

ФИЛОСОФИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ: КОНФИГУРАЦИЯ ОСОБОЙ ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ?*

В последние годы в рамках исследований по философии математики наметилась явная тенденция уделять особое внимание теме «математика и реальность». Такое наименование представляется мне наиболее общим, хотя, как мы увидим далее, у этого тренда пока еще нет одного общепринятого названия.

О наличии названной тенденции свидетельствует, например, книга «Философия математики: 5 вопросов» (2008), составленная из ответов на вопросы анкеты, которые дали двадцать восемь известных специалистов в области философии математики из разных стран мира. Последний из этих вопросов звучал так: «Какие открытые проблемы в философии математики представляются вам наиболее важными, и каковы перспективы развития в данной области?» Наиболее четко интересующую нас позицию высказал австралийский философ Марк Коливан: *применения математики* (the applications of mathematics) названы им «той темой, которая была в пренебрежении, но теперь стала одной из центральных (one of the main foci) в современной философии математики». «Проведенная в последнее время работа по приложениям, - продолжает Коливан, - <...> в результате дала то, что может даже рассматриваться как новая область – философия прикладной математики (the philosophy of applied mathematics)». Он приветствует новую ситуацию, в которой философы математики перестали ограничиваться чистой математикой и ее основаниями, и то, что «работа над применениями <математики> теперь в самом деле идет полным ходом и образует важную линию (a significant thread) в современной философии математики».¹

* Эта работа была написана как предисловие к книге «Математика и реальность» (Москва: издательство МГУ, 2014). В ее основе лежит доклад, сделанный на Московском семинаре по философии математики (философский факультет МГУ имени М.В.Ломоносова) 21 декабря 2012 г.

¹ Philosophy of Mathematics: 5 Questions / Ed. by V.F.Hendricks and H.Leitgeb. Automatic Press / Vince Inc. Press, 2008. P. 79-80.

Отвечая на тот же вопрос анкеты, британский философствующий математик Брайан Дэвис написал: «Первая такая проблема состоит в том, что для многих философов математика означает <главным образом> чистую математику, а прикладная математика и ее естественнонаучные применения расцениваются как имеющие меньшее значение. Вторая проблема состоит в деперсонализации предмета изучения, который часто рассматривается не как деятельность математиков, но как абсолютная сущность, которая должна изучаться без обращения к истории или применениям к миру природы. Это безобидно для математика, но делает философский анализ нашего предмета более или менее невозможным».²

Как видим, Дэвис не просто причисляет проблематику приложений математики к важным, но ставит *всякий* философский анализ математики, претендующий на адекватность, в прямую зависимость от учета и должной разработки этой проблематики. Под приведенными словами Дэвиса я также готов подписаться.

Справедливости ради следует отметить, что подавляющее большинство авторов, принявших участие в этом анкетировании, либо упоминает проблему приложений далеко не на первом месте, либо вообще не уделяет ей внимания. И все же определенная тенденция налицо.

Ниже мы увидим, что в последнее время действительно наметился круг авторов, уделяющих особое внимание нашей проблеме, а иногда и считающих ее центральной для философии математики. Более того, в интересующей нас области уже обозначился ряд знаковых текстов и сложился список «классических» авторов.

ПРОБЛЕМА Ю.ВИГНЕРА

Одним из важнейших знаковых текстов для нашей области стал доклад известного американского физика, лауреата Нобелевской премии, Юджина Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках», сделанный 11 мая 1959 года в Нью-Йоркском университете.³ В результате словосочетание «непостижимая эффективность

² *Ibid*, p. 96.

³ См.: *Wigner Eugene*. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *Comm. Pure and Appl. Math*, v.13, № 1 (Feb. 1960), pp. 1-14. Переиздан: *Wigner E*. *Symmetries and Reflections*. Bloomington & London: Indiana University Press, 1967.

математики (the unreasonable effectiveness of mathematics)» стало крылатым, а сам доклад породил⁴, да и до сих пор продолжает порождать⁵, многочисленные реакции и отклики, как со стороны ученых, так и со стороны философов. Несколько статей было написано также в связи с

Русский перевод: Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Пер. В.А.Белокопя и В.А.Угарова // Успехи физических наук, т. 94, вып. 3 (Март 1968), с. 535-546. Другой перевод (Ю.А.Данилова) с тем же названием: Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182-198.

⁴ Hamming Richard W. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics // The American Mathematical Monthly, v.87, № 2 (Feb. 1980), pp. 81-90; Steen Lynn Arthur. The Science of Patterns // Science, v.240 (29 April 1988), pp. 611-616; Mathematics and Science / Ed. By Ronald E. Mickens. Singapore: World Scientific, 1990; Steiner Mark. The Application of Mathematics to Natural Science // The Journal of Philosophy, v.86, № 9 (Sep. 1989), pp. 449-480; Steiner Mark. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.

⁵ Например: French Steven. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics // Synthese, v.125 (2000), pp. 103-120; Wilson Mark. The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences // Monist, v.83, № 2 (2000), pp.296-394; Colyvan Mark. The Miracle of Applied Mathematics // Synthese, v.127, № 3 (June 2001), pp. 265-277; Визгин Вл.П. «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н.Молодцова. СПб.: Алетеия, 2001. С. 123-141; Longo Giuseppe. The Reasonable Effectiveness of Mathematics and Its Cognitive Roots // Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. World Scientific, 2005, pp. 351-382; Dorato Mauro. The Laws of Nature and the Effectiveness of Mathematics // Boniolo G., Budinich P., Trobok M. (eds.) The Role of Mathematics in Physical, Interdisciplinary and Philosophical Aspects. Dordrecht: Springer, 2005, pp. 131-144; Sarukkai Sandar. Revisiting the "Unreasonable Effectiveness" of Mathematics // Current Science, v.88, № 3 (Feb. 2005), pp. 415-422; Maddy Penelope. The "Miracle" of Applied Mathematics // Maddy P. Second Philosophy: A Naturalistic Method. New York: Oxford University Press, 2007. Section IV.2.iii (pp. 329-343); Grattan-Guinnessse Ivor. Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // The Mathematical Intelligencer, v.30, № 3 (Summer 2008), pp. 7-17; Plotnitsky Arkady. On the Reasonable and Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Classical and Quantum Physics // Foundations of Physics, v.41, № 3 (Mar. 2011), pp. 466-491; Omnès Roland. Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited // Foundations of Physics, v.41, № 11 (Nov. 2011), pp. 1729-1739; весь номер Interdisciplinary Science Reviews, v.36, № 3 (Sep. 2011): Unreasonable Effectiveness of Mathematics / Guest ed. Steve Russ, pp. 209-267, включающий, помимо редакционной, статьи следующих авторов: Jeremy Gray, Jesper Lützen, Patrick Suppes, Alan Baker; Harvey Alex. The Reasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences (Dec. 2012) <http://arxiv.org/pdf/1212.5854.pdf>

применимостью (или неприменимостью) тезиса Вигнера к различным конкретным областям научного знания за пределами физики.⁶

Многие физики и математики говорили сходные вещи⁷, но именно Вигнеру посчастливилось создать *opus classicus* на эту тему. Его доклад дал образец восприятия взаимоотношения математики и физики, как оно сложилось в первой половине XX века.

Понятия и теории современной чистой математики предстают для этого подхода как живущие в значительной степени автономной и самостоятельной жизнью по отношению к физике и другим естественнонаучным теориям, а также к эмпирическому миру, который последние претендуют описывать. Именно так смотрел на отношение математики и физики логический эмпиризм.⁸ Его приверженцы настаивали на четком отделении формальных наук (логики и математики) от наук эмпирических. «Формальные науки вообще не имеют <собственных> объектов, это системы без объектов и без содержания»⁹, они «ничего не говорят о чувственно воспринимаемом мире»¹⁰, но лишь о связи символов. Другими словами, *математика – это язык*, причем чистая математика –

⁶ Например: *Lesk Arthur*. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Molecular Biology // *The Mathematical Intelligencer*, v.22, № 2 (2000), pp. 28-36; *Lesk Arthur*. Compared to What? // *Ibid.*, v.23, № 1 (2001), p. 4; *Velupillai Vela K*. The Unreasonable Ineffectiveness of Mathematics in Economics // *Cambridge Journal of Economics*, v.29, № 6 (Nov. 2005), pp. 849-872; *Ginzburg L., Jensen Ch., Yule J*. Aiming the “Unreasonable Effectiveness of Mathematics” at Ecology Theory // *Ecological Modelling*, v.207 (2007), pp. 356-362; *Colyvan Mark*. The Undeniable Effectiveness of Mathematics in the Special Sciences (manuscript), <http://www.colyvan.com/papers/uemss.pdf>

⁷ Многочисленные примеры высказываний других ученых по данной теме см.: *Steiner Mark*. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, pp. 13-14; *Визгин Вл.П.* «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // *Проблема знания в истории науки и культуры* / Отв. ред. Е.Н.Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123-141.

⁸ См.: *Крафт В.* Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003. С. 53-60; *Carnap R*. Formal and Factual Science <1934> // *Readings in the Philosophy of Science* / Ed. by H.Feigl and M.Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953, pp. 123-128; *Hempel C.G*. On the Nature of Mathematical Truth // *The American Mathematical Monthly*, v.52, № 10 (Dec. 1945), pp. 543-556; *Hempel C.G*. Geometry and Empirical Science // *Ibid.*, № 1 (Jan. 1945), pp. 7-17.

⁹ *Carnap R*. Formal and Factual Science <1934> // *Readings in the Philosophy of Science* / Ed. by H.Feigl and M.Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953, p. 128.

¹⁰ *Крафт В.* Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003. С. 56.

это преимущественно синтаксис. Это странный язык, в котором есть жесткий синтаксис, семантика не определена, а прагматика может меняться достаточно гибко и свободно. Применение же математики и состоит в том, что мы наделяем эти синтаксические конструкции семантическим и нужным прагматическим измерениями, превращая их в язык той или иной области эмпирической науки.

Также и Вигнер смотрит на математику, в первую очередь, как на запас языковых конструкций: «Кто-то однажды сказал, что философия – это злоупотребление именно для этой цели придуманной терминологией. Следуя духу этого высказывания, я мог бы определить математику как искусное оперирование понятиями и правилами, придуманными именно для этой цели». Главной руководящей нитью при этом служит математику «способность воспринимать формальную красоту (sense of formal beauty)»; он вводит именно такие понятия, которые «позволяют производить хитроумные (ingenious) логические операции, импонирующие нашему чувству прекрасного (which appeal to our aesthetic sense), как сами по себе, так и по своим результатам, обладающим великой общностью и простотой». Математиком движет, главным образом, чисто интеллектуальный интерес («быть интересной» - определяющее свойство математики, согласно М.Полани, на которого ссылается здесь Вигнер) и возможность проявить остроумие (ingeniousness), а вовсе не ориентация на эмпирический мир и его нужды. Он не сомневается, что элементарная математика (в частности геометрия) «была сформулирована с целью описывать такие объекты, которые напрямую подсказаны (directly suggested) реальным миром», однако современная математика не такова.¹¹

В результате и в самом деле становится непонятным, почему такая математика применима в эмпирических науках, почему «законы природы должны формулироваться на языке математики (the laws of nature must be formulated in mathematical language)».¹² Математики, исходя из описанных выше устремлений, создают большое разнообразие математических понятий, из «списка (a listing of mathematical terms)» которых физики «выбирают (select)» то, что им нужно. Однако выбирают физики не произвольно, они движутся в разработке теорий своим путем, пока

¹¹ Wigner E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math, v.13, № 1 (Feb. 1960), p. 2-3.

¹² Ibid, p. 6.

их теоретические конструкции не оформятся настолько, что им станет ясно, что именно из математических наработок им подходит: «во многих, если не в большинстве случаев, соответствующие понятия были развиты независимо физиком и лишь затем опознаны как уже промысленные математиком (recognized then as having been conceived before by the mathematician)». ¹³

Можно ли сказать, что физика и математика по Вигнеру осуществляют некоторое *встречное движение* в ходе своих разработок? Похоже, что нет. Про какое-то движение математики в сторону физики речи вообще не идет. Физика также движется не по направлению к математике. Она стремится оформить свои концепции, если же на каком-то этапе физик обнаруживает сходство своих построений с чем-либо имеющимся в языке математики, он без лишних размышлений, заимствует соответствующий математический формализм, наделяя его нужной для физических целей интерпретацией. Ведет себя физик при этом, по оценке Вигнера, «безответственным образом (he is a somewhat irresponsible person)». ¹⁴

В результате то, что физик сплошь и рядом достигает на этом пути успеха, оказывается для подхода Вигнера совершенно чудесным и необъяснимым. Возможности теоретического обоснования этой успешности он не видит. Для него речь здесь идет о подтверждаемом многими примерами эвристическом приеме, который он называет «эмпирическим законом эпистемологии (an empirical law of epistemology)» или «догматом веры физика-теоретика (an article of faith of the theoretical physicist)» (последнее название со ссылкой на R.G. Sachs): математические формулировки законов природы «обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости (being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope)». ¹⁵ Впрочем, этот догмат веры теоретика уравнивается «кошмаром теоретика (a nightmare of the theorist)»: «нам в принципе неизвестно, почему наши теории работают так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости». ¹⁶

¹³ *Ibid*, p. 7.

¹⁴ *Ibid*, p. 8.

¹⁵ *Ibid*, p. 10.

¹⁶ *Ibid*, pp. 13-14.

Приведем, наконец, знаменитые заключительные (и скорее оптимистичные) слова доклада Вигнера, которые не устают цитировать бесчисленные авторы статей и книг о применении математики:

«The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning. (Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки законов физики. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам следует благодарить за него и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы надеемся также, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) в будущем расширится (принося нам не только радости, но и трудности) на многие новые области изучения.)»¹⁷

КЛЮЧ ИЛИ ОТМЫЧКА?

Юджин Вигнер почти в самом начале своего доклада говорит о физиках, применяющих для своих целей математические теории, следующее: «Мы находимся в положении, аналогичном положению человека, которому дали связку ключей (who was provided with a bunch of keys) и который пытается открыть одну за другой несколько дверей. Ему всегда удастся подобрать правильный ключ к очередной двери с первой или второй попытки, но сомнения относительно взаимно однозначного соответствия между ключами и дверями (the uniqueness of coordination between keys and doors) у него остаются».¹⁸

Попробуем осмыслить проблему Вигнера исходя из предложенной им метафоры, которая напоминает известное сравнение Роджера Бэкона, назвавшего математику «scientiarum porta et clavis (вратами и ключами науки)».¹⁹ Для начала спросим: кто дал нам связку математических ключей? Есть два основных ответа на этот вопрос – натуралистический и

¹⁷ *Ibid*, p. 14.

¹⁸ *Ibid*, p. 2.

¹⁹ *Opus Majus*, pars 4, distinctio 1, capitulum 1. См.: Бэкон Роджер. Избранное. М.: Изд-во Францисканцев, 2005. С. 178-179.

супранатуралистический. Философы и ученые эпохи научной революции XVI-XVIII веков стояли в своем большинстве на второй точке зрения. Они верили в незыблемость тео-космо-антропологического треугольника²⁰, который связывает узами предустановленной гармонии человеческий разум, устройство мира и Божественный замысел о них. Математика при этом укоренена во всех трех вершинах этого фундаментального треугольника и связывает их между собой, математика – универсальна. Это одно из важнейших основоположений их мышления и научной деятельности. В XIX-XX веках укрепила свои позиции и получила серьезную теоретическую разработку натуралистическая альтернатива, стремящаяся построить объяснение эффективности человеческого познания вне апелляции к теологическим аргументам (в условиях «смерти Бога»).

Какова позиция самого Вигнера по отношению к предложенной альтернативе? С одной стороны, он постоянно использует то ли «квазирелигиозный»²¹, то ли «проторелигиозный» язык: в самом деле, *кого* нам следует благодарить за чудесный дар математического языка? Однако явно религиозных утверждений он не делает. С другой стороны, Вигнер отказывается воспринимать всерьез в интересующем нас контексте главный натуралистический инструмент объяснения – эволюционный механизм. Он говорит об этом так: «О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удастся использовать это понятие. Великий математик полностью владеет всем имеющимся в области допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Уже одно то, что его безрассудство не завело его в пучину противоречий, само по себе чудо. Трудно поверить, что дарвиновский процесс естественного отбора довел наше мышление до такой степени совершенства, которой оно, судя по всему,

²⁰ См.: Шапошников В.А. Математический скептицизм и абсолютистская трактовка доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики. / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: Книжный дом «Либроком» (URSS), 2014. С. 305.

²¹ Ср. многочисленные примеры подобного словоупотребления в текстах физиков и математиков XIX-XX веков и попытку чисто прагматического его объяснения у Вл.П.Визгина: «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н.Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123-141.

обладает».²² Как мы знаем из его интервью и воспоминаний, Юджин Вигнер стремился занимать *агностическую* позицию, не делая определенного выбора ни в сторону натурализма, ни в сторону супранатурализма, впрочем, в отношении последнего, его «не знаю» звучало куда решительнее.²³ Возможно, отчетливая нейтральность Вигнера в докладе 1959 года также способствовала широкой популярности этого доклада, ведь автор предельно ярко ставил проблему, не предопределяя ее решения в ту или иную сторону.

Вернемся, однако, к метафоре связки ключей и обсудим натуралистическую ее разработку. Вигнер прав, полагая, что механизм биологической эволюции вряд ли способен снабдить нас специальным ключом, в точности соответствующим внутреннему устройству каждого дверного замка, который нам может случиться встретить. Ведь для эволюционного механизма не требуется полного соответствия наших представлений миру, достаточно той степени соответствия, которая уверенно обеспечивает эффективность действия. Это, пожалуй, под силу только совершенному Творцу мира. Однако мы вполне можем в ходе эволюции приобрести такой мозг, который позволяет нам разработать универсальный набор *отмычек*, которые не будут в точности отвечать внутренней структуре названных замков, но будут достаточно хороши на практике для их вскрытия.

²² Wigner E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math, v.13, № 1 (Feb. 1960), p. 3.

²³ Юджин Вигнер родился и вырос в Венгрии, в еврейской семье, которая позднее приняла лютеранство. Незадолго до смерти он вспоминал о годах юности: «Я видел, что не могу ничего непосредственно знать о Боге, видел, что Его существование есть предмет веры, которой у меня не было» (The Recollections of Eugene P. Wigner as Told to Andrew Szanton. Basic Books, 1992, pp. 60-61). В интервью от 3 сентября 1985 г., данном Вигнером в связи с организуемым Институтом Бхактиведанты первым всемирным конгрессом «Синтез науки и религии» (Мумбаи, Индия, 1986), Расараджа Даса прямо спросил его: «Какое представление о Боге было у Вас в детстве и как Вы, как физик, представляете Его теперь? Изменились ли Ваши представления, или Вы никогда не думали о Боге?» Вигнер ответил: «Когда я был ребенком, я не знал, верю ли я в действительности в то, чему меня учили о Боге, и я не знаю, во что я верю теперь. Не знаю». См.: Interviews with Nobel Laureates and Other Scholars: Brought on the Occasion of World Congress for the Synthesis of Science and Religion. Bombay: Bhaktivedanta Institute, 1986. Русский перевод доступен по адресу: <http://philosophy.ru/library/synth/index.html>

Универсальный, хотя и ограниченный по числу, набор интеллектуальных отмычек хорошо описывает одно из важных адаптационных преимуществ существа, способного теоретизировать – продумывание по возможности всех мыслимых вариантов про запас, поскольку, когда возникает реальная ситуация выбора, думать, как правило, поздно – надо уже быть во всеоружии.

Выше мы видели, что математик, согласно Вигнеру, руководствуется, главным образом, принципом формальной красоты, т.е. *эстетическим* критерием. Но так ли уж далек эстетический критерий от жизненных нужд, как кажется поверхностному взгляду? Согласно главному принципу эволюционной эстетики, красиво то, что эволюционный отбор запечатлел как заслуживающее особого внимания. Узкая утилитарность глупа и примитивна, она очень далека от полноценного многоуровневого понимания полезности. Интеллектуальные фикции, а таких в современной математике очень много, бесполезны в узком смысле слова, но не могут быть признаны таковыми – в широком. Они также связаны с практикой и с миром, но не «в лоб», а через (возможно, многоуровневое) опосредование. Пусть они плод интеллектуальной *игры*, но такая игра бесполезна опять же лишь для поверхностного взгляда, с широкой же эволюционной точки зрения игра – жизненно необходимое занятие.

Мир слишком сложен для нашего мышления, но наше отношение к нему не есть отношение незаинтересованного беспристрастного познавательного устройства, нацеленного на исчерпывающее и безразличное познание всего, это ограниченно-избирательное и экономное отношение конечного существа направляемого вполне определенным набором жизненно-важных интересов. По крайней мере, исходно это так. Избыточность интеллектуальной деятельности человека связана с необходимостью прогноза на основе попыток предугадать полный спектр возможных ситуаций и их исходов, это навык второго уровня. Именно он приводит к стремлению создавать достаточно простые и обозримые, но разнообразные и максимально широко применимые теоретические схемы. Более того, подобная избыточность может закрепляться естественным отбором. Хорошо известным примером может служить избыточность естественных языков.

«Все законы природы, – говорит Вигнер, – это условные утверждения, позволяющие предсказывать какие-то события в будущем на основе

того, что известно в данный момент, причем для предсказания будущего некоторые аспекты состояния мира в данный момент <...> несущественны».

Мысль о том, что математика так хорошо применима для описания реального мира, поскольку она есть универсальная коллекция подобных схем (пусть не актуально, но хотя бы потенциально, по замыслу) достаточно близка к только что очерченному ходу мысли.

НЕОБХОДИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРОБЛЕМЫ (ПОДХОД МАРКА ШТАЙНЕРА)

Есть смысл различать *двухступенчатый* и *одноступенчатый* подходы к применению математики.²⁴ Для первого из них, с одной стороны, имеется самостоятельно существующая и самостоятельно понимаемая чистая математика, с другой, - никак не связанная с математикой природа, выступающая как предполагаемая сфера ее приложений. Для того чтобы приложение математики состоялось, мы нуждаемся в некотором третьем связующем звене между математикой и природой. Так видят ситуацию применения математики формалистский и структуралистский подходы. Этим третьим звеном может быть особая *интерпретация* базовых понятий формальной математической теории, которая и превращает ничего не говорящую о мире формально-математическую конструкцию в естественнонаучную теорию. Так полагали логические позитивисты (см., например, разъяснение Карлом Гемпелем различия между чистой и физической геометриями²⁵, а также сравнение им математики с «соковыжималкой»²⁶). Или это может быть установление определенного *соответствия* между математической структурой и устройством описываемого природного объекта (этот связанный со структурализмом

²⁴ *Pincock C.* The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: <http://www.iep.utm.edu/math-app/>

²⁵ *Hempel C.G.* Geometry and Empirical Science // The American Mathematical Monthly, v.52, № 1 (Jan. 1945), pp. 7-17.

²⁶ *Hempel C.G.* On the Nature of Mathematical Truth // The American Mathematical Monthly, v.52, № 10 (Dec. 1945), pp. 543-556.

подход по-английски называется «mapping account»²⁷, что можно перевести, например, как «теория соответствия»). Так или иначе, но двухступенчатый подход на первом шаге строит понимание математики, а затем, на втором шаге, ищет дополнительного объяснения применимости математики, понятой таким образом.

В отличие от этого одноступенчатый подход состоит в том, чтобы с самого начала включать объяснение применимости в наше понимание математики. Тогда проблема применимости как бы автоматически получает решение, а правильнее сказать – применимость попросту не возникает в качестве самостоятельной проблемы. В соответствии с терминологией Криспина Райта это называется «Frege's constraint» (ограничение Фреге). Райт ссылается на § 158 «Основных законов арифметики» Фреге и интерпретацию взглядов Фреге на применимость математики Майклом Даммитом²⁸. Райт определяет *ограничение Фреге* следующим образом: «Удовлетворительное основание математической теории должно тем или иным способом встраивать ее применения, как действительные, так и возможные, в самую ее сущность (build its applications into its core), - в то содержание, которое оно приписывает утверждениям теории, - вместо того, чтобы просто “залатывать их извне”»²⁹. Поставленные Райтом в кавычки слова взяты у Фреге.

Однако даже Криспин Райт, признавая применимость ограничения Фреге к арифметике, ставит его под сомнение для математического анализа.

Американо-израильский философ Марк Штайнер предлагает различать *канонические* и *неканонические* приложения математических теорий. Приложение будет каноническим, «если теория была развита, в

²⁷ Pincock C. A new perspective on the problem of applying mathematics // *Philosophia Mathematica*, vol. 3 (2004), № 12, p. 135-161; Bueno O., Colyvan M. An inferential conception of the application of mathematics // *Noûs*, vol. 45, № 2 (June 2011), p. 345-374.

²⁸ Dummett M. *Frege. Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth, 1991. P. 268-273.

²⁹ Wright C. Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege's Constraint // Cook R.T. (ed.) *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*. Dordrecht: Springer, 2007. P. 262-263.

первую очередь, чтобы описывать соответствующее приложение»³⁰. Примером может служить применение дифференциального исчисления, как оно было развито Ньютоном, к описанию ускоренного механического движения (в отношении современного математического анализа это нельзя повторить с той же степенью уверенности). В случае простейших канонических приложений математики (например, при использовании натуральных чисел для пересчета физических предметов) часто бывает весьма трудно провести границу между математической теорией и ее эмпирическим приложением, настолько тесно они связаны (так Дж.Ст.Милль не смог это сделать). Классический пример неканонического приложения – применение Кеплером греческой теории конических сечений к описанию орбит небесных тел. Более современный пример – применение теории групп в физике элементарных частиц и квантовой механике.

С этой точки зрения спор между одноступенчатым и двухступенчатым подходами разрешается отнесением первого к каноническим, а второго к неканоническим приложениям математики.

Именно неканонические приложения вызывают больше всего вопросов. Это в связи с ними Юджин Вигнер говорил о «непостижимой эффективности математики». Главное предположение, которое высказывает в этой связи Штайнер, состоит в том, что каждое успешное неканоническое применение математики – «отдельная история». Не из чего не следует, что существует *универсальное* объяснение для всех таких случаев. Проблема применения математики на деле есть несколько отдельных проблем.

Штайнер различает также *эмпирические* и *внутриматематические* приложения математики. Причем последние играют не менее важную роль в современном естествознании, поскольку «значительная часть того, что принимают за приложение математики к физике, есть в действительности приложение математики к самой себе». Пример внутримате-

³⁰ Steiner M. Mathematics – Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005, p. 627.

математического приложения – теория представления групп. Современные физические теории, такие как квантовая механика, полагает Штайнер, имеют «глубоко пифагорейский» характер, поскольку применяемая ими классификация физических явлений индуцирована классификацией математических структур. Он видит в этом величайшую иронию. Естественнонаучная мысль, пройдя такой большой путь, снова вернулась туда, откуда она, в свое время вышла, к взглядам Пифагора и Демокрита. «Пифагор думал, что мир сделан из чисел, но это слишком уж просто: он сделан из матриц, причем образующие их числа не действительные, а комплексные!»³¹

В связи с этим Штайнер настаивает на необходимости различать несколько понятий применимости математики. Во-первых, это *логическая или семантическая* применимость математики (проблема Фреге); во-вторых, это *дескриптивная* проблема применения математики (проблема Вигнера).

Первый аспект применимости математики был, по убеждению Штайнера, успешно разработан еще Фреге. Когда мы, например, применяем элементарную арифметику натуральных чисел для пересчета физических предметов, мы сталкиваемся с логической (семантической) и метафизической проблемами. Пусть перед нами на столе семь яблок и пять груш, причем никаких других фруктов на столе нет; из этого мы заключаем, что на столе всего двенадцать фруктов. В этом примере арифметическое суждение « $7+5=12$ » работает в роли «орудия логического вывода» (as an engine of deduction), той самой гемпелевской «теоретической соковыжималки», хотя и в самом примитивном варианте. В ходе этого вывода мы переходим от употребления слов «семь» и «пять» в качестве прилагательных, применяемых при составлении предложений о фруктах, к числительным 7 и 5, используемым в роли существительных, а затем делаем аналогичный, но обратный переход с «двенадцатью». Эта «уловка» грозит разрушить логическую корректность нашей дедукции. Связанная же с этим переходом метафизическая проблема состоит в

³¹ Ibid, pp. 647-649.

том, что мы игнорируем онтологическое различие между эмпирическими и математическими объектами.³²

Фреге удалось решить семантическую, а заодно и метафизическую, проблему приложения математики к природе за счет обращения к понятиям и суждениям, т.е. к универсальному измерению мышления. Именно в пространстве мышления встречаются и находят законное соединение математические объекты и физические предметы и явления, преодолевая пропасть разноприродности.³³ Речь в нашей дедукции, согласно Фреге, идет не о физических яблоках и грушах, а о *понятиях* «яблоки на этом столе», «груши на этом столе», «фрукты на этом столе» и соотношении между объемами этих понятий. Фреге писал в § 87 «Основ арифметики»: «законы чисел собственно не применимы к внешним вещам; они не являются законами природы. Они не утверждают связь между естественными явлениями, но утверждают таковую между суждениями; а к последним принадлежат и законы природы»³⁴.

Важно отметить, что подход Фреге к применимости математики не ограничивается арифметикой, он распространяем на всю классическую математику, поскольку она выразима на языке теории множеств. «Мы можем заключить, - пишет Штайнер, - что Фреге полностью решил семантическую и метафизическую проблемы применимости».³⁵ Это решение метафизически неубедительно лишь для того, кто имеет сомнения в существовании понятий или множеств (а это не такие уж сильные требования).

Однако, решив проблему применимости математических понятий *в общем*, Фреге никоим образом не ответил на вопрос, почему *именно эти* математические понятия применяются в данном конкретном случае и

³² Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, pp. 15-23; Steiner M. Mathematics – Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005, pp. 641-645.

³³ Dummett M. Frege. Philosophy of Mathematics. London: Duckworth, 1991, pp. 255-259.

³⁴ Фреге Г. Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. С. 221.

³⁵ Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, p. 23.

именно таким образом, каким это происходит на практике. Это *дескриптивная* применимость математики – «пригодность (конкретных) математических понятий для описания и правомерного предсказания физических явлений»³⁶.

Например, что делает арифметику столь полезной в повседневной жизни? Что должен представлять собой мир, в котором она может служить эффективным средством эмпирических предсказаний? Тела должны обладать достаточной стабильностью и не слишком большим разбросом в пространстве (чтобы их можно было «собирать вместе» и определенным образом «организовывать», делая «обозримыми»), только тогда люди смогут их считать. Кроме того, тела должны в основном сохранять свои числовые характеристики при человеческих манипуляциях с ними. В результате это делает арифметику исторически соединенной с геометрией, причем обе они тесно связаны с простейшими и наиболее распространенными типами человеческой деятельности. Ничего особо чудесного и таинственного в дескриптивной применимости арифметических операций сложения и умножения нет.

В целом стратегия решения дескриптивной проблемы применения математики, согласно Штайнеру, следующая: «Чтобы устранить таинственность описания конкретного явления определенным математическим понятием, мы устанавливаем соответствие (match) этого понятия и нематематического свойства»³⁷. В результате загадочность дескриптивного применения математики находит объяснение «в терминах общих физических свойств природы», «посредством установления соответствия между физическими и математическими понятиями» (by matching mathematical to physical concepts).³⁸ Однако чем более современные и сложные случаи приложения математики мы берем, тем сложнее становится следовать этой стратегии.

Так, уже знаменитый закон гравитации Ньютона (закон обратных квадратов), несмотря на предпринимавшиеся попытки его объяснения,

³⁶ *Ibid*, p. 25.

³⁷ *Ibid*, p. 44.

³⁸ *Ibid*, pp. 32, 35.

по-прежнему остается таинственным. Это же можно повторить по отношению к эффективности комплексного анализа (теории аналитических функций) в гидродинамике, термодинамике, релятивистской теории поля. Имеется ли какое-то единое физическое свойство, которое ответственно за успех всех этих приложений?

Однако главное внимание Штайнера привлекает *квантовая механика*, которой посвящена половина его книги 1998 года. «Роль гильбертова пространства в квантовой механике более глубокая, чем дескриптивная роль отдельного понятия. Целостный формализм гильбертова пространства ставится в соответствие природе (*is matched with nature*). Информация о природе “считывается” с деталей этого формализма».³⁹ Почему это работает – остается загадкой.

Но «самым глубоким» Штайнер считает вопрос, связанный с применением в физике *теории групп*. «Он затрагивает применимость математики как таковую, а не просто приложение того или иного понятия. Это тем самым эпистемологический вопрос, относящийся к связи между Сознанием и Космосом. Это и есть вопрос, поднятый Юджином Вигнером, о “непостижимой эффективности математики в естественных науках”».⁴⁰

При этом важно понять, что применение математики не ограничивается использованием ее в качестве «орудия логического вывода» (*an engine of deduction*), как полагали логические позитивисты, но математика есть также «орудие открытия» (*an engine of discovery*) в науке.⁴¹

Сравнивая свой подход с подходом Вигнера, Штайнер перечисляет различия⁴²:

- 1) Вигнер говорит об использовании математики для *описания*, а не для *открытия*.

³⁹ *Ibid*, p. 44.

⁴⁰ *Ibid*, p. 45.

⁴¹ Steiner M. Mathematics – Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005, p. 644.

⁴² Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, p. 9.

- 2) Вигнер игнорирует многочисленные *неудачи* в подборе приемлемого математического описания для природных явлений, сосредоточивая внимание на редких *успехах*.
- 3) Вигнер также не уделяет достаточного внимания математическим понятиям, так и не получившим применения к описанию природы.
- 4) Штайнер видит особую проблему в каждом конкретном успешном применении математического понятия. Этот успех может не говорить ничего об успешности применения математики вообще, а быть связанным с уникальными особенностями именно этого понятия (например, понятия группы).
- 5) Проблема Штайнера (в отличие от названных выше проблем Фреге и Вигнера) – это поразительный успех самой *общей стратегии*, состоящей в опоре на математические структуры при формулировке законов природы, а не просто успешное приложение того или иного конкретного математического понятия.

Марк Штайнер, также как и Юджин Вигнер, стремится сохранить нейтральность в отношении оппозиции «натурализм - супранатурализм», но удастся ему это хуже, чем Вигнеру. Он утверждает неспособность натурализма, как не допускающей антропоцентризм методологии, объяснить успех математически ориентированной современной физики (решить проблему Штайнера), но в то же время не готов объявить себя сторонником супранатуралистического подхода, хотя ближе стоит именно к нему.

Сомнения в возможностях натуралистического решения проблемы применимости математики, понимаемого как «дарвинистский подход к происхождению математики»⁴³, которые высказывал Вигнер в своем знаменитом докладе, становятся у Штайнера предметом специального обсуждения. Он опирается на авторитет Чарльза Пирса, писавшего о том, что наши инстинкты могут быть надежными руководителями на пути к истине, «поскольку они сформировались под влиянием тех самых

⁴³ *Ibid*, p. 8.

законов, которые мы <с их помощью> исследуем». «Но, – продолжал Пирс, – по мере того, как мы проникаем глубже и глубже, уходя все дальше от поверхности природы, инстинкт утрачивает способность давать какие-либо определенные ответы <на наши вопросы>; а если бы он и давал их, у нас уже не было бы никакого основания полагать, что эти ответы близки к истине».⁴⁴

«Другими словами, – комментирует Штайнер приведенные слова Пирса, – хотя естественный отбор возможно и мог бы объяснить наш успех в открытии науки, имевшейся до настоящего времени (ведь он якобы предсказывает существование своего рода гармонии между сознанием и миром), но он также предсказывает нашу неспособность открыть такие законы (подобные законам строения атома), которые не имели бы никакого отношения к эволюционному процессу или выживанию, как таковому».⁴⁵

Это известный аргумент, в связи с которым один из главных теоретиков эволюционной эпистемологии Герхард Фоллмер ввел даже специальный термин – *мезокосмос*, имея в виду «мир, к которому приспособился наш познавательный аппарат в ходе эволюции», причем мир этот есть «лишь один срез, одна часть действительного мира».⁴⁶

Если эволюционное приспособление ограничено мезокосмосом, то как же тогда человек может постичь законы атомного и субатомного уровней реальности? Ответ Штайнера гласит: посредством *математической аналогии*. Если такие аналогии невыразимы ни в каком языке, кроме математического, Штайнер называет их *пифагорейскими* аналогиями.

Они весьма характерны для современной физики. Даже такие на первый взгляд собственно физические модели, как «планетарная» модель атома водорода Нильса Бора, на деле функционируют как «матема-

⁴⁴ Фрагмент 7.508. Штайнер цитирует Пирса по изданию: Collected Papers of Charles Sanders Peirce / Ed. A.W. Burks. Vol. 7. Cambridge (Mass.): Harvard University Press, 1958. См.: Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, p. 50.

⁴⁵ *Ibid.*

⁴⁶ Фоллмер Г. Мезокосмос и объективное познание // Вестник МГУ. Серия 7 - Философия. 1994. № 6. С. 35-56. 1995. № 1. С. 27-47.

тические метафоры». Последнее выражение Штайнер разъясняет так: «Математическая форма соответствующих моделей была извлечена посредством абстрагирования (was abstracted out), а затем по аналогии применена даже в тех областях, где действительное поведение атома не могло быть описано классической механикой».⁴⁷

Особо интересен случай, когда пифагорейские аналогии строятся не на самой математической структуре, а на принятой системе математических обозначений (mathematical notation). В этом случае аналогия строится на форме уравнений, а не на их смысле. Такие аналогии Штайнер называет *формалистскими*. Классический пример – введение Максвеллом в систему уравнений электромагнетизма (из соображений симметрии) тока смещения.

На каком основании мы можем рассчитывать на успех подобных аналогий? Штайнер не может не вспомнить знаменитые слова Галилея⁴⁸, обращенные к его оппоненту (Орацио Грасси, выступившему под псевдонимом Лотарио Сарси):

«Он, по-видимому, полагает, что философия⁴⁹ – книга чьих-то вымыслов, такая же, как “Илиада” или “Неистовый Роланд” – книги, для которых менее всего значит, истинно ли то, что в них написано. В действительности же, синьор Сарси, все обстоит не так. Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее – треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова; без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту».⁵⁰

⁴⁷ Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, pp. 3-4.

⁴⁸ Ibid, p. 2, 5.

⁴⁹ Точнее – *натуральная* философия, ведь ближайший предмет спора – природа комет (примечание мое – В.Ш.).

⁵⁰ Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. С. 41.

Однако Галилей (в отличие от Штайнера и Вигнера) не просто избирал эмпирически оправдавшую себя методологию, которую Штайнер описывает так: «При формулировке гипотез физик-практик находится в плену убеждения (явного или неявного), что первичный (ultimate) язык Вселенной – это язык математика».⁵¹ Галилей имел для своей методологии серьезные *теологические* основания. Их предельно ясно к тому времени («Пробирных дел мастер» Галилея вышел в 1623 году) уже выразил Иоганн Кеплер в изданной в 1619 году «Гармонии мира» (*Harmonices Mundi*): «Геометрия существовала до <сотворения> вещей, она совечна (*coaeterna*) Божественному Уму и есть <сам> Бог (что может быть в Боге и не быть Богом?), она снабдила Бога образцами (*exempla*) для творения и перешла (*transivit*) к человеку вместе с образом Божиим; она не была воспринята <человеком> только посредством зрения».⁵² Да, «язык Вселенной – это язык математика (*language of the mathematician*)» для Кеплера и Галилея, только последнее слово следовало бы написать при этом с большой буквы, поскольку речь идет о Боге-творце.

В «Диалоге о двух главнейших системах мира» (1632) Галилей высказал это совершенно ясно, вложив в уста коперниканца Сальвиати следующие слова: «<...> я утверждаю, что человеческий разум познает некоторые истины столь совершенно и с такой абсолютной достоверностью, какую имеет сама природа; таковы чистые математические науки, геометрия и арифметика; хотя Божественный разум знает в них бесконечно больше истин, ибо он объемлет их все, но в тех немногих, которые постиг человеческий разум, я думаю, его познание по объективной достоверности равно Божественному, ибо оно приходит к пониманию их необходимости, а высшей степени достоверности не существует. <...> Истина, познание которой нам дают математические доказательства, та же самая, какую знает и Божественная мудрость; но я охотно соглашусь с вами, что способ Божественного познания бесконечно многих ис-

⁵¹ Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, p. 5.

⁵² Kepler J. The Harmony of the World / Tr. by E.J.Aiton, A.M.Duncan, J.V.Field. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997, p. 304.

тин, лишь малое число которых мы знаем, в высшей степени превосходит наш; наш способ заключается в рассуждениях и переходах от заключения к заключению, тогда как его способ — простая интуиция; <...> Итак, те переходы, которые наш разум осуществляет во времени и, двигаясь шаг за шагом, Божественный разум пробегает, подобно свету, в одно мгновение; а это то же самое что сказать: все эти переходы всегда имеются у него в наличии».⁵³

Математическое описание для Кеплера и Галилея — это *истинное* понимание и объяснение мира, достигающее предельного (ultimate) уровня — уровня изначального замысла Творца, а не *фикция*, пусть и очень увлекательная (подобная великим произведениям Гомера и Лудовико Ариосто), а может быть даже и полезная на практике. Галилей — решительный противник фикционализма в понимании математики. Фикционалист скорее его оппонент — кардинал Беллармин.⁵⁴

Ну, а какова позиция Штайнера? Что с его точки зрения стоит за успехом математических аналогий? Он не считает свою собственную позицию *пифагорейской*, но признает пифагореизм «приемлемой и заслуживающей уважение (very respectable)» позицией. При этом он считает нужным различать *концептуальный* и *метафизический* пифагореизм. Первый состоит в убеждении, что «предельные свойства (ultimate properties) или “реальные сущности” вещей есть не что иное, как математиче-

⁵³ Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой // Галилей Г. Избранные труды в 2-х томах. М.: Наука, 1964. Т. 1. С. 201-202.

⁵⁴ Коперниканство было осуждено католической церковью в XVII веке именно в качестве физического объяснения, а в качестве метода *спасения явлений* (φαινόμενα σῶζειν) оно считалось приемлемым. Пафос Галилея в том, что математическое описание дает истинное физическое объяснение, а не одно из многих возможных фиктивных повествований «спасающих явления». Кардинал Беллармин в письме к Антонио Фоскарини от 12 апреля 1615 года говорил о приемлемости коперниканства в первом смысле и категорической неприемлемости во втором. См.: Фантоли А. Галилей: в защиту учения Коперника и достоинства Святой Церкви. М.: Изд-во «МИК», 1999. С. 138-140. Стоит отметить, что с точки зрения постпозитивистской философии науки позиция Беллармина выглядит более адекватной, чем позиция Галилея. См.: Фейерабенд П. Галилей и тирания истины // Фейерабенд П. Прощай, разум. М.: АСТ, Астрель, 2010. С. 321-345.

ские структуры и их отношения». Второй же идет далее, «попросту отождествляя Вселенную или все вещи в ней с математическими объектами или структурами».⁵⁵ В первом случае сохраняется различие между вещью и ее (математическим) понятием, во втором – этого различия нет.

Осознанными сторонниками концептуального пифагореизма могут быть признаны Галилей или Лейбниц. В этом смысле могут быть, например, истолкованы известные слова Галилея: «Не думаю, чтобы для возбуждения у нас ощущений вкуса, запаха и звука от внешних тел требуется что-нибудь еще, кроме размеров, форм, числа и медленных или быстрых движений; я полагаю, что если бы уши, языки и носы вдруг исчезли, то форма, число и движение остались бы, но не запахи, вкусы или звуки. Я глубоко уверен, что без живого существа последние представляют собой не более чем имена <...>».⁵⁶ Другими словами, именно математическое описание – это объективное описание мира, именно оно имеет дело с первичными качествами. Однако попытки устранить различие между вещью и математическим понятием здесь не предпринимается. Особенно это заметно у Лейбница – на его языке речь идет о различии между бесчисленными возможными мирами и единственным миром действительным.

Современным примером метафизического пифагореизма может служить позиция Макса Тегмарка.⁵⁷

Говоря о пифагорейских аналогиях в современной физике, Штайнер обращает особое внимание на *антропоцентрический* характер подобной стратегии. Конечно, речь в данном случае идет не о *явном* (overt), а о *скрытом* (covert) антропоцентризме, т.е. о некотором поведении, ко-

⁵⁵ Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, p. 5.

⁵⁶ Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. С. 225. Чуть ранее он называет в этой связи «вкусы, запахи, цвета и другие качества» (с. 223). Отметим, что Галилей отчасти делает исключение для зрения и осязания – как раз тех чувств, которые важны для геометрии.

⁵⁷ Тегмарк М. Параллельные вселенные // В мире науки, 2003, № 8, с. 23-33; Tegmark M. The Mathematical Universe // Foundations of Physics, v. 38, № 2 (Feb. 2008), pp. 101-150.

торое без поддержки антропоцентрических убеждений перестает быть рациональным поведением.⁵⁸ Если мы, например, (без особой рефлексии по данному вопросу) классифицируем явления в соответствии с особенностями человеческого устройства, то мы повинны в скрытом антропоцентризме. Деля числа на женские (четные) и мужские (нечетные) древние пифагорейцы поступали именно так.

Штайнер убежден, что наша математика существенным образом человекообразна, поэтому безоглядно доверяющий ей физик обнаруживает тем самым скрытый антропоцентризм. Почему математика человекообразна? Мы готовы признать в качестве подлинной математики только то, что волнует наше *эстетическое чувство*. В этом убеждении Штайнер солидарен с Вигнером, и об этом согласно свидетельствуют многие крупнейшие математики (Дж. фон Нейман, Г. Харди и др.).⁵⁹ Однако различие красивое/безобразное антропоцентрично, его трудно понять иначе, чем специфичные для нашего биологического вида предпочтения. Следовательно, антропоцентрична и наша математика, коль скоро она покоится на эстетическом критерии. Второй критерий, отличающий для нас математику от не математики – *удобство и полезность* (convenience).⁶⁰ Ученые на практике постоянно пользуются принципом «что удобно, то правильно» (what is convenient is correct). Штайнер приводит выразительный пример из воспоминаний Чжэньнин Янга, лауреата Нобелевской премии по физике 1957 года, в котором хорошо видно как оба критерия работают в согласии.⁶¹ Антропоцентричность второго критерия еще очевиднее, чем первого.

Однако ярче всего антропоцентризм виден при использовании в современной физике *формалистских* аналогий. За таким использованием явно проглядывает реалистическая теория имен и символов. Подобное поведение не только явно антропоцентрично, оно сходно с поведением детей (childlike) и подозрительно напоминает архаичные магиче-

⁵⁸ Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998, pp. 55-56.

⁵⁹ Ibid, pp. 64-66.

⁶⁰ Ibid, pp. 66-70.

⁶¹ Ibid, p. 70.

ские практики. Впрочем, самое интересное состоит не в том, что современные ученые ведут себя подобным образом, а в том, что их стратегия оказывается в целом успешной! Это и есть проблема Штайнера.⁶²

Выше мы противопоставляли натурализм и супранатурализм. Штайнер определяет *натурализм* как противоположность не супранатурализма, а *антропоцентризма*.⁶³ Для него особенно важно, что натурализм настаивает на «конце человеческой исключительности» (если воспользоваться выражением Жана-Мари Шеффера), на том, что человек не имеет выделенного положения в мироздании. Как связаны между собой антропоцентризм и супранатурализм? В самом общем виде они, похоже, вообще могут быть не связаны. Однако в контексте авраамических религий между ними есть явная связь, антропоцентризм получает здесь супранатуралистическое оправдание.

Марк Штайнер, как уже было сказано выше, делает попытку занять промежуточную позицию между натурализмом и супранатурализмом, но не «посередине», а «ближе» к супранатурализму. Натурализм он критикует как не способный решить проблему Штайнера, т.е. объяснить особую эффективность явно антропоцентрической стратегии пифагорейских аналогий в современной физике, отношение же его к супранатурализму остается не вполне проясненным. Точнее: он приводит аргумент в пользу антропоцентризма и на этом останавливается. Предполагает ли его антропоцентризм супранатуралистическое дополнение или нет?

Приведу самое откровенное высказывание Штайнера на этот счет, и то брать его приходится не из основного текста, а из предисловия к книге 1998 года: «В той мере, в которой “натурализм” отвергает любую антропоцентрическую точку зрения <...> - эта книга бросает вызов натурализму. Последнее делает мою книгу совместимой с естественной теологией, однако имеется и много позиций, которые не натуралистические, но и не теологические. <...> В моих исследованиях я в значительной

⁶² *Ibid*, pp. 70-72.

⁶³ *Ibid*, p. 55.

степени вдохновляюсь взглядом Маймонида, согласно которому никакая философия, в частности никакая религиозная философия, не может быть полной без тщательного исследования наших лучших физических теорий (а это куда более трудная задача сегодня, чем это было в Средние века), и что изучение науки (и философии) само по себе может быть религиозным действием. Я осознаю, конечно, что Маймонид не одобрил бы, мягко выражаясь, мои “антропоцентристские” выводы, но именно к ним привел мой собственный философский поиск. Я, в самом деле, надеюсь, что эта книга послужит также напоминанием для верующих об истине Маймонида, утверждающей важность научного исследования с религиозной точки зрения».⁶⁴

Не имеем ли мы здесь дело с фигурой умолчания – осознанным риторическим приемом, призванным подчеркнуть особую важность табуированной темы (смещение вопросов веры и философского анализа недопустимо)? Во всяком случае супранатуралистических выводов Штайнер навязывать читателям своей книги не хочет.

ФИЛОСОФИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Не только доклад Юджина Вигнера, но и книга Марка Штайнера, – уже признанная классика, но в какой области? Обсуждаемая нами область исследований еще не имеет окончательно устоявшегося названия. Главный претендент на него – «the applicability of mathematics» (applicability – приложимость, применимость, пригодность). Именно этот термин закреплен в заглавии основополагающей для данного направления исследований монографии Марка Штайнера «The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem».⁶⁵ Под таким названием имеется ста-

⁶⁴ *Ibid*, p. 10.

⁶⁵ До выхода книги 1998 года Штайнер опубликовал две статьи, где этот термин активно использовался (в первой из них – в тексте статьи, но не в заглавии): *Steiner M. The Application of Mathematics to Natural Science // The Journal of Philosophy*, v.86, № 9 (Sept. 1989), pp. 449-480; *Steiner M. The Applicabilities of Mathematics // Philosophia Mathematica (III)*, v.3, № 2 (May 1995), pp. 129-156. Отмечу также, специальный раздел с таким названием в сборнике статей «Философия математики сегодня» под редак-

тъя в «Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP)», написанная американским философом Кристофером Пинкоком.⁶⁶ Этот термин использован недавно в заглавии монографии норвежца Сорина Бангу⁶⁷, также на интересующую нас тему. Он вообще очень широко применяется. Другой претендент – «the philosophy of applied mathematics» (философия прикладной математики). Он использован, например, в замечательном введении в философию математики канадского исследователя Джеймса Роберта Брауна.⁶⁸ Он используется, наряду с первым термином, австралийским философом Марком Коливаном.⁶⁹ Он использован и Пинкоком в заглавии статьи «Towards a Philosophy of Applied Mathematics» (По направлению к философии прикладной математики)⁷⁰, точно также назван один из разделов «Введения в философию математики» Коливана⁷¹. Можно обозначить эту тему еще проще, привычнее и шире, как названа книга, которую Вы держите в руках. Так назвала свою недавнюю книгу британский философ математики Мэри Лэнг.⁷² Впрочем, последнее название, пожалуй, слишком широко. На практике речь главным образом идет об анализе той роли (точнее, многих ролей), которую математика играет в естествознании, и том вкладе, который она вносит в успех дела науки. Мне нравится название «философия применения математики».

цией Эвандро Агацци и Дьёрдя Дарваша: *Philosophy of Mathematics Today* / Ed. by E. Agazzi and G. Darvas. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 233-334.

⁶⁶ *Pincock C.* The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: <http://www.iep.utm.edu/math-app/>

⁶⁷ *Bangu S.* The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology. Palgrave Macmillan, 2012.

⁶⁸ *Brown J.R.* Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures. New York: Routledge, 1999, p. 37; *Brown J.R.* Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures. 2nd ed. New York: Routledge, 2008, p. 51.

⁶⁹ *Colyvan M.* Mathematics and the World // Irvine A.D. (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009, pp. 651-702.

⁷⁰ *Bueno O., Linnebo Ø. (eds.)* New Waves in Philosophy of Mathematics. Palgrave Macmillan, 2009.

⁷¹ *Colyvan M.* An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

⁷² *Leng Mary.* Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010.

В последнее время наметился круг авторов, уделяющих особое внимание нашей проблеме, а иногда и считающих ее центральной для философии математики. С одной стороны, в интересующей нас области уже обозначился ряд знаковых текстов и сложился список «классических» авторов. С другой, ее представители ощущают необходимость убеждать философов науки в особой значимости своей проблематики. Как сказал о цели своей монографии «Математика и естественнонаучные представления» (2012) Кристофер Пинкок, «я надеюсь добиться включения темы приложений <математики> в перечень наиболее важных и актуальных тем (to place the topic of applications on the agenda), стоящих как перед философией естествознания, так и перед философией математики»⁷³.

Впрочем, некоторый статус обсуждаемая область исследований уже завоевала, о чем свидетельствует включение посвященных ей специальных разделов в современные справочные издания по философии математики – статей М.Штайнера «Mathematics – application and applicability (Математика – применение и применимость)»⁷⁴ и М.Коливана «Mathematics and the world (Математика и мир)»⁷⁵.

Отсутствие общепринятого названия обсуждаемой области, конечно же, не случайно. Оно свидетельствует о сложностях с определением границ, смыслового ядра и статуса философии применения математики. Терминологическая неопределенность связана с плохой проясненностью соответствующих проблем. Посмотрим на нижеследующий список и попробуем ответить на вопрос, как соотносятся между собой:

- математизация (mathematization);

⁷³ *Pincock C. Mathematics and Scientific Representation. Oxford University Press, 2012, p. xiii.*

⁷⁴ *Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005, pp. 625-650.*

⁷⁵ *Irvine A.D. (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009, pp. 651-702.*

- приложение (применение?) математики (the applicability of mathematics);
- прикладная математика (applied mathematics);
- математические модели (mathematical models) и математическое моделирование;
- математика как язык науки: использование в некоторой области «математического языка» (mathematics as a/the language of science).

Перечислю и несколько все еще далеких от общепринятого решения проблем:

- различие и соотнесение чистой и прикладной математики (pure/applied mathematics distinction);
- проблема отношения математики к реальности (mathematics and reality);
- что означают «абстрактность», «идеальность» и «формальность» в применении к математике, и как они соотносятся с «конкретным» и «реальным» в контексте ее приложений;
- теоретизация и математизация: сходства, различия, взаимосвязь.

Несмотря на многие неясности, литература, относящаяся к философии применения математики, за последние годы стала весьма и весьма обширной. В ней явно выделяются *два кластера*. Первый связан с так называемым «аргументом от неустранимости» (the indispensability argument), второй – с проблематикой «математического объяснения» (mathematical explanation). В заключение представлю кратко каждый из них.

АРГУМЕНТ ОТ НЕУСТРАНИМОСТИ

«Аргумент от неустранимости», или, более полно, «аргумент от неустранимости Куайна-Патнэма в пользу математического реализма» (the Quine-Putnam indispensability argument for mathematical realism), был

сформулирован на рубеже 1970-х годов американскими аналитиками Уиллардом Куайном⁷⁶ и Хилари Патнэмом⁷⁷. Делались попытки оспорить аргумент Куайна-Патнэма, из которых самая известная была принята в 1980-е годы учеником Патнэма – Хартри Филдом.⁷⁸ Уже знакомый нам Марк Коливан написал целую диссертацию по данному вопросу.⁷⁹ В последнее время эта тема стала весьма популярна, о чем свидетельствует значительный поток публикаций и появление сразу двух специализированных статей в интернет энциклопедиях.⁸⁰

⁷⁶ Позиция Куайна по проблеме применения математики представлена в многочисленных статьях, из которых наиболее характерны следующие: О том, что есть <1948> // Куайн У.В.О. С точки зрения логики. М.: Канон+, 2010. С. 21-44; Две догмы эмпиризма <1950> // Там же. С. 45-80; Carnap and Logical Truth <1954> // Quine W.V. The Ways of Paradox and Other Essays. NY: Random House, 1966, pp. 100-125; Success and Limits of Mathematization <1978> // Quine W.V. Theories and Things. Cambridge, MA: Belknap Press, 1981, pp. 148-155; Вещи и их место в теориях <1980> // Аналитическая философия: становление и развитие (Антология) / Общая ред. и составление А.Ф.Грязнова. М.: ДИК, Прогресс-Традиция, 1998. С. 322-342.

⁷⁷ Явным образом «аргумент от неустраимости» был введен Патнэмом в работе «Philosophy of Logic» (1971). См.: Философия логики // Патнэм Х. Философия сознания. М.: ДИК, 1999. С. 103-145. В русском переводе А.Л.Никифорова термин, к сожалению, оказался несколько «растворен». Название раздела VIII «Indispensability Arguments» по-русски звучит «Необходимость как аргумент в пользу реализма» (с. 134).

⁷⁸ Field H. Science without Numbers: A Defence of Nominalism. Oxford: Blackwell, 1980; Field H. Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell, 1989.

⁷⁹ Colyvan M. The Indispensability of Mathematics. NY: Oxford University Press, 2001.

⁸⁰ Colyvan M. Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics (1998, substantive revision 2014) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: <http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/>; Marcus R. The Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: <http://www.iep.utm.edu/indimath/>. Литература на русском языке по данному вопросу практически отсутствует. В качестве приятных исключений укажу: Хлебалин А.В. Онтологические обязательства неустраимости математики // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2009. № 4(8). С. 60-68; Николаев В.М. Необходимость математики для научных теорий как свидетельство существования абстрактных математических объектов // Философия, наука, образование – 2010 / Под ред. О.Д. Волкогоновой, В.А. Шапошникова. М.: ООО «МЭЙЛЕР», 2010. С. 230-242.

Аргумент (в самом общем виде) может быть сформулирован в следующей силлогистической форме:⁸¹

(P1) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к тем и только тем сущностям, которые неустранимы из наших лучших естественнонаучных теорий.

(P2) Математические сущности неустранимы из наших лучших научных теорий.

(C) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к математическим сущностям.

Для нас этот аргумент интересен тем, что он *связывает* классические онтологические проблемы (спор реалистов и номиналистов) с проблемой применения математики в естествознании. В связи с тем, что предложенный силлогизм является формально правильным, основное внимание привлекает вопрос об истинности посылок P1 и P2. Приглядемся к ним поближе.

Первая из них использует термин Куайна «онтологические обязательства» (ontological commitment). Другими словами, здесь предполагается вполне определенное понимание онтологии. Принятие некоторой научной теории означает (для Куайна) принятие соответствующего языка, допускающего однозначное логическое прояснение. В результате этого прояснения мы выявляем так называемые связанные переменные или переменные квантификации. Именно они и задают нашу онтологию. «Теория обязывает к тем и только к тем сущностям, на которые должны быть способны указывать связанные переменные этой теории, для того чтобы сделанные в ней утверждения были истинными».⁸² Или более кратко: «быть – значит быть значением переменной».⁸³ Однако мы способны *изменять* наши теории, изменяя тем самым и наши онтологиче-

⁸¹ При формулировке и обсуждении аргумента я опираюсь, главным образом, на энциклопедическую статью Марка Коливана для SEP.

⁸² Куайн У. О том, что есть... С. 37.

⁸³ Там же. С. 40.

ские обязательства: «Наше обязательство остается до тех пор, пока мы не придумаем некоторого способа перефразирования высказывания».⁸⁴ В решении вопроса о том, какую теорию (а тем самым и онтологию) предпочесть, Куайн занимает *прагматическую* позицию, следуя по стопам Пирса и рекомендуя «терпимость и экспериментаторский дух».⁸⁵

Разговор о «наших лучших естественнонаучных теориях» (our best scientific theories) в той же первой посылке, очевидно, отсылает нас к *натурализму* Куайна. Куайн верит в физические объекты, а не в гомеровских (или каких-то других) богов.⁸⁶ В этой связи очень интересен вопрос о характере *долженствования* (we ought to have, «нам надлежит»), которое звучит в P1. Это долженствование имеет, по крайней мере, два слоя: а) слой, связанный с куайновским пониманием онтологических обязательств, которые влечет за собой принятие (на прагматических основаниях!) некоторой теории; б) слой, связанный с натуралистической установкой, заставляющей нас относиться соответствующим образом к лучшим (на настоящий момент!) научным теориям.

В обеих посылках речь идет о «неустранимости» (indispensability) математики. Что имеется в виду? Можно, например, говорить о формальной и прагматической устранимости или неустранимости. *Формальная* устранимость означает возможность формального перестроения языка соответствующей научной теории, приводящего к элиминации соответствующих языковых элементов. *Прагматическая* же означает готовность реального научного сообщества, руководящегося соображениями удобства, привычки и т.п., произвести соответствующую реформу. Как выражается М. Коливан, альтернативная теория должна быть привлекательной.

Говоря об альтернативных теориях в контексте обсуждаемого аргумента важно учесть также *холизм* Куайна. Он убежден, что опыт подтверждает или опровергает нашу логику и математику только как часть *целого* – всех наших естественнонаучных представлений о мире, но нико-

⁸⁴ Там же. С. 37.

⁸⁵ Там же. С. 44.

⁸⁶ Куайн У. Две догмы эмпиризма... С. 77-78.

гда в отдельности.⁸⁷ Наша склонность менять одни части этой системы скорее, чем другие, имеет под собой не столько принципиальные, сколько (опять же) прагматические основания. В связи с куайновским холизмом возникает вопрос: есть ли он всего лишь теоретический тезис максимальной общности или это реальная рабочая основа научной методологии? Например, Пенелопа Мэдди принимает натурализм, но ставит под вопрос холизм, полагая, что он плохо согласуется с реальной методологией ученых.⁸⁸

В аргументе речь идет также о «математических сущностях» (mathematical entities). Что это такое? Имеется в виду вся математика или какая-то ее привилегированная часть? Судя по контексту, можно предположить, что онтологические обязательства мы имеем по отношению к той и только той математике, которая используется естествоиспытателями на текущий момент. А как быть с математическими теориями (и соответствующими сущностями) не находящими такого применения? Отметим также: граница между теми и другими сущностями исторически подвижна. Более того, даже если мы ограничимся применяемой математикой, то и здесь ситуация далеко не гомогенна. Одно дело, если речь идет о некой предельно математизированной физической теории, претендующей на роль теории всего, когда зазор между физической реальностью и соответствующими математическими сущностями становится едва различимым. Другое дело – если перед нами пример математического моделирования, когда сами ученые убеждены, что вводят удобные для расчетов математические фикции, которым ничего или почти ничего в физической реальности не соответствует (например, гипотеза сплошности в механике сплошных сред, предположения об абсолютной несжимаемости жидкости, ее бесконечной глубине и т.п.).

Споры вокруг аргумента Куайна-Патнэма составляют заметный компонент современной англоязычной философии математики, я лишь

⁸⁷ Там же. С. 75-77.

⁸⁸ Maddy P. Naturalism in Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997. Sec. II.6: Indispensability and Scientific Practice.

попытался показать, почему этот аргумент оказался плодотворным основанием для широкой дискуссии.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ

Чтобы перейти к проблеме математического объяснения, нам следует задать вопрос: *почему* математика неустранима из науки, какие *цели* достигаются благодаря применению математики в какой-либо области? Нетрудно заметить, что на поставленные вопросы существует много разных ответов. Вот некоторые из подобных целей:

- описание (description);
- объяснение (explanation);
- прояснение (clarification, elucidation);
- открытие (discovery);
- унификация (unification);
- подтверждение (confirmation);
- предсказание (prediction);
- визуализация (visualization), в том числе математические аналогии (analogies) и математические метафоры (math metaphors);
- достижение согласия между учеными (convergence).

Говоря о математическом объяснении, современные авторы приводят несколько излюбленных примеров.⁸⁹ Я остановлюсь только на двух из них – один связан с применением для получения объяснения экстремальных свойств геометрических фигур, другой – простых чисел. Причем оба примера связаны не с физикой, а с биологией, поскольку в этой области ситуация с успешным применением математики куда более сложная и спорная. Мои нижеследующие комментарии к этим примерам далеко не так оптимистичны, как у Паоло Манкозу, Даниэле Молинини и ряда других авторов.

⁸⁹ См. энциклопедическую статью: *Mancosu P. Explanation in Mathematics* (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: <http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/>; а также недавнюю PhD-диссертацию: *Molinini D. Toward a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena* (July 2011), Universite Paris Diderot (Paris 7) & Universitat de Barcelona, pp. 5-6.

Почему ячейки пчелиных сот имеют форму правильных шестиугольников? Еще Марк Варрон (в I в. до Р.Х.) обращал на это внимание, указывая, что шестиугольник выбран пчелами, поскольку он, как утверждают геометры, вмещает больше всего меда. Чарльз Дарвин видел в пчелиных сотах результат естественного отбора – шестиугольное замощение плоскости позволяет минимизировать расход воска. Однако достаточно полно предположение об экстремальных свойствах пчелиных сот (honeycomb conjecture) было доказано только в 1999 году американским математиком Томасом Хейлзом в следующем виде: всякое разбиение плоскости на равные по площади участки имеет суммарный периметр не меньший, чем соответствующее гексагональное разбиение.⁹⁰

Казалось бы, перед нами прекрасное объяснение, имеющее две компоненты: 1) биологическую или эволюционную; 2) чисто геометрическую. Причем вторая играет существенную роль.⁹¹ К сожалению, эту красивую картину несколько портят появившиеся в последнее время публикации, приводящие серьезные (как экспериментальные, так и теоретические) аргументы в пользу альтернативной картины. Согласно новому подходу, изначально пчелы делают ячейки своих сот круглыми, а близкую к шестиугольной форму они приобретают в процессе застывания воска под воздействием чисто физических сил.⁹² Заметим, впрочем, что и в новом объяснении математика опять же играет существенную роль, но уже не прямо, а будучи запрятана внутрь физической теории, описывающей процесс застывания воска с помощью соответствующей системы уравнений.

Второй популярный пример связан с так называемыми периодическими цикадами (род *Magicicada*).⁹³ Эти насекомые, обитающие в Се-

⁹⁰ Hales T. The Honeycomb Conjecture // *Discrete & Computational Geometry*, 2001, vol. 25, № 1, pp. 1-22.

⁹¹ Lyon A., Colyvan M. The Explanatory Power of Phase Spaces // *Philosophia Mathematica* (III), vol. 16, № 2 (June 2008), pp. 228-229.

⁹² Karihaloo B.L., Zhang K. and Wang J. Honeybee Combs: How the Circular Cells Transform into Rounded Hexagons // *Journal of the Royal Society Interface*, 6 September 2013, vol.10, № 86, 20130299, <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.0299>; Ball P. How Honeycombs Can Build Themselves: Physical Forces rather Than Bees' Ingenuity Might Create the Hexagonal Cells // *Nature*, 17 July 2013, [doi:10.1038/nature.2013.13398](https://doi.org/10.1038/nature.2013.13398).

⁹³ Williams K.S., Simon C. The Ecology, Behavior, and Evolution of Periodical Cicadas // *Annual Review of Entomology*, 1995, vol. 40, pp. 269-295; Baker A. Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // *Mind*, vol. 114, № 454 (April 2005), pp. 223-238.

верной Америке, имеют весьма необычный жизненный цикл. В состоянии личинок (нимф) они проводят 13 или 17 лет под землей (для насекомых это очень долго), затем синхронно и в огромных количествах выходят на поверхность, превращаются во взрослых особей, которые спариваются, откладывают яйца и вскоре погибают. Наземная часть цикла занимает всего около месяца.

Один из вопросов, который возникает в связи с особенностями цикла этих цикад, – почему периодичность их жизни задают именно *простые* 13 и 17, а не какие-то *составные* числа? Может быть это случайное совпадение? Так и думали, пока в 1977 году известный американский биолог Стивен Джей Гулд не высказал предположение, что для предпочтения простых периодов может иметься особое основание.⁹⁴

В течение недели с момента появления на поверхности, цикады являются легкой и желанной добычей для всевозможных наземных хищников – поедателей насекомых (в особенности птиц). Поэтому одна из гипотез состоит в том, что массовое одновременное появление цикад – это попытка «пресытить хищников» (a strategy of predator satiation). В этом случае, важно еще, чтобы такое массовое появление происходило достаточно редко и поедатели не могли под него подстроиться. Большинство потенциальных хищников имеют жизненные циклы существенно более короткие (2-5 лет), следовательно, они не подстроены под цикл цикад. Однако если совпадение все же произойдет, цикады с удовольствием будут съедены. Значит, для цикад жизненно важно свести число возможных совпадений до минимума. Предположим, пишет Гулд, что жизненный цикл хищника – 5 лет. Если цикл цикады будет 15 лет, то такой хищник сможет подстроиться под него, поскольку 15 делится на 5. Если ее цикл будет 12 лет, то под него сможет подстроиться любой из хищников с жизненным циклом 2, 3 или 4 года. С этой точки зрения оптимальным для длины цикла цикады оказывается не слишком маленькое простое число, например 13 или 17.

⁹⁴ Gould S.J. Of Bamboos, Cicadas and the Economy of Adam Smith // Gould S.J. Ever Since Darwin: Reflections in Natural History. New York: W.W. Norton & Company Inc., 1977, pp. 97-102.

Не так давно подтвердить эту идею предпочтительности простых длин жизненного цикла с точки зрения отношений «хищник-жертва» взялись с помощью математического моделирования на основе теории клеточных автоматов. Применяя эту методику, Эрик Голс с соавторами⁹⁵ пришел к выводу, что действительно «у этого типа динамики имеются родовые свойства, которые благоприятствуют появлению простых чисел». Они даже говорят в этой связи о своеобразном «биологическом генераторе простых чисел». Правда они изначально исходили из циклического характера жизни как хищников, так и их жертв, оценивая лишь вероятность того, что та или иная длина жизненного цикла выведет своего обладателя на устойчивый режим существования. Однако решающая роль хищников с отчетливо выраженной цикличностью в случае периодических цикад экспериментально не установлена. Пауло Кампос с соавторами⁹⁶ отходит дальше от гипотезы Гулда, освобождая свою модель от изначального предположения о циклическом характере жизни как хищников, так и жертв. В результате у них получается, что жертвы демонстрируют явную цикличность с предпочтением простых чисел даже при отсутствии четкой цикличности хищников-поедателей. «Это сильное свидетельство в пользу эволюционной предпочтительности жизненных циклов, выраженных простыми числами», - пишут они.

Имеются и другие попытки построить математическую модель, объясняющую появление таких жизненных циклов. Так, вводя некоторые дополнительные предположения (порой довольно искусственные), можно получить предпочтительность именно простых чисел 13 и 17. Например, Николас Лиманн-Цибарт с соавторами⁹⁷ в результате попыток математического моделирования экологической ситуации периодических цикад пришли к выводу, что экологические факторы ответствен-

⁹⁵ Goles E. et al. A Biological Generator of Prime Numbers // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2000, vol. 3, № 2, p. 208-213; Goles E. et al. Prime Number Selection of Cycles in a Predator-Prey Model // *Complexity*, 2001, vol. 6, № 4, pp. 33-38.

⁹⁶ Campos P.R.A. et al. Emergence of Prime Numbers as the Result of Evolutionary Strategy // *Physical Review Letters*, 27 August 2004, vol. 93, № 9, pp. 098107(1-4).

⁹⁷ Lehmann-Ziebarth N. et al. Evolution of Periodicity in Periodical Cicadas // *Ecology*, 2005, vol. 86, № 12, pp. 3200-3211.

ны за синхронное появление цикад, но простота циклов объясняется какими-то пока не установленными физиологическими или генетическими механизмами, но допускающими переключение между 13-летним и 17-летним периодами. (Есть экспериментальные данные, согласно которым, цикада может «пропустить» положенный ей 13-й год и появиться на 17-й). Названными авторами была высказана также чисто умозрительная гипотеза, что отвечающий за простоту механизм может заключаться в том, как устроены биологические часы наших цикад. Если предположить, что они высчитывают длинные периоды, используя двое (дополняющих друг друга) краткосрочных биологических часов, одни из которых способны определить максимум два года (а затем обнуляются), а другие – максимум три года. Используя такую двойную систему подсчета времени (a dual-clock counting mechanism) они способны идентифицировать только те годы, которые не делятся ни на 2, ни на 3. В диапазоне от 12 до 18 лет это как раз только 13 и 17.

С биологической точки зрения есть веские основания скептически относиться к полученным математическим результатам.

1) Есть целый ряд различных гипотез о биологических причинах столь длинного жизненного цикла периодических цикад: наряду с обсуждавшейся выше причиной (давление со стороны поедателей взрослых особей) это необходимость избегать близкородственного скрещивания и состязание между нимфами разных выводков и др. Возможно, некоторые из этих причин действуют в сочетании.

2) Все имеющиеся гипотезы очень плохо подтверждены экспериментально.

3) Имеющиеся математические модели слишком упрощают реальную экологическую ситуацию периодических цикад. При этом нет биологических подтверждений тому, что избранные при их построении факторы - решающие. Даже если принять, что решающий фактор - это хищники-поедатели, то еще нужно выяснить какие именно: птицы, мелкие млекопитающие, другие насекомые, грибы (например, *Massospora cicadina*) и т.д., причем уточнив, о каких именно видах идет речь. Кроме того, есть еще целый ряд экологических факторов, которые могут ока-

заться весьма существенными. Например, практически одновременная гибель (вскоре после спаривания и кладки яиц) огромного количества взрослых цикад, мертвые тела которых буквально устилают землю, существенно обогащает почву со всеми вытекающими отсюда последствиями. Одно из недавних исследований давления на периодических цикад со стороны ряда наиболее характерных птиц-поедателей обнаружило, что на годы массового появления цикад приходятся минимумы поголовья птиц, после чего следует всплеск. Авторы полагают, что их исследование «позволяет предположить, что необычный жизненный цикл периодических цикад способен “проектировать” (engineer) популяции птиц таким образом, что это не позволяет птицам отслеживать массовое появление цикад, но не благодаря большой длине цикла или выражения этой длины простым числом, а скорее через постановку популяций птиц на такую траекторию развития, что последующее появление цикад будет совпадать с пониженным давлением на них со стороны птиц-поедателей».⁹⁸

Я не случайно так подробно остановился на этих двух примерах – пчелиных сотах и периодических цикадах. На мой взгляд, они, с одной стороны, достаточно просты, а с другой - хорошо иллюстрируют сложность проблемы применения математики вообще и математического объяснения в частности.

Современные авторы часто связывают тематику математического объяснения с обсуждением аргумента Куайна-Патнэма. Эту идею ясно высказал Алан Бейкер.⁹⁹ Он предлагает свою версию аргумента от неустранимости, свободную от столь критикуемого куайновского холизма, но привязанную к наличию подлинных математических объяснений:

⁹⁸ Koenig W.D., Liebhold A.M. Avian Predation Pressure as a Potential Driver of Periodical Cicada Cycle Length // *The American Naturalist*, January 2013, vol. 181, № 1, p. 148.

⁹⁹ Baker A. Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // *Mind*, 2005, vol. 114, pp. 223-238.

(P*1) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к тем теоретическим сущностям, которые постулируются подлинными научными объяснениями.

(P*2) Имеются подлинные математические объяснения эмпирических явлений.

(C*) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к сущностям, постулируемым соответствующей математикой.

Впрочем, эта версия аргумента от неустраимости также уязвима для критики. Так, главный пример Алана Бейкера для «подлинного математического объяснения» - это пример с периодическими цикадами. Как мы имели возможность видеть, с этим примером не все обстоит так гладко, как хотелось бы Бейкеру. Вопрос о наличии подлинных математических объяснений, об истинной роли математики в них и о неустраимости этой математики остается открытым. Не только первая, но и вторая посылка так сформулированного аргумента уязвима. В самом ли деле успешная математическая модель накладывает на нас определенные онтологические обязательства? Сторонники фикционалистской трактовки математики (например, Мэри Лэнг) оспаривают это.¹⁰⁰ Успешное применение математики может быть совместимо не только с реалистическими, но и с антиреалистическими представлениями. Как справедливо пишет Лэнг, «само применение математики часто требует от нас делать определенно ложные, или, во всяком случае, необоснованные идеализирующие предположения относительно тех явлений, к которым наша математика, в конечном счете, применяется».¹⁰¹ Более того, математические теории применяются не к реальности как таковой, а к идеальным моделям реальности, т.е. к уже определенным образом подготовленным описаниям явлений. Лэнг предлагает рассматривать наши

¹⁰⁰ Фикционалистский анализ примера с периодическими цикадами см.: *Leng Mary. Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010, pp. 245-249.* Еще в конце 1990-х гг. куайновское понимание онтологических обязательств оспаривала Пенелопа Мэдди.

¹⁰¹ *Ibid*, p. 250.

научные теории как своего рода «слоеный пирог», состоящий из многих слоев идеализированных фиктивных моделей.

Таким образом, тема математического объяснения оказывается тесно связанной с проблемой моделирования и использования идеализаций в науке. Мэри Лэнг и Паоло Манкозу ссылаются в этом контексте на работы канадского философа науки Маргарет Моррисон.¹⁰² В книге 2000 года Моррисон ставит под сомнение объяснительные возможности математики, математический формализм облегчает унификацию научных теорий, но не помогает нам отвечать на вопросы «как?» и «почему?». Другой же канадский философ науки, Роберт Баттерман, настаивает на существенной роли, которую математика играет в науке благодаря так называемым «асимптотическим объяснениям».¹⁰³

Паоло Манкозу пишет в своем обзоре: «Несмотря на впечатляющую историческую родословную проблемы математического объяснения¹⁰⁴ <...>, работа аналитической философии в этой области еще только началась».¹⁰⁵ В самом деле, эта проблематика еще весьма далека от убедительной разработки и оставляет широкое поле для будущих исследований.

На этом я позволю себе завершить обзор современного состояния «философии применения математики». Названная тема представляется мне одной из самых перспективных, если не самой перспективной, для философии математики в ближайшем будущем. Надеюсь, что и наша книга «Математика и реальность» внесет посильную лепту в этот процесс.

¹⁰² *Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science* / Ed. by M.S. Morgan and M. Morrison. New York: Cambridge University Press, 1999; *Morrison M. Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures*. New York: Cambridge University Press, 2000.

¹⁰³ *Batterman R.W. The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction, and Emergence*. New York: Oxford University Press, 2002.

¹⁰⁴ Манкозу возводит ее к Аристотелю.

¹⁰⁵ *Mancosu P. Explanation in Mathematics* (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: <http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Бэкон Р.* Избранное. М.: Изд-во Францисканцев, 2005.
- Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Пер. В.А.Белокося и В.А.Угарова // Успехи физических наук, т. 94, вып. 3 (Март 1968), с. 535-546.
- Вигнер Е.* Этюды о симметрии / Пер. Ю.А.Данилова. М.: Мир, 1971. С. 182-198.
- Визгин Вл.П.* «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н.Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123-141.
- Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой // Галилей Г. Избранные труды в 2-х томах. М.: Наука, 1964. Т. 1.
- Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987.
- Крафт В.* Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003.
- Куайн У.В.О.* Вещи и их место в теориях <1980> // Аналитическая философия: становление и развитие (Антология) / Общая ред. и составление А.Ф.Грязнова. М.: ДИК, Прогресс-Традиция, 1998. С. 322-342.
- Куайн У.В.О.* С точки зрения логики. М.: Канон+, 2010.
- Николаев В.М.* Необходимость математики для научных теорий как свидетельство существования абстрактных математических объектов // Философия, наука, образование – 2010 / Под ред. О.Д. Волкогоновой, В.А. Шапошникова. М.: ООО «МЭЙЛЕР», 2010. С. 230-242.
- Патнэм Х.* Философия логики <1971> // Патнэм Х. Философия сознания. М.: ДИК, 1999. С. 103-145.
- Тегмарк М.* Параллельные вселенные // В мире науки, 2003, № 8, с. 23-33
- Фантоли А.* Галилей: в защиту учения Коперника и достоинства Святой Церкви. М.: Изд-во «МИК», 1999.
- Фейерабенд П.* Галилей и тирания истины // Фейерабенд П. Прощай, разум. М.: АСТ, Астрель, 2010. С. 321-345.
- Фоллмер Г.* Мезокосмос и объективное познание // Вестник МГУ. Серия 7 - Философия. 1994. № 6. С. 35-56. 1995. № 1. С. 27-47.

Фреге Г. Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008.

Хлебалин А.В. Онтологические обязательства неустранимости математики // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2009. № 4(8). С. 60-68.

Шапошников В.А. Математический скептицизм и абсолютистская трактовка доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики. / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: Книжный дом «Либроком» (URSS), 2014. С. 282-320.

Agazzi E., Darvas G. (eds.) *Philosophy of Mathematics Today*. Dordrecht: Kluwer, 1997.

Baker A. Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // *Mind*, vol. 114, № 454 (April 2005), p. 229-233.

Ball P. How Honeycombs Can Build Themselves: Physical Forces rather Than Bees' Ingenuity Might Create the Hexagonal Cells // *Nature*, 17 July 2013, [doi:10.1038/nature.2013.13398](https://doi.org/10.1038/nature.2013.13398).

Bangu S. *The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology*. Palgrave Macmillan, 2012.

Batterman R.W. *The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction, and Emergence*. New York: Oxford University Press, 2002.

Bueno O., Colyvan M. An inferential conception of the application of mathematics // *Noûs*, vol. 45, № 2 (June 2011), p. 345-374.

Bueno O., Linnebo Ø. (eds.) *New Waves in Philosophy of Mathematics*. Palgrave Macmillan, 2009.

Brown J.R. *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. New York: Routledge, 1999.

Brown J.R. *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*. 2nd edition. New York: Routledge, 2008.

Campos P.R.A. et al. Emergence of Prime Numbers as the Result of Evolutionary Strategy // *Physical Review Letters*, 27 August 2004, vol. 93, № 9, p. 098107(1-4).

Carnap R. *Formal and Factual Science <1934>* // *Readings in the Philosophy of Science* / Ed. by H. Feigl and M. Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953, pp. 123-128.

Colyvan M. Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics (1998, substantive revision 2014) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: <http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/>.

Colyvan M. The Indispensability of Mathematics. New York: Oxford University Press, 2001.

Colyvan M. The Miracle of Applied Mathematics // *Synthese*, v.127, № 3 (June 2001), pp. 265-277.

Colyvan M. An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

Colyvan M. The Undeniable Effectiveness of Mathematics in the Special Sciences (manuscript), <http://www.colyvan.com/papers/uemss.pdf>

Dorato M. The Laws of Nature and the Effectiveness of Mathematics // Boniolo G., Budinich P., Trobok M. (eds.) *The Role of Mathematics in Physical, Interdisciplinary and Philosophical Aspects*. Dordrecht: Springer, 2005, pp. 131-144.

Dummett M. Frege. Philosophy of Mathematics. London: Duckworth, 1991.

Field H. Science without Numbers: A Defence of Nominalism. Oxford: Blackwell, 1980.

Field H. Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell, 1989.

French S. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics // *Synthese*, v.125, № 1-2 (Jan. 2000), pp. 103-120.

Ginzburg L., Jensen Ch., Yule J. Aiming the "Unreasonable Effectiveness of Mathematics" at Ecology Theory // *Ecological Modelling*, v.207 (2007), pp. 356-362.

Goles E. et al. A Biological Generator of Prime Numbers // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2000, vol. 3, № 2, pp. 208-213.

Goles E. et al. Prime Number Selection of Cycles in a Predator-Prey Model // *Complexity*, 2001, vol. 6, № 4, pp. 33-38.

Gould S.J. Of Bamboos, Cicadas and the Economy of Adam Smith // Gould S.J. *Ever Since Darwin: Reflections in Natural History*. New York: W.W. Norton & Company Inc., 1977. P. 97-102.

Grattan-Guinness I. Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *The Mathematical Intelligencer*, v.30, № 3 (Summer 2008), pp. 7-17.

Hales T. The Honeycomb Conjecture // *Discrete & Computational Geometry*, 2001, vol. 25, № 1, p. 1-22.

Hamming R.W. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics // The American Mathematical Monthly, v.87, № 2 (Feb. 1980), pp. 81-90.

Harvey A. The Reasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences (Dec. 2012) <http://arxiv.org/pdf/1212.5854.pdf>

Hempel C.G. On the Nature of Mathematical Truth // The American Mathematical Monthly, v.52, № 10 (Dec. 1945), pp. 543-556.

Hempel C.G. Geometry and Empirical Science // The American Mathematical Monthly, v.52, № 1 (Jan. 1945), pp. 7-17.

Hendricks V.F. and Leitgeb H. (eds). Philosophy of Mathematics: 5 Questions. Automatic Press / Vince Inc. Press, 2008.

Interviews with Nobel Laureates and Other Scholars: Brought on the Occasion of World Congress for the Synthesis of Science and Religion. Bombay: Bhaktivedanta Institute, 1986.

Irvine A.D. (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009.

Karihaloo B.L., Zhang K. and Wang J. Honeybee Combs: How the Circular Cells Transform into Rounded Hexagons // Journal of the Royal Society Interface, 6 September 2013, vol.10, № 86, 20130299, <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.0299>.

Kepler J. The Harmony of the World / Tr. by E.J.Aiton, A.M.Duncan, J.V.Field. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.

Koenig W.D., Liebhold A.M. Avian Predation Pressure as a Potential Driver of Periodical Cicada Cycle Length // The American Naturalist, January 2013, vol. 181, № 1, pp. 145-149.

Lehmann-Ziebarth N. et al. Evolution of Periodicity in Periodical Cicadas // Ecology, 2005, vol. 86, № 12, p. 3200-3211.

Leng M. Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010.

Lesk A. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Molecular Biology // The Mathematical Intelligencer, v.22, № 2 (2000), pp. 28-36.

Lesk A. Compared to What? // The Mathematical Intelligencer, v.23, № 1 (2001), p. 4.

Longo G. The Reasonable Effectiveness of Mathematics and Its Cognitive Roots // Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. World Scientific, 2005, pp. 351-382.

Lyon A., Colyvan M. The Explanatory Power of Phase Spaces // Philosophia Mathematica (III), vol. 16, № 2 (June 2008), pp. 227-243.

Maddy P. Naturalism in Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

Maddy P. Second Philosophy: A Naturalistic Method. New York: Oxford University Press, 2007.

Mancosu P. Explanation in Mathematics (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: <http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/>.

Marcus R. The Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: <http://www.iep.utm.edu/indimath/>.

Mickens R.E. (ed.) Mathematics and Science. Singapore: World Scientific, 1990.

Molinini D. Toward a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena. PhD dissertation (July 2011). Universite Paris Diderot (Paris 7) & Universitat de Barcelona.

Morgan M.S., Morrison M. (eds.) Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science. New York: Cambridge University Press, 1999.

Morrison M. Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures. New York: Cambridge University Press, 2000.

Omnès R. Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited // Foundations of Physics, v.41, № 11 (Nov. 2011), pp. 1729-1739.

Pincock C. A new perspective on the problem of applying mathematics // Philosophia Mathematica, vol. 3 (2004), № 12, p. 135-161.

Pincock C. Mathematics and Scientific Representation. Oxford University Press, 2012.

Pincock C. The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: <http://www.iep.utm.edu/math-app/>

Plotnitsky A. On the Reasonable and Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Classical and Quantum Physics // Foundations of Physics, v.41, № 3 (Mar. 2011), pp. 466-491.

Quine W.V. Carnap and Logical Truth <1954> // Quine W.V. The Ways of Paradox and Other Essays. New York: Random House, 1966, p. 100-125.

Quine W.V. Success and Limits of Mathematization <1978> // Quine W.V. Theories and Things. Cambridge, MA: Belknap Press, 1981, p. 148-155.

Russ S. (guest ed.) Unreasonable Effectiveness of Mathematics // Interdisciplinary Science Reviews, v.36, № 3 (Sep. 2011), pp. 209-267.

Sarukkai S. Revisiting the “Unreasonable Effectiveness” of Mathematics // *Current Science*, v.88, № 3 (Feb. 2005), pp. 415-422.

Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005.

Steen L.A. The Science of Patterns // *Science*, v.240 (29 April 1988), pp. 611-616.

Steiner M. The Application of Mathematics to Natural Science // *The Journal of Philosophy*, v.86, № 9 (Sep. 1989), pp. 449-480.

Steiner M. The Applicabilities of Mathematics // *Philosophia Mathematica*, vol. 3, № 2 (May 1995), p. 129-156.

Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.

Szanton A. The Recollections of Eugene P. Wigner as Told to Andrew Szanton. Basic Books, 1992.

Tegmark M. The Mathematical Universe // *Foundations of Physics*, v. 38, № 2 (Feb. 2008), pp. 101-150.

Velupillai V.K. The Unreasonable Ineffectiveness of Mathematics in Economics // *Cambridge Journal of Economics*, v.29, № 6 (Nov. 2005), pp. 849-872.

Wigner E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *Comm. Pure and Appl. Math*, v.13, № 1 (Feb. 1960), pp. 1-14.

Wigner E. Symmetries and Reflections. Bloomington & London: Indiana University Press, 1967.

Williams K.S., Simon C. The Ecology, Behavior, and Evolution of Periodical Cicadas // *Annual Review of Entomology*, 1995, vol. 40, p. 269-295.

Wilson M. The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences // *Monist*, v.83, № 2 (2000), pp.296-394.

Wright C. Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege’s Constraint // *Cook R.T. (ed.) The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*. Dordrecht: Springer, 2007. P. 253-272.