ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2011, том 51, № 6, с. 983–1006

УДК 519.626

ПОЛУГЛАДКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОДНЯТЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1)]

© 2011 г. А. Ф. Измаилов, А. Л. Погосян

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ф-т ВМиК)

e-mail: izmaf@ccas.ru; pogosyan85@gmail.com

Поступила в редакцию 09.11.2010 г.

Задачи оптимизации с исчезающими ограничениями – трудный класс оптимизационных задач, находящий важные приложения в области оптимального дизайна топологий механических структур и привлекающий в последнее время все большее внимание специалистов. Главная трудность при анализе и численном решении этих задач состоит в том, что их ограничения обычно оказываются нерегулярными в решении. В данной работе предлагается новый подход к численному решению задач этого класса, основанный на их сведении к так называемым поднятым задачам оптимизации с обычными ограничениями-равенствами и неравенствами. Для решения поднятых задач предлагаются специальные версии метода последовательного квадратичного программирования. Предварительные численные результаты свидетельствуют о конкурентоспособности данного подхода. Библ. 26. Фиг. 5.

Ключевые слова: задача оптимизации с исчезающими ограничениями, поднятая задача, задача оптимизации с комплементарными ограничениями, условия регулярности ограничений, условия оптимальности, последовательное квадратичное программирование.

1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Будем рассматривать *задачу оптимизации с исчезающими ограничениями* (ЗОИО):

$$\begin{gathered} f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \\ H_i(x) \ge 0, \quad G_i(x)H_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция, а $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $G, H: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ – дважды дифференцируемые отображения. Название данного класса задач, введенного в [1], связано со следующим обстоятельством. Если в точке $x \in \mathbb{R}^n$ для некоторого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ выполняется $H_i(x) > 0$, то для допустимости точки x в задаче (1.1) должно, в частности, выполняться ограничение $G_i(x) \le 0$; если же $H_i(x) = 0$, то ограничение $G_i(x)H_i(x) \le 0$ выполняется автоматически, т.е. ограничение $G_i(x) \le 0$ в такой точке x “исчезает”.

В работах [1], [2] приводятся примеры применения ЗОИО для моделирования задач оптимального дизайна топологий механических структур.

Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ – допустимая точка задачи (1.1). Введем множества индексов

$$I_g = I_g(\bar{x}) = \{i = 1, 2, \ldots, m \,|\, g_i(\bar{x}) = 0\},$$

$$I_+ = I_+(\bar{x}) = \{i = 1, 2, \ldots, s \,|\, H_i(\bar{x}) > 0\},$$

$$I_0 = I_0(\bar{x}) = \{i = 1, 2, \ldots, s \,|\, H_i(\bar{x}) = 0\},$$

а также дальнейшее разбиение множества I_+ на подмножества

$$I_{+0} = I_{+0}(\bar{x}) = \{i \in I_+ \,|\, G_i(\bar{x}) = 0\},$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00251).

$$I_{+-} = I_{+-}(\bar{x}) = \{i \in I_+ \big| G_i(\bar{x}) < 0\},$$

а множества I_0 на подмножества

$$I_{0+} = I_{0+}(\bar{x}) = \{i \in I_0 \big| G_i(\bar{x}) > 0\},$$

$$I_{00} = I_{00}(\bar{x}) = \{i \in I_0 \big| G_i(\bar{x}) = 0\},$$

$$I_{0-} = I_{0-}(\bar{x}) = \{i \in I_0 \big| G_i(\bar{x}) < 0\}.$$

Если $I_{00} = \varnothing$, то говорят, что в точке $\bar{x}$ выполнено *условие строгой дополнительности нижнего уровня*. В [1] было показано, что при нарушении этого (весьма обременительного) условия ограничения задачи (1.1) в точке $\bar{x}$ не удовлетворяют условию регулярности Мангасариана–Фромовица, что делает ЗОИО трудными для анализа и численного решения. Специальные результаты по условиям оптимальности, чувствительности и численным методам для ЗОИО, использующие специальную структуру последних, были получены в [1], [3]–[9].

Заметим, что с помощью введения дополнительной переменной $u \in \mathbb{R}^s$ задачу (1.1) можно свести к *задаче оптимизации с комплементарными ограничениями* (ЗОКО):

$$\begin{gathered} f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad G(x) - u \le 0, \\ H(x) \ge 0, \quad u \ge 0, \quad H_i(x)u_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \end{gathered} \tag{1.2}$$

ЗОКО – относительно хорошо изученный класс задач (см., например, [10]–[12] и [13, § 4.3]). Однако, помимо повышения размерности задачи, такое сведение имеет следующий серьезный недостаток: для данного (локального) решения $\bar{x}$ задачи (1.1) соответствующее оптимальное значение дополнительной переменной u определяется неоднозначно; более того, (локальные) решения (1.2) не могут быть строгими, что делает невозможным выполнение в этих решениях никаких разумных достаточных условий оптимальности и вызывает трудности при анализе и численном решении таких задач. Ниже будет показано, как от этого недостатка можно избавиться с помощью специальной модификации целевой функции задачи (1.2).

Напомним некоторые понятия и факты из [1], [6], [7]. Допустимой точке $\bar{x}$ задачи (1.1) поставим в соответствие две вспомогательные "обычные" задачи математического программирования следующим образом: *расширенная задача математическго программирования* (РЗМП) имеет вид

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad H_{I_{0+}}(x) = 0, \quad H_{I_{00} \cup I_{0-}}(x) \ge 0, \quad G_{I_{+0}}(x) \le 0, \tag{1.3}$$

а *суженная задача математического программирования* (СЗМП) имеет вид

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad H_{I_{0+} \cup I_{00}}(x) = 0, \quad H_{I_{0-}}(x) \ge 0, \quad G_{I_{+0} \cup I_{00}}(x) \le 0. \tag{1.4}$$

Здесь для конечного множества I под y_I понимается подвектор вектора y с компонентами y_i, $i \in I$.

Далее, определим *ЗОИО-функцию Лагранжа* задачи (1.1):

$$\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \langle \mu^h, h(x) \rangle + \langle \mu^g, g(x) \rangle - \langle \mu^H, H(x) \rangle + \langle \mu^G, G(x) \rangle,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mu = (\mu^h, \mu^g, \mu^H, \mu^G) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$.

Допустимая точка $\bar{x}$ задачи (1.1) называется *сильно (слабо) стационарной точкой* этой задачи, если она стационарна для задачи (1.3) (задачи (1.4)) в традиционном смысле. Таким образом, слабая стационарность означает существование $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^h, \bar{\mu}^g, \bar{\mu}^H, \bar{\mu}^G) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ такого, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0, \tag{1.5}$$

$$\bar{\mu}^g_{I_g} \ge 0, \quad \bar{\mu}^g_{\{1, \ldots, m\} \setminus I_g} = 0, \quad \bar{\mu}^H_{I_{0-}} \ge 0, \quad \bar{\mu}^H_{I_+} = 0, \quad \bar{\mu}^G_{I_{+0} \cup I_{00}} \ge 0, \quad \bar{\mu}^G_{I_{+-} \cup I_{0+} \cup I_{0-}} = 0, \tag{1.6}$$

и именно такие $\bar{\mu}$ будут пониматься под множителями Лагранжа задачи (1.4), а сильная стационарность означает, что, кроме того,

$$\bar{\mu}^H_{I_{00}} \ge 0, \quad \bar{\mu}^G_{I_{00}} = 0. \tag{1.7}$$

В последнем случае $\bar{\mu}$ называется *ЗОИО-множителем*, отвечающим сильно стационарной точке $\bar{x}$.

Будем говорить, что в допустимой точке $\bar{x}$ задачи (1.1) выполнено *ЗОИО-условие линейности независимости*, если градиенты

$$h_i'(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad g_i'(\bar{x}), \quad i \in I_g, \quad H_i'(\bar{x}), \quad i \in I_0, \quad G_i'(\bar{x}), \quad i \in I_{+0} \cup I_{00}, \tag{1.8}$$

линейно независимы. Заметим, что это не что иное, как обычное условие линейной независимости в точке $\bar{x}$ для задачи (1.4). При выполнении этого условия локальное решение $\bar{x}$ задачи (1.1) является сильно стационарной точкой этой задачи.

В дальнейшем также потребуется несколько более слабое условие регулярности для задачи (1.1). Будем говорить, что в слабо стационарной точке $\bar{x}$ этой задачи выполнено *ЗОИО-строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица*, если в точке $\bar{x}$ для задачи (1.4) выполнено традиционное строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица, что означает единственность отвечающего $\bar{x}$ множителя Лагранжа $\bar{\mu}$ задачи (1.4). Эквивалентная форма этого условия в терминах производных ограничений указана в [7].

Ниже будет использоваться кусочное достаточное условие второго порядка оптимальности

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\mu})\xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in C_2 \backslash \{0\}, \tag{1.9}$$

где

$$C_2 = C_2(\bar{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, h'(\bar{x})\xi = 0, g_{I_g}'(\bar{x})\xi \le 0, H_{I_{0+}}'(\bar{x})\xi = 0, H_{I_{00} \cup I_{0-}}'(\bar{x})\xi \ge 0,$$
$$G_{I_{+0}}'(\bar{x})\xi \le 0, \langle G_i'(\bar{x}), \xi\rangle \langle H_i'(\bar{x}), \xi\rangle \le 0, i \in I_{00}, \langle f'(\bar{x}), \xi\rangle \le 0\}.$$

Это достаточное условие естественным образом соответствует кусочному необходимому условию второго порядка оптимальности. Индекс 2 символизирует то, что в отличие от стандартного критического конуса задачи (1.1) в точке $\bar{x}$, конус C_2 учитывает информацию второго порядка о последнем ограничении в (1.1).

2. ПОДНЯТАЯ ЗОИО

Переформулировка ЗОИО, о которой пойдет речь в этом разделе, основана на той же идее, что и переформулировка ЗОКО, предложенная в [14] и использованная в [15].

А именно, рассмотрим множество

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, b \ge 0, ab \le 0\},$$

которое представляет собой объединение ортанта и луча. Введем дополнительную переменную c и зададим гладкими ограничениями множество S в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (a, b, c) так, чтобы проекция S на плоскость (a, b) совпадала с множеством D. Например, это можно сделать следующим образом:

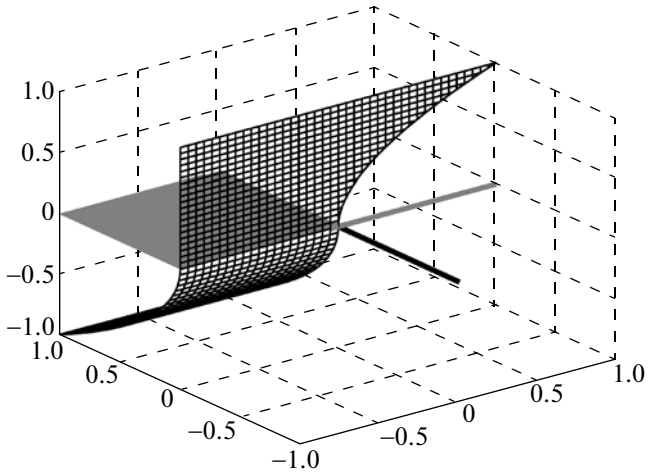
$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\min\{0, c\})^2 = b, a \le (\max\{0, c\})^2\}.$$

На фиг. 1 изображено такое множество S (в виде сетки) и множество D.

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, s$ пару ограничений $H_i(x) \ge 0$, $G_i(x)H_i(x) \le 0$ можно записать в виде $(H_i(x), G_i(x)) \in D$. Идея состоит в том, чтобы заменить это ограничение на включение $(H_i(x), G_i(x), y_i) \in S$ с дополнительной переменной y_i, появление которой как раз и мотивирует название “поднятая ЗОИО” для получаемой таким образом задачи

$$\begin{gathered} f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \\ (\min\{0, y\})^2 - H(x) = 0, \quad G(x) - (\max\{0, y\})^2 \le 0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $y \in \mathbb{R}^s$ – дополнительная переменная. Здесь и далее операции минимума, максимума, возведения в степень понимаются как покомпонентные.



Фиг. 1.

Для допустимой точки $\bar{x}$ задачи (1.1) ограничениями задачи (2.1) дополнительная переменная y, вообще говоря, определяется неоднозначно: подходящими являются все ее значения, удовлетворяющие соотношениям

$$y_i \begin{cases} = -(H_i(\bar{x}))^{1/2}, & i \in I_+, \\ \geq (G_i(\bar{x}))^{1/2}, & i \in I_{0+}, \\ \geq 0, & i \in I_{00} \cup I_{0-}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Более того, поскольку y не входит в целевую функцию задачи (2.1), из (2.2) следует, что если $I_0 \neq \varnothing$, то $(\bar{x}, \bar{y})$ не может быть строгим локальным решением задачи (2.1) ни при каком $\bar{y}$. Это порождает трудности при непосредственном использовании поднятой задачи (2.1) для численного решения задачи (1.1).

Природу нестрогости решений задачи (2.1) можно проинтерпретировать еще и так. Следуя [14] и [15], строим поднятую задачу для задачи (1.2):

$$\begin{gathered} f(x) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0, \\ G(x) - u \leq 0, \quad (\min\{0, y\})^2 - H(x) = 0, \quad (\max\{0, y\})^2 - u = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Последнее ограничение дает явное выражение для u:

$$u = (\max\{0, y\})^2. \tag{2.4}$$

Если с помощью этого выражения исключить переменную u, то задача (2.3) превращается в задачу (2.1). Но тогда обсуждавшаяся выше неизбежная нестрогость локальных решений задачи (1.2) порождает нестрогость локальных решений задачи (2.1).

Для преодоления указанной трудности задаче (1.2) можно поставить в соответствие следующую задачу:

$$\begin{gathered} f(x) + \sum_{i=1}^{s} (u_i^2 - cu_i) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0, \quad G(x) - u \leq 0, \\ H(x) \geq 0, \quad u \geq 0, \quad H_i(x)u_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $c > 0$ играет роль параметра штрафа за нежелательные вариации переменной u.

Предложение 1. *Пусть* $\bar{x}$ *— локальное решение исходной задачи* (1.1). *Для произвольного числа* c, *удовлетворяющего неравенству*

$$c > \max\{0, 2\max\{G_i(\bar{x}) | i \in I_{0+}\}\}, \tag{2.6}$$

определим $\bar{u} \in \mathbb{R}^s$ *следующим образом:*

$$\bar{u} = \begin{cases} 0, & i \in I_+, \\ c/2, & i \in I_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Тогда точка $(\bar{x}, \bar{u})$ *является локальным решением задачи* (2.5).

Доказательство. При выполнении условия (2.6) из (2.7) вытекает, что если опустить в задаче (2.5) заведомо неактивные в точке $(\bar{x}, \bar{u})$ ограничения, то получим следующую "локальную" версию задачи (2.5):

$$f(x) + \sum_{i \in I_0} (u_i^2 - cu_i) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad H_{I_0}(x) = 0, \quad G_{I_{+0}}(x) \le 0 \tag{2.8}$$

(для любой близкой к $(\bar{x}, \bar{u})$ допустимой точки (x, u) задачи (2.5) автоматически выполняется $u_{I_+} = 0$). Поскольку ограничения задачи (2.8) не содержат u, минимизацию по u можно осуществлять независимо от x: минимум соответствующего слагаемого целевой функции всегда достигается при $u_i = \bar{u}_i = c/2$, $i \in I_0$. Отсюда следует требуемое. Предложение доказано.

Приведенное доказательство дает основание ожидать, что если $\bar{x}$ – строгое локальное решение задачи (1.1), то определенный в (2.7) элемент $\bar{u}$ будет отвечать строгому локальному решению $(\bar{x}, \bar{u})$ задачи (2.5).

Принимая во внимание выражение (2.4), модификация (2.5) задачи (1.2) соответствует следующей модификации поднятой задачи (2.1):

$$\begin{gathered} f_c(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} ((\max\{0, y_i\})^4 - c(\max\{0, y_i\})^2) \longrightarrow \min, \\ h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad (\min\{0, y\})^2 - H(x) = 0, \quad G(x) - (\max\{0, y\})^2 \le 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Аналогом предложения 1 для задачи (2.9) является следующий результат.

Предложение 2. *Пусть* $\bar{x}$ *– локальное решение исходной задачи* (1.1). *Для произвольного числа* c, *удовлетворяющего неравенству* (2.6), *определим* $\bar{y} \in \mathbb{R}^s$ *следующим образом:*

$$\bar{y}_i = \begin{cases} -(H_i(\bar{x}))^{1/2}, & i \in I_+, \\ (c/2)^{1/2}, & i \in I_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда точка $(\bar{x}, \bar{y})$ *является локальным решением задачи* (2.9).

Доказательство. Рассуждение совершенно аналогично доказательству предложения 1, только вместо (2.8) нужно рассматривать следующую "локальную" версию задачи (2.9):

$$f(x) + \sum_{i \in I_0} (y_i^4 - cy_i^2) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \quad -H_{I_0}(x) = 0, \quad G_{I_{+0}}(x) \le 0 \tag{2.11}$$

(компоненты y_i, $i \in I_+$, определяются однозначно, отрицательны, и не влияют на значение целевой функции задачи (2.9)). Предложение доказано.

Следующий пример демонстрирует главный потенциальный недостаток рассматриваемого подхода: если даже точка $\bar{x}$ является глобальным решением задачи (1.1), то определяемое согласно (2.10) локальное решение $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9) глобальным может не быть, каким бы большим ни выбиралось $c > 0$. Более того, в этом примере у глобального решения $(\tilde{x}, \tilde{y})$ задачи (2.9) компонента $\tilde{x}$ не является даже локальным решением задачи (1.1): в этой точке выполнено ЗОИО-условие линейной независимости и она является слабо стационарной, но не сильно стационарной.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $l = m = 0$, $s = 1$, $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$, $G(x) = x_1$, $H(x) = x_2$. Единственным глобальным решением соответствующей задачи (1.1) является точка $\bar{x} = (0, 1)$, где $I_{+0} = \{1\}$. Формула (2.10) дает $\bar{y} = -(H(\bar{x}))^{1/2} = -1$, и поэтому $f_c(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ при любом c. Вместе с тем в задаче (2.9) есть еще ровно одна стационарная точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} = (0, 0)$, а $\tilde{y} = (c/2)^{1/2}$, причем при любом $c > 0$ эта точка является локальным решением. Более того, при $c > 2$ имеем $f_c(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + (c/2)^2 - c^2/2 < 0 = f_c(\bar{x}, \bar{y})$, т.е. именно $(\tilde{x}, \tilde{y})$ является глобальным решением задачи (2.9).

Тем не менее приводимые в разд. 5 численные результаты свидетельствуют о перспективности данного подхода.

Продолжая изучение связей между задачами (1.1) и (2.9), выписываем функцию Лагранжа последней задачи:

$$L_c(x, y, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{s}((\max\{0, y_i\})^4 - c(\max\{0, y_i\})^2) +$$
$$+ \langle \lambda^h, h(x)\rangle + \langle \lambda^g, g(x)\rangle + \langle \lambda^H, (\min\{0, y\})^2 - H(x)\rangle + \langle \lambda^G, G(x) - (\max\{0, y\})^2\rangle,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^s$ и $\lambda = (\lambda^h, \lambda^g, \lambda^H, \lambda^G) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$. Тогда

$$\frac{\partial L_c}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \lambda), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial y_i}(x, y, \lambda) = 4(\max\{0, y_i\})^3 - 2c\max\{0, y_i\} + 2\lambda_i^H \min\{0, y_i\} - 2\lambda_i^G \max\{0, y_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.13}$$

Предложение 3. *Пусть $\bar{x}$ — допустимая точка задачи* (1.1).

Тогда для всякого числа c, удовлетворяющего условию (2.6), *справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\bar{x}$ — слабо стационарная точка задачи* (1.1), *а $\bar{\mu}$ — отвечающий ей множитель Лагранжа задачи* (1.4), *то для всякого множества индексов $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$ такого, что*

$$J \supset \{i \in I_{00} | \bar{\mu}_i^G > 0\}, \tag{2.14}$$

точка $(\bar{x}, y^J)$, где $y^J \in \mathbb{R}^s$ имеет компоненты

$$y_i^J = \begin{cases} -(H_i(\bar{x}))^{1/2}, & i \in I_+, \\ (c/2)^{1/2}, & i \in I_{0+} \cup ((I_{00} \cup I_{0-})\backslash J), \\ 0, & i \in J, \end{cases} \tag{2.15}$$

является стационарной в задаче (2.9), *причем ей отвечает множитель Лагранжа $\lambda = \bar{\mu}$;*

2) *если $\bar{x}$ — сильно стационарная точка задачи* (1.1), *а $\bar{\mu}$ — отвечающий ей ЗОИО-множитель, то точка $(\bar{x}, y)$ является стационарной точкой задачи* (2.9) *тогда и только тогда, когда $y = y^J$ при некотором $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$, причем всем этим стационарным точкам отвечает множитель Лагранжа $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$;*

3) *если $(\bar{x}, y)$ — стационрная точка задачи* (2.9), *а $\bar{\lambda}$ — отвечающий ей множитель Лагранжа, то $y = y^J$ при некотором $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$, и для $\bar{\mu} = \bar{\lambda}$ выполняется условие* (1.5), *а также* (1.6), *кроме, возможно, неравенства $\bar{\mu}_{I_{0-}}^H \geq 0$;*

4) *если $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$, $J \neq \varnothing$, то точка $(\bar{x}, y^J)$ не является даже локальным решением задачи* (2.9).

Доказательство. Из (2.12) и (2.13) вытекает, что система Каруша–Куна–Таккера (ККТ), характеризующая стационарные точки задачи (2.9) и отвечающие им множители Лагранжа, имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \\
2(\max\{0, y_i\})^3 - c(\max\{0, y_i\}) + \lambda_i^H \min\{0, y_i\} - \lambda_i^G \max\{0, y_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \\
h(x) = 0, \\
\lambda^g \geq 0, \quad g(x) \leq 0, \quad \langle \lambda^g, g(x) \rangle = 0, \\
(\min\{0, y\})^2 - H(x) = 0, \\
\lambda^G \geq 0, \quad G(x) - (\max\{0, y\})^2 \leq 0, \quad \langle \lambda^G, G(x) - (\max\{0, y\})^2 \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

С учетом (2.6) при $x = \bar{x}$ эта система превращается в следующую систему:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(\bar{x}, \lambda) = 0, \\
y_{I_+} = -(H_{I_+}(\bar{x}))^{1/2}, \\
y_i = (c/2)^{1/2}, \quad i \in I_{0+}, \quad y_i(2y_i^2 - c - \lambda_i^G) = 0, \quad i \in I_{00}, \quad y_i(2y_i^2 - c) = 0, \quad i \in I_{0-}, \\
\lambda_{I_g}^g \geq 0, \quad \lambda_{\{1, \ldots, m\} \setminus I_g}^g = 0, \\
\lambda_{I_+}^H = 0, \quad \lambda_{I_{+0}}^G \geq 0, \quad \lambda_{I_{+-} \cup I_{0+} \cup I_{0-}}^G = 0, \\
\lambda_{I_{00}}^G \geq 0, \quad y_{I_{00}} \geq 0, \quad \langle \lambda_{I_{00}}^G, y_{I_{00}} \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Если $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$ удовлетворяет условию (2.14), то для y^J, определяемого согласно (2.15), из (1.5) и (1.6) вытекает, что пара $(y, \lambda) = (y^J, \bar{\mu})$ удовлетворяет системе (2.17). Это доказывает утверждение 1) предложения 3.

Если же $\bar{x}$ является сильно стационарной точкой задачи (1.1), а $\bar{\mu}$ – отвечающим ей ЗОИО-множителем, то, привлекая дополнительно (1.7), получаем, что для y^J, определяемого согласно (2.15), пара $(y, \lambda) = (y^J, \bar{\mu})$ удовлетворяет системе (2.17) при любом $J \subset I_{00} \cup I_{0-}$. С другой стороны, если пара $(y, \lambda) \in \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ удовлетворяет (2.17), то, полагая

$$J = \{i \in I_{00} \cup I_{0-} | y_i = 0\},$$

получаем, что $y = y^J$. Это доказывает утверждения 2) и 3).

Наконец, если $j \in J \subset I_{00} \cup I_{0-}$, то для всякого $t > 0$ определим элемент $y(t) \in \mathbb{R}^s$ следующим образом: $y_i(t) = y_i^J$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{j\}$, $y_j(t) = t > 0 = y_j^J$. Тогда точка $(\bar{x}, y(t))$ будет допустима в задаче (2.9), причем

$$f_c(\bar{x}, y(t)) - f_c(\bar{x}, y^J) = (y_j(t))^4 - c(y_j(t))^2 = t^4 - ct^2 < 0$$

при любом достаточно малом $t > 0$. Таким образом, $(\bar{x}, y^J)$ не может быть локальным решением задачи (2.9), что и доказывает утверждение 4). Предложение доказано.

В примере 1 точка $\tilde{x} = (0, 0)$, отвечающая глобальному решению задачи (2.9), является по крайней мере слабо (но не сильно) стационарной в задаче (1.1). Следующий пример показывает, что компонента $\bar{x}$ стационарной точки $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9) может не быть даже слабо стационарной точкой задачи (1.1).

Пример 2. Пусть $n = 2$, $l = m = 0$, $s = 1$, $f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$, $G(x) = x_1$, $H(x) = x_2$. Рассмотрим точку $\bar{x} = (-1, 0)$, в которой $I_{0-} = \{1\}$. Эта точка не является слабо стационарной в задаче (1.1),

так как соотношению (1.5) удовлетворяют только $\bar{\mu}^H = -2 < 0$, $\bar{\mu}^G = 0$ и условие $\bar{\mu}^H_{I_{0-}} \geq 0$ в (1.6) нарушается. Однако соответствующая поднятая задача (2.9)

$$f_c(x, y) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (\max\{0, y\})^4 - c(\max\{0, y\})^2 \longrightarrow \min,$$
$$(\min\{0, y\})^2 - x_2 = 0, \quad x_1 - (\max\{0, y\})^2 \leq 0$$

имеет стационарные точки вида $(\bar{x}, \bar{y}^1)$ и $(\bar{x}, \bar{y}^2)$, где $\bar{y}^1 = 0$, $\bar{y}^2 = (c/2)^{1/2}$, причем $\bar{\lambda}^H = \bar{\mu}^H$, $\bar{\lambda}^G = \bar{\mu}^G$. Более того, при $c \geq 2$ точка $(\bar{x}, \bar{y}^2)$ является глобальным решением задачи (2.9) (при $0 < c \leq 2$ эта задача имеет другое глобальное решение $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} = (-1, 1)$ – глобальное решение задачи (1.1), $\tilde{y} = -1$).

Таким образом, задача (2.9) может иметь "паразитические" стационарные точки $(\bar{x}, \bar{y})$, среди которых могут быть ее локальные (и даже глобальные) решения. Заметим, однако, что, согласно утверждению 3) предложения 3, порождаемые ими точки $\bar{x}$ удовлетворяют условию лишь немногим более слабому, чем слабая стационарность (может нарушаться лишь неравенство $\bar{\mu}^H_{I_{0-}} > 0$ в (1.6)), причем слабая стационарность на самом деле является здесь весьма сильной концепцией стационарности (см. [9]). Ясно также, что на большее переход к поднятой задаче рассчитывать не позволяет.

3. ПОЛУГЛАДКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОДНЯТОЙ ЗОИО

Для решения задачи (2.9) предлагается следующий вариант метода последовательного квадратичного программирования (ПКП). Пусть (x^k, y^k, λ^k) – текущее приближение, где $x^k \in \mathbb{R}^n$, $y^k \in \mathbb{R}^s$, $\lambda^k = ((\lambda^h)^k, (\lambda^g)^k, (\lambda^H)^k, (\lambda^G)^k) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$. Следующее прямое приближение $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ ищется как стационарная точка задачи квадратичного программирования

$$\begin{gathered}
\left\langle f_c'(x^k, y^k), \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{H}_k \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \min, \\
h(x^k) + h'(x^k)(x - x^k) = 0, \quad g(x^k) + g'(x^k)(x - x^k) \leq 0, \\
(\min\{0, y^k\})^2 - H(x^k) - H'(x^k)(x - x^k) + 2B_{\min}(y^k)(y - y^k) = 0, \\
G(x^k) - (\max\{0, y^k\})^2 + G'(x^k)(x - x^k) - 2B_{\max}(y^k)(y - y^k) \leq 0,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

а следующее двойственное приближение $\lambda^{k+1} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ – как отвечающий этой стационарной точке множитель Лагранжа. Здесь $\mathcal{H}_k$ – симметричная $(n + s) \times (n + s)$-матрица, и для $y \in \mathbb{R}^s$ имеют место равенства

$$B_{\min}(y) = \operatorname{diag}(\min\{0, y\}), \quad B_{\max}(y) = \operatorname{diag}(\max\{0, y\}),$$

где для всякого $z \in \mathbb{R}^s$ через $\operatorname{diag}(z)$ обозначается диагональная $s \times s$-матрица с диагональю z. Заметим, что

$$f_c'(x^k, y^k) = (f'(x^k), 4(\max\{0, y^k\})^3 - 2c\max\{0, y^k\}).$$

В базовом методе последовательного квадратичного программирования (см. [16, § 4.4]) матрица $\mathcal{H}_k$ выбирается как матрица Гессе функции Лагранжа решаемой задачи. Однако в данном случае такой выбор невозможен, поскольку и целевая функция, и ограничения задачи (2.9) диф-

ференцируемы лишь один раз. Вместе с тем производные целевой функции и ограничений этой задачи являются полугладкими и поэтому базовый выбор матрицы $\mathcal{H}_k$ заменяется следующим:

$$\mathcal{H}_k \in (\partial_B)_{(x,y)} \frac{\partial L_c}{\partial(x,y)}(x^k, y^k, \lambda^k),$$

где в правой части стоит так называемый B-дифференциал градиентного отображения $(x, y) \longrightarrow \longrightarrow \dfrac{\partial L_c}{\partial(x,y)}(x, y, \lambda^k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ (определения полугладкости и B-дифференциала см., например, в [16, § 4.5]). Методы такого рода изучались в [17], [18], а также в недавней работе [19] применительно к задачам оптимизации с ограничениями-равенствами и, в частности, к поднятым задачам оптимизации с комплементарными ограничениями. С использованием (2.12), (2.13) в данном случае B-дифференциал вычисляется явно и состоит из матриц вида

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) & 0 \\ 0 & 2\mathrm{diag}(a_c(y^k, \lambda^k)) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где для $y \in \mathbb{R}^s$ и $\lambda \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$

$$a_c(y, \lambda) = 6(\max\{0, y\})^2 + b_c(y, \lambda), \tag{3.3}$$

$$(b_c(y, \lambda))_i = \begin{cases} \lambda_i^H, & y_i < 0, \\ \lambda_i^H \text{ или } -\lambda_i^G - c, & y_i = 0, \\ -\lambda_i^G - c, & y_i > 0, \end{cases} \tag{3.4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

При анализе локального поведения описанного полугладкого метода ПКП ситуация упрощается, поскольку метод сводится к обычному методу ПКП. Пусть $\bar{x}$ — сильно стационарная точка задачи (1.1), $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^h, \bar{\mu}^g, \bar{\mu}^H, \bar{\mu}^G)$ – отвечающий ей ЗОИО-множитель, а $\bar{y}$ определяется согласно (2.10). Тогда если элемент $y^k \in \mathbb{R}^s$ близок к $\bar{y}$, то из (3.4) вытекает равенство

$$(b_c(y^k, \lambda^k))_i = \begin{cases} (\lambda_i^H)^k, & i \in I_+, \\ -(\lambda_i^G)^k - c, & i \in I_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Поэтому, согласно (3.2), (3.3), итерационная подзадача (3.1) совпадает с итерационной подзадачей базового метода ПКП для задачи

$$\begin{gathered} f(x) + \sum_{i \in I_0} (y_i^4 - c y_i^2) \longrightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad g(x) \le 0, \\ y_{I_+}^2 - H_{I_+}(x) = 0, \quad -H_{I_0}(x) = 0, \quad G_{I_+}(x) \le 0, \quad G_{I_0}(x) - y_{I_0}^2 \le 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

с дважды дифференцируемыми целевой функцией и ограничениями. Ограничение $y_{I_+}^2 - H_{I_+}(x) = 0$ служит лишь для определения компонент y_i, $i \in I_+$, которые больше нигде в задаче (3.6) не встречаются, и это ограничение можно опустить, как и соответствующее линеаризованное ограничение в подзадаче метода ПКП. Если, кроме того, опустить в (3.6) заведомо неактивные в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ ограничения, то получим задачу (2.11), использовавшуюся при доказательстве предложения 2. Из сказанного следует, что локальная сверхлинейная сходимость рассматриваемого метода к стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9) и отвечающему ей множителю Лагранжа $\bar{\mu}$ (см. утверждение 2) предложения 3) обосновывается в тех же предположениях, в которых обос-

новывается локальная сверхлинейная сходимость базового метода ПКП к стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$ задачи (2.11) и отвечающему ей множителю Лагранжа $(\bar{\mu}^h, \bar{\mu}^g, \bar{\mu}^H_{I_0}, \bar{\mu}^G_{I_{+0}})$.

Слабейшие условия такого рода были получены в [20]; помимо непрерывности вторых производных целевой функции и ограничений в искомой стационарной точке, они включают в себя строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица и достаточное условие второго порядка оптимальности. Для задачи (2.11) первое из этих условий состоит в единственности множителя Лагранжа $(\bar{\mu}^h, \bar{\mu}^g, \bar{\mu}^H_{I_0}, \bar{\mu}^G_{I_{+0}})$, отвечающего стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$. Разумеется, это условие выполняется автоматически при выполнении условия линейной независимости градиентов

$$h_i'(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad g_i'(\bar{x}), \quad i \in I_g, \quad H_i'(\bar{x}), \quad i \in I_0, \quad G_i'(\bar{x}), \quad i \in I_{+0}. \tag{3.7}$$

Предложение 4. *Пусть $\bar{x}$ – сильно стационарная точка задачи* (1.1), *число c удовлетворяет условию* (2.6), *а $\bar{y}$ определяется согласно* (2.10).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если в точке $\bar{x}$ выполнено ЗОИО-условие линейной независимости* (1.8), *то выполняется и условие линейной независимости градиентов в* (3.7), *а значит, и строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица в стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$ задачи* (2.11);

2) *если в стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$, задачи* (2.11) *выполняется строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица, то в точке $\bar{x}$ выполняется ЗОИО-строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно: система градиентов (1.8) из определения ЗОИО-условия линейной независимости содержит в себе систему градиентов (3.7).

Для доказательства утверждения 2) заметим сначала, что если $\bar{\lambda}$ – множитель Лагранжа, отвечающий стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9), то, согласно утверждению 3) предложения 3, имеет место равенствоа $\bar{\lambda}^H_{I_+} = 0$. Отсюда немедленно следует, что из единственности множителя Лагранжа $(\bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^H_{I_0}, \bar{\lambda}^G_{I_{+0}})$, отвечающего стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$ задачи (2.11), вытекает единственность множителя Лагранжа $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^H, \bar{\lambda}^G)$, отвечающего стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9): в последнем множителе по необходимости $\bar{\lambda}^H_{I_+} = 0$, $\bar{\lambda}^G_{I_{+,-} \cup I_0} = 0$, а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами множителя для задачи (2.11). Наконец, согласно утверждению 1) предложения 3, из единственности множителя, отвечающего стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи (2.9), вытекает единственность множителя Лагранжа, отвечающего стационарной точке $\bar{x}$, но для задачи (1.4), а это и есть ЗОИО-строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица. Предложение доказано.

Как показывает следующий пример, импликация, обратная установленной в утверждении 2) предложения 4, вообще говоря, не имеет места.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $l = m = 0$, $s = 2$, $f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2$, $G(\cdot) \equiv (-1, -1)$, $H(x) = (x_2, x_2)$. Единственным (локальным и глобальным) решением задачи (1.1) является точка $\bar{x} = (-1, 0)$, в которой $I_{0-} = \{1, 2\}$. Соответствующая СЗМП имеет вид

$$f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \longrightarrow \min, \quad x_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

(ограничение повторяется). Отвечающие $\bar{x} = (-1, 0)$ множители Лагранжа СЗМП характеризуются системой

$$\mu_1^H + \mu_2^H = 0, \quad \mu_1^H \geq 0, \quad \mu_2^H \geq 0,$$

которая имеет единственное решение $\bar{\mu}^H = 0$. Таким образом, в точке $\bar{x} = (-1, 0)$ выполняется ЗОИО-строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица.

С другой стороны, для соответствующей поднятой задачи (2.9)

$$(x_1+1)^2+x_2^2+(\max\{0,y_1\})^4+(\max\{0,y_2\})^4-c((\max\{0,y_1\})^2+(\max\{0,y_2\})^2)\longrightarrow\min,$$

$$(\min\{0,y_1\})^2-x_2=0,\quad(\min\{0,y_2\})^2-x_2=0,$$

$$-1-(\max\{0,y_1\})^2\le 0,\quad -1-(\max\{0,y_2\})^2\le 0,$$

при любом $c>0$ множители Лагранжа в точке $(\bar x,\bar y)$, где $\bar y=((c/2)^{1/2},(c/2)^{1/2})$ вычисляется согласно (2.10), характеризуются системой

$$\lambda_1^H+\lambda_2^H=0,\quad \lambda_1^G=0,\quad \lambda_2^G=0,$$

решение которой не единственно. Значит, строгое условие регулярности Мангасариана–Фромовица для поднятой задачи не выполняется.

Далее, с учетом (2.10), достаточное условие второго порядка оптимальности для задачи (2.11) имеет вид

$$0<\left\langle\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}(\bar x,\bar\mu)\xi,\xi\right\rangle+\sum_{i\in I_0}(12\bar y_i^2-2c)\eta_i^2=\left\langle\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}(\bar x,\bar\mu)\xi,\xi\right\rangle+4c\sum_{i\in I_0}\eta_i^2\quad\forall(\xi,\eta)\in K\backslash\{0\},\tag{3.8}$$

где

$$K=K(\bar x)=\Big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s\,\Big|\,h'(\bar x)\xi=0,\,g'_{I_g}(\bar x)\xi\le 0,\,H'_{I_0}(\bar x)\xi=0,\,G'_{I_{+0}}(\bar x)\xi\le 0,$$
$$\langle f'(\bar x),\xi\rangle+\sum_{i\in I_0}(4\bar y_i^3-2c\bar y_i)\eta_i\le 0\Big\}=\tilde C\times\mathbb{R}^s,\tag{3.9}$$

$$\tilde C=\tilde C(\bar x)=\{\xi\in\mathbb{R}^n\,|\,h'(\bar x)\xi=0,\,g'_{I_g}(\bar x)\xi\le 0,\,H'_{I_0}(\bar x)\xi=0,\,G'_{I_{+0}}(\bar x)\xi\le 0,\,\langle f'(\bar x),\xi\rangle\le 0\}\subset C_2.\tag{3.10}$$

Очевидно, что приведенное достаточное условие равносильно условию

$$\left\langle\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}(\bar x,\bar\mu)\xi,\xi\right\rangle>0\quad\forall\xi\in\tilde C\backslash\{0\}.$$

Отсюда и из включения в (3.10) немедленно вытекает следующее

Предложение 5. *Пусть $\bar x$ – сильно стационарная точка задачи* (1.1), *$\bar\mu$ – отвечающий ей ЗОИО-множитель, причем выполнено кусочное достаточное условие второго порядка оптимальности* (1.9). *Пусть число c удовлетворяет условию* (2.6), *а $\bar y$ определяется согласно* (2.10).

Тогда в стационарной точке $(\bar x,\bar y)$ задачи (2.9) *для отвечающего этой стационарной точке множителя Лагранжа $\bar\mu$ выполняется достаточное условие второго порядка оптимальности* (3.8).

Из утверждения 1) предложения 4, из предложения 5 и из результатов работы [20] вытекает следующая характеризация локальной сверхлинейной сходимости полугладкого метода ПКП для задачи (2.9) (напомним еще раз, что локально полугладкий метод ПКП для задачи (2.9) совпадает с базовым методом ПКП для задачи (2.11)).

Теорема 1. *Пусть функция f и отображения h, g, H и G дважды дифференцируемы в некоторой окрестности сильно стационарной точки $\bar x$ задачи* (1.1), *а их вторые производные непрерывны в этой точке. Пусть в точке $\bar x$ выполнено ЗОИО-условие линейной независимости* (1.8) *и кусочное достаточное условие второго порядка оптимальности* (1.9) *для (единственного) отвечающего $\bar x$ ЗОИО-множителя $\bar\mu=(\bar\mu^h,\bar\mu^g,\bar\mu^H,\bar\mu^G)$. Пусть число c удовлетворяет условию* (2.6), *а $\bar y$ определяется согласно* (2.10).

Тогда существует число $\delta>0$ такое, что при любом способе выбора матриц $\mathcal{H}_k$, удовлетворяющих (3.2)–(3.4) *для любого начального приближения $(x^0,y^0,\lambda^0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s\times(\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s)$, до-*

статочно близкого к $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu})$, *существует последовательность* $\{(x^k, y^k, \lambda^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ *такая, что для всякого k точка* (x^{k+1}, y^{k+1}) *является стационарной точкой задачи* (3.1), *а* λ^{k+1} *— отвечающим этой стационарной точке множителем Лагранжа, причем выполняется неравенство*

$$\left\|(x^{k+1} - x^k, y^{k+1} - y^k, \lambda^{k+1} - \lambda^k)\right\| < \delta$$

и любая такая последовательность сходится к $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu})$ *со сверхлинейной скоростью. Если, кроме того, вторые производные функции f и отображений h, g, H и G локально липшицевы относительно* $\bar{x}$, *то скорость сходимости квадратичная.*

Заметим, что, согласно сказанному выше, ЗОИО-условие линейной независимости (1.8) в этой теореме может быть несколько ослаблено: его можно заменить строгим условием Мангасариана–Фромовица в стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y}_{I_0})$ задачи (2.11).

В [7] для решения задачи (1.1) был предложен так называемый кусочный метод ПКП, локальная сверхлинейная сходимость которого была обоснована при выполнении ЗОИО-строгого условия Мангасариана–Фромовица и кусочного достаточного условия второго порядка оптимальности (1.9). Согласно утверждению 2) предложения 4 и примеру 3, эти условия несколько слабее того, что требуется для рассматриваемого здесь полугладкого метода ПКП. Для предложенных в той же работе [7] методов активного множества локальная сверхлинейная сходимость обосновывается при выполнении того же ЗОИО-строгого условия Мангасариана–Фромовица, но вместо кусочного достаточного условия второго порядка оптимальности (1.9) предполагается несколько более сильное обычное достаточное условие второго порядка оптимальности. Кроме того, для кусочного метода ПКП и методов активного множества отсутствует очевидная и готовая к использованию стратегия глобализации, в то время как для полугладкого метода ПКП для задачи (2.9) разумная и естественная стратегия глобализации будет описана в разд. 4.

Стратегия глобализации, о которой идет речь, основана на одномерном поиске для точной штрафной функции для задачи (2.9). Однако направление $p^k = (x^{k+1} - x^k, y^{k+1} - y^k)$, где (x^{k+1}, y^{k+1}) – стационарная точка задачи (3.1), гарантированно является направлением убывания такой штрафной функции в точке (x^k, y^k) лишь в том случае, когда матрица $\mathcal{H}_k$ положительно определена (см., например, [16, лемма 5.4.1]). Матрицы $\mathcal{H}_k$, вычисляемые согласно (3.2)–(3.4), положительно-определенными могут не быть. Эти матрицы можно заменить полными квазиньютоновскими аппроксимациями. При этом, однако, разрушается присутствующая в $\mathcal{H}_k$ полезная диагональная структура. Ниже излагается другой способ получения положительно-определенных модификаций $\mathcal{H}_k$, использующий структуру этих матриц аналогично тому, как это делалось для ЗОКО в [19].

Идея состоит в том, чтобы использовать стандартные квазиньютоновские формулы только для верхнего левого блока $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)$ в (3.2), а элементы диагонали $a_c(y^k, \lambda^k)$ правого нижнего блока при необходимости заменять положительными числами, причем так, чтобы асимптотически возмущение диагонали $a_c(y^k, \lambda^k)$ исчезало. А именно, будем теперь определять $\mathcal{H}_k$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & 2\mathrm{diag}(a^k) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где H_k – симметричная положительно-определенная $n \times n$-матрица, получаемая с помощью квазиньютоновских аппроксимаций $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)$, а вектор $a^k \in \mathbb{R}^s$ вычисляется по формуле

$$a_i^k = \min\{\max\{(a_c(y^k, \lambda^k))_i, \rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k))\}, M\}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.12}$$

Здесь $\rho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – такая функция, что $\rho(t)$ отделено от нуля положительной константой при t, отделенных от нуля, и $\rho(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0+$; $\sigma_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s_+) \longrightarrow \mathbb{R}$ – некоторая

невязка системы ККТ (2.16) задачи (2.9), т.е. такая функция, которая обращается в ноль в точках, удовлетворяющих (2.16), и положительна в других точках; $M > 0$ – верхняя граница на элементы a^k, в качестве которой разумно брать "большое" число (наличие такой границы требуется в теореме 3 о глобальной сходимости, а в теореме 2 для сохранения сверхлинейной скорости сходимости достаточно выполнения условия $M > 2c$).

Введем отображение $\Psi_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$,

$$\Psi_c(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x, \lambda) \\ \dfrac{\partial L_c}{\partial y}(x, y, \lambda) \\ h(x) \\ (\min\{0, y\})^2 - H(x) \end{pmatrix}.$$

Ниже используются следующие невязки системы ККТ (2.16) (разумеется, существует множество других возможностей выбора функции σ_c): для $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^s$ и $\lambda \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ положим

$$\bar{\sigma}_c(x, y, \lambda) = \left\| \begin{pmatrix} \Psi_c(x, y, \lambda) \\ \max\{0, g(x)\} \\ \max\{0, G(x) - (\max\{0, y\})^2\} \\ \langle \lambda^g, g(x)\rangle + \langle \lambda^G, G(x) - (\max\{0, y\})^2\rangle \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\tilde{\sigma}_c(x, y, \lambda) = \left\| \begin{pmatrix} \Psi_c(x, y, \lambda) \\ \max\{0, g(x)\} \\ (\lambda_1^g g_1(x), \ldots, \lambda_m^g g_m(x)) \\ \max\{0, G(x) - (\max\{0, y\})^2\} \\ (\lambda_1^G(G_1(x) - (\max\{0, y_1\})^2), \ldots, \lambda_s^G(G_s(x) - (\max\{0, y_s\})^2)) \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\sigma_c^{\omega}(x, y, \lambda) = \left\| \begin{pmatrix} \Psi_c(x, y, \lambda) \\ \omega(\lambda^g, -g(x)) \\ \omega(\lambda^G, (\max\{0, y\})^2 - G(x)) \end{pmatrix} \right\|,$$

где $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – применяемая покомпонентно функция дополнительности, т.е. такая функция, для которой равенство $\omega(a, b) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \geq b$, $b \geq 0$, $ab = 0$. Две наиболее часто используемые функции дополнительности – это функция естественной невязки $\omega(a, b) = \min\{a, b\}$, а также функция Фишера–Бурмейстера $\omega(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$; соответствующие варианты функции σ_c^{ω} будем обозначать через σ_c^{NR} (от английского "Natural Residual") и σ_c^{FB}.

В численных экспериментах, результатам которых посвящен разд. 5, использовалась невязка σ_c^{FB}. Что касается матриц H_k, то они вычислялись посредством квазиньютоновской формулы Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шанно (БФГШ) с модификацией Пауэлла (см. [21, с. 536, 537]).

Очевидно, что если матрица H_k положительно определена и $\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k) > 0$, т.е. текущая точка не удовлетворяет системе ККТ (2.16) задачи (2.9), то определяемая согласно (3.11) и (3.12) матрица $\mathscr{H}_k$ является положительно-определенной. В то же время, как показывает следующая теорема, приведенная модификация сохраняет сверхлинейную скорость сходимости метода в пря-

мых переменных. Обозначим через π_S оператор проектирования на замкнутое выпуклое множество S.

Теорема 2. *Пусть функция f и отображения h, g, H и G дважды дифференцируемы в некоторой окрестности сильно стационарной точки $\bar{x}$ задачи* (1.1), *причем их вторые производные непрерывны в этой точке, а $\bar{\mu}$ – отвечающий $\bar{x}$ ЗОИО-множитель. Пусть число c удовлетворяет условию* (2.6), $M > 2c$, *а $\bar{y}$ определяется согласно* (2.10). *Пусть функция $\rho\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что $\rho(t)$ отделено от нуля положительной константой при t отделенных от нуля, и $\rho(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0+$, а $\sigma_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s_+) \longrightarrow \mathbb{R}$ – некоторая невязка системы ККТ* (2.16) *задачи* (2.9). *Пусть $\{H_k\}$ – последовательность симметричных $n \times n$-матриц, последовательность $\{(x^k, y^k, \lambda^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ сходится к $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu})$, и пусть для всякого достаточно большого k матрица $\mathcal{H}_k$ вычисляется согласно* (3.11), (3.12), *точка (x^{k+1}, y^{k+1}) является стационарной точкой задачи* (3.1), *а λ^{k+1} – отвечающий этой стационарной точке множитель Лагранжа.*

Тогда если скорость сходимости $\{(x^k, y^k)\}$ сверхлинейная, то выполняется аналог условия Дэнниса–Морэ:

$$\left\| \pi_{\tilde{C}}\left(\left(H_k - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \right)(x^{k+1} - x^k) \right) \right\| = o\left(\left\| \begin{pmatrix} x^{k+1} - x^k \\ y^{k+1} - y^k \end{pmatrix} \right\| \right). \tag{3.13}$$

Наоборот, если выполнено кусочное достаточное условие второго порядка оптимальности (1.9) *и аналог* (3.13) *условия Дэнниса–Морэ, то скорость сходимости $\{(x^k, y^k)\}$ сверхлинейная.*

Доказательство. Так как $\{y^k\}$ сходится к $\bar{y}$, из (2.10) следует, что для достаточно больших k выполняется (3.5). Отсюда и из сходимости $\{\lambda^k\}$ к $\bar{\mu}$ и из (1.6), (1.7) следует, что

$$\{(b_c(y^k, \lambda^k))_{I_+}\} \longrightarrow \bar{\mu}^H_{I_+} = 0, \quad \{(b_c(y^k, \lambda^k))_{I_0}\} \longrightarrow -\bar{\mu}^G_{I_0} - c = -c \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, согласно (3.3),

$$\{(a_c(y^k, \lambda^k))_{I_+}\} \longrightarrow 0, \quad \{(a_c(y^k, \lambda^k))_{I_0}\} \longrightarrow 2c \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty, \tag{3.14}$$

а значит,

$$\liminf_{k \to \infty}(a_c(y^k, \lambda^k))_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.15}$$

Кроме того, из (3.14), из предельного соотношения $\rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k)) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$ и из неравенства $M > 2c$ вытекает, что для любого достаточно большого k выполняются неравенства

$$\max\{(a_c(y^k, \lambda^k))_i, \rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k))\} < M \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s,$$

а значит, согласно (3.12), имеют место равенства

$$a_i^k = \max\{(a_c(y^k, \lambda^k))_i, \rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k))\}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.16}$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{k \to \infty}(a_i^k - (a_c(y^k, \lambda^k))_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.17}$$

Фиксируем $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Если $a_i^k = (a_c(y^k, \lambda^k))_i$ для всех достаточно больших k, то (3.17), очевидно, выполняется. В противном случае определим подпоследовательность $\{k_j\}$ всех индексов таких, что $a_i^{k_j} \neq (a_c(y_j^k, \lambda^{k_j}))_i$. Из (3.16) следует неравенство

$$\liminf_{k \to \infty}(a_i^k - (a_c(y^k, \lambda^k))_i) \geq 0,$$

а также

$$\limsup_{k\to\infty}(a_i^k - (a_c(y^k, \lambda^k))_i) = \limsup_{j\to\infty}(a_i^{k_j} - (a_c(y^{k_j}, \lambda^{k_j}))_i) =$$

$$= \limsup_{j\to\infty}(\rho(\sigma_c(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})) - (a_c(y^{k_j}, \lambda^{k_j}))_i) = \limsup_{j\to\infty}(-(a_c(y^{k_j}, \lambda^{k_j}))_i) =$$

$$= -\liminf_{j\to\infty}(a_c(y^{k_j}, \lambda^{k_j}))_i = \le 0,$$

где третье равенство выполняется в силу предельного соотношения $\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$ и свойств функции ρ, а неравенство – в силу (3.15). Таким образом, доказано (3.17).

Согласно (3.2), (3.9), (3.11) и (3.17), условие (3.13) эквивалентно следующему:

$$\left\|\pi_K\left((\mathcal{H}_k - \mathcal{W}_k)\begin{pmatrix} x^{k+1} - x^k \\ y^{k+1} - y^k \end{pmatrix}\right)\right\| = o\left(\left\|\begin{pmatrix} x^{k+1} - x^k \\ y^{k+1} - y^k \end{pmatrix}\right\|\right). \tag{3.18}$$

Здесь

$$\mathcal{W}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) & 0 \\ 0 & 2\operatorname{diag}(a_c(y^k, \lambda^k)) \end{pmatrix},$$

где для любого достаточно большого k вектор $a_c(y^k, \lambda^k)$ однозначно определяется формулами (3.3), (3.4).

Согласно сказанному выше, рассматриваемый здесь квазиньютоновский полугладкий метод ПКП для задачи (2.9) можно интерпретировать как обычный квазиньютоновский метод ПКП для задачи (3.6), причем (3.18) есть условие Дэнниса–Морэ для последнего метода. Нужный результат теперь следует из [22, теорема 4.1] и предложения 5.

4. ГЛОБАЛИЗАЦИЯ СХОДИМОСТИ

Определим l_1-точный штраф $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ для ограничений задачи (2.9):

$$\psi(x, y) = \|h(x)\|_1 + \left\|(\min\{0, y\})^2 - H(x)\right\|_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \max\{0, g_j(x)\} + \sum_{i=1}^{s} \max\{0, G_i(x) - (\max\{0, y_i\})^2\}.$$

Этому штрафу отвечает семейство штрафных функций $\varphi_{c,\beta} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_{c,\beta}(x, y) = f_c(x, y) + \beta\psi(x, y),$$

где $\beta > 0$ – параметр штрафа. Следующий алгоритм комбинирует специальный квазиньютоновский метод ПКП, предложенный в разд. 3, с одномерным поиском для штрафных функций этого семейства, в духе традиционного способа глобализации сходимости методов ПКП (см. [16, алгоритм 5.4.1]).

Алгоритм 1

Предварительный шаг. Выбираем параметры $c > 0$, $M > 2c$, $\bar{\beta} > 0$ и $\varepsilon, \theta \in (0, 1)$. Выбираем функцию $\rho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что $\rho(t)$ отделено от нуля при t, отделенных от нуля, $\rho(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0+$,

и невязку $\sigma_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s) \longrightarrow \mathbb{R}$ системы ККТ (2.16) задачи (2.9). Выбираем начальную точку $(x^0, y^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ и полагаем $k = 0$.

Шаг ПКП. Если $\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k) = 0$, то стоп. Иначе выбираем симметричную положительно-определенную $n \times n$-матрицу H_k и определяем матрицу $\mathcal{H}_k$ согласно (3.3), (3.4), (3.11), (3.12). Вычисляем $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{y}^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ как стационарную точку задачи (3.1), а $\lambda^{k+1} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ – как отвечающий $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{y}^{k+1})$ множитель Лагранжа. Полагаем $\xi^k = \tilde{x}^{k+1} - x^k$, $\eta^k = \tilde{y}^{k+1} - y^k$, $p^k = (\xi^k, \eta^k)$.

Шаг одномерного поиска. Выбираем

$$\beta_k \geq \|\lambda^{k+1}\|_\infty + \bar{\beta}$$

и вычисляем

$$\Delta_k = \langle f'(x^k), \xi^k \rangle + \langle 4(\max\{0, y^k\})^3 - 2c\max\{0, y^k\}, \eta^k \rangle - \beta_k \psi(x^k, y^k).$$

Полагаем $\alpha = 1$. Если неравенство

$$\varphi_{c,\beta_k}((x^k, y^k) + \alpha p^k) \leq \varphi_{c,\beta_k}(x^k, y^k) + \varepsilon\alpha\Delta_k \tag{4.1}$$

выполнено, полагаем $\alpha_k = \alpha$. Иначе заменяем α на $\theta\alpha$ и снова проверяем (4.1), и т.д., пока не будет выполнено (4.1).

Полагаем

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + \alpha_k p^k, \tag{4.2}$$

увеличиваем k на 1 и переходим к шагу ПКП.

При обосновании глобальной сходимости алгоритма 1 потребуются следующие вспомогательные факты.

Лемма 1. *Пусть даны ограниченная последовательность* $\{a^k\} \subset \mathbb{R}^q_+$ *и последовательность* $\{b^k\} \subset \mathbb{R}^q$ *такие, что*

$$\{\min\{0, b^k\}\} \longrightarrow 0, \quad \langle a^k, b^k \rangle \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty. \tag{4.3}$$

Тогда

$$a_i^k b_i^k \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty \quad \forall i = 1, 2, \ldots, q.$$

Доказательство. Из неотрицательности элементов последовательности $\{a^k\}$, из ограниченности этой последовательности и из первого условия в (4.3) вытекает, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, q$ справедливо

$$a_i^k b_i^k \geq a_i^k \min\{0, b_i^k\} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty \tag{4.4}$$

и поэтому

$$\liminf_{k \to \infty} a_i^k b_i^k \geq 0. \tag{4.5}$$

С другой стороны, для всякого $i = 1, 2, \ldots, q$ из второго условия в (4.3) и из предельного соотношения в (4.4) выводим соотношения

$$0 = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^q a_i^k b_i^k = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^q a_i^k (\min\{0, b_i^k\} + \max\{0, b_i^k\}) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^q a_i^k \max\{0, b_i^k\}.$$

В силу неотрицательности элементов последовательности $\{a^k\}$, все слагаемые в сумме в правой части неотрицательны и поэтому данное предельное соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_i^k \max\{0, b_i^k\} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Поэтому, снова учитывая неотрицательность элементов последовательности $\{a^k\}$, имеем

$$a_i^k b_i^k \le a_i^k \max\{0, b_i^k\} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty$$

и, значит,

$$\limsup_{k\to\infty} a_i^k b_i^k \le 0. \tag{4.6}$$

Комбинируя (4.5) и (4.6), получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть даны числовые последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, причем $a_k \ge 0$ для всех k.*

Тогда, если выполняется условие

$$\min\{0, b_k\} \longrightarrow 0, \quad a_k b_k \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty, \tag{4.7}$$

то выполняется каждое из эквивалентных условий

$$\min\{a_k, b_k\} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty \tag{4.8}$$

и

$$a_k + b_k - \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty. \tag{4.9}$$

Доказательство. Элементарно проверяется, что для любых чисел $a \ge 0$ и $b \le 0$ справедливо неравенство

$$|\min\{a, b\}| \le |\min\{0, b\}| + |ab|,$$

в то время как для любых чисел $a \ge 0$ и $b > 0$ справедливо неравенство

$$|\min\{a, b\}| \le \sqrt{|\min\{0, b\}| + |ab|}.$$

Отсюда следует, что из (4.7) вытекает (4.8). Эквивалентность условий (4.8) и (4.9) следует из [23, лемма 3.1]. Лемма доказана.

Заметим, что из (4.8) (а значит, и из эквивалентного условия (4.9)) условие (4.7), вообще говоря, не следует. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $a_k = 1/k$, $b = k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из леммы 1 и 2 вытекает

Предложение 6. *Пусть дана последовательность $\{(x^k, y^k, \lambda^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ такая, что последовательность $\{\lambda^k\}$ ограничена и $(\lambda^g)^k \ge 0$, $(\lambda^G)^k \ge 0$ для всех k.*

Тогда для любого числа c из любого из эквивалентных условий

$$\bar{\sigma}_c(x^k, y^k, \lambda^k) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty$$

или

$$\tilde{\sigma}_c(x^k, y^k, \lambda^k) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty$$

вытекает каждое из эквивалентных условий

$$\sigma_c^{\mathrm{NR}}(x^k, y^k, \lambda^k) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty$$

и

$$\sigma_c^{\mathrm{FB}}(x^k, y^k, \lambda^k) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty.$$

В следующей теореме устанавливаются свойства глобальной сходимости алгоритма 1. Заметим, что здесь недостаточно просто сослаться на известные результаты о глобальной сходимости методов ПКП (например, на [16, теорема 5.4.1] или на [24, теорема 17.2]), несмотря на то, что структура алгоритма 1 достаточно традиционна. Дело в том, что матрицы $\mathcal{H}_k$ в этом алгоритме не являются, вообще говоря, равномерно положительно-определенными, что является одним из основных ингредиентов традиционного анализа глобальной сходимости методов ПКП.

Теорема 3. *Пусть функция f и отображения h, g, H и G дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, причем их производные удовлетворяют условию Липшица на $\mathbb{R}^n$. Пусть в алгоритме 1 в качестве невязки σ_c исполь-*

зуется $\bar{\sigma}_c$, $\tilde{\sigma}_c$, σ_c^{NR} *или* σ_c^{FB}, *а матрицы* H_k *выбираются так, что последовательность* $\{H_k\}$ *ограничена и существует* $\gamma > 0$ *такое, что*

$$\langle H_k\xi, \xi\rangle \geq \gamma\|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

для всех k.

Тогда для любого начального приближения $(x^0, y^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ *либо алгоритм* 1 *останавливается после конечного числа шагов в решении системы KKT* (2.16) *задачи* (2.9), *либо ограничения подзадачи* (3.1) *на некоторой итерации оказываются несовместимыми, либо алгоритм определяет бесконечную последовательность* $\{(x^k, y^k, \lambda^k)\}$, *причем если*

$$\beta_k = \beta > 0 \tag{4.11}$$

для всех достаточно больших k, *то выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений:*

1) *справедливо предельное соотношение*

$$\varphi_{c,\beta}(x^k, y^k) \longrightarrow -\infty \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow \infty; \tag{4.12}$$

2) *существует подпоследовательность* $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$ *такая, что*

$$\sigma_c(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j}) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad j \longrightarrow \infty, \tag{4.13}$$

и, в частности, любая предельная точка подпоследовательности $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$ *удовлетворяет системе KKT* (2.16) *задачи* (2.9). *Кроме того, для любой подпоследовательности* $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$ *такой, что*

$$\liminf_{j\to\infty} \sigma_c(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j}) > 0, \tag{4.14}$$

выполняются предельные соотношения

$$\{p^{k_j}\} \longrightarrow 0, \quad \sigma_c(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j+1}) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad j \longrightarrow \infty,$$

и, в частности, для любой предельной точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ *подпоследовательности* $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$ *подпоследовательность* $\{(x^{k_j+1}, y^{k_j+1})\}$ *сходится к* $(\bar{x}, \bar{y})$ *и любая предельная точка последовательности* $\{(x^{k_j+1}, y^{k_j+1}, \lambda^{k_j+1})\}$ *удовлетворяет системе KKT* (2.16) *задачи* (2.9).

Доказательство. Если для всякого k выполняется $\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k) \neq 0$, то из (3.11), (3.12), (4.10) и свойств функции ρ в алгоритме 1 следует, что матрица $\mathcal{H}_k$ положительно определена. Таким образом, подзадача (3.1) есть задача квадратичного программирования с сильно выпуклой целевой функцией, и если ограничения этой задачи совместны, то шаг ПКП алгоритма 1 определяет точку $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{y}^{k+1}, \lambda^{k+1})$ ($\lambda^{k+1} = ((\lambda^h)^{k+1}, (\lambda^g)^{k+1}, (\lambda^H)^{k+1}, (\lambda^G)^{k+1})$ может определяться неоднозначно). При этом для $\xi^k = \tilde{x}^{k+1} - x^k$ и $\eta^k = \tilde{y}^{k+1} - y^k$ выполняются соотношения системы ККТ для задачи (3.1):

$$\begin{gathered}
f'(x^k) + H_k\xi^k + (h'(x^k))^{\mathrm{T}}(\lambda^h)^{k+1} - (g'(x^k))^{\mathrm{T}}(\lambda^g)^{k+1} + (H'(x^k))^{\mathrm{T}}(\lambda^H)^{k+1} + (G'(x^k))^{\mathrm{T}}(\lambda^G)^{k+1} = 0,\\
2(\max\{0, y^k\})^3 - c\max\{0, y^k\} + \operatorname{diag}(a_c(y^k, \lambda^k))\eta^k + B_{\min}(y^k)(\lambda^H)^{k+1} - B_{\max}(y^k)(\lambda^G)^{k+1} = 0,\\
h(x^k) + h'(x^k)\xi^k = 0,\\
(\lambda^g)^{k+1} \geq 0, \quad g(x^k) + g'(x^k)\xi^k \leq 0, \quad \langle(\lambda^g)^{k+1}, g(x^k) + g'(x^k)\xi^k\rangle = 0,\\
(\min\{0, y^k\})^2 - H(x^k) - H'(x^k)\xi^k + 2B_{\min}(y^k)\eta^k = 0,\\
(\lambda^G)^{k+1} \geq 0, \quad G(x^k) - (\max\{0, y^k\})^2 + G'(x^k)\xi^k - 2B_{\max}(y^k)\eta^k \leq 0,\\
\langle(\lambda^G)^{k+1}, G(x^k) - (\max\{0, y^k\})^2 + G'(x^k)\xi^k - 2B_{\max}(y^k)\eta^k\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{4.15}$$

Если $\xi^k = 0$ и $\eta^k = 0$, то (4.15) превращается в систему ККТ (2.16) задачи (2.9) при $x = x^k$, $y = y^k$ и $\lambda = \lambda^{k+1}$ и поэтому $\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^{k+1}) = 0$. При этом $p^k = (\xi^k, \eta^k) = 0$ и результатом итерации алгоритма 1 будет точка $(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1})$, где $x^{k+1} = x^k$, $y^{k+1} = y^k$, и поэтому $\sigma_c(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1}) = 0$, что противоречит сделанному предположению.

Таким образом, $p^k \neq 0$, откуда следует, что

$$\varphi'_{c,\beta_k}((x^k, y^k); p^k) \le \Delta_k \le -\langle \mathcal{H}_k p^k, p^k\rangle - \bar{\beta}\psi(x^k, y^k) < 0$$

(см. [16, лемма 5.4.1]), и шаг одномерного поиска алгоритма завершится после конечного числа дроблений начального пробного значения $\alpha = 1$ принятием некоторого значения $\alpha_k > 0$. Следовательно, очередное приближение $(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1})$ будет определено.

Если не существует подпоследовательности $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$, удовлетворяющей (4.13), то найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k) \ge \delta \tag{4.16}$$

для всех k. Тогда, в силу свойств функции ρ, существует $\tilde{\delta} > 0$ такое, что выполняется $\rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k)) \ge \tilde{\delta}$ для всех k, и из (3.11), (3.12) и (4.10) следует, что

$$\langle \mathcal{H}_k(\xi, \eta), (\xi, \eta)\rangle \ge \langle H_k\xi, \xi\rangle + 2\rho(\sigma_c(x^k, y^k, \lambda^k))\|\eta\|^2 \ge \min\{\gamma, 2\tilde{\delta}\}\|(\xi, \eta)\|^2 \quad \forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s.$$

Таким образом, матрицы $\mathcal{H}_k$ равномерно положительно определены и, кроме того, учитывая (3.12) и ограниченность $\{H_k\}$, последовательность $\{\mathcal{H}_k\}$ ограничена. Поэтому из стандартных результатов о глобальной сходимости методов ПКП с одномерным поиском (см., например, [16, теорема 5.4.1]) вытекает следующее: выполняется либо (4.12), либо

$$\{p^k\} \longrightarrow 0, \quad \bar{\sigma}_c(x^k, y^k, \lambda^{k+1}) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty. \tag{4.17}$$

Согласно (4.2) и предложению 6, принимая во внимание липшицевость каждой из функций $\bar{\sigma}_c(\cdot, \cdot, \lambda^k)$, $\tilde{\sigma}_c(\cdot, \cdot, \lambda^k)$, $\sigma_c^{\mathrm{NR}}(\cdot, \cdot, \lambda^k)$ и $\sigma_c^{\mathrm{FB}}(\cdot, \cdot, \lambda^k)$, из (4.17) получаем выполнение предельных соотношений

$$\|x^{k+1} - x^k\| \longrightarrow 0, \quad \|y^{k+1} - y^k\| \longrightarrow 0, \quad \sigma_c(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1}) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty,$$

где последнее соотношение противоречит (4.16).

Тем самым доказано, что если (4.12) не выполняется, то существует подпоследовательность $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$, удовлетворяющая (4.13).

Наконец, для подпоследовательности $\{(x^{k_j}, y^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$, удовлетворяющей (4.14), нужное утверждение получается повторением проведенных выше рассуждений для этой подпоследовательности. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает основание ожидать, что для предельной точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ последовательности $\{(x^k, y^k, \lambda^k)\}$, генерируемой алгоритмом 1, пара $(\bar{x}, \bar{y})$ будет стационарной точкой задачи (3.1), а $\bar{\lambda}$ – отвечающим ей множителем Лагранжа. Заметим, правда, что последнее, вообще говоря, не гарантирует даже слабую стационарность точки $\bar{x}$ в задаче (1.1), но единственным ингредиентом слабой стационарности, который может отсутствовать, является условие $\bar{\lambda}^H_{I_{0-}} \ge 0$ (см. утверждение 3) предложения 3). Кроме того, как уже было отмечено выше, слабая стационарность для ЗОИО – на самом деле весьма сильная концепция стационарности.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приведены результаты численного сравнения алгоритма 1 с некоторыми альтернативными методами на 23 примерах ЗОИО, взятых из всех известных авторам публикаций, касающихся данного класса задач.

Для краткости будем обозначать номером 1 алгоритм 1, в котором матрицы H_k вычисляются упомянутым выше способом, а именно по формуле БФГШ с модификацией Пауэлла. Номером 2 будем обозначать аналог алгоритма 1, в котором матрицы $\mathcal{H}_k$ вычисляются целиком по формуле БФГШ с модификацией Пауэлла (а не специальным способом, принятым в алгоритме 1). Номером 3 обозначается обычный квазиньютоновский (БФГШ с модификацией Пауэлла) метод ПКП с одномерным поиском для l_1-точной штрафной функции, применяемый напрямую к задаче (1.1) (без "поднятия" задачи или каких-либо иных модификаций). Указанные три метода были реализованы без привлечения каких-либо способов преодоления возможной несовместности ограничений подзадач, а также способов преодоления эффекта Маратоса (см. [16, с. 230]).

Значения параметров алгоритма 1 и соответствующих им параметров других алгоритмов были выбраны следующим образом: $c = 200$, $\bar{\beta} = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\theta = 0.5$. Параметр M, который был введен в целях теоретического обоснования глобальной сходимости метода, на практике должен выбираться так, чтобы избегать его влияния на вычислительный процесс при нормальном ходе последнего. В силу отсутствия очевидного разумного способа выбора M, в экспериментах он считался равным $+\infty$.

Функция ρ была определена равенством

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad t < 0.1, \\ 0.1, & \text{если} \quad t \geq 0.1. \end{cases}$$

На каждой итерации параметр штрафа β_k вычислялся по формуле

$$\beta_k = \|\lambda^{k+1}\|_\infty + \bar{\beta}.$$

Заметим, что такой выбор может не удовлетворять условию (4.11) из теоремы 3 о глобальной сходимости, но он привлекателен своей простотой и хорошо работает на практике, поскольку допускает уменьшение больших значений штрафного параметра, которые могут возникать на ранних итерациях. Разумеется, последнее свойство можно совместить с выполнением (4.11) в более сложных правилах выбора β_k (см., например, [21, разд. 18.3], [24, разд. 17.1]).

Вычисления проводились в среде Matlab. Для решения квадратичных подзадач использовался встроенный в Matlab солвер quadprog. Для алгоритмов 1 и 2 использовался критерий остановки

$$\sigma_c^{\mathrm{FB}}(x^k, y^k, \lambda^k) < 10^{-6}.$$

Алгоритм 3 останавливался, когда аналогичная невязка системы ККТ исходной задачи (1.1) становилась меньше 10^{-6}.

Запуск считался неудачным, если требуемая точность не была достигнута после 500 итераций или если метод оказывался неспособным выполнить очередную итерацию по той или иной причине.

Для каждого тестового примера осуществлялось 100 запусков алгоритмов из случайно сгенерированных начальных точек (одних и тех же для всех алгоритмов). Прямые начальные точки x^0 генерировались в кубе с центром в (известном для каждого теста) решении $\bar{x}$, с ребрами куба, равными 20. Для алгоритмов 1 и 2 начальное значение y^0 вспомогательной переменной определялось следующим образом:

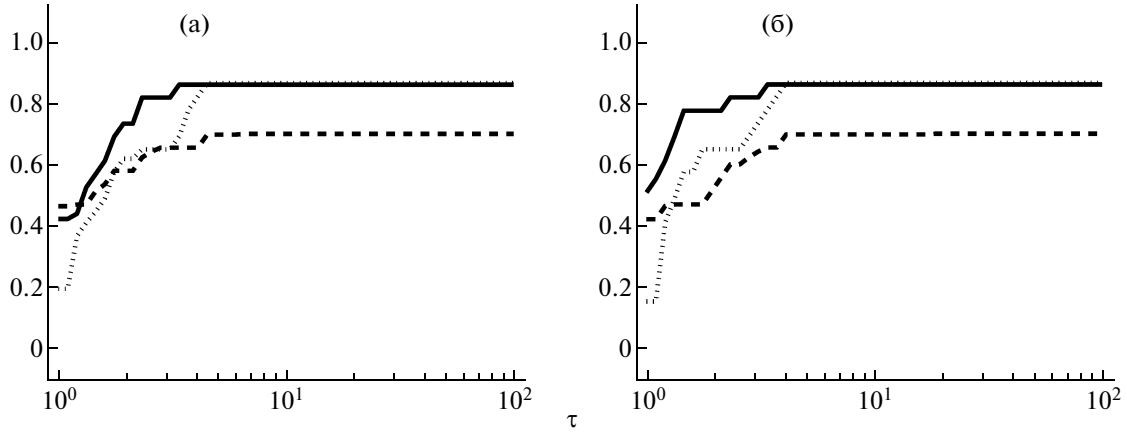
$$y_i^0 = \begin{cases} -\sqrt{H_i(x^0)}, & \text{если} \quad H_i(x^0) > 0, \\ \sqrt{c/2}, & \text{если} \quad H_i(x^0) \leq 0, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Начальные значения двойственных переменных для всех алгоритмов генерировались аналогично прямым, но в кубе с центром в нуле и с дополнительными ограничениями неотрицательности для компонент, отвечающих ограничениям-неравенствам.

В случае удачного запуска сходимость к решению объявлялась в тех случаях, когда расстояние от полученного прямого приближения x^k до $\bar{x}$ оказывалось меньше, чем 10^{-3}.

Фиг. 2 дает представление об относительном среднем количестве внешних и внутренних итераций трех методов на один успешный запуск, где под внутренними итерациями понимаются итерации quadprog. Результаты представлены в виде так называемых performance profiles: подоб-



Фиг. 2.

ный агрегированный способ представления результатов вычислительного эксперимента был впервые предложен в [25]. Для каждого алгоритма приводится график функции (здесь и ниже используются следующие обозначения: для алгоритма 1 – сплошная, для алгоритма 2 – пунктирная и для алгоритма 3 – штриховая линии), значение которой в $\tau \in [1, +\infty)$ есть отнесенная к общему количеству задач в наборе сумма долей успешных запусков для тех задач, для которых результат (в данном случае среднее количество итераций) алгоритма был хуже (в данном случае больше) наилучшего (среди трех алгоритмов) не более чем в τ раз. С известной долей условности, это значение можно интерпретировать как вероятность того, что для задачи из данного набора результат запуска данного алгоритма будет хуже наилучшего не более, чем в τ раз. При этом считается, что результат неудачного запуска в бесконечное число раз хуже, чем результат любого успешного запуска. Точные формулы для функций, графики которых представлены в performance profiles используемого здесь типа, можно найти в [26]. Значение такой функции при $\tau = 1$ можно интерпретировать как характеристику "чистой" эффективности алгоритма, т.е. вероятность того, что алгоритм покажет наилучший результат, а значение при $\tau = +\infty$ – как характеристику "чистой" робастности алгоритма, т.е. вероятность успешности запуска.

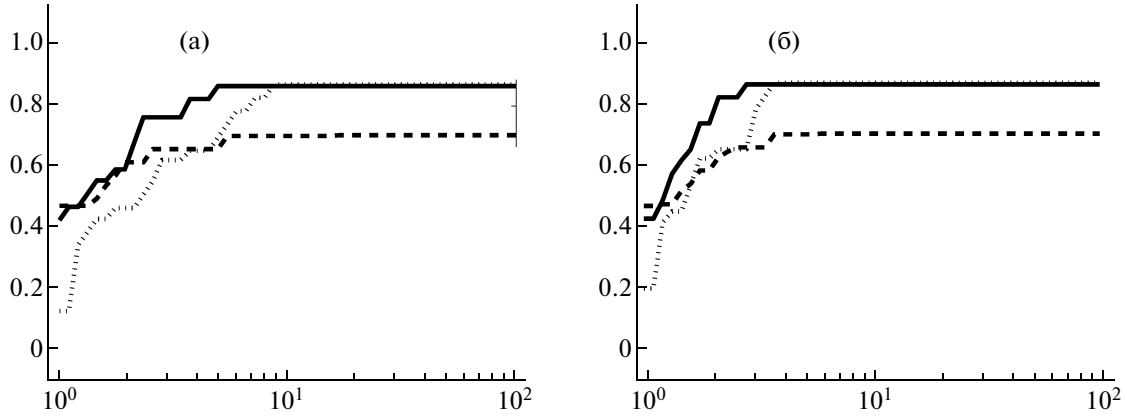
Из фиг. 2 можно видеть, что по количеству внешних итераций (а) алгоритм 3 несколько (незначительно) эффективнее алгоритма 1, а по количеству внутренних (б) итераций ситуация противоположная. В обоих случаях алгоритм 2 уступает по эффективности двум другим. Вместе с тем алгоритм 3 явно уступает двум другим алгоритмам в плане робастности.

На фиг. 3 в аналогичной форме представлены данные об относительном среднем количестве вычислений значений функций (см. фиг. 3а), задающих ограничения, и их производных (см. фиг. 3б) на один успешный запуск. На фиг. 4а представлены данные об относительном среднем количестве вычислений значений целевой функции. Во всех случаях полученная картина аналогична фиг. 2.

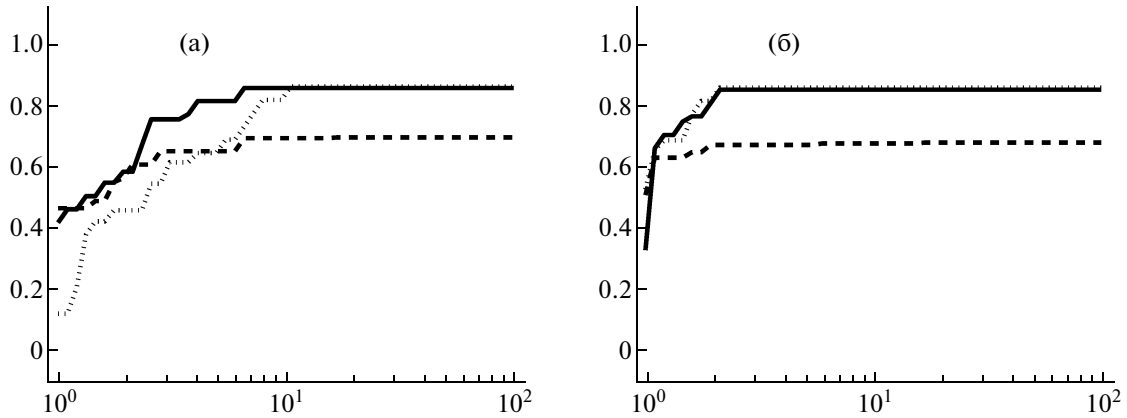
Помимо эффективности и робастности, другой важной характеристикой любого алгоритма является качество выдаваемого им итогового приближения, т.е. доля случаев, когда алгоритм сходится действительно к решению, а не к какой-либо неоптимальной стационарной точке. Эта характеристика рассматриваемых алгоритмов отображена на фиг. 4б. Здесь под "результатом" алгоритма понимается обратная величина к количеству сходимостей к решению. Заметим, что результат здесь считается равным $+\infty$, если алгоритм ни разу не сошелся к решению, и такие случаи вносят дополнительный вклад в общее число неудачных запусков, несколько понижая характеристики робастности алгоритмов на фиг. 4б по сравнению с предедыдущими performance profiles.

Фиг. 4б показывает, что алгоритмы 1 и 2 имеют более сильные тенденции сходимости к решению, чем алгоритм 3. Этот несколько неожиданный результат является следствием более низкой общей робастности алгоритма 3.

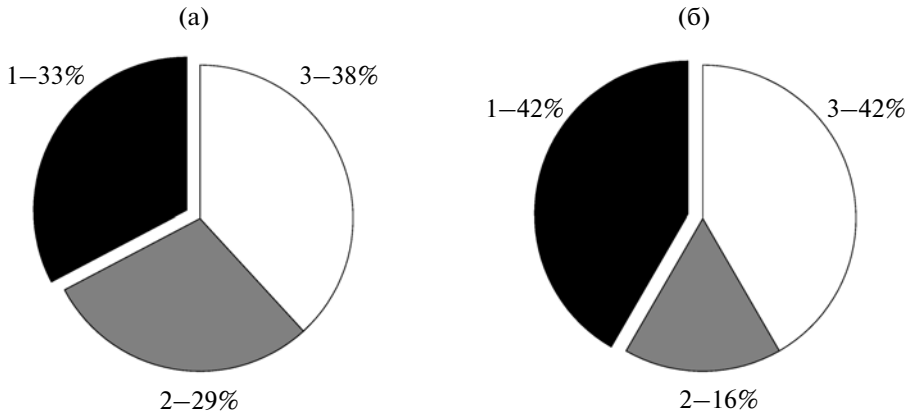
Круговые диаграммы на фиг. 5 призваны дать некоторое представление о способности алгоритмов достигать меньших (относительно других алгоритмов) значений целевой функции в случае успешных запусков: в таких случаях полученное прямое приближение является допустимым или почти допустимым и поэтому достигнутое значение целевой функции может рассматривать-



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ся как еще одна разумная характеристика поведения алгоритма. Диаграммы на фиг. 5 получены следующим образом. Для каждого алгоритма и каждой задачи вычисляется среднее достигнутое значение целевой функции на один успешный запуск; если это значение минимально (среди трех алгоритмов), то алгоритм относится в категорию “лучший”, а если максимально, то в категорию “худший”. При этом среднее достигнутое значение целевой функции алгоритма считалось равным минимальному (максимальному), если оно отличалось от минимального (соответ-

ственно, максимального) менее чем на 10^{-3}. Заметим, что для некоторых задач алгоритм мог быть отнесен в обе указанные категории, если все три алгоритма имели одинаковые средние достигнутые значения целевой функции. После определения количества попаданий каждого алгоритма в каждую из категорий эти числа суммируются для каждой категории и доля каждого алгоритма в полученной сумме отображается на фиг. 5. Точнее, на фиг. 5а отображаются доли алгоритмов, отнесенных в категорию "лучший", а на фиг. 5б – не отнесенных в категорию "худший". По указанным характеристикам все три алгоритма ведут себя сравнимым образом, хотя алгоритм 2 несколько уступает остальным.

Подводя итог, в отличие от "стандартных" методов, применяемых напрямую к исходной задаче (1.1), для предложенного в данной работе подхода обоснована глобальная и локальная сверхлинейная сходимость. Кроме того, как показывает вычислительный эксперимент, предложенный метод и с практической точки зрения вполне конкурентоспособен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achtziger W., Kanzow C.* Mathematical programs with vanishing constraints: optimality conditions and constraint qualifications // Math. Program. 2007. V. 114. № 1. P. 69–99.
2. *Achtziger W., Hoheisel T., Kanzow C.* A smoothing-regularization approach to mathematical programs with vanishing constraints: Preprint 284. Würzburg: Inst. Math. Univ. Würzburg, 2008.
3. *Hoheisel T., Kanzow C.* First- and second-order optimality conditions for mathematical programs with vanishing constraints // Appl. Math. 2007. V. 52. P. 495–514.
4. *Hoheisel T., Kanzow C.* Stationarity conditions for mathematical programs with vanishing constraints using weak constraint qualifications // J. Math. Analys. Appl. 2008. V. 337. P. 292–310.
5. *Hoheisel T., Kanzow C.* On the Abadie and Guignard constraint qualifications for mathematical programs with vanishing constraints // Optimizat. 2009. V. 58. № 4. P. 431–448.
6. *Izmailov A.F., Solodov M.V.* Mathematical programs with vanishing constraints: optimality conditions, sensitivity, and a relaxation method // J. Optimizat. Theory Appl. 2009. V. 142. № 3. P. 501–532.
7. *Измаилов А.Ф., Погосян А.Л.* Условия оптимальности и ньютоновские методы для задач оптимизации с исчезающими ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1184–1196.
8. *Измаилов А.Ф., Погосян А.Л.* О методах активного множества для задач оптимизации с исчезающими ограничениями // Теор. и прикл. задачи нелинейного анализа. М.: ВЦ РАН, 2009. С. 18–49.
9. *Hoheisel T., Kanzow C., Schwartz A.* Convergence of a local regularization approach for mathematical programs with complementarity or vanishing constraints // Optimizat. Meth. Software. 2011. DOI: 10.1080/10556788.2010.535170.
10. *Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D.* Mathematical programs with equilibrium constraints. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
11. *Outrata J.V., Kocvara M., Zowe J.* Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints: Theory, applications and numerical results. Boston: Kluwer Acad. Publs, 1998.
12. *Измаилов А.Ф.* Задачи оптимизации с комплементарными ограничениями: регулярность, условия оптимальности и чувствительность // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 7. С. 1209–1228.
13. *Измаилов А.Ф.* Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
14. *Stein O.* Lifting mathematical programs with complementarity constraints // Math. Program. 2010. DOI 10/1007/s10107-010-0345-y.
15. *Izmailov A.F., Pogosyan A.L., Solodov M.V.* Semismooth Newton method for the lifted reformulation of mathematical programs with complementarity constraints // Comput. Optimizat. Appl. 2010. DOI 10.1007/s10589-010-9341-7.
16. *Измаилов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Физматлит, 2008.
17. *Qi L.* Superlinearly convergent approximate Newton methods for LC^1 optimization problems // Math. Program. 1994. V. 64. P. 277–294.
18. *Han J., Sun D.* Superlinear convergence of approximate Newton methods for LC^1 optimization problems without strict complementarity // Recent Advances in Nonsmooth Optimization. V. 58. Singapur: World Scient. Publs Co, 1993. P. 353–367.
19. *Izmailov A.F., Pogosyan A.L., Solodov M.V.* Semismooth SQP method for equality-constrained optimization problems with an application to the lifted reformulation of mathematical programs with complementrarity constraints: Preprint A 675/2010/IMPA. Rio de Janeiro, 2010. Available at http: // www.preprint.impa.br:80/Shadows/SERIE A/2010/675.html.
20. *Bonnans J.F.* Local analysis of Newton-type methods for variational inequalities and nonlinear programming // Appl. Math. Optimizat. 1994. V. 29. P. 161–186.
21. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical optimization. Sec. ed. New York: Springer, 2006.

22. *Fernández D., Izmailov A.F., Solodov M.V.* Sharp primal superlinear convergence results for some Newtonian methods for constrained optimization // SIAM J. Optimizat. 2010. V. 20. № 6. P. 3312–3334.
23. *Tseng P.* Growth behavior of a class of merit functions for the nonlinear complementarity problem // J. Optimizat. Theory Appl. 1996. V. 89. № 1. P. 17–37.
24. *Bonnans J.F., Gilbert J.Ch., Lemaréchal C., Sagastizábal C.* Numerical optimization: theoretical and practical aspects. Sec. ed. Berlin: Springer, 2006.
25. *Dolan E., Moré J.* Benchmarking optimization software with performance profiles // Math. Program. 2002. V. 91. № 2. P. 201–213.
26. *Дарьина А.Н., Измаилов А.Ф.* Полугладкий метод Ньютона для задачи квадратичного программирования с простыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1785–1795.