Отзыв официального оппонента на диссертацию Полосина А. А.
Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения,
представленную на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности
01.01.02 – "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление"

Актуальность темы диссертации

Первая часть диссертационной работы А. А. Полосина посвящена одной из наиболее трудных краевых задач теории уравнений смешанного типа – так называемой обобщенной задаче Трикоми (задаче M) для уравнения Геллердстедта. Эта задача была впервые поставлена Ф.И. Франклем в 50-х годах прошлого столетия в связи с некоторыми проблемами трансзвуковой газовой динамики в сопле Лаваля. В отличие от классической задачи Трикоми в этой задаче носителем данных Дирихле на гиперболической части границы служит не одна из характеристик, а отходящая от нее нехарактеристическая кривая.

Исследованию этой задачи занимались сам Ф.И. Франкль, который, собственно, и предложил ее постановку, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, М. Проттер и многие другие математики и механики. Наиболее полные результаты относительно разрешимости этой задачи для уравнения Чаплыгина принадлежат К.И. Бабенко. Она сравнительно просто иссследуется в предположении, что отходящая кривая в гиперболической части области в окрестности своего конца является характеристической. В общем случае произвольной нехарактеристической кривой К. И. Бабенко удалось установить разрешимость задачи путем аппроксимации ее кривыми указанного типа, и последующего обоснования предела последовательности решений соответствующих задач. Однако вопрос о разрешимости этой задачи путем прямого сведения к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению оставался открытым. Он был удовлетворительно решен (А.В. Бицадзе и другими авторами) только для уравнения Лаврентьева – Бицадзе. Применительно к уравнению Трикоми и тем более к уравнению Геллерстедта этот метод сопряжен со значительными аналитическими трудностями, что видно уже на примере исследования задачи Трикоми, проведенного самим Ф. Трикоми. По отношению к обобщенной задаче Трикоми они усугубляются тем, что дробные интегралы, возникающие в представления решения задачи Коши в гиперболической части области, имеют переменные верхний и нижний пределы.

Помимо обобщенной задачи Трикоми, в первой главе также изучена близкая задача в постановке Л. В.Овсянникова, когда отходящая кривая начинаясь с отрезка характеристики, далее идет параллельно оси x, причем на последнем участке задаются данные Неймана.

Вторая глава стоит несколько особняком и посвящена вопросам разрешимости и спектральным вопросам для задачи с наклонной производной (с переменным наклоном) для уравнения Гельмгольца в круге и полукруге.

Третья глава диссертации связана с исследованием интегральных уравнений, возникающих в первых двух главах и имеющих самостоятельный научный интерес.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и наиболее значимыми из них являются следующие.

1. Установлена однозначная разрешимость обобщенной задачи Трикоми задачи для уравнения Геллерстедта, а также задачи Л.В. Овсянникова с данными Неймана на участке отходящей кривой, параллельно линии изменения типа.

2. Доказана однозначная разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге, а также смешанной задачи с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге.

3. Найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, в случае, когда образом Фурье ядра служит характеристическая функция.

Остановимся на этих результатах, касающихся обобщенной задачи Трикоми, более подробно. Единственность решения обобщенной задачи Трикоми с небольшими изменениями воспроизводит известное доказательство К. Моравец методом *abc*. Что касается существования, то уже приведение соотношения между функциями $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$ к удобному для дальнейшего использования виду потребовало от диссертанта весьма тонких преобразований. Успех здесь обусловила удачно найденная подстановка функций τ через дробный интеграл специального вида от вспомогательной функции μ, что дало замечательное соотношение

$$\int_0^{q(y)} \frac{\mu(t)dt}{((q(y)-t)^\beta (t-y)^\beta} + \delta \int_{q(y)}^1 \frac{\zeta(t)dt}{((t-q(y))^\beta (y-t)^\beta} = \frac{\psi(y)}{\gamma}, \quad 0 < y < 1,$$

где $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ и положительные постоянные β, δ и γ зависят только от показателя m уравнения Геллерстедта.

В результате вместе с известным соотношением между τ и ν, привнесенным из эллиптической части области, после многочисленных нетривиальных преобразований диссертант сводит задачу к эквивалентному сингулярному уравнению с некарлемановским сдвигом на интервале $(0, 1)$, имеющему довольно сложную структуру.

Решение этого уравнения само представляет собой весьма трудную проблему. Автор выделяет его главную часть, которая с помощью преобразования Лапласа сводится к задаче линейного сопряжения с осциллирующим коэффициентом, выражающимся через специальные функции. Диссертанту удается показать, что индекс Коши этого коэффициента равен нулю, и провести его дальнейшую факторизацию. Тем самым установлено, что оператор исходного уравнения фредгольмов индекса нуль, что вместе с теоремой единственности обеспечило существованию решения обобщенной задачи Трикоми.

Отметим несколько замечаний к диссертационной работе А.А. Полосина.

1. Точные формулировки основных результатов несколько размыты. Например, теорему об однозначной разрешимости обобщенной задачи Трикоми следовало привести вместе со всеми ограничениями на смешанную область, которые были приведены отдельно.

2. Цепочки многочисленных сложных аналитических преобразований приведены автором очень сжато, что значительно затрудняет чтение. Конечно, их подробное систематическое изложение потребовало бы значительнго увеличения объема диссертации. Однако важность и трудность рассматриваемой проблемы и выбранный автором метод ее решения сами по себе заслуживают докторской диссертации.

Конечно, эти замечания никоим образом не снижают общей ценности диссертационной работы.

Общая оценка диссертационной работы

Диссертационная работа выполнена на актуальную тему на высоком научном уровне и носит очень цельный характер. В ней предложен прямой подход к исследованию обобщенной задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта, основанный на ее редукции к сингулярному интегральному уравнению с некарлемановским сдвигом. Подобное решение было ранее осуществлено только для уравнения Лаврентьева – Бицадзе и аналогичный вопрос для уравнений типа Трикоми оставался открытым вплоть до настоящего времени. Причиной служили значительные трудности аналитического характера, которые диссертанту удалось успешно преодолеть. В частности, на этом пути были разработаны новые методы исследования сингулярных интегральных уранвнений неклассического типа, включая уравнения с разностным ядром на конечном интервале. Полученные результаты представляют собой серьезное достижение в теории уравнений смешанного типа.

Все эти результаты диссертации являются новыми и снабжены подробными доказательствами, опубликованы в центральных российских и международных журналах, и апробированы на российских и международных конференциях. Автореферат диссертации верно отражает ее содержание.

Само содержание диссертационной работы полностью соответствует паспорту специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" , а также критериям, определенным пп. 2.1 – 2.5 Положения о порядке присуждения ученых степеней в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Ее оформление соответствует требованиям приложений № 5,6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В целом, диссертационная работа Полосина А.А. "Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения" , представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" , является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в теории уравнений смешанного типа, а ее автор – Полосин Алексей Андреевич, без сомнения, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" .

Главный научный сотрудник
Вычислительного центра
им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02,
профессор А.П. Солдатов

119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40,
тел. 7(910) 223 8654
soldatov48@gmail.com