Отзыв официального оппонента

доктора физико-математических наук профессора Радкевича Евгения Владимировича на диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук Полосина Алексея Андреевича на тему “Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения” по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы. В диссертационной работе изучены уравнения, которые принадлежат разным типам в разных частях рассматриваемой области. Например, в одной части области уравнение может принадлежать эллиптическому, а в другой – гиперболическому типу; эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение вырождается в параболическое или не определено. Постановка краевых задач для уравнений смешанного типа отличается исключительным богатством и своеобразием.

В 1923 г. Ф. Трикоми[1] рассмотрел краевую задачу для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (1)$$

впоследствии названного его именем, в области, ограниченной при $y > 0$ ляпуновской кривой Γ (с ограничениями на поведение вблизи линии $y = 0$, которые впоследствии были значительно ослаблены), а при $y < 0$ – выходящими из концов этой кривой характеристиками уравнения (1); краевые условия при этом ставились на кривой Γ и на одной из характеристик. Решение должно было быть непрерывным в замыкании области, непрерывно дифференцируемым внутри нее и дважды непрерывно дифференцируемым в верхней (эллиптической) и нижней (гиперболической) подобластях; для первых производных решения допускались особенности интегрируемого порядка вблизи концов кривой Γ. Трикоми доказал

[1] Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с.

существование и единственность решения поставленной задачи в указанном классе; при доказательстве существования он свел задачу к сингулярному интегральному уравнению.

Работа Трикоми, ставшая классической, положила начало теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Кроме того, Ф. Трикоми и его ученица М. Чибрарио показали, что общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными в случае одной линии параболического вырождения и некоторых ограничениях на коэффициенты можно записать в виде

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

(уравнение первого рода) или в виде

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

(уравнение второго рода), где m – натуральное число. Эти уравнения называются классическими уравнениями смешанного типа.

В конце 1930-х годов С. Геллерстедт предложил более общее, по сравнению с (1), уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0, \tag{2}$$

впоследствии названное его именем, а также поставил и исследовал новые краевые задачи для этого уравнения.

Вопросы струйных течений газа при дозвуковых скоростях рассматривались в докторской диссертации С.А. Чаплыгина. Уравнение

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3}$$

где $yK(y) > 0$, $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, называют уравнением Чаплыгина.

На момент своего появления работа Трикоми не нашла приложений и поэтому не привлекала особого внимания вплоть до конца 40-х – начала 50-х годов прошлого века, когда с появлением сверхзвуковых самолетов стал актуальным вопрос о математическом описании движения летательных аппаратов при транс- и сверхзвуковых скоростях. Выяснилось, что соответствующие нелинейные задачи могут быть при определенных допущениях (на т.н. плоскости годографа) сведены к линейным краевым задачам для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

С начала 1950-х годов началось бурное развитие теории краевых задач для уравнений смешанного типа, прежде всего в СССР и США. В работах М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, Л. Берса, М. Проттера, К. Моравец и других математиков были поставлены и решены многие задачи для уравнений смешанного типа.

Для описания явлений газовой динамики М.А. Лаврентьевым и А.В. Бицадзе было предложено более простое, по сравнению с (1)-(3), уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \qquad (4)$$

получившее название уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Постановка краевых задач для этого уравнения сохраняет основные особенности общего случая, но дает возможность воспользоваться мощным инструментом – методами теории аналитических функций комплексного переменного. Отметим, что в случае, когда Γ – полуокружность, задача Трикоми для уравнения (4) решается в квадратурах. А.В. Бицадзе[2] сформулировал и доказал принцип максимума для уравнения (4), применимый к широкому классу краевых задач для уравнений смешанного типа. П. Жермен и Р. Баде распространили принцип максимума на уравнение (1).

Другим эффективным способом доказательства единственности является т.н. метод abc, применявшийся К. Моравец и другими авторами.

Существование решения задачи Трикоми доказывается методом интегральных уравнений. Этот метод, применявшийся еще Ф. Трикоми, является одним из основных в теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Основная его идея заключается в том, что сначала решаются соответствующие задачи в верхней и нижней подобластях, а затем решения "склеиваются" вдоль линии изменения типа. При этом широко используются идеи и методы теории потенциала, фундаментальные решения, функция Римана и теория сингулярных интегральных уравнений.

С помощью альтернирующего метода Шварца К.И. Бабенко распространил теорему существования решения задачи Трикоми на более широкий класс областей, сняв ограничение на подход кривой Γ к угловым точкам.

---

2 Бицадзе А.В. О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 561-564.

Наряду с классической задачей Трикоми рассматривают также задачу с отходом от характеристики, когда область гиперболичности ограничена нехарактеристической кривой $\gamma = AC$, отходящей от характеристики внутрь области, и характеристикой BC; краевое условие при этом ставится на γ. Эту задачу называют также обобщенной задачей Трикоми, или задачей М. Впервые задачу М на плоскости годографа для уравнения (3) поставил Ф.И. Франкль в 1945 г. при изучении основной задачи теории сопла Лаваля. В 1951 г. он доказал существование решения задачи М для уравнения (1) в случае, когда кривая Γ является «нормальной» кривой в смысле Трикоми и кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой, выходящей из точки A, и близка к ней.

М. Проттер в 1954 г. рассмотрел задачу М для уравнения (3) и наметил способ доказательства существования ее решения, сохраняя известные ограничения Трикоми на кривую Γ и предполагая, что кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой. В 1954 г. К. Моравец предложила т.н. метод abc доказательства единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

В 1990-е А.П. Солдатов предложил новые корректные постановки смешанных задач для уравнения (4). В частности, он доказал теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения (4) в смешанной области, ограниченной при $y>0$ и $y<0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в угловых точках, при этом дуга при $y<0$ лежит внутри характеристического треугольника.

Задачи с отходом от характеристики рассматривались также в монографии Л.В. Овсянникова[3].

Многие важные достижения теории уравнений смешанного типа нашли свое отражение в монографии А.Г. Кузьмина[4]. В частности, в ней рассмотрены т.н. неклассические уравнения смешанного типа, когда характеристики пересекают

---

3 Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

4 Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Л.: ЛГУ, 1990. – 208 с.

линию (или линии) изменения типа несколько раз; дана качественная картина поведения характеристик уравнения смешанного типа в случае двух независимых переменных; исследована разрешимость краевых задач в пространствах Соболева; изучены неклассические модельные уравнения типа Лаврентьева-Бицадзе; даны приложения рассмотренных методов и результатов к задачам газовой динамики, в частности, к прямой задаче теории сопла Лаваля.

В 1954 г. М. Проттер предложил некоторые многомерные аналоги краевых задач для уравнений смешанного типа. Впоследствии выяснилось, что эти задачи не обладают свойством нетеровости. Многомерный случай оказался весьма сложным, и даже вопрос о корректной постановке краевых задач остается открытым. В последнее время многомерные задачи активно исследуются Е.И. Моисеевым, Н. Попивановым и их учениками.

Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 1970-х годов. С.М. Пономарев впервые выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области, являющейся круговым сектором. Е.И. Моисеев доказал базисность этой системы в эллиптической части области и, опираясь на свойство базисности, разработал спектральный метод решения краевых задач для уравнения смешанного типа.

Одним из основных методов изучения краевых задач для уравнений смешанного типа является их сведение к краевым задачам для уравнений эллиптического типа в соответствующей подобласти. Возникающие при этом краевые условия, как правило, нестандартны. Изучение таких задач имеет важное теоретическое значение.

Краевые и спектральные задачи для уравнений смешанного типа изучались также в работах В.Н. Врагова, А.Н. Зарубина, И.Л. Кароля, Н.В. Кислова, Я.Н. Мамедова, О.А. Репина, К.Б. Сабитова и других математиков.

В теории краевых задач для уравнений смешанного типа важную роль играет теория интегральных уравнений, в частности, сингулярных (особых) интегральных уравнений, уравнений типа свертки, в том числе заданных на конечном отрезке.

Этот один из классических разделов математики, вклад в эту область внесли многие известные ученые: И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Т. Карлеман, З. Прёсдорф, Н.И. Мусхелишвили, Ф.Д. Гахов. А.П. Солдатов[5] построил теорию одномерных сингулярных интегро-функциональных операторов, которые широко встречаются в приложениях и объединяют черты сингулярного оператора Коши и операторов Винера-Хопфа.

Основные результаты работы. В работе рассмотрены:

1. Доказательство однозначной разрешимости задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта.

2. Доказательство однозначной разрешимости задачи с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения.

3. Метод решения граничного уравнения в задаче с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге.

4. Метод решения граничного уравнения в смешанной задаче с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге.

5. Доказательство утверждения о том, что спектр смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге не лежит в карлемановской параболе.

6. Доказательство утверждения о том, что спектр задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа не лежит в карлемановской параболе, а система корневых функций не образует базиса в пространстве Лебега.

7. Формулы, описывающие асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией.

8. Формулы, описывающие решения сингулярных интегральных уравнений и

---

[5] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.

систем таких уравнений.

Научная новизна. Автором диссертации получены принципиально новые результаты в современной теории краевых задач для уравнений эллиптического и смешанного типов. Основные из них следующие:

1. Доказана однозначная разрешимость задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта. В ходе доказательства изучено сингулярное интегральное уравнение со сдвигом, найден и проанализирован символ концевого оператора, отвечающего за поведение решения в окрестности угловой точки.

2. Доказана однозначная разрешимость задачи с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения. Доказательство опирается на теорию сингулярных интегральных уравнений.

3. Доказана однозначная разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде.

4. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде; в ходе доказательства решено в квадратурах особое (сингулярное) интегральное уравнение с переменными коэффициентами.

5. Изучено расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге путем исследования соответствующего сингулярного интегрального уравнения.

6. Изучено расположение спектра и доказано отсутствие свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа.

7. Найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией. Важную роль в доказательстве играет

представление соответствующего оператора в виде суперпозиции сингулярных интегральных операторов.

8. Построены решения сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений.

Методы исследования. Достоверность результатов. Работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты сформулированы в виде математических теорем и снабжены строгими доказательствами.

В работе широко используются метод интегральных уравнений, методы теории функций комплексного переменного, операторы дробного дифференцирования, теория специальных функций, асимптотические разложения, метод эталонных задач при построении асимптотических решений задач дифракции коротких волн, теория и аппарат сингулярных интегральных операторов, методы решения задач сопряжения для кусочно-аналитических функций. При доказательстве единственности решения краевых задач используется т.н. метод abc.

Развитые в диссертации методы и полученные результаты могут быть использованы специалистами в области дифференциальных уравнений и математической физики, теории краевых задач для дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, асимптотических методов.

Основные научные положения, выводы и результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых международных и отечественных журналах. А.А. Полосин представил к защите серьезное научное обобщение своих исследований, проведенных им в течение последних девятнадцати лет. Результаты диссертации докладывались автором на международных и ведущих отечественных семинарах и конференциях, таких как:

- международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 22-27 мая 2001 г.;
- международная научная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, 19-25 июня 2006 г.;

- научный семинар при кафедре дифференциальных уравнений Казанского федерального университета под руководством В.И. Жегалова, Казань, 14 марта 2012 г.;
- научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» под руководством В.А. Садовничего, Москва, 6 ноября 2013 г.;
- международная научная конференция «Applications of Mathematics in Engineering and Economics», Созополь (Болгария), 8-13 июня 2012-16 гг. и 2018 г.;
- научный семинар при кафедре функционального анализа и его применений под руководством Е.И. Моисеева, Москва (многократно);

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 232 наименования (из них 17 – работы автора по теме диссертации) показывает хорошую осведомленность автора о последних достижениях в соответствующей области исследования. Работа выполнена на высоком уровне математической строгости. Все результаты диссертации получены лично автором.

Для доказательства полученных результатов автор широко использует методы современного функционального анализа, спектральной теории, дифференциальных уравнений в частных производных. Применение методов теории аналитических функций комплексного переменного, теории сингулярных интегральных операторов и методов задач сопряжения позволило изучить неклассические краевые задачи, например, задачу типа Дирихле, для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Представляется перспективным применить рассмотренные в диссертации методы интегральных преобразований к изучению различных краевых задач для уравнения Геллерстедта, уравнения второго рода и других уравнений смешанного типа.

Примененный в настоящей диссертации метод факторизации посредством интегральных операторов допускает естественное обобщение и распространение на другие уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке.

Вызывает интерес изучение возможности решения в квадратурах различных сингулярных интегральных уравнений и их систем с неклассическими коэффициентами, выражающимися через решения задач сопряжения.

Какие результаты произвели набольшее впечатление:

1. Для задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта выписано основное (сингулярное, со сдвигом) уравнение, имеющее достаточно сложный вид, найден концевой символ и доказано, что его индекс равен нулю.

2. Задача для уравнения Гельмгольца в полукруге сведена к особому интегральному уравнению с переменными коэффициентами, которое удалось решить в явном виде. В ходе решения проведена факторизация сложного сингулярного интегрального оператора - представление его в виде суперпозиции двух более простых операторов, допускающих обращение в явном виде. Процедура достаточно громоздкая, вывод итоговой формулы весьма трудозатратен. Как известно, для оператора Лапласа подобные краевые задачи сводятся к задаче сопряжения и сравнительно просто решаются в квадратурах. Предложенный диссертантом метод позволяет решать в квадратурах задачи для уравнения Гельмгольца (при достаточно больших значениях параметра) - пока, однако, только в случае разложения по ортогональным системам .

3. Найдена асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора типа свертки на конечном отрезке, у которого образ Фурье ядра – индикатор отрезка. Образ имеет две (конечные) точки разрыва, это значительно усложняет дело по сравнению со случаем, рассмотренным S. Ukai и Б.В. Пальцевым. В общем случае уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке, сводятся к двумерной задаче сопряжения, не решаемой в квадратурах. Попытка асимптотически построить факторизацию наталкивается на серьезные трудности. Применяя аппарат канонических функций - решений одномерных задач сопряжения, диссертант выделил главные члены и провел факторизацию соответствующего сингулярного оператора, представив его в виде суперпозиции двух простых операторов, допускающих обращение в явном виде. Выкладки весьма громоздкие.

Как всегда в работах достаточно большого объема, есть несущественные опечатки. Работа перегружена «техникой», что существенно затрудняет ее чтение. Возможные словесные ее объяснения (как природы возникновения, так и существенности выбранной реализации) увеличили бы объем диссертации, но облегчили бы ее восприятие. Указанные замечания не влияют на основное содержание диссертационной работы и ее теоретические результаты, не меняют ее несомненно положительную оценку и не снижают ценности работы.

Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть полезны специалистам в области дифференциальных уравнений, математической физики, спектральной теории и могут быть использованы в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша, Петербургском государственном университете, ПОМИ РАН, а также в других научных центрах в России и за рубежом.

Диссертационная работа Полосина А.А. является законченным научным исследованием в области краевых задач для уравнений эллиптического и смешанного типов Результаты, полученные в диссертации, являются важными и принципиально новыми. Основное содержание диссертации опубликовано в открытой печати, а именно, в 17 статьях в центральных отечественных и зарубежных журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация «Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода.

Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным п.п. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Диссертация оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Алексей Андреевич Полосин заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

«12» __декабря__ 2018 г.

Официальный оппонент:
профессор кафедры дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук Е.В. Радкевич

Контактные данные:
тел. 8(495)939-12-44, e-mail: evrad07@gmail.com
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Адрес места работы:
11991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений

Тел: 8(495)939-16-31, 8(967) 104-10-22, e-mail: mmmf@mech.math.msu.su

Подпись д. ф.-м.н., профессора Е.В. Радкевича заверяю:

ученый секретарь механико-математического
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
д. ф.-м.н., профессор С.В. Шешенин