*

Thorsten.Upmann@hifmb.de, Stefan.Behringer@sciencespo.fr

In standard models of spatial harvesting, the resource is distributed over the complete domain and the agent is able to control the harvesting activity everywhere all the time. Recent work has made modeling of the issue more realistic by assuming that the agent has to move in order to harvest the resource but may be able to harvest continuously while travelling (see, e.g., [3, 4] and [2]). The latter setup has been generalized in [5].

In some cases however, it is more realistic to assume that the resource is located at a single point in space and that the agent is required to move before being able to harvest. In these cases, the agent faces a combined travelling-and-harvesting problem. We scrutinize this type of a two-stage optimal control problem, and investigate the interdependences between the solution of travelling and that of the harvesting subproblem. Since the model is parsimoniously parameterised, we are able to analytically characterise the optimal policy of the complete travelling-and-harvesting problem. In an appendix we show how bounds on either control, i.e., on acceleration and on the harvesting capacity, as well as a positive discount rate affect the solution of the travelling-and-harvesting problem.

Exponential growth. In the paper we look at two different growth processes of the resource, the exponential and the more multifaceted logistic case. In this abstract we focus on the exponential case only.

Suppose that the stock of a renewable resource increases at a constant rate: $g(s(t)) = s(t)$ for all $t \in \Delta \equiv [t_1, T]$. The stock is reduced by the catch $H(t) \equiv s(t)h(t)$, and evolves according to the differential equation

$$\dot{s}(t) = s(t) - h(t)s(t), \quad s(t_1) = s_1, \quad \forall t \in \Delta, \quad h(t) \in \mathcal{H}. \quad (1)$$

Proposition 1. *Let $T < \delta + t_1$ where $\delta \equiv \log(\bar{h})/(\bar{h} - 1)$ and the upper bound on the harvest $\bar{h} \neq 1$. Then the optimal harvesting policy is given by*

$$h(t) = \bar{h}, \quad (2a)$$

$$s(t) = s_1 e^{(1-\bar{h})(t-t_1)}, \quad (2b)$$

$$\pi(t) = \frac{\bar{h}}{\bar{h} - 1} (1 - e^{(1-\bar{h})(T-t)}), \quad (2c)$$

for all $t \in \Delta$, where $\pi(t)$ denotes the costate variable. The resulting maximised profit amounts to

$$J_2^*(s_1, t_1) \equiv s_1 \frac{\bar{h}}{\bar{h} - 1} (1 - e^{(1-\bar{h})(T-t_1)}). \quad (2d)$$

Having solved the harvesting problem, we go back in time and solve the travelling problem.

We begin our analysis with the simple case of a fixed travelling period, and then continue also acknowledging the subsequent harvesting period by endogenising the arrival time t_1 . This two-stage procedure follows the work of Tomiyama [6] and Amit [1]. We are able to show which additional effects and which corresponding optimality conditions have to be added to the solution of the former problem to obtain the solution of the latter.

Assume that the cost of travelling depends linearly on speed v and quadratically on acceleration a :

$$K(v, a) = cv + a^2. \quad (3)$$

The resulting aggregated travelling cost amounts to

$$\int_0^{t_1} (cv(t) + a(t)^2) dt \quad (4)$$

Acknowledging the constraints that result from the standard double integrator formulation of affecting the location x of the agent

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = a(t), \quad \dot{s}(t) = g(s(t)),$$

we obtain the Hamiltonian

$$\mathcal{H}_1 = -cv(t) - a(t)^2 + \pi_2(t)a(t) + \pi_1(t)v(t).$$

For ease of tractability, we assume that there are no bounds on the control a —yet, we will drop this assumption later. The familiar Pontryagin Maximum Principle then yields

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{12}(3K_1 - K_2t + ct), & v(t) &= \frac{t}{4}(2K_1 - K_2t + ct), \\ \pi_1(t) &= K_2, & \pi_2(t) &= K_1 + t(c - K_2), \end{aligned}$$

with K_1 and K_2 constants. Together with the boundary conditions $x(0) = v(0) = v(t_1) = 0$ and $x(t_1) = x_1$, we obtain

Proposition 2. *Given arrival time t_1 , the optimal travelling policy is given by*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2(3t_1 - 2t)x_1}{t_1^3}, & v(t) &= \frac{6t(t_1 - t)x_1}{t_1^3}, & a(t) &= \frac{6(t_1 - 2t)x_1}{t_1^3}, \\ \pi_1(t) &= c + \frac{24x_1}{t_1^3}, & \pi_2(t) &= \frac{12(t_1 - 2t)x_1}{t_1^3}, \end{aligned}$$

and the minimised objective function equals

$$J_1^*(t_1) = \int_0^{t_1} (a(t)^2 + cv(t)) dt = cx_1 + \frac{12x_1^2}{t_1^3}. \quad (5)$$

Optimal travelling-and-harvesting policy for exponential growth. Acknowledging the transversality conditions, in case of exponential growth the following conditions have to be added to the canonical system:

$$s(t) = s_0 e^t, \quad \pi(t) = \left(\frac{1}{\bar{h}}\right)^{1/(\bar{h}-1)} e^{T-t}. \quad (6)$$

Proposition 3. *In the optimal travelling-and-harvesting policy the agent starts harvesting at the arrival time. The optimal harvesting policy is characterised by Proposition 1, while the optimal travelling policy is given by Proposition 2. The resulting profit from the optimal travelling-and-harvesting policy is given by*

$$V(t_1^*) \equiv J^*(t_1^*) - J_1^*(t_1^*) = s_0 e^{t_1^*} \frac{\bar{h}}{\bar{h}-1} (1 - e^{(\bar{h}-1)(t_1^*-T)}) - \left(\frac{12x_1^2}{(t_1^*)^3} + cx_1 \right), \quad (7a)$$

where the optimal arrival time t_1^* is a function of $\bar{h}$ and T , implicitly defined by

$$\frac{dV(t_1^*)}{dt_1} = \frac{36x_1^2}{(t_1^*)^4} - s_0 e^{t_1^*} \frac{\bar{h}}{\bar{h}-1} (\bar{h} e^{(\bar{h}-1)(t_1^*-T)} - 1) = 0. \quad (7b)$$

In this paper we contribute to the theory of spatial resource economics. We explicitly take into account the fact that in many real-world situations the agent has to travel to the location of the resource before being able to harvest.

The travelling problem and the subsequent harvesting problem are linked by the choice of the speed of travelling and the resulting arrival time. The latter determines both the start of the harvesting period and the initial value of the size of the stock and is thus the crucial decision variable for the optimal harvesting policy.

We are able to fully characterise the control programme for this combined problem, employing recent tools for two-stage dynamic optimization problems. This allows us to characterise the resulting optimal yield for the management of the remote resource. Robustness checks involve the case of exponential and logistic growth functions, a positive discount rate and bounds on acceleration in an appendix. We show that a positive discount rate shifts the acceleration and hence speed costs towards the future (the more the higher the speed costs), whereas bounds on acceleration hamper this effect and a lower bound will be hit earlier the higher are the speed costs.

References

1. Amit R. Petroleum reservoir exploitation: switching from primary to secondary recovery // Oper. Res. 1986. V. 34, No. 4. P. 534–549.
2. Behringer S., Upmann T. Optimal harvesting of a spatial renewable resource // J. Econ. Dyn. Control. 2014. V. 42. P. 105–120.
3. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of a renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. V. 21, No. 3. P. 475–494.
4. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic harvesting of renewable resource // Dokl. Math. 2017. V. 96, N 2. P. 472–474.
5. Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Skopincev S.V. On optimal harvesting of a resource on a circle // Math. Notes. 2017. V. 102, No. 4. P. 521–532.
6. Tomiyama K. Two-stage optimal control problems and optimality conditions // J. Econ. Dyn. Control. 1985. V. 9. No. 3. P. 317–337.

ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК (DIFFEOMORPHISMS WITH AN INFINITE SET OF STABLE PERIODIC POINTS)*

Е. В. Васильева (E. V. Vasileva)

*Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия*

ekvas1962@mail.ru

Рассматривается C^1 -диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической к ней точки. Основная цель доклада — показать, что в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество многообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Из [1–3] следует, что при определенных условиях, наложенных прежде всего на способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым, в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но по крайней мере один из характеристических показателей у этих точек стремится к нулю с ростом периода. В работе [4] показано, что при ином способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат. Считаем, что f в некоторой ограниченной окрестности V начала координат имеет вид

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $0 < \lambda < 1 < \mu$.

Предположим, что

$$\lambda \mu^2 < 1. \quad (2)$$

Существует такое $\bar{\gamma} > 2$, что $\lambda \mu^{\bar{\gamma}} = 1$.

Пусть $W^s(0)$ и $W^u(0)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия нулевой точки. Предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической к ней точки, а именно в пересечении $W^s(0)$ и $W^u(0)$ лежит отличная от нуля точка, которая является точкой касания $W^s(0)$ с $W^u(0)$.

Пусть $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$ — две точки из орбиты гомоклинической точки такие, что $w_1 \in V$, $w_2 \in V$. Ясно, что $f^\omega(w_1) = w_2$, где ω — натуральное число.

Пусть

$$V_1 = \{(x, y): |x| < \bar{\lambda}^{-1}|x^0|, |y| < \bar{\mu}|y^0|\} \subset V, \quad (3)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00452).

где $\lambda < \bar{\lambda} < 1$, $1 < \bar{\mu} < \mu$. Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0. \quad (4)$$

Пусть U — такая окрестность точки w_1 , что $U \subset V_1$, $f^\omega(U) \subset V_1$, $f(U) \cap V_1 = \emptyset$, $f^{\omega-1}(U) \cap V_1 = \emptyset$ и множества $U, f(U), \dots, f^\omega(U)$ попарно не пересекаются. Пусть $L = f^\omega|_U$.

Определение. Периодическая точка $u \in U$ диффеоморфизма f называется s -обходной периодической точкой ($s \geq 1$), если существуют натуральные числа $j_1, j_2, \dots, j_s$ такие, что $f^{j_s} L \dots f^{j_2} L f^{j_1} L(u) = u$, для любого $k = 1, 2, \dots, s-1$ имеем $f^{j_k} L \dots f^{j_2} L f^{j_1} L(u) \in U$, $f^{j_k} L \dots f^{j_2} L f^{j_1} L(u) \neq u$ и для любого $k = 1, 2, \dots, s$ и любого $l = 1, 2, \dots, j_k$ имеем $f^l L f^{j_{k-1}} L \dots f^{j_1} L(u) \in V_1$. При $s = 1$ точка называется однообходной, при $s > 1$ — многообходной.

Пусть

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + F_1(x, y - y^0) \\ F_2(x, y - y^0) \end{pmatrix}.$$

В работах [1–3] предполагалось, что

$$\frac{\partial F_2(0, 0)}{\partial y} = \dots = \frac{\partial^{r-1} F_2(0, 0)}{\partial y^{r-1}} = 0, \quad \frac{\partial^r F_2(0, 0)}{\partial y^r} \neq 0.$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} F_1(x, y - y^0) &= ax + b(y - y^0) + \varphi_1(x, y - y^0), \\ F_2(x, y - y^0) &= cx + g(y - y^0) + \varphi_2(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где a, b, c — действительные числа такие, что

$$b < 0, \quad c > 0, \quad (6)$$

а g, φ_1, φ_2 — непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, равные нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат.

Пусть σ_k, ε_k — положительные стремящиеся к нулю последовательности, причем последовательность σ_k убывает, а Δ_k — отрицательная стремящаяся к нулю последовательность.

Предположим, что

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \quad (7)$$

для любого k .

Пусть γ, p — не зависящие от k положительные постоянные, причем $1 \leq \gamma < \bar{\gamma}$.

Пусть m_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, а n_k — такая последовательность натуральных чисел, что

$$n_k = \gamma_k m_k + p_k, \quad (8)$$

где $1 \leq \gamma_k \leq \gamma$, $|p_k| \leq p$.

Предположим, что при любых k справедливы неравенства

$$10x^0 \max[\lambda^{n_k} \mu^{(n_k + m_k)}, \lambda^{m_k} \mu^{n_k}] \leq \varepsilon_k. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$x_k = [\lambda^{n_k}(x^0 + b\Delta_k) + \lambda^{(m_k+n_k)}a(x^0 + b\sigma_k)](1 - a^2\lambda^{(m_k+n_k)})^{-1},$$

$$\bar{x}_k = [\lambda^{m_k}(x^0 + b\sigma_k) + \lambda^{(m_k+n_k)}a(x^0 + b\Delta_k)](1 - a^2\lambda^{(m_k+n_k)})^{-1}.$$

Пусть для любого k

$$\begin{aligned} |\mu^{m_k}(cx_k + g(\sigma_k)) - (y^0 + \Delta_k)| &< 0.1\varepsilon_k\mu^{-n_k}, \\ |\mu^{n_k}(c\bar{x}_k + g(\Delta_k)) - (y^0 + \sigma_k)| &< 0.1\varepsilon_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что при $\alpha > 1 + (\bar{\gamma} - \gamma)/2$, при любом k и $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k)$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{dg(t)}{dt} \right| < \mu^{-\alpha(m_k+n_k)}. \quad (11)$$

Теорема. Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия (1)–(11). Тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество s -обходных устойчивых периодических точек ($s = 2$), характеристические показатели которых отделены от нуля.

Список литературы

1. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. V. 12. P. 9–18.
2. Иванов Б.Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Диф. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.
3. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // ДАН. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
4. Васильева Е.В. Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. № 3. С. 3–13.

ОБ ОПЕРАТОРАХ, УРАВНЕНИЯХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ
(ON OPERATORS, EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS)*

В. Б. Васильев (V. B. Vasilyev)

*Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород, Россия*

vbv57@inbox.ru

1. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы (банаховы) пространства функций, определенных на компактном многообразии (возможно, с краем) M , $A: H_1 \rightarrow H_2$ — линейный ограниченный оператор. Следуя [1], мы введем следующее

Определение 1. Оператор называется оператором локального типа, если оператор $P_U A P_V$ является компактным для любых двух компактных непересекающихся множеств $K_1, K_2 \subset M$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$; P_K обозначает проектор на множество K , точнее,

$$(P_K f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K, \\ 0, & x \in M \setminus K, \end{cases} \quad \forall f(x) \in H_1 \ (H_2)$$

Всюду ниже мы будем рассматривать только операторы локального типа. Обозначим через $|||A|||$ существенную норму оператора A ,

$$|||A||| \equiv \inf \|A + T\|,$$

где инфимум берется по всем компактным операторам $T: H_1 \rightarrow H_2$.

Определение 2. Оператор $A_x: H_1 \rightarrow H_2$ называется локальным представителем оператора A в точке $x \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки x на многообразии M , $x \in U \subset M$, что выполняется неравенство

$$|||P_U(A - A_x)||| < \varepsilon.$$

Обозначение $A \overset{x}{\sim} A_x$.

Определение 3. Символом оператора A называется оператор-функция $A(x): M \rightarrow \{A_x\}_{x \in M}$, определяемая его локальными представителями.

Нетрудно убедиться, что такое определение символа сохраняет все свойства символического исчисления. Именно, с точностью до компактного слагаемого

- произведению и сумме двух операторов соответствуют произведение и сумма их локальных представителей;
- сопряженному оператору соответствует сопряженный его локального представителя;
- фредгольмову оператору соответствует фредгольмов локальный представитель.

Под оператором Фредгольма (фредгольмовым оператором) мы будем понимать линейный ограниченный оператор с конечным индексом.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 7311.2017/8.9).

В [1] приведен следующий

Критерий фредгольмовости. Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда символ $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов.

Пусть задано семейство операторов $\{A_x\}_{x \in M}$.

Определение 4. Семейство $\{A_x\}_{x \in M}$ называется локально непрерывным, если для любых $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$ найдется такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 , что при всех $x \in U$ выполняется неравенство

$$|||P_U(A_x - A_{x_0})||| < \varepsilon.$$

Определение 5. Оператор A называется огибающим оператором семейства $\{A_x\}_{x \in M}$, если

$$A \stackrel{x}{\sim} A_x \quad \forall x \in M.$$

В [1] доказано также существование единственного (с точностью до компактного) огибающего оператора для любого *локально непрерывного* семейства $\{A_x\}_{x \in M}$.

2. Пусть H'_1, H'_2 — гильбертовы пространства, состоящие из функций, определенных на $\mathbb{R}^m$, $\tilde{A}: H'_1 \rightarrow H'_2$ — линейный ограниченный оператор.

Поскольку M — компактное многообразие, для каждой точки $x \in M$ имеются окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $\omega: U \rightarrow D_x \subset \mathbb{R}^m$, $\omega(x) \equiv y$. Мы обозначим через S_ω следующий (локальный) оператор, действующий из H_k в H'_k , $k = 1, 2$. Для каждой функции $u \in H_k$, обращающейся в нуль вне U ,

$$(S_\omega u)(y) = u(\omega^{-1}(y)), \quad y \in D_x, \quad (S_\omega u)(y) = 0, \quad y \notin D_x.$$

Следующее определение соответствует понятию квазиэквивалентности [1].

Определение 6. Локальным представителем оператора $A: H_1 \rightarrow H_2$ в точке $x \in M$ называется оператор $\tilde{A}: H'_1 \rightarrow H'_2$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_j точки $x \in U_j \subset M$, для которой выполняется следующее неравенство:

$$|||g_j A f_j - S_{\omega_j^{-1}} \hat{g}_j \tilde{A} \hat{f}_j S_{\omega_j}||| < \varepsilon$$

для любой пары гладких функций f_j, g_j с носителями в $\bar{U}_j$, $\hat{f}_j, \hat{g}_j$ — их запись в локальных координатах.

3. Отправляясь от приведенных выше фактов и учитывая дальнейшие приложения к псевдодифференциальным операторам [2, 3], мы дадим следующее

Определение 7. Оператор A называется эллиптическим, если его символ состоит из обратимых операторов.

Мы рассмотрим здесь случай, когда семейство $\{A_x\}_{x \in M}$ не является локально непрерывным в целом, однако сохраняет это свойство на отдельных (особых) подмногообразиях $M_k \subseteq M$ размерности $k = 0, 1, \dots, m$. Так, подмногообразие M_0 представляет собой конечное объединение различных точек границы ∂M многообразия M , $M_n \equiv M$ — это исходное многообразие, $M_{n-1} \equiv \partial M$, $M_k \subset M_{n-1}$, $k = 0, 1, \dots, n-2$. Пусть на M задано семейство $\{A_x\}_{x \in M}$. Мы будем предполагать, что это семейство локально непрерывно на $M \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$, причем существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_k \in M_k} A_x$, вообще говоря, не совпадающие с A_{x_k} , и локально

непрерывно на каждом $M_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} M_j$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_j \in M_j} A_x$, вообще говоря, не совпадающие с A_{x_j} .

Пусть теперь A — оператор, символом которого является описанное семейство $\{A_x\}_{x \in M}$.

Теорема 1. *Эллиптический оператор всегда фредгольмов.*

Замечание. Если эллиптичность нарушается на некоторых подмногообразиях M_k , то, например, в случае псевдодифференциальных операторов следует модифицировать локальный представитель, подклеив к нему граничный или кограничный оператор [3].

С помощью разбиения единицы на многообразии M с использованием конструкций [1] по эллиптическому символу $A(x)$ можно построить n операторов A_j согласно числу особых подмногообразий M_k , включая всю границу ∂M и само многообразие M .

Теорема 2. *Индекс фредгольмова оператора A представим формулой*

$$\text{Ind } A = \sum_{j=1}^n \text{Ind } A_j.$$

Список литературы

1. Симоненко И.Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.
2. Васильев В.Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях // Труды ММО. 1998. Т. 59. С. 73–105.
3. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.

О ДИСКРЕТНОЙ ВЕРСИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ON A DISCRETE VERSION OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS)*

В. Б. Васильев (V. B. Vasilyev), Р. Е. Деркач (R. E. Derkach),
О. А. Тарасова (O. A. Tarasova)

*Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород, Россия*

vbv57@inbox.ru, Spartak959@rambler.ru, tarasova-o@dsu.edu.ru

Мы исследуем разрешимость операторных уравнений

$$A_d u_d = v_d \tag{1}$$

для специального (но достаточно широкого) класса операторов A_d .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект № 7311.2017/8.9

Примем следующие обозначения: $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ — m -мерный куб, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Для функций u_d дискретного аргумента, определенных на $h\mathbb{Z}^m$, мы вводим дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) \equiv (F_d u_d)(\xi) = \sum_{x \in h\mathbb{Z}^m} u_d(x) e^{ix \cdot \xi} h^m, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m.$$

Пусть $A_d(\xi)$ — периодическая функция в $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Оператор вида

$$(A_d u_d)(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{y \in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} A_d(\xi) e^{i(y-x) \cdot \xi} u_d(y) h^m d\xi, \quad x \in D_d,$$

$D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$, D — область в $\mathbb{R}^m$, мы называем дискретным псевдодифференциальным оператором в дискретной области D_d .

Одними из основных задач являются описание условий однозначной разрешимости уравнения (1) в подходящих пространствах функций в дискретной области D_d и применение полученных результатов к построению подходящих аппроксимаций классических псевдодифференциальных уравнений [1]. Основная трудность заключается в том, что, когда область представляет собой часть $\mathbb{R}^m$ (например, полупространство или конус), стандартного условия эллиптичности символа $A(\xi)$ уже недостаточно. Так, в случае полупространства в [2, 3] были описаны условия разрешимости уравнения (1) в дискретных пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(D_d)$.

В этом докладе показана применимость полученных результатов к построению дискретных аппроксимаций для псевдодифференциального оператора с символом $A(\xi)$,

$$u(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(y-x) \cdot \xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D.$$

Более конкретно, дано сравнение решений двух уравнений: уравнения

$$Au = v \tag{2}$$

и уравнения (1) для достаточно гладкой правой части v .

Обозначим через $S(\mathbb{R}^m)$ класс Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций, $H^s(D)$, $H^s(D_d)$ — пространства Соболева–Слободецкого непрерывного и дискретного аргумента соответственно [1, 2]. По заданному символу $A(\xi)$, удовлетворяющему условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

строится символ $A_d(\xi)$ следующим образом: берется сужение $A(\xi)$ на $\hbar\mathbb{T}^m$ и периодически продолжается на все $\mathbb{R}^m$ (обозначение: $A_d(\xi) \equiv (Q_h A)(\xi)$). Для построения удобной аппроксимации правую часть выберем так. Пусть ℓv — произвольное продолжение v с D на все $\mathbb{R}^m$. Вводим уравнение

$$(Q_h A)u_d = F_d^{-1} Q_h(\ell v). \tag{3}$$

Пусть $D = \mathbb{R}_+^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m: x = (x_1, \dots, x_m), x_m > 0\}$ и $\varkappa$ — индекс факторизации символа $A(\xi)$ (см. [1]).

Теорема. Если $|\varkappa - s| < 1/2$, $v \in S(\mathbb{R}^m)$ и элементы факторизации сим-вола $A(\xi)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}^m$, то сравнение решений уравнений (2) и (3) дается оценкой

$$|u(x) - u_d(x)| \leq c h^k, \quad x \in h\mathbb{Z}^m,$$

где постоянная c зависит только от функции v , k — произвольное положительное число.

Замечание. Теоремы о существовании и единственности решений уравнений (1) и (2) имеются в работах [1–3].

Список литературы

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. V. 23, No 3. P. 492–506.
3. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On some discrete boundary value problems in canonical domains // Differential and difference equations and applications. Cham: Springer, 2018. P. 569–579. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 230).

SPECTRAL ANALYSIS OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS*

V. V. Vlasov, N. A. Rautian

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

vicvlasov@rambler.ru, nrautian@mail.ru

We study integro-differential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. The principal part of these equations is an abstract hyperbolic operator perturbed by summands of Volterra integral operators. Operator models of this type have many applications in the linear viscoelasticity theory, homogenization theory, heat conduction theory in media with memory, etc. In particular, these integro-differential equations can be realized as a system of integro-partial differential equations:

$$\rho \ddot{u}(x, t) - Lu(x, t) + \int_0^t K_1(t-s)L_1 u(x, s) ds + \int_0^t K_2(t-s)L_2 u(x, s) ds = f(x, t),$$

where $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ is the displacement vector of viscoelastic anisotropic media, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω is a bounded domain with smooth boundary, u satisfies the Dirichlet conditions in Ω , $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \text{grad div } u)$, $L_2 = \lambda \cdot \text{grad div } u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ is the Lamé operator of elasticity theory, K_1 and K_2 are memory relaxation functions that are series of decreasing exponents with positive coefficients.

A spectral analysis of the operator-valued functions which are the symbols of the considered integro-differential equations is performed. The structure and localization

*This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 17-11-01215.

of spectra for these operator-valued functions are analyzed (see [1, 2]). These results are a natural generalization of our results obtained in [3].

References

1. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Spectral analysis of functional differential equations. Moscow: MAKS Press, 2016 [in Russian].
2. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Spectral analysis of linear models of viscoelasticity // J. Math. Sci. 2018. V. 230. No. 5. P. 668–672.
3. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Well-posedness and spectral analysis of hyperbolic Volterra equations of convolution type // Differential and difference equations with applications. Springer, 2016. P. 411–419. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 164).

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, УЛУЧШАЮЩАЯ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ (MODIFICATION OF THE METHOD OF DYNAMIC REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF THE NUMERICAL DIFFERENTIATION PROBLEM WHICH IMPROVES ITS CHARACTERISTICS)

А. Ю. Вдовин (A. Yu. Vdovin), С. С. Рублева (S. S. Rubleva)

*Уральский государственный лесотехнический университет,
Екатеринбург, Россия*

vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

В работах [1, 2] Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским рассматривалась задача аппроксимации неизвестного воздействия $v(\cdot)$ в динамической системе

$$x' = g(t, x) + f(t, x)v(t), \quad t \in [a, b] = T, \quad x(a) = x_0$$

($x(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(\cdot): T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\cdot): T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times q}$, $v(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^q$) по неточной информации $x_h(\cdot)$ о движении $x(\cdot)$.

При этом предполагалось, что $|x_h(t_i) - x(t_i)| \leq h$ в равностоящих узлах $a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$ разбиения T и $|t_{i+1} - t_i| = \Delta(h)$. Предложенный авторами алгоритм ее решения сводился к процедуре управления определенной на T системой-моделью с начальным условием $w_h(a) = x_h(t_0)$,

$$w_h(t) = w_h(t_i) + v_h(t - t_i) \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (1)$$

Кусочно постоянное управление, определяемое при $t \in [t_i, t_{i+1})$ как результат проекции на выпуклый компакт $Q \subset \mathbb{R}^q$ вектора

$$v_h(t) = f^T(t_i, x_h(t_i)) \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)},$$

принималось в качестве приближения для $v(\cdot)$. Установлено, что при липшицевых $g(\cdot)$ и $f(\cdot)$ и согласовании параметров таким образом, что $\alpha(h) + (h + \Delta(h))/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$,

$$\|v(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_2(T)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Таким образом, обсуждаемый алгоритм является неупреждающим, конечно-шаговым, динамическим, регуляризирующим.

Дополнительная информация об ограниченности вариации $v(\cdot)$ на T и предположение, что $0 \in Q$, позволили [3] избежать процедуры проектирования на Q , получить оценку погрешности $\|v(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L[T]}$ и установить, что ее асимптотический порядок точности равен $1/2$.

В предлагаемой работе рассматривается задача численного дифференцирования

$$x'(t) = v(t),$$

являющаяся частным случаем задачи, рассмотренной выше. По аналогии с [4] рассмотрим непрерывную систему-модель

$$w'(t) = \frac{x(t) - w(t)}{\alpha(h)}, \quad w(a) = x_0.$$

Пусть $\alpha(h) = \alpha$, $\Delta(h) = \Delta$. В качестве разностной модели, аналогичной (1), станем использовать

$$w_h(t) = w_h(t_i) + v_h(t_{i+1})(t - t_i) \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (2)$$

постоянное управление которой на $[t_i, t_{i+1}]$ определяется по правилу

$$v_h(t) = v_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha} \Delta. \quad (3)$$

Получение оценок разбивается на два этапа, первый шаг — это получение погрешности для движения.

Лемма 1. Пусть $v(\cdot)$ обладает ограниченной вариацией на T , $0 \in \mathbb{R}^q$, параметры α , α/Δ стремятся к нулю вместе с h . Тогда найдутся положительные константы C_1 , C_2 , h_* такие, что для всех $h \in (0, h_*)$, $t \in T$

$$|w_h(t) - x_h(t)| \leq \frac{\alpha h}{\Delta} C_1 + \alpha C_2.$$

С учетом полученного результата второй шаг будет состоять в получении оценки точности для приближения управления на шаге

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существуют положительные константы C_3 , C_4 такие, что для всех $i = 0, \dots, n-1$

$$|v_h(t_{i+1}) - v(t_{i+1})| \leq C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} v(\cdot), \quad (4)$$

где $\text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} v(\cdot)$ — вариация $v(\cdot)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Теорема. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда существуют положительные константы C_5 , C_6 такие, что

$$\|v_h(t) - v(t)\|_{L(T)} \leq C_5 \frac{h}{\Delta} + C_6 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[a, b]} v(\cdot) \Delta. \quad (5)$$

Доказательство. На основании (4) и формулы прямоугольников для вычисления определенного интеграла имеем

$$\|v_h(t) - v(t)\|_{L(T)} = \int_a^b |v_h(t) - v(t)| dt \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \Delta + \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} v(\cdot) \Delta = \\
& = C_3 \frac{h}{\Delta} (b - a) + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} (b - a) + \text{Var}_{[a, b]} v(\cdot) \Delta.
\end{aligned}$$

При $C_5 = C_3(b - a)$, $C_6 = C_4(b - a)$ получена оценка (5). Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. При согласовании параметров $\Delta = \sqrt{h}$, $\alpha = h$ оптимальный порядок правой части в (5) равен 1/2. Оценка точности, в отличие от [4], не асимптотически, а просто оптимальна по порядку.

Замечание 2. Предложенный выбор параметров уменьшает число операций на порядок по сравнению с исходным.

Замечание 3. Обсуждаемый алгоритм не является неупреждающим, поскольку формулы (2), (3) используют информацию о движении в узле t_{i+1} . Однако он может быть сделан таковым при формальном сдвиге левого конца временного промежутка в точку $a - \Delta$ и выборе $x_h(a - \Delta) = x_h(a)$. Результат формул (2), (3), полученный для промежутка $[t_{i-1}, t_i]$, считается приближением на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Предложенный сдвиг на Δ вправо не изменит порядка точности оценки.

Список литературы

1. Кряжиский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 51–60.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
3. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией, зависящей от него линейно // Мат. заметки. 2010, Т. 87, №3. С. 337–358.
4. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. Об асимптотической точности в L_1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения // Труды Института математики и механики. 2006. Т. 12, №2. С. 18–26.

OPTIMALITY CONDITIONS FOR A NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH LINEAR SYSTEM*

M. V. Yanulevich

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russia*

max@irk.ru

Consider the linear control system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{for a.e. } t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty^r(T) \mid u(t) \in U \text{ for a.e. } t \in T\}, \quad (2)$$

*The reported study was supported by the RFBR, project no. 18-31-00465.

under the standard assumptions [1, 2]. In particular, the set U is compact in $\mathbb{R}^n$, and the elements $a_{ij}(t)$ and $b_{il}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, r}$, of the matrices $A(t)$ and $B(t)$, respectively, are continuous on T .

Further, the objective of the problem consists in minimizing the following Lagrange functional:

$$J(x, u) := \int_T [F(x(t), u(t), t)] dt \downarrow \min_u, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (3)$$

subject to the control system (1), (2). Here the functional $F(x, u, t)$ is continuous with respect to the variable $t \in T$ and is a function of A. D. Alexandrov [3] with respect to the pair $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+r}$ (or a so-called d.c. function [4]) such that

$$F(x, u, t) = g(x, u, t) - h(x, u, t) \quad \forall (x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times T, \quad (4)$$

where the functions $(x, u) \mapsto g(x, u, t)$ and $(x, u) \mapsto h(x, u, t)$ are convex [2, 4] for all $t \in T$ (with respect to the pair (x, u)).

In this paper we denote by $x(\cdot; u)$ a unique absolutely continuous solution of the ODE system (1) corresponding to the control $u(\cdot)$, and $J[u] := J(x(\cdot; u), u)$.

Note that for the considered problem (1)–(3) Pontryagin's maximum principle is a necessary optimality condition but not a sufficient one, in general. In [5–7] A. S. Strekalovsky proposed and proved global optimality conditions, which are necessary and sufficient for the optimal control problem when the function $h(x, u, t)$ in the objective functional does not depend on the control variable u , i.e., $h(x, u, t) = h(x, t)$.

Further, according to the results of [5, 6], we propose optimality conditions when the function $h(x, u, t)$ in the objective functional $J(\cdot)$ depends on the control variable u (see (3) and (4)).

Theorem 1. *Let a control $w(\cdot) \in \mathcal{U}$ be globally optimal in problem (1)–(3) and $z(t) = x(t; w)$, $t \in T$. Then, for each triple $(y(\cdot), v(\cdot), \beta)$, where $\beta \in \mathbb{R}$, $y: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, and $v: T \rightarrow \mathbb{R}^r$, satisfying the equality*

$$\int_T h(y(t), v(t), t) dt = \beta - J[w], \quad (5)$$

the following inequality holds:

$$\begin{aligned} & \int_T g(x(t; u), u(t), t) dt - \int_T [\langle \nabla_y h(y(t), v(t), t), x(t; u) \rangle + \langle \nabla_v h(y(t), v(t), t), u(t) \rangle] dt \\ & \geq \beta - \int_T [\langle \nabla_y h(y(t), v(t), t), y(t) \rangle - \langle \nabla_v h(y(t), v(t), t), v(t) \rangle] dt \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (6)$$

Remark 1. Consider the following partially linearized problem $(\mathcal{PL}(y, v))$:

$$\begin{aligned} I(u; y, v) := & \int_T [g(x(t; u), u(t), t) - \langle \nabla_y h(y(t), v(t), t), x(t; u) \rangle \\ & - \langle \nabla_v h(y(t), v(t), t), u(t) \rangle] dt \downarrow \min_u, \quad u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (7)$$

for some triple $(y(\cdot), v(\cdot), \beta)$ which satisfies equality (5) from Theorem 1. Note that the functional $I(\cdot; y, v)$ is really present on the left-hand side of inequality (6). It can readily be seen that inequality (6) can be rewritten in the following form:

$$\mathcal{V}(\mathcal{PL}(y, v)) \geq \gamma(y, v, \beta), \quad (6')$$

where $\mathcal{V}(\mathcal{PL}(y, v))$ is the (optimal) value of the linearized problem (7) and the value $\gamma(y, v, \beta)$ is such that

$$\gamma(y, v, \beta) := \beta - \int_T \langle \nabla_y h(y(t), v(t), t), y(t) \rangle dt - \int_T \langle \nabla_v h(y(t), v(t), t), v(t) \rangle dt. \quad (8)$$

It is well known that $(\mathcal{PL}(y, v))$ is a convex optimal control problem. So, Pontryagin's maximum principle [1, 2] turns out to be a necessary and sufficient condition for a control $u_*(\cdot)$ to be (globally) optimal in $(\mathcal{PL}(y, v))$. For instance, we can apply the methods based on Pontryagin's maximum principle to solve the auxiliary convex problem $(\mathcal{PL}(y, v))$.

Remark 2. Further, suppose that some triple $(y(\cdot), v(\cdot), \beta)$ satisfies (5) and $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ is a control for which inequality (6) is violated. Let $\bar{x}(t) = x(t; \bar{u})$, $t \in T$. Then,

$$0 > \int_T g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt - \int_T [\langle \nabla_y h(y(t), v(t), t), \bar{x}(t) - y(t) \rangle + \langle \nabla_v h(y(t), v(t), t), \bar{u}(t) - v(t) \rangle] dt.$$

Hence, due to the convexity of the function $(x, u) \mapsto h(x, u, t)$, $t \in T$, it follows that

$$0 > \int_T [g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) - h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + h(y(t), v(t), t)] dt - \beta.$$

Taking into account (5), we obtain

$$0 > \int_T F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt - J[w] = J[\bar{u}] - J[w],$$

that is, $J[\bar{u}] < J[w]$. It means that conditions (6) possess the so-called constructive property; i.e., if there exist a triple $(y(\cdot), v(\cdot), \beta)$ and a feasible control $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ for which these conditions are violated, then the control $\bar{u}(\cdot)$ is better than the current control $w(\cdot)$.

It should be noted that there exist other sufficient conditions for the considered optimal control problem or its special cases (for example, in [8]). However, our objective is to construct a numerical method for obtaining a globally optimal control (solution) in problem (1)–(3) under study using the constructive property of the optimality conditions. In particular, our paper [9] shows that such optimality conditions enable one to construct numerical methods.

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. New York: Interscience, 1976.
2. *Vasil'ev F.P.* Optimization methods. Moscow: Factorial Press, 2002 (in Russian).
3. *Alexandrov A.D.* The surfaces that can be represented by a difference of convex functions // Proc. Acad. Sci. USSR. Ser. Math. Mech. 1950. V. 72, No. 4. P. 613–616.
4. *Hiriart-Urruty J.-B.* Generalized differentiability, duality and optimization for problem dealing with difference of convex functions // Convexity and duality in optimization / Ed. by J. Ponstein. Berlin: Springer, 1985. P. 37–69.

5. *Strekalovsky A.S.* Global optimality conditions for optimal control problems with functions of A.D. Alexandrov // J. Optim. Theory Appl. 2013. V. 15, No. 2. P. 297–321.
6. *Strekalovsky A.S.* Modern methods for solving nonconvex optimal control problems // Bull. Irkutsk State Univ. 2014. V. 8. P. 141–163 (in Russian).
7. *Strekalovsky A.S.* Maximizing a state convex Lagrange functional in optimal control // Autom. Remote Control. 2012. V. 73, No. 6. P. 949–961.
8. *Srochko V.A., Antonik V.G.* Optimality conditions for extremal controls in bilinear and quadratic problems // Russ. Math. 2016. V. 60, No. 5. pp. 75–80.
9. *Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V.* On global search in nonconvex optimal control problems // J. Global Optim. 2016. V. 65, No. 1. P. 119–135.

ЛЕММА Л.С. ПОНТЯГИНА
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ УБЕГАНИЯ
(L.S. PONTRYAGIN'S LEMMA IN DIFFERENTIAL EVASION GAMES)

Л. П. Югай (L. P. Yugay)

Филиал НИТУ “МИСУС”, Алматы, Узбекистан

yugailp@mail.ru

В постановке Л.С. Понтрягина–Е.Ф. Мищенко [1] рассматривается задача уклонения от заданного терминального подпространства траекторий конфликтно управляемой динамической системы, описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Управления выбираются двумя сторонами (игроками), имеющими противоположные цели. Игрок, стремящийся уклонить траекторию от терминального подпространства на бесконечном интервале времени, называется убегающим игроком, а соответствующую задачу уклонения траекторий называют также дифференциальной игрой убегаания (или уклонения).

Решение дифференциальной игры убегаания в постановке [1] предполагает нахождение эффективных достаточных условий убегаания из любой допустимой начальной позиции, построение управления убегающего игрока и получение оценки снизу для расстояния от текущего состояния $z(t)$ конфликтно управляемой системы до терминального подпространства.

В работе [2] дано полное решение линейной дифференциальной игры убегаания. Ключевым моментом в доказательстве являлась “конструкция, позволяющая построить обходное движение точки $z(t)$, точнее, построить управление убегаания с тем, чтобы точка $z(t)$ не попала на M ” [3, с. 379]. Эта конструкция была доказана в предложении В работы [2, § 4]. В дальнейшем содержание предложения В стало называться леммой Л.С. Понтрягина о маневре обхода (или об убегании) или леммой Л.С. Понтрягина о квадратах и развивалось многими авторами (Р.В. Гамкредидзе и Г.Л. Харатишвили, Н. Сатимовым, П.Б. Гусятниковым, Б.Н. Пшеничным, М.С. Никольским, Дж. Йонгом и другими). Как правило, все рассмотрения проводились в $\mathbb{R}^2$ для двумерных векторов, компоненты которых выбирались из классов линейных конечномерных семейств аналитических функций, дополненных степенными функциями типа t^k , $k \in \mathbb{N}$.

Ниже будет сформулирован основной результат, аналогичный лемме Л.С. Понтрягина о маневре обхода, для случая, когда рассматриваются m -мерные векторы с компонентами из специальных классов функций.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство с фиксированной системой координат, $m \geq 2$; $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$ — натуральные числа; Σ — линейное конечномерное семейство определенных на отрезке $[0, 1]$ аналитических функций, включающее в себя также всевозможные линейные комбинации функций t^{k_i} , $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$; $q < +\infty$ — точная верхняя грань числа нулей функций из Σ ; $d > 0$ и $r_i > 0$, $i \in I$, — заданные числа.

Тогда для каждой функции $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$, $g_i(t) \in \Sigma$, $i \in I$, T — транспонирование, найдется такой вектор $w_0 \in \mathbb{R}^m$, что $|w_0| \leq d$ и при всех $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство (оценка снизу)

$$|g(t) - \Omega(t)w_0| \geq \frac{dt^{k_m}}{\delta(q, m) + 1} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{t^{2(k_m - k_i)}}{r_i^2} \right\}^{-1/2}, \quad (1)$$

в котором $\delta(q, m)$ — целая часть положительного корня уравнения

$$x^m - m(q+1)x - m(q+1) = 0,$$

$\Omega(t) = \text{diag}[r_1 t^{k_1}, \dots, r_m t^{k_m}]$ — диагональная матрица порядка m .

Замечание 1. Исследование оценки (1) показывает, что в случаях, когда $m = 2$, $k_1 = k_2$, оценка (1) совпадает с известными [2], а при $k_1 < k_2$ оценка (1) оказывается предпочтительнее, чем в [2–4].

Замечание 2. Лемма справедлива для более широких, чем Σ , классов функций, введенных в [4].

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача убегания одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР. 1969. Т. 189, № 4. С. 721–723.
2. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 30–63.
3. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004.
4. Сатимов Н. О некоторых обобщениях леммы Л.С. Понтрягина о квадратах // Диф. уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1548–1555.

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES FOR SOLVING NONCONVEX
OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH FREE RIGHT-HAND END*

T. S. Zarodnyuk, A. Yu. Gornov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russia*

tzarodnyuk@gmail.com, gornov.a.yu@gmail.com

The optimal control problem (OCP) with free right-hand end for a nonlinear system with terminal functional is one of the main problems of control theory. When implementing algorithms for numerically solving more complicated problems with terminal and phase constraints, with integral functionals, and others, OCP appears in many cases as an auxiliary problem, whose solution should be performed repeatedly under iterations of the method. It can be argued, in our opinion, that this problem is the preparatory stage for investigating a wide range of topical classes of problems.

Most results of theoretical studies are aimed at searching a local extremum in the OCP. However, the logic of the development of control theory and the requirements of practical applications are in need for solving multi-extremal problems of dynamical optimization. The solution of nonconvex optimal control problems continues to be a serious scientific problem.

The following statement of the problem is investigated, with the controlled dynamic process described by a system of ordinary differential equations with fixed initial conditions:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$u \in U = \{u \in E^r : ul_i \leq u \leq ug_i, i = \overline{1, r}\}, \quad (2)$$

$$I_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) \rightarrow \min. \quad (3)$$

The problem consists in finding the minimum value of the objective terminal functional (3) obtained by optimal control from the closed convex admissible set U . The functions $f(x, u, t)$ and φ_0 are assumed to be continuously differentiable with respect to all arguments.

Using the standard methods of reducing problems to the presented formulation (1)–(3), it is possible to solve problems of a wider class: problems with terminal and phase constraints along with direct control constraints, optimization of both terminal and integral functionals, optimization of both the control functions and control constants, as well as speed problems and others.

The paper considers several families of algorithms for solving nonconvex OCPs with free right-hand end. One of the most reliable and informative algorithms is the multistart method (multiple searches from randomly generated initial controls), which, in addition to finding the global optimum, also builds an approximation of the reachable set (RS) of the system and estimates the attraction regions for various extrema [1].

*This work is partly supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 17-07-00627.

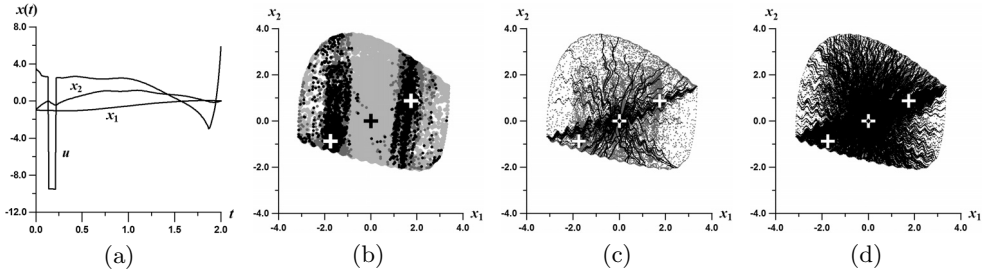


Figure 1. (a) The optimal trajectories and control; (b) the RS with extreme points; (c, d) the RS constructed by the curvilinear search method with 1000 and 10000 iterations, respectively.

The authors have implemented variants of Pontryagin’s method [2], which makes it possible to find non-local OCP solutions. The developed algorithms, based on the non-local maximum principle, demonstrate high efficiency on small-scale problems.

Alternative approaches to solving OCPs with free right-hand end realized by the authors are convexification methods [3, 4], curvilinear search methods [5], and the tunneling algorithm [6]. A special feature of the convexification algorithms, based on Gamkrelidze’s technique, is that a solution is found by constructing an extended problem with a convex velocity set. The methods of curvilinear search, based on quadratic and cubic control variations, in many cases are able to achieve a globally optimal solution quickly enough. The tunneling methods, based on the idea of a transition from one local extremum to another, can also be classified as competitive.

For OCPs with relay controls, we propose specialized algorithms based on finite-dimensional search in the space of control switching points: stochastic coverings algorithms, genetic search algorithms, algorithms based on the Shepard operator, and others. To estimate the quality of the obtained solutions, specialized tools of post-optimization analysis and visualization are implemented.

To study the properties of the proposed algorithms, a collection of OCPs has been developed [7] and is regularly updated. At present it includes more than 150 model examples. Let us demonstrate the efficiency of the proposed algorithms on one of the test examples of non-convex OCPs from this collection:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - \frac{2}{\pi} \arctan 5x_2 + u - \sin 15x_1, \quad (5)$$

$$x^0 = (-1, -1), \quad -10 \leq u(t) \leq 10, \quad t \in T = [0, 2], \quad (6)$$

$$I_0(u) = 2x_1^2(t_1) - 1.05x_1^4(t_1) + \frac{x_1^6(t_1)}{6} - x_1(t_1)x_2(t_1) + x_2^2(t_1) + 1 \rightarrow \min. \quad (7)$$

The optimal control and corresponding trajectories are shown in Fig. 1a. In this problem, there are three extreme points: $I_0^{\text{loc}_1}(u) = 1.29864$, achieved at the point $(-1.748, -0.874)$; $I_0^*(u) = 1.0$, achieved at $(0.000, 0.000)$; and $I_0^{\text{loc}_2}(u) = 1.29864$, achieved at $(1.748, 0.874)$. These points are identified by markers on the reachable set (Fig. 1b) constructed with using the stochastic multistart method. Figures 1c and 1d show the results of a step-by-step solution of the problem by the curvilinear search method (1000 and 10000 iterations, respectively).

A number of applied problems have been solved from various scientific fields, such as mechanics, quantum physics, robotics, chemical kinetics, medical ecology, seismology, electric power engineering, and others, with the application of the implemented computational technologies for the study of nonconvex optimal control problems.

References

1. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Finkelshtein E.A., Anikin A.S. The method of uniform monotonous approximation of the reachable set border for a controllable system // J. Global Optim. 2016. V. 66, No. 1. P. 53–64.
2. Pontryagin L.S., Boltyanski B.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. Interscience Publ., 1962.
3. Gamkrelidze R.V. Fundamentals of optimal control. Publ. House Tbilisi Univ., 1977.
4. Tolstonogov A.A. Differential inclusions in a Banach space. Kluwer Acad. Publ., 2000. (Math. Appl.).
5. Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S. The curvilinear search method of global extremum in optimal control problems // Modern Tech., Syst. Anal., Simul. 2009. V. 3. P. 19–26 (in Russian).
6. Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S. Tunneling algorithm for solving nonconvex optimal control problems // Optimization, simulation, and control. New York: Springer, 2013. P. 289–299. (Springer Optim. Appl.; V. 76).
7. Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneyeva A.V., Veyalko I.A. A collection of test multiextremal optimal control problems // Optimization, simulation, and control. New York: Springer, 2013. P. 257–274. (Springer Optim. Appl.; V. 76).

SOLUTIONS OF NEWTON’S AERODYNAMIC PROBLEM WITHOUT AXIAL SYMMETRY

M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

mzelikin@mtu-net.ru, lion.lokut@gmail.com

The talk will be devoted to the following problem: find a body having minimal resistance while moving in rare media. Newton proposed and solved this problem in the class of convex surfaces of revolution. The solution founded by Newton has very interesting structure: the body’s front part must be a flat disc. For a long time it was thought that this solution is optimal in the class of all convex bodies. Nonetheless, in 1995, Guasoni [1] and Buttazzo [2] constructed a counterexample, which shows that resistance takes smaller values on convex surfaces that are not surfaces of revolution. The existence of an optimal convex body follows from Marcellini’s theorem (see [3], 1990). So these two facts triggered a search for the genuine optimal convex body, whose shape is not known at present. There are a lot of heuristic hypotheses about the shape, which are based on many numerical experiments. Our purpose is to construct a new mathematical apparatus to analytically find the convex body of minimal resistance.

References

1. *Guasoni P.* Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi. Test di Laurea, Univ. Pisa, 1995–1996.
2. *Buttazzo G., Ferone V., Kawohl B.* Minimum problems over sets of concave functions and related questions // *Math. Nachr.* 1995. Bd. 173, No. 1. S. 71–89.
3. *Marcellini P.* Non convex integrals of the Calculus of Variations, pages 16–57. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1990.
4. *Lokutsievskiy L.V., Zelikin M.I.* Hessian measures in the aerodynamic Newton problem: E-print, arXiv: 1709.00241.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ КРИТЕРИИ РАВНОВЕСНОСТИ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ (COEFFICIENT EQUILIBRIUM CRITERIA IN A TWO-PERSON DIFFERENTIAL GAME)

**В. И. Жуковский (V. I. Zhukovskiy),
Л. В. Смирнова (L. V. Smirnova)**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

*Государственный гуманитарно-технологический университет,
Орехово-Зуево, Россия*

zhkvlad@yandex.ru, smirnovalidiya@rambler.ru

Тот, кто занимается теорией устойчивости, помнит раздел “коэффициентные критерии устойчивости”. В нем без решения самой системы уравнений возмущенного движения сразу решается вопрос об устойчивости невозмущенного движения (неустойчивости, абсолютной, асимптотической условной устойчивости) по ограничениям на коэффициенты системы. В предлагаемом сообщении сделана попытка перенести этот подход на выявление вида равновесности, который следует использовать в конкретной дифференциальной игре. В математической теории дифференциальных игр многих лиц общепризнанными являются три вида равновесий: равновесие по Нэшу (РН), равновесие по Бержу (РБ) и равновесие угроз и контругроз (РУиК). Какие из них игрокам использовать? Каждый имеет свои достоинства и недостатки!

В данной работе при выборе концепции равновесия предлагается базироваться на коэффициентных критериях, т.е. на свойствах коэффициентов математической модели дифференциальных игр многих лиц. Такой подход демонстрируется на примере дифференциальной линейно-квадратичной игры двух лиц в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2}, \{\mathcal{J}_i(U_1, U_2, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \rangle.$$

В Γ управляемая система Σ имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \epsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0,$$

Коэффициентные критерии равновесности

	D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	C_1	C_2	РН	РБ	РУиК
1	$D_{11} < 0$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$\forall$	$\exists$		
2	$\forall$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$\forall$	$\forall$	$C_2 < 0$		$\exists$	
3	$D_{11} < 0$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	$\exists$	$\exists$	
4	$D_{11} > 0$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$D_{22} > 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	$\neg\exists$	$\exists$	$\exists$
5	$D_{11} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\neg\exists$		
6	$\forall$	$D_{12} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\neg\exists$	
7	$\forall$	$\forall$	$D_{21} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\neg\exists$	
8	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\neg\exists$		

где $A(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$, момент окончания игры $\vartheta > 0$, начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, множество стратегий i -го игрока

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \ \forall Q_i(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\},$$

функция выигрыша i -го игрока ($i = 1, 2$)

$$\mathcal{J}_i(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} (u'_1[t]D_{i1}u_1[t] + u'_2[t]D_{i2}u_2[t]) dt,$$

здесь считаем $(n \times n)$ -матрицы C_i , D_{ij} ($i, j = 1, 2$) постоянными и симметричными, штрих означает операцию транспонирования, неравенство $D > 0$ (< 0) означает, что квадратичная форма $u'_i D u_i$ положительно (отрицательно) определена, $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый n -вектор, $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, — решение системы Σ при управляющих воздействиях $u_i = u_i(t, x) = Q_i(t)x$ ($i = 1, 2$).

Чтобы решить задачу выбора концепции равновесия для игры Γ , следует с помощью критериев Сильвестра или Якоби определить знакоопределенность матриц D_{ij} , C_i ($i, j = 1, 2$), а затем в зависимости от этого найти соответствующую строку в прилагаемой таблице и выбрать соответствующую концепцию равновесности.

Если таблица рекомендует равновесие по Нэшу или Бержу, то построение самих соответствующих равновесных стратегий игроков можно найти в [1], а если равновесие угроз и контругроз, то отсылаем к статье [2].

Список литературы

1. Жуковский В.И., Горбатов А.С., Кудрявцев К.Н. Равновесие по Бержу и по Нэшу в одной линейно-квадратичной дифференциальной игре // Мат. теория игр и ее прил. 2017. Т. 9, № 1. С. 62–94.
2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Самсонов С.П., Высокоос М.И., Бельских Ю.А. Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэшу, но существует равновесие угроз и контругроз // Вестн. ЮУрГУ. Математика. Механика. Физика. 2018. Т. 10, № 2. С. 5–21.

Научное издание

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ:**

Материалы Международной конференции,
посвященной 110-летию со дня рождения
Льва Семеновича Понтрягина,
Москва, 12–14 декабря 2018 г.

Дизайн обложки А. Лукьяновой

Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Отпечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 05.12.2018 г.

Формат 70х100 1/16. Усл. печ. л. 24,7.

Тираж 200 экз. Изд. № 301.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, 8

Издательство ООО «МАКС Пресс»

Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939–3890/91. Тел./Факс 8(495) 939–3891

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.

