Глава 20
ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ*

20.1. Периодизация философии математики

В философии математики обычно выделяют *классический* и *современный* периоды. Первый начинают с пифагорейцев и Платона, наиболее влиятельные концепции связывают также с именами Аристотеля, Лейбница, Канта и Милля. Главная особенность этого периода — философия математики не существует как *обособленная* область исследований, философские рассуждения о математике встроены в более широкий философский контекст и практически не фигурируют в культуре вне этого контекста. Самостоятельные тексты по философии математики для этого периода — скорее исключение, чем правило.

Отличительная черта современного периода — выделение философии математики в *самостоятельную* (по отношению к общей философской проблематике) сферу изысканий. Во многом это произошло не только за счет превращения философии науки в отдельную дисциплину, но и за счет тесной привязки философии математики к исследованиям в области математической логики и оснований математики. Современный период (который мы делим на три этапа) можно начинать с работ *Готлоба Фреге* 1870—1880-х гг. [70, с. 3]. Они послужили отправной точкой для возникновения трех главных программ обоснования математики рубежа XIX—XX веков — *логицизма, интуиционизма и формализма*. Первый этап современной философии математики связан, главным образом, со спорами вокруг этих программ.

Второй этап в развитии современной философии математики начался около 1930 г., что было ознаменовано появлением теорем *Курта Гёделя*. Для этого этапа характерно разочарование в возможности дать окончательное обоснование математики и постепенное осознание того, что математика в таком обосновании не нуждается. Внимание перешло на проблемы практической вычислимости и эффективности, что предвещало наступление эры компьютеров. К 1930—1940-м гг. относятся, например, философия математики Людвига Витгенштейна (Австрия и Великобритания), концепция группы Бурбаки (Франция), биологическая трактовка математики у Конрада Лоренца (Австрия), антропологический подход к математике Л. Уайта и Р. Уайлдера (США). Все названные концепции свидетельствуют о появлении новых тенденций в философии математики.

Переход к третьему этапу в развитии современной философии математики связан с 1960—1980-ми гг. К этому времени нарастает осознание того, что философия математики слишком сузила свою задачу, сосредоточив внимание почти исключительно на программах обоснования математики, соотношении математики и логики и проблемах оснований. В результате подобного узконаправленного интереса вне охвата нашей дисциплины оказалась бóльшая часть того, что реально делают *математики-практики* (*practicing mathematicians*) или *работающие математики* (*working mathematicians*), как стали говорить, противопоставляя последних логикам, специалистам в области теории множеств и оснований математики. В результате, наряду с «магистральным направлением в философии математики (*mainstream philosophy of mathematics*)», появилось конкурирующее, альтернативное направление — «*maverick tradition*», неортодоксальное, независимое направление. Пионерской работой данного направления считают публикацию *Имре Лакатосом* в 1963—1964 гг. журнальной версии «Доказательств и опровержений» [70, с. 16—17]. Впрочем, Лакатос, как и другие представители альтернативного направления, опирался на подготовительную работу, проделанную в 1930—1950-е гг. «Мэвериков» (*mavericks*, инакомыслящих) характеризует перенос интереса с

---

* Эта глава написана В.А. Шапошниковым для книги «Философия науки: учебник для магистров (под ред. А.И. Липкина, 2-е изд., перераб. и доп.)» (М.: Юрайт, 2015, с. 409-447).

проблемы окончательного обоснования математики на способы существования математического сообщества в истории и реальное многообразие свойственных ему практик. Причем за этим переносом интереса скрывается более существенная тенденция — отказ от абсолютизма и фундаментализма и переход к биосоциокультурной философии математики («натуралистический поворот» в философии математики).

Как видно из самого словоупотребления («мэверики» и «мейнстрим»), ставшего популярным с легкой руки Филипа Китчера и Уильяма Эспрэя, в 1980-е гг. сторонники альтернативного взгляда на цели и задачи философии математики воспринимали самих себя как своего рода *диссидентов*. К настоящему времени «диссиденты» усилились, однако говорить о доминировании нового подхода в сфере философско-математических исследований не приходится. Связь философии математики с математической логикой и исследованиями в сфере оснований математики по-прежнему сильнее, чем с историей математики, социологией математики и антропологией. Тем самым философия математики демонстрирует редкостную консервативность. Фундаменталистские и абсолютистские тенденции сохраняют здесь позиции более прочные, чем в какой-либо другой области философии науки и философии вообще. Ведь те, кто в философии математики выглядят «мэвериками», с общефилософской точки зрения — представляют мейнстрим. Из сказанного следует также, что автономность современной философии математики по отношению к общефилософским и общекультурным процессам довольно таки относительна. Она волей-неволей отслеживает, хотя и с запаздыванием, общие тенденции философии XIX—XXI вв., причем последние встречаются здесь с изрядным сопротивлением.

20.2. Пифагореизм и математический платонизм

Самая первая и в то же время до сих пор не утратившая популярность философия математики — это *пифагореизм*. Центральным пунктом пифагорейской философии является связь представления о мире с идеями *порядка* (τάξις) и *меры* (μέρος). Иоанн Стобей (V в. н. э.) в своей антологии греческих авторов сообщает, что «Пифагор первый назвал Вселенную “космосом” по порядку, который ей присущ», а платоновский Сократ в диалоге «Горгий» учит: «Мудрецы говорят, Калликл, что и небо и земля, и боги и люди, связаны в одно целое общностью, дружбой, благочинием, целомудрием и справедливостью, и именно поэтому, друг мой, они называют весь этот видимый мир “космосом” (порядком), а не “акосмией” (беспорядком) и распущенностью» [24, с. 147].

Пифагорейская мудрость и состоит в том, чтобы *постичь мир как космос*, т.е. насквозь упорядоченное, взаимосвязанное и иерархизированное целое, в котором каждому отведено свое, вполне определенное место, предуказана своя, вполне определенная мера. Познание этой положенной богами меры и жизнь в соответствии с этим знанием («умеренность») — вот чему по преданию учили пифагорейцы [45, с. 38, 119]. С представлением о мере тесно связано и еще одно пифагорейское словечко — *симметрия* (συμμετρία, дословно — соразмерность, соблюдение взаимной меры).

Следующий ключевой пифагорейский термин это *гармония* (ἁρμονία, в первоначальном значении — «скрепа», то, что скрепляет, связывает). В основе мироздания лежат противоположные и противоборствующие начала, а гармония — это то, что позволяет им (вопреки их противоположности) образовать единый космос. Установление гармонии представляется как процедура настройки музыкального инструмента, когда каждая струна должна получить требуемое именно для нее натяжение. Великое открытие пифагорейцев состояло в том, что отвечающая за благозвучие мера может быть выражена отношением *чисел*, по преданию они открыли простейшие музыкальные интервалы. Гармония оказалась связана с числом, выражена посредством чисел, она оказалась числовой, математической гармонией.

Свое наблюдение они распространили затем на космос в целом. Для пифагорейцев, писал Аристотель, «вся Вселенная — гармония и число» [24, с. 467]. Весь космос предстал пифагорейцам как великая божественная лира, многообразие правильным образом настроенных струн, каждую из которых характеризует свое «натяжение» (τόνος) и свое натуральное число. Еще один основополагающий образ из этого же ряда, это образ мирового хоровода, танца, пляски, подчиненной точному музыкальному *ритму* (ῥυθμός), т.е. опять же числу. *Познать мир стало означать для пифагорейцев — познать лежащие в основе его гармонии числа.*

Древний пифагореизм VI—IV вв. до н.э. получил распространение и влияние в культуре главным образом благодаря восприятию его идей Платоном. Важнейшую роль при этом сыграл диалог «Тимей», в котором платоновский Демиург (Бог-Творец) представлен как упорядочивающий мир посредством не только чисел, но и геометрических фигур. В дальнейшем геометрия будет играть в пифагореизме не меньшую роль, чем арифметика натуральных чисел (да и пифагорейская арифметика была во многом геометрична по своей природе, поскольку числа мыслились как обладающие определенной геометрической формой или набором форм). От античных платоников и неопифагорейцев это представление унаследовали христианские авторы, а затем и ученые и философы эпохи Возрождения и Нового времени. Яркий пример — И. Кеплер, который писал в изданной в 1619 г. «Гармонии мира» (Harmonice Mundi): «Геометрия существовала до <сотворения> вещей, она совечна (*coaeterna*) Божественному Уму и есть <сам> Бог (что может быть в Боге и не быть Богом?), она снабдила Бога образцами (*exempla*) для творения и перешла (*transivit*) к человеку вместе с образом Божиим; она не была воспринята <человеком> только посредством зрения» [69, с. 304].

Современные ученые и философы чаще всего не верят в Божественность математики в смысле Кеплера, однако пифагореизм по-прежнему имеет сторонников. Один из наиболее ярких современных примеров — американский космолог шведского происхождения М. Тегмарк. Позиция его интересна как радикальная версия современного пифагореизма. Как поясняет он в одном интервью: «причина, по которой математика столь эффективна при описании реальности, заключается в том, что она и есть реальность». Наша вселенная — это математический объект, и всякий математический объект, всякая математическая структура — особая вселенная. В результате мы имеем, согласно Тегмарку, *мультиверс* (систему параллельных вселенных) [41], в отношении которого справедлив строго пифагорейский тезис: «космос есть не более чем математика» (*the cosmos is just mathematics*) [88]. Тегмарк говорит не о том, что математика «описывает» реальность, он говорит именно о *тождестве* между ними. Основание для подобного радикализма очень простое: «если две структуры изоморфны, то не существует разумного смысла, в котором они есть не одно и то же». Правда, он признает, что «истинная математическая структура изоморфная нашему миру <…> пока еще не найдена», ее предстоит найти в будущем [89, с. 106].

Далеко не все разделяют пифагорейский оптимизм, слышны и вовсе скептические оценки подобных настроений. Так, например, известный канадский философ науки Я. Хакинг недавно назвал это «пифагорейским соблазном». Сам он видит в пифагореизме лишь ряд исторически случайных удач плюс теоретически неоправданную экстраполяцию [63].

Хотя главным проводником пифагореизма в европейской культуре оказалась именно философия Платона, однако *есть основания отличать математический платонизм от пифагореизма*. Они расходятся в том, как эта математическая реальность соотносится с чувственно-воспринимаемым миром. Для пифагорейцев математическая реальность либо совпадает с миром чувственного опыта, либо образует его «скелет», имманентную основу. Для Платона и платоников — математическая реальность *отлична* и *отделена* от физического мира, более того, в сильном варианте она даже есть нечто более реальное, чем мир физический, который может мыслиться как зависимый от математической реальности и онтологически вторичный по отношению к ней [2, с. 75—80]. Основную мысль математического платонизма Платон четко выразил в диалоге «Государство»: «геометрия — это познание вечного бытия». Нечто подобное он говорит там же и про другие разделы математики [32, с. 308—315].

Согласно современным представлениям, «зрелый» (*full-fledged*) математический платонизм [55; 73] состоит в признании существования особой *математической области* (*mathematical realm*), которая независима от нас (нашего языка, мышления и социальных практик), и «населена» абстрактными объектами. Абстрактность же в данном контексте означает, что объекты математики не являются конкретными, другими словами, пребывают в некотором смысле «вне» пространства и времени, а также «вне» системы каузальных (причинно-следственных) связей физического мира. Утверждения математиков истинны или ложны в зависимости от того, правильно или нет они описывают эти объекты; деятельность математиков состоит в открытии, а не изобретении.

Американские математики — «мэверики» Филип Дэвис и Рубен Херш высказали предположение, что математический платонизм и сейчас остается естественной философией работающего математика: «Большинство из тех, кто писал по этому вопросу, по-видимому, согласны в том, что типичный работающий математик является платоником по рабочим дням и формалистом (см. пар. 20.3.3) по выходным. Другими словами, когда он занят математикой, он убежден, что имеет дело с объективной реальностью, свойства которой он и пытается определить. Но когда от него требуют философского осмысления этой реальности, он находит, что проще делать вид, что он, в конечном итоге, не верит в нее» [59, с. 321].

Так ли это? Например, в недавнем споре о математическом платонизме на страницах EMS Newsletter американский математик Б. Мазур высказывается скорее в пользу платонизма, чем его противников. По его словам, он чувствует, что математические идеи могут служить предметом «охоты» (*can be hunted down*), но *где* расположены соответствующие «охотничьи угодья» (*hunting grounds*), сказать затрудняется. Однако никакие теоретические аргументы философов не способны заставить его позабыть «потрясающее чувство независимости, даже автономности, математических понятий, а также трансцендентность, уникальность (и страсть) занятия математикой». Хорошая философия математики не должна игнорировать все это [74].

В пользу платонизма решительно говорит и известный американский математик Д. Мамфорд. В статье под названием «Почему я платоник» он апеллирует к свидетельству истории математики. Последняя убеждает его в том, что математика «универсальна и неизменна, инвариантна во времени и в пространстве», и математики всех времен и народов «работают с одним и тем же корпусом истин», «постигают одно и то же абстрактное множество математических идей и усматривают <в нем> одни и те же отношения». Подобно Платону он рассматривает математику лишь как часть универсальной основы всякого мышления вообще, однако дает этой основе не религиозно-мистическое, а натуралистическое истолкование! В основе понятийного мышления лежит система понятийных связей, образующих граф или сеть, которая и есть подлинный ключ к платоновскому миру. В математике эта основа выражена в понятии математической структуры и в теории категорий (см. пар. 20.5). Эта когнитивная сеть находится в соответствии с устройством нейронных связей в коре головного мозга. По поводу последних Мамфорд пишет: «поразительный факт, относящийся к коре головного мозга человека, состоит в том, сколь неизменна ее структура, а также в том, что она, по-видимому, не меняется в каких-либо существенных отношениях в пределах всего класса млекопитающих» (в параллель универсальности математики!). При этом он отказывается считать когнитивную сеть лишь эпифеноменом[1], она не менее реальна, чем физические нейроны, это «две взаимно перпендикулярных стороны реальности». Причем математика «обеспечивает стабильность» нашей понятийной сети (*mathematics provides its anchor*) [76]. Вот такой вот «платонизм»!

Наконец, вполне традиционную позицию в обсуждаемом споре отстаивал известный американский популяризатор математики М. Гарднер. Правда, его позиция ближе к пифагореизму, чем к стандартно понимаемому математическому платонизму: математические объекты «запечатлены (are embedded) по всей вселенной». «Я верю в существование Бога — великолепного математика, математические знания которого существенно превосходят наши. <…> Будь я даже атеистом я и тогда считал бы чудовищной гордыней предполагать, что математика не имеет реальности вне умишек смышленых обезьян» [61].

Как видим, утверждение Дэвиса и Херша может быть несколько скорректировано:

[1] То есть *вторичным явлением*, возникающим благодаря некому первичному явлению (в данном случае — сети нейронных связей в коре головного мозга), но не способным оказывать обратное влияние на это первичное явление.

различные вариации пифагореизма и математического платонизма остаются популярными не только у философов, но и в среде современных ученых. Однако легко заметить, что главное для математиков — это переживание встречи с некой реальностью, которую они, занимаясь математикой, стремятся познать, и которая оказывает отчетливое сопротивление их усилиям, а также лишает их интеллектуальные построения произвольности. Они — стихийные математические *реалисты*. Какова же природа этой реальности — для них не столь важно, и по этому вопросу они могут не иметь никакого определенного мнения или занимать весьма разные позиции.

20.3. Три программы обоснования математики

Споры вокруг трех программ обоснования математики — *логицизма*, *интуиционизма* и *формализма* — были главным предметом обсуждения в философии математики вплоть до 1960-х гг.

Историческим контекстом возникновения названных программ стало состояние математики, сложившееся к концу XIX в., а именно развитие математической логики, создание теории множеств, разработка современной концепции аксиоматического метода и ряд других событий. Главной причиной их появления стал определенный *диссонанс* между ожиданиями, возлагавшимися на математику (в первую очередь, восприятием ее как способной достичь, а возможно уже и достигшей, единства и абсолютной строгости) и отказом от теологических аргументов в философии математики (см. приведенную выше цитату из Кеплера). Другой причиной было бурное развитие чистой математики, создававшей множество альтернативных теорий, не имевших никакой прямой связи с эмпирическим миром. Поводом же к формулировке конкурирующих программ обоснования математики послужило обнаружение парадоксов в рамках математической логики и так называемой «наивной» теории множеств. В результате появилась задача дать не теологическое (но, в то же время, и не натуралистическое!) обоснование основному корпусу математических теорий.

20.3. 1. Логицизм

Исторически первой возникла программа логицизма. Она вдохновлялась идеями Лейбница, который последовательно сближал математику и логику, и современными достижениями в математической логике. Согласно чеканному определению Р. Карнапа логицизм — это точка зрения, «согласно которой математика сводима к логике и является не чем иным, как частью логики». Или более подробно: «1) математические *понятия* выводимы из логических понятий с помощью явных определений; 2) математические *предложения* с помощью чисто логических дедукций выводимы из логических аксиом» [31, с. 225].

Традиционно создателем этой программы считается немецкий математик *Г. Фреге*, который сформулировал главную ее идею в работе «Основания арифметики» (1884), причем еще до обнаружения упомянутых выше парадоксов.

В отличие от своих предшественников, строивших алгебру логики, т.е. применявших алгебраический инструментарий для обсуждения логических проблем, Фреге предложил поступить наоборот — использовать логику для подведения прочного фундамента под математику и обоснования абсолютно необходимого характера ее суждений, вопреки сторонникам эмпиризма и психологизма. Центральным для математики того времени считалось понятие *натурального числа* (тезис арифметизации математики), как писал об этом несколько позднее британский философ Б. Рассел: «Вся традиционная чистая математика, включая аналитическую геометрию, может рассматриваться как состоящая полностью из суждений о натуральных числах» [35, с. 71].

Фреге взялся показать, что истины арифметики относятся к истинам логики подобно тому, как теоремы геометрии относятся к ее аксиомам, и арифметика есть лишь дальнейшее развитие логики, а арифметические предложения — это логические законы, хотя не первичные, а производные [42, с. 159, 221].

Детальная разработка программы логицизма привела Фреге к созданию «Основных законов арифметики» (т. 1 — 1893, т. 2 — 1903). Однако реализацию этого проекта постигла неудача. В рамках построений Фреге весной 1901 г. *Б. Рассел*, который независимо работал над сходным проектом и писал в это время большую работу «Основания математики» (вышла в 1903 г.), обнаружил противоречие, которое и изложил в письме к Фреге от 16 июня 1902 г. Это был знаменитый в дальнейшем *парадокс Рассела*.

В несколько отличном от исходной логической формы теоретико-множественном виде его можно изложить так. Введем понятие нормального множества. Будем называть нормальным всякое множество, которое не содержит самого себя в качестве элемента. Большинство привычных для нас множеств будут нормальными: так, например, множество всех чайных ложек само не есть чайная ложка, и сахар в стакане с чаем им размешать не удастся. А вот, если мы рассмотрим множество всего, что не является чайной ложкой, то оно уже содержит себя в качестве элемента, т.е. не является нормальным [36, с. 87].

Как обычно делают в теории множеств, запишем нормальность некоторого множества X в следующем виде: $X \in R$, где буквой R обозначено множество всех нормальных множеств (в честь Рассела). Тогда определение нормальности множества X можно записать в виде: $X \in R \leftrightarrow X \notin X$.

А теперь зададим простой вопрос: является ли само множество R нормальным или нет? Формально ответ на этот вопрос соответствует попытке подставить в только что приведенное определение R вместо X. Нетрудно видеть, что получается: R является нормальным, если и только если R не является нормальным [19, с. 21—22]. Это и есть парадокс Рассела.

Парадокс произвел на Фреге сильное впечатление. Он фактически отказался от логицистской программы и стал высказываться о соотношении математики и логики куда более сдержанно. В результате как раз Рассел оказался в дальнейшем главным теоретиком этой программы. Объединив свои усилия с другим математиком и философом из Кембриджа, Альфредом Уайтхедом, он создал труд под латинским названием «Principia Mathematica» (в трех томах, 1910—1913), в котором они сделали попытку реализовать программу логицизма в деталях. Это было связано с тем, что Рассел нашел способ разрешения собственного парадокса, построив так называемую *теорию типов*[2]. Позднее Рассел дал популярное изложение основных идей их с Уайтхедом работы в книге «Введение в математическую философию» (1919) [35].

К сожалению, результат оказался не столь убедительным, как то изначально предполагал Рассел. Причина была в том, что в ходе постепенного перехода от простейших логических аксиом к все более сложным математическим утверждениям, им не удалось обойтись без введения нескольких дополнительных аксиом. А именно: аксиомы сводимости (связанной с реализацией теории типов), знаменитой аксиомы выбора[3] и аксиомы бесконечности[4]. Чтобы

---

[2] А. Пуанкаре и Б. Рассел увидели причину парадоксов в использовании *непредикативных определений*, нарушающих принцип порочного круга: никакое множество не должно содержать элементов, определимых только в терминах самого этого множества. Так, определение множества всех нормальных множеств R в парадоксе Рассела — непредикативное, поскольку R позволено быть как элементом, так и содержащим его множеством. *Теория типов* располагает все рассматриваемые объекты в виде иерархии типов разного уровня: первичные объекты, образованные из них множества, множества, образованные из этих множеств как элементов и т.д. Объекты же, которые нельзя отнести к какому-то определенному типу, — исключаются из рассмотрения, как некорректно построенные. Поскольку в этом случае множество и его элементы всегда принадлежат к разным типам, парадокс Рассела и ему подобные не может возникнуть [20, с. 44—46; 35, с. 21—65].

[3] Пусть некоторое множество разбито на попарно непересекающиеся непустые подмножества. Тогда согласно *аксиоме выбора* всегда существует способ выбрать по одному элементу из каждого из этих подмножеств и образовать из так выбранных элементов особое множество. Аксиома выбора получила известность и стала предметом бурных обсуждений благодаря одной работе (1904) Эрнста Цермело [93, с. 80—159], немецкого математика, создателя аксиоматической теории множеств.

[4] Эта аксиома обеспечивает существование натурального ряда. Рассел полагал, что аксиома бесконечности есть скорее онтологическая гипотеза, чем логическая аксиома [35, с. 165—166, 217—218].

свести математику к логике саму логику пришлось несколько «расширить», причем за счет весьма спорных положений.

В результате не только Фреге, но и Рассел вынужден был смягчить логицистский тезис. Уже в книге 1919 г. он заменил тезис о сведении математики к некой абсолютно достоверной логической основе на тезис о *единстве* логики и математики, в смысле отсутствия четкой границы между ними [35, с. 211]. Позднее Рассел неоднократно прямо говорил о своем разочаровании в проекте обоснования математики. В опубликованной в последние годы его жизни «Автобиографии» (1967—70) он писал: «Я жаждал достоверности, как другие жаждали религиозной веры. Мне казалось, что наиболее достоверно математическое знание. <…> после двадцати лет усердных трудов я пришел к выводу, что не в силах сделать математику достоверной» [83, с. 699].

20.3.2. Интуиционизм

Его создателем стал голландский математик *Лейтцен Эгберт Ян Брауэр*. Вся академическая карьера Брауэра была связана с Университетом Амстердама. Здесь он с 1897 по 1904 гг. изучал математику и естествознание, затем готовил и в 1907 г. защитил диссертацию «Об основаниях математики».

Для правильного понимания общих взглядов Брауэра и специфических особенностей интуиционизма большое значение имеет написанный им в период работы над диссертацией памфлет «Жизнь, искусство и мистицизм» (1905) [53]. Это мировоззренческий манифест, представляющий собой романтический бунт против рационализма и против традиционного понимания интеллекта и науки. Кроме того, в нем очень сильны настроения в духе универсального мистицизма (Брауэр с восхищением обильно цитирует М. Экхарта, Я. Беме и Бхагавадгиту), включая призыв обратиться внутрь самого себя, и волюнтаристские мотивы, заставляющие вспоминать Шопенгауэра с его учением о воли к жизни. Ряд тем этой эпатажной юношеской работы вошел в состав философии интуиционизма. Первоначально Брауэр не мыслил свои исследования основ математики в отрыве от нравственных, социальных и мировоззренческих вопросов. Научному руководителю до определенной степени удалось внушить ему необходимость отделять математику от его мистических прозрений. Однако и более поздние работы Брауэра поражали современников своим пророческим тоном и склонностью к анализу глубин сознания.

В диссертации Брауэра 1907 г. «Об основаниях математики» содержатся главные идеи интуиционизма: 1) математика — это *мысленная конструкция*; 2) математика — это *внеязыковая активность*. Математика согласно Брауэру не может иметь дела ни с чем, что она сама не сконструировала в соответствии с интуитивно ясными требованиями. Поэтому в таких конструкциях и заключается единственно возможное основание математики, других попыток обосновать математику Брауэр не приемлет.

Уже в памфлете 1905 г. им было осуществлено четкое отделение конструктивной деятельности сознания от средств языка [53, с. 401]. В диссертации он писал об этом так: «Люди стремятся посредством звуков и символов вызвать в других людях копии математических конструкций и рассуждений, которые они сами произвели; теми же самыми средствами они пытаются помочь своей собственной памяти. Таким путем появляется математический язык, и в качестве его частного случая — язык логического рассуждения. <…> Тем самым легко представить, что при той же организации человеческого интеллекта и, следовательно, той же математике, мог бы сформироваться иной язык, которому хорошо известный нам язык логического рассуждения не соответствовал бы. Возможно, все еще существуют народы, живущие изолировано от нашей культуры, для которых это в действительности имеет место. И не в большей степени исключена возможность, что на позднейшей стадии развития логическое мышление утратит нынешнюю свою роль в языках культурных народов» [52, с. 73—74].

Математика для Брауэра — «зашита» у самых основ человеческого мышления и сознания.

Именно здесь мы находим базовую праинтуицию математики (брауэровская версия кантовской интуиции чистого времени), «в которой соединенное и разделенное, непрерывное и дискретное объединены», и которая порождает, с одной стороны, интуицию порядковых натуральных чисел, а, с другой, — линейного континуума [49, с. 78—81]. Если логика для Брауэра — эмпирическая наука, то математика — наука априорная.

Математика для интуициониста есть особый вид умственной деятельности, лежащий глубже уровня языка. Существование, с которым имеет дело математик, — это интроспективно удостоверяемая в своей истинности сфера мысленных конструктивных процессов. Подлинный предмет математики — *умственные построения*, «существовать» в математике значит «быть построенным» [9, с. 10—11]. Для Брауэра здесь мы имеем абсолютный критерий настоящей математики (мысленная очевидность), и он считает возможным оспаривать право считаться математикой за всем, что не может пройти такой проверки на истинность.

В результате парадоксы теории множеств находят в интуиционизме самое неожиданное разрешение. Они просто становятся сочетаниями слов, лишенными математического смысла. Математическое разрешение их невозможно по той простой причине, что они лежат вне области того, что допустимо называть математикой.

Для интуициониста подлинное математическое утверждение должно иметь вид «Я выполнил в уме построение *A*», а его математическое (не логическое!) отрицание — такой: «Я выполнил в уме построение *B*, которое приводит к противоречию предположение, что можно довести до конца построение *A*» [9, с. 28—29]. В связи с таким пониманием отрицания интуиционисты, конечно же, не признают неограниченного применения логического закона исключенного третьего[5], а, следовательно, — и основанные на нем косвенные доказательства (чистые доказательства существования) в математике. Альтернатива в формулировке закона исключенного третьего означает для интуициониста осуществление одного из двух мысленных построений. Поэтому вполне возможен третий вариант — ни одно из этих построений осуществлено не было.

В приводимых интуиционистами в подтверждение своих взглядов примерах очень важно, что речь идет о *бесконечной* предметной области. В математике главный интерес представляют именно такие объекты. Сторонник и пропагандист идей интуиционизма в 1920-е гг., Герман Вейль, даже определил (1925) математику как «науку о бесконечном» [7, с. 9, 90]. Вера в универсальную применимость закона исключенного третьего, писал Брауэр в статье «Интуиционистская теория множеств» (1919), «исторически была обусловлена тем, что первоначально классическую логику абстрагировали из математики подмножеств определенного конечного множества, затем приписали этой логике независимое от математики существование a priori, и наконец, на основании этой мнимой априорности, применили ее неправомерным образом к математике бесконечных множеств» [7, с. 77—78]. Трактовка математической бесконечности как бесконечности *актуальной* (на чем особо настаивал создатель теории множеств Г. Кантор) поддерживает эту ложную аналогию между конечными и бесконечными множествами. Конструктивное понимание существования в математике не позволяет интуиционистам признать актуальную бесконечность в качестве законного математического объекта, та бесконечность, с которой имеет дело математик, всегда есть бесконечность *потенциальная* [20, с. 49—50][6].

Пожалуй, ярче всего такое отношение к бесконечности проявилось в интуиционистской трактовке непрерывного, т.е. в *теории континуума*. Континуум невозможно мыслить как

---

[5] Имеет место альтернатива: либо истинно суждение «*A*», либо истинно его отрицание «*не A*», а «третьего не дано» (*tertium non datur*). Был сформулирован еще Аристотелем.

[6] Различение актуальной и потенциальной бесконечности восходит к Аристотелю. *Актуальная бесконечность* — это бесконечность, рассматриваемая как постоянная величина; все бесконечное множество понимается при этом как данное разом, «в действительности». *Потенциальная бесконечность* — это переменная конечная величина, изменение которой никогда не может пониматься как окончательное; потенциально бесконечное множество всегда может быть еще пополнено; бесконечность в этом случае имеется лишь «в возможности», как возможность неограниченного пополнения.

составленный из отдельных частей, он есть «среда свободного становления» [7, с. 22—26, 76—80, 100—128]. Точки на прямой (действительные числа) определяются через потенциально бесконечно продолжающиеся последовательности рациональных чисел, не связанные определенным законом продолжения (по-немецки Wahlfolge, свободно становящаяся последовательность, последовательность свободного выбора). «При этом безразлично, — пишет Гейтинг, — каким образом определяются члены последовательности, посредством ли закона, свободным ли выбором, жребием ли или как-нибудь иначе» [9, с. 43].

Радикальность позиции интуиционизма привела к тому, что интуиционистская математика потребовала пересмотра не только методов, но и ряда результатов классической математики. Причем это касалось не только канторовской теории трансфинитных чисел, но и математического анализа. Некоторые понятия классического анализа распадаются на несколько различных понятий (например, понятие сходимости ряда), а некоторые теоремы перестают иметь место (например, теорема Больцано-Вейерштрасса).

Кроме того, в исходной (брауэровской) версии интуиционизма имеется ярко выраженная *тенденция к солипсизму*[7]. В работе «Воля, знание, язык» (1933) Брауэр писал: «<…> возникающие благодаря самораскрытию изначальной интуиции внеязыковые конструкции являются точными и правильными исключительно благодаря присутствию в памяти; <…> однако человеческая память, которой приходится обозревать эти конструкции, по самой природе своей ограничена и подвержена ошибкам, даже когда она призывает на помощь знаки языка. Для человеческого сознания, которое было бы вооружено неограниченной памятью, чистая математика, практикуемая в одиночестве и без помощи знаков языка, была бы точной. Эта точность, однако, вновь была бы утрачена при обмене между человеческими существами, даже обладающими неограниченной памятью, поскольку они оставались бы обреченными пользоваться языком как средством коммуникации» [90, с. 580]. Возможность вывести математические построения за пределы индивидуального сознания, без потери в точности и надежности, представлялась Брауэру весьма и весьма проблематичной. Эта сторона брауэровского взгляда на математику также вызвала критику.

20.3.3. Формализм

Крайности интуиционизма и неудачи логицизма заставили самого известного и влиятельного математика эпохи, *Д. Гильберта*, сформулировать собственный взгляд на основания математики.

Впрочем, Гильберт к тому моменту уже выступил как законодатель современного понимания *аксиоматического метода* в математике, которым мы продолжаем пользоваться до сих пор, и которое имеет самое прямое отношение к формалистской программе обоснования математики. Гильбертовское понимание аксиоматического метода нашло классическое выражение в его работе «Основания геометрии», изданной в 1899 г. [11]. Рассуждения о столь наглядном предмете, как евклидова геометрия, достигают у Гильберта невиданной до того времени формализации. К тому моменту Р. Дедекиндом и Д. Пеано уже была построена аксиоматика для арифметики натуральных чисел (1888—1889), состоявшая из пяти аксиом и имевшая в основе три первичных понятия — «натуральное число», «единица», «следующее натуральное число». Гильберт сделал то же самое для геометрии. У Гильберта получилась система из 20 аксиом, с тремя первичными типами объектов — «точки», «прямые», «плоскости» и несколькими первичными отношениями — «принадлежность», «между», «конгруэнтность». Воспоминания сохранили знаменитую фразу, брошенную Гильбертом в

[7] Философская позиция, согласно которой собственное индивидуальное сознание есть единственная истинная реальность; сознание замкнуто само на себя и не имеет подлинного выхода вовне. На наш взгляд, единственный способ сделать радикальный интуиционизм осмысленным, это компенсировать отсутствие адекватного выхода вовне возможностью размыкания нашего сознания «внутрь» — в сферу Божественного, на возможность которого намекают некоторые тексты Брауэра (см. выше).

одном из разговоров в 1891 г., которая максимально емко и одновременно наглядно раскрывает суть гильбертовского понимания аксиоматического метода: «Надо, чтобы такие слова, как “точка”, “прямая”, “плоскость”, во всех предложениях геометрии можно было заменить, например, словами “стол”, “стул”, “пивная кружка”» [6, с. 237] (по воспоминаниям О. Блюменталя, собеседники находились в тот момент на железнодорожном вокзале в Берлине [37, с. 79]). Смысл приведенных слов нетрудно понять: все, что нужно знать о первичных объектах и их отношениях для развертывания всей системы геометрии должно быть явно прописано в аксиомах. Это и есть формальное понимание аксиоматики, когда все вопросы, связанные с истинностью или, хотя бы, психологической убедительностью каждой из аксиом вынесены за рамки рассмотрения. Вместо этого система аксиом как целое должна удовлетворять требованиям 1) *полноты* — аксиом достаточно, чтобы вывести любую теорему данной теории; 2) *независимости* — ничего лишнего в этой системе нет, удаление любой из аксиом неизбежно приведет к невозможности доказать какие-либо теоремы; 3) *непротиворечивости* — из нее нельзя вывести логически взаимоисключающие друг друга результаты.

Доказательство непротиворечивости формальной аксиоматической системы служит необходимой компенсацией утраты аксиомами наглядного смысла. Непротиворечивость в то время доказывали *методом сведения*. Гильберт показал в своей работе 1899 г., что система, описываемая предложенными им для евклидовой геометрии аксиомами, реализуема также во множестве действительных чисел. Следовательно, если бы в предложенной им системе аксиом имелось противоречие, оно существовало бы и во множестве действительных чисел. Аксиоматику для множества действительных чисел Гильберт построил в статье «О понятии числа» [11, с. 315—321] в том же 1899 г., однако вопрос о ее непротиворечивости оставался открытым.

В перечне знаменитых «проблем Гильберта», сформулированных им в докладе «Математические проблемы» [1, с. 11—64] на втором Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г., было несколько важных пунктов, посвященных основаниям математики. Вторая проблема гласила: «Исследовать непротиворечивость аксиом арифметики», предлагая сделать следующий после «Оснований геометрии» шаг. Шестая же предлагала аксиоматизировать те физические дисциплины, в которых важную роль играет математика. Гильберт был убежден, что аксиоматизация теорий — магистральный путь не только для чистой математики, но и для всех остальных областей человеческого знания по мере их математизации. Об этом он позднее сделал доклад «Аксиоматическое мышление» (1917) [10, с. 409—417].

Свой подход к *проблеме парадоксов* теории множеств Гильберт сформулировал в докладе «Об основаниях логики и арифметики» на третьем Международном конгрессе математиков в Гейдельберге в 1904 г. Как легко догадаться, он отправлялся от своего понимания аксиоматического метода: нужна явная формулировка аксиом и доказательство непротиворечивости получившейся аксиоматической системы. Именно *непротиворечивость* соответствующей математической теории решает окончательным образом вопрос о существовании тех или иных математических объектов. Для последней цели невозможно вновь и вновь пользоваться методом сведения; на некотором уровне мы должны получить *прямое* доказательство непротиворечивости. Что это за уровень? С одной стороны, логицисты считали, что последний уровень — это логика, она не требует доказательства непротиворечивости, достаточно осуществить сведение к логическим аксиомам. С другой стороны, Анри Пуанкаре[8] усматривал в построениях логицистов *порочный круг*, для него арифметика уже скрыто присутствует в той логике, на которую хотят опираться логицисты.

Согласно же Гильберту, *надо не арифметику сводить к логике, как предлагали логицисты, и не логику сводить к арифметике, как станут несколько позднее считать интуиционисты. Надо строить прямое доказательство непротиворечивости для совместной логико-арифметической аксиоматики* [10, с. 400]. Гильберт был настроен в этом отношении

---

[8] См., например, его полемику с Луи Кутюра в 1905—1906 гг. [33].

весьма оптимистично, он надеялся, что прямые доказательства непротиворечивости удастся дать для натуральных чисел, а далее тем же способом для действительных и канторовских трансфинитных чисел.

Однако в то время (1904—1905) от детальной реализации этих планов Гильберта отвлекли другие интересы (в первую очередь, физика), и к проблемам оснований математики он вернулся только во время первой мировой войны. К этому моменту ситуация изменилась. Попытка детальной реализации логицистской программы Расселом и Уайтхедом сделала явными как сильные, так и слабые ее стороны. Э. Цермело была построена аксиоматика для теории множеств. Но главное — за это время появился и начал набирать популярность интуиционизм Брауэра. Именно опасность широкого распространения интуиционистских идей среди математиков (в числе сторонников интуиционизма в то время был и его ученик Г. Вейль!) во многом и заставила Гильберта снова всерьез взяться за практическую реализацию собственной программы обоснования классической математики. Основные идеи своего нового подхода Гильберт изложил в ряде докладов, сделанных на протяжении 1920-х гг. «Все, что в прежнем смысле составляет математику, — говорил Гильберт в докладе "Логические основания математики" (1922), — подлежит строгой формализации с тем, чтобы собственно математику, или математику в узком смысле, превратить в набор формул. <…> Формулы, служащие кирпичиками, из которых строится формальное здание математики, называются аксиомами. Доказательство есть фигура, которая как таковая должна зримо предстать перед нами; <…> Формула называется доказуемой, если она есть либо аксиома (или получается с помощью подстановки из какой-нибудь аксиомы), либо заключительная формула какого-нибудь доказательства» [10, с. 419].

Рядом с привычной (содержательной) математикой Гильберт предлагает построить ее строго формальный аналог. После этого следует доказать непротиворечивость формального аналога для каждой содержательной математической теории. Но какими средствами это допустимо делать?

«Наряду с собственно математикой, формализованной указанным выше образом, — продолжал Гильберт, — возникает в определенной мере новая математика, метаматематика, необходимая для обеспечения надежности собственно математики, в которой (в отличие от чисто формальных выводов собственно математики) используются содержательные выводы, но только для доказательства непротиворечивости аксиом» [10, с. 419].

Третьим уровнем в гильбертовской схеме оказывается, таким образом, *метаматематика* — содержательный способ рассуждения о формальных системах. Он хочет ограничиться на метауровне минимальным набором так называемых «финитных» средств. То есть таких, что их использование не вызывает сомнения у представителей любой точки зрения на математику, даже у интуиционистов, а получаемые с их помощью результаты имеют статус «абсолютных истин». Девиз метауровневых рассуждений — конечность и наглядная обозримость, которые не оставляют никаких поводов для сомнения.

Но математика не может ограничиться финитным (конечным), она постоянно пользуется трансфинитным (бесконечным). Уже использование кванторов всеобщности и существования в применении к бесконечным предметным областям ставит нас перед лицом этой проблемы. Здесь на помощь Гильберту приходит его *метод идеальных элементов*. «В моей теории доказательств к финитным аксиомам добавлены трансфинитные аксиомы и формулы, подобно тому, как в теории комплексных чисел к действительным элементам присоединены мнимые, а в геометрии к действительным образам добавлены идеальные. Побудительные мотивы для этого и успех метода в моей теории доказательств такие же, как там, а именно: дополнительное включение трансфинитных аксиом происходит во имя упрощения и законченности теории» [10, с. 426].

Если финитными средствами метауровня удастся доказать непротиворечивость совокупной системы аксиом (объединяющей как финитные, так и трансфинитные аксиомы), то проблема будет решена. Эту тему Гильберт подробно обсуждал в одном из самых знаменитых своих докладов — выступлении в Мюнстере, посвященном памяти К. Вейерштрасса, «О бесконечном» (1925).

Будучи воспитанником Кенигсберга, города Канта, Гильберт в своей зрелой философии математики отдавал явное предпочтение Канту перед Лейбницем. В докладе 1925 г. он недвусмысленно свидетельствовал об этом: «Уже Кант учил, — и это составляет неотъемлемую часть его учения, — что математика обладает абсолютно не зависящим от логики имманентным содержанием, и потому никогда не может быть обоснована с помощью одной лишь логики, отчего, между прочим, старания Дедекинда и Фреге и должны были потерпеть крушение. Более того, нам уже в нашем представлении кое-что дано как предварительное условие применения логических умозаключений и выполнения логических операций: определенные, внелогические конкретные объекты, имеющиеся в созерцании в качестве непосредственных переживаний до всякого мышления. Для того чтобы логические рассуждения были надежными, эти объекты должны быть полностью обозримы во всех частях, и предъявление этих объектов, их различение, следование друг за другом или то, как один из них располагается относительно других, — все это должно даваться непосредственно наглядно вместе с самими объектами как нечто такое, что не может быть сведено к чему-либо другому и не нуждается в таком сведéнии. Это — та основная философская предпосылка, которую я считаю необходимой как для математики, так и вообще для всякого научного мышления, понимания и общения. И в частности, в математике предметом нашего рассмотрения являются сами эти конкретные знаки, облик которых, согласно нашей установке, непосредственно ясен и впоследствии может быть узнаваем снова и снова» [10, с. 439—440].

Легко заметить, что гильбертов замысел прямого доказательства непротиворечивости арифметики метаматематическими средствами является прямой разработкой кантовской концепции «символического конструирования», утверждавшей сохранение конструктивного характера математического мышления при переходе от геометрии, с ее «остенсивным конструированием», к арифметике и алгебре [18, с. 530—531]. Да и свой метод идеальных элементов Гильберт, в том же докладе 1925 г., связывает с кантовскими регулятивными идеями чистого разума (см. пар. 3.6) [10, с. 448].

Несмотря на то что интуиционизм Брауэра также исходил из философии математики Канта, способы развития этой философии у Брауэра и Гильберта оказались различными. Более того, Гильберт и Брауэр оказались антагонистическими фигурами, а не союзниками в борьбе с логицизмом. Гильберт был резко против укладывания классической математики на прокрустово ложе интуиционистских жестких ограничений. «Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал нам Кантор», — эти часто цитируемые слова Гильберта прозвучали в докладе 1925 г. [10, с. 439]. В особенности Гильберт был не согласен с интуиционистской критикой закона исключенного третьего и классической логики вообще. В докладе 1927 г. он выразил свое отношение такими словами: «Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксеру пользоваться кулаками. Запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки» [11, с. 383].

Говоря о формализме в философии математики важно четко различать *формализм как позицию Давида Гильберта* и *радикальный формализм в его популярном понимании*, который также (хотя и не вполне справедливо) иногда связывают с именем Гильберта.

Сошлюсь в качестве примера на статью Фрэнка Рамсея «Основания математики» (1925). Согласно Рамсею, предложения математики, типа «2+2=4», формалисты провозглашают «не имеющими смысла формулами, с которыми обращаются согласно некоторым произвольным правилам; они считают, что математическое познание состоит в знании того, какие формулы могут быть выведены из других формул в согласовании с определенными правилами» [34, с. 17—18]. Рамсей прямо указывает при этом на Гильберта.

Такое радикальное понимание формализма существенно расходится с позицией Гильберта, который никогда не отождествлял математику с набором формализмов. Более того, формализованная теория строилась Гильбертом не для того, чтобы *заменить* собой соответствующую содержательную теорию, а для того, чтобы *подтвердить законность* содержательного способа рассуждения. Примечательно в этом отношении, что одновременно с разработками по теории доказательств, Гильберт читал в Гёттингене (1920—1921) лекции по *наглядной геометрии*, максимально далекие от какой-либо формализации. Предисловие к их изданию 1932 г. он начал словами: «В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции — она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести весь этот материал в систематическую связь — и другая тенденция, тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремится к живому пониманию объектов и их *внутренних* отношений» [14, с. 5]. Гильберт никогда не предлагал отказаться от второй тенденции во имя безраздельного господства первой, он стремился сохранять их равновесие. Трехуровневая структура (содержательный уровень — формальный уровень — уровень метаязыка), которую создал Гильберт в рамках своего проекта обоснования математики, носит *вспомогательный* характер и имеет главной своей целью обосновать первый (содержательный) уровень.

20.4. Судьба программ обоснования математики

Большой интерес к спорам вокруг оснований математики и особую симпатию к позиции логицизма выказывали члены Венского кружка и другие сторонники *логического позитивизма* (гл. 5). В сентябре 1930 г. по инициативе редакции журнала «Erkenntnis», главного печатного органа логического позитивизма, в Кёнигсберге был организован симпозиум, в рамках которого полемизировали представители трех главных школ в основаниях математики. Позицию логицизма представлял один из лидеров Венского кружка, Р. Карнап, интуиционизма — голландский математик А. Гейтинг, формализма — Д. фон Нейман. Как вспоминал позднее Гейтинг, «каждый был убежден, что именно его точка зрения единственно правильная, что никакая другая не имеет права называться математикой и что его точка зрения обязательно победит в недалеком будущем» [30, с. 224]. Однако именно 1930 год оказался переломным в истории этих споров, завершив *классический период* в исследованиях по основаниям математики, начатый работами Фреге в 1870—1880-е гг. [72, с. 1].

Хотя в своем взгляде на математику Венский кружок ближе всего стоял к логицизму, однако уже в манифесте «Научное миропонимание — Венский кружок» (1929), подписанном Карнапом, Гансом Ганом и Нейратом, было сказано о соотношении логицизма, формализма и интуиционизма следующее: «Некоторые придерживаются мнения, что данные направления не настолько различны, как это представляется. Можно предположить, что существенные черты этих направлений в ходе дальнейшего развития сблизятся и, вероятно, используя важные мысли Витгенштейна, объединятся в конечном решении» [31, с. 67—68]. Правда, это конечное решение виделось им усовершенствованным логицизмом. Однако они охотно признавали заслуги и других двух направлений, а также определенное родство с ними. В интуиционизме они готовы были принять, по словам Карнапа, «конструктивную тенденцию в образовании понятий». Их же родство с формализмом оказывалось куда серьезнее: «С *формализмом* нас связывает методологическое родство. Логицизм стремится строить логико-математическую систему таким образом, что хотя исходные формулы и операции принимаются с учетом значения основных понятий, *внутри самой системы* цепи дедукций и определений развертываются чисто формально, т.е. без всяких ссылок на значение основных понятий» [31, с. 237—238].

Философия Венского кружка (логический позитивизм — гл. 5) доминировала в философии науки с 1930-х и вплоть до 1960-х гг., и характерное для нее стремление снять противостояние трех программ в едином взвешенном подходе оказалось главной, хотя и не единственной, тенденцией в судьбе программ обоснования математики.

В докладе на конгрессе в Болонье в 1928 г. Гильберт сформулировал ряд еще не решенных проблем в сфере оснований математики, среди которых была и проблема *полноты* системы аксиом для теории чисел. Исследованием поставленной Гильбертом проблемы полноты в то время занимался молодой австрийский логик *К. Гёдель*. В 1930 г., на том самом симпозиуме по основаниям математики в Кёнигсберге, Гёдель анонсировал, а в 1931 г. опубликовал свои знаменитые результаты о неполноте формальной арифметики. Его статья называлась «О формально неразрешимых предложениях “Principia Mathematica” и родственных систем» [62, с. 144—195], и содержала две впоследствии знаменитые *теоремы Гёделя о неполноте*.

Гёдель строил свои рассуждения для определенной формальной теории, близкой к той, которую использовали Рассел и Уайтхед в своем фундаментальном трехтомнике. *Первая* его теорема утверждает, что существует предложение не доказуемое и не опровержимое в рамках этой формальной теории. *Вторая* же говорит, что в качестве такого предложения можно взять формализацию в этой теории утверждения о ее собственной непротиворечивости [3, с. 63—64].

Гёдель (возможно не желая прямого столкновения с мэтром) подчеркивал в своей работе отсутствие конфликта между его второй теоремой и формалистской программой Гильберта, ссылаясь на то, что могут существовать финитные доказательства, невыразимые в изучаемом им формализме [62, с. 194—195]. Да и сам Гильберт, в предисловии к первому тому «Оснований математики» (1934), писал: «я хотел бы подчеркнуть, что возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только то, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов» [12, с. 19].

Однако, несмотря на приведенные заверения, в дальнейшем возобладала точка зрения, согласно которой *теоремы Гёделя о неполноте 1931 г. нанесли сокрушительный удар программе обоснования математики Гильберта*. Поскольку финитные средства формализуемы не только в системе, рассмотренной Гёделем, но и в существенно более слабых формальных системах [3, с. 64], то гильбертово «более сильное» использование финитной точки зрения могло означать, увы, лишь *расширение* допущенных на финитном уровне средств. Этот ход сработал. Так, в 1936—1938 гг. ученик Бернайса и ассистент Гильберта Герхард Генцен доказал непротиворечивость формальной арифметики, но с использованием трансфинитной индукции (распространения математической индукции с натуральных на трансфинитные порядковые числа) [13, с. 439—456]. Повторилась история, произошедшая ранее с логицизмом. Как мы помним, Расселу и Уайтхеду пришлось *расширить* представление о том, что относится к логике, без чего их проект не удавалось довести до конца; однако это расширение в значительной степени обесценило полученный результат. Гильберту и его ученикам также пришлось *расширить* финитные средства; результат был достигнут, но вряд ли он позволяет говорить о том, что исходная программа, наконец, реализована.

Однако сказанное не означает, что усилия Гильберта и его учеников не принесли никакого плода. Крах гильбертовой программы обоснования математики привел к тому, что разработанные ими методы и полученные результаты стали рассматриваться просто как часть математики. Гильберт, с этой точки зрения, создал новую интересную область математических исследований. Она благополучно продолжала развиваться и далее, постепенно освобождаясь от связанных с нею философских ожиданий.

Нечто похожее еще ранее произошло с *логицизмом*. Уже Рассел, как мы видели, разочаровался в логицизме в результате детальной реализации этой программы в годы перед Первой мировой войной. После окончания войны *Л. Витгенштейн* издал «Логико-философский трактат», вобравший в себя и причудливо переработавший логицистские представления [39]. В середине 1920-х гг. свою версию логицизма разрабатывал друг Витгенштейна — *Ф. Рамсей* [34; 40]. Однако и Витгенштейн, и Рамсей к концу 1920-х гг. начали отходить от логицизма.

В течение 1920-х гг. Гильберт и его ученики, отвергая логицизм как программу, активно осваивали наследие логицизма и постарались вобрать все ценное, что было в работе Рассела и Уайтхеда в свою теорию доказательств. Наконец, в 1930-е гг. *объединенные логицистские и формалистские идеи* легли в основу трактовки математики в рамках логического позитивизма

[91]. Согласно этому взгляду математика и логика образуют единое целое в качестве «формальных наук», которые противопоставляются содержательным эмпирическим наукам. Формальные науки состоят из аналитических истин, и ничего не говорят о мире (по крайней мере, непосредственно).

Когда в 1960 г. знаменитый американский математик и логик Алонзо Чёрч выступил на тему «Математика и логика» на первом Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки в Стэнфорде, он вынужден был охарактеризовать тему своего выступления, как «старый вопрос, изучение которого пришло уже к завершению или, по крайней мере, приостановилось». Вывод же его звучит вполне предсказуемо: «Любое обоснование математики или логики действительно в какой-то степени содержит круг, так как в нем всегда имеются не обосновываемые предпосылки, которые должны быть приняты на веру или интуитивно. Мы можем пытаться уменьшить число этих предпосылок, но не можем их уничтожить. Как назвать минимум предпосылок, оставшихся после такого сокращения, математикой, или логикой, или тем и другим, или ни тем, ни другим, — это вопрос терминологии» [30, с. 209—215].

Однако история логицизма в философии математики этим не заканчивается. Несколько позднее логицизм пережил своего рода ренессанс — появился *неологицизм*. Причем это возрождение оказалось связано не столько с дальнейшим переосмыслением логицизма Рассела, сколько с возрастанием интереса к наследию Готлоба Фреге, которое наблюдается начиная с 1960-х гг. Основополагающими работами нового направления стали книги британских философов *К. Райта* «Понятие чисел как объектов у Фреге» (1983) [92] и *Р. Хэйла* «Абстрактные объекты» (1987) [64]. С тех пор неологицизм продолжает быть одним из важнейших и бурно обсуждаемых направлений в современной философии математики.

В чем был главный недостаток подхода Фреге? — Его система оказалась противоречивой. Считается, что главным виновником этого был принцип неограниченного свертывания, «основной закон V» в терминологии «Основных законов арифметики» Фреге. Согласно этому принципу для любого понятия можно разделить все объекты на те, к которым это понятие применимо, и те, к которым оно не применимо, и в результате для каждого понятия четко определен его логический объем. Неологицисты отвергают основной закон V и делают ставку на другой принцип абстракции — *принцип Юма*: любые два понятия имеют одно и то же кардинальное число, если они равночисленны. Способность последнего порождать противоречия пока не установлена.

С их точки зрения в подходе к понятию натурального числа в работах Фреге имеется еще одно неоцененное по заслугам сокровище — *теорема Фреге*. Так Райт назвал утверждение, согласно которому логика второго порядка (в отличие от логики первого порядка в ней допустимо применение кванторов общности и существования не только к переменным, но и к предикатам)[9], усиленная принципом абстракции Юма, позволяет вывести (без использования основного закона V!) систему аксиом Дедекинда-Пеано для натуральных чисел. Сам Фреге не использовал в полной мере возможности, предоставляемые принципом Юма, и это создает неологицистам поле для деятельности. При этом Райт и Хэйл отказываются от логицистского тезиса о сводимости арифметики к логике в строгом смысле, но настаивают на аналитическом, и тем самым априорном, характере истин арифметики.

Обратимся теперь к судьбе интуиционизма. Тенденция к смягчению крайностей позиции Брауэра нашла выражение уже в том, что ближайший его последователь и пропагандист идей интуиционизма А. Гейтинг в 1930 г. опубликовал *формализацию* интуиционистской логики.

Свое выступление на международном конгрессе в Стэнфорде в 1960 г. Гейтинг назвал «Тридцать лет спустя», имея в виду 30 лет, прошедшие со времени проведения симпозиума по основаниям математики в Кёнигсберге. Здесь он отметил в качестве оформившейся за эти годы общей тенденции: «Дух мирного сотрудничества одержал победу над духом непримиримой

[9] Следует ли считать логику второго порядка *логикой* или замаскированной *теорией множеств* — предмет споров среди исследователей. Для неологицистов, как и для Фреге, это логика.

борьбы. Ни одно из направлений теперь не претендует на право предоставлять единственно верную математику. Философское значение исследований по основаниям математики состоит, по крайней мере частично, в разделении формальных, интуитивистских, логических и платонистских элементов в структуре классической математики и в точном определении областей действия и ограничений этих элементов. Появилась новая форма математики, в которой мы в каждый момент знаем, работаем ли мы на интуиционистской основе или нет, какая часть работы является чисто формалистической и какие платонистские допущения мы делаем» [30, с. 225].

Однако на фоне указанных примирительных тенденций интуиционистские идеи Брауэра дали также начало и *конструктивным направлениям в математике*, занимающим радикальную позицию по отношению к классической математике. В конце 1940-х гг. (сразу после Второй мировой войны) возникает конструктивизм *А. А. Маркова-младшего*, ставшего основателем русской (советской) школы конструктивизма [29], а в середине 1960-х появляется конструктивизм американца *Э. Бишопа* [50].

Названные направления уточнили и сделали более *объективным* представление о конструктивности в математике, отвергнув при этом некоторые из брауэровских идей, например, идею свободно становящихся последовательностей. Так Марков-младший видел главную особенность конструктивной математики в опоре ее на точно сформулированное понятие *алгоритма* (сам он предпочитал написание «алгорифм», желая отделить свою строгую концепцию от интуитивного представления о пошаговом процессе вычисления). Это освобождает от расплывчатости и субъективизма брауэровского представления о конструктивности, считал он.

Конструктивисты отмежевывались и от мистицизма Брауэра. Как писал Бишоп в своем «конструктивистском манифесте»: «По словам Кронекера, натуральные числа создал Бог[10]. Кронекер выразился бы еще лучше, если бы сказал, что натуральные числа Бог создал для человека (и других конечных существ). Математика — достояние человека, а не Бога. Нас не интересуют те свойства натуральных чисел, которые не обладают дескриптивным значением для конечного человека. Когда какой-то человек доказывает, что некоторое натуральное число существует, ему следует показать, как его найти. Если Бог обладает собственной математикой, которой нужно заниматься, пусть он и занимается ею сам» [50, с. 2]. Другими словами, классическая математика имеет явную теологическую подоплеку, подлинно же человеческая математика — это конструктивная математика, делающая основной акцент на процедурах пошагового вычисления и хорошо знающая свои границы.

Одна из сформулированных Гильбертом в докладе 1928 г. проблем — это *проблема разрешимости* (*Entscheidungsproblem*) [10, с. 455]. Гильберт был убежден в возможности найти решение для любой математической проблемы. В контексте проекта формализации математики эта убежденность вела к формулировке следующей задачи. Нужно для произвольной формулы выяснить, выводима она или нет в рамках заданной аксиоматической системы. Возможно ли построить общий алгоритм, на «входе» получающий проблему, в виде конечной цепочки знаков, а на «выходе» выдающий ответ в форме «да» или «нет»?

В 1930-е гг. несколько крупных логиков и математиков (К. Гёдель, С. Клини, А. Чёрч, Э. Пост, А. Тьюринг) занимались этой проблемой, что привело их к понятию абстрактной вычислительной машины и к доказательству существования неразрешимых математических проблем [58]. В результате интерес к конструктивным процессам в математике и к результатам, связанным с ограниченностью возможностей формализации в этой области, оказался связан с нарождавшимися сферами *computer science* (гл. 21) и искусственного интеллекта.

Формализм, начиная с 1930-х гг. также меняет свой характер. Возьмем в качестве характерного примера позицию ученика Гильберта и Бернайса [37, с. 246—247] американского математика и логика *Х. Карри*.

---

[10] Бишоп имел в виду известные слова немецкого математика Л. Кронекера: «Целые числа создал Бог, все же остальное — дело рук человеческих» [60, v. II, с. 942].

Для формализма Карри (в версии 1939 г.) характерны примирительные настроения, сближающие его с логическим позитивизмом. Формалистская концепция математики с его точки зрения — это самая толерантная концепция, поскольку будучи «свободной от метафизических склонностей» она «является совместимой практически с любым видом философии» [56, с. 58]. Он определяет математику как «науку о формальных системах» (в более поздних версиях последнее слово было заменено на «методы», а потом — на «структуры») [56, с. 56; 19, с. 36; 84]. Последняя замена — весьма знаменательна, *подлинным наследником формализма стал математический структурализм*, к рассмотрению которого мы сейчас и перейдем.

20.5. Математический структурализм

В 1948 г. вышла программная статья «Архитектура математики», подписанная именем *Н. Бурбаки*. За этим псевдонимом скрывалась группа молодых французских математиков, выпускников парижской École Normale Supérieure, — А. Картан, К. Шевалле, Ж.Дельсарт, Ж.Дьёдонне, А. Вейль и др. Группа возникла еще в 1935 г. Ее участники были недовольны преподаванием математики во Франции, которое не соответствовало современному представлению об этой науке, сформированному Д. Гильбертом и его учениками, и в особенности связанному с алгебраической школой Гёттингена (Э. Нётер и ее ученики Э. Артин и Б. Л. ван дер Варден). Названные французские математики объединились для осуществления амбициозного замысла — создания современного аналога «Начал» Евклида — многотомного трактата «Начала математики». Этот трактат должен был строиться на основе аксиоматической теории множеств и на максимальном уровне абстракции представлять основные разделы чистой математики в их взаимосвязи.

Краткое введение к первой книге трактата не оставляет сомнений, что ее авторы — *наследники формализма Гильберта в понимании математики* [5, с. 23—30]. Однако в отличие от Гильберта группа Бурбаки не ставила себе целью обоснование математики. Их уже не смущали парадоксы наивной теории множеств, ведь в аксиоматической теории множеств они преодолены. Не смущало их и то, что не удается убедительным образом доказать непротиворечивость аксиоматической теории множеств. Если в ней обнаружатся новые парадоксы — они также будут устранены в свой черед на пути дальнейшего уточнения ее формализма. «Итак, — заключали они, — мы верим, что математике суждено выжить и что никогда не произойдет крушения главных частей этого величественного здания вследствие внезапного выявления противоречия; но мы не утверждаем, что это мнение основано на чем-либо, кроме опыта. Этого мало, скажут некоторые. Но вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в грядущее спокойно» [5, с. 30].

Бурбаки — *сторонники формализованной математики, но без фундаментализма*. Свой формализм они с готовностью ограничивают «здравым смыслом математика». Они чувствительны к истории (не случайно многие тома Трактата содержат исторические очерки [4]) и не претендуют «давать законы на вечные времена». Они имеют, правда, претензию на «полную строгость», но ее не следует понимать в абсолютном смысле. Как разъясняют авторы: «Благодаря тому, что мы постоянно стараемся держаться настолько близко к формализованному тексту, насколько это представляется возможным без невыносимых длиннот, проверка в принципе легка; ошибки (неизбежные при подобном предприятии) можно обнаружить без больших затрат времени, и риск, что они сделают недействительными главу или целую Книгу Трактата, остается весьма незначительным» [5, с. 28].

Аксиоматический метод для них не столько связан с обоснованием математики, сколько служит *важнейшим инструментом математического творчества и, одновременно, средством порождения и поддержания единства современной математики*. Они определяли аксиоматический метод как «искусство составлять тексты, формализация которых легко достижима», и видели в его «систематическом употреблении в качестве инструмента открытий» одну из отличительных черт современной математики. Формализация и аксиоматизация усиливают и поддерживают математическую интуицию, а вовсе не противостоят ей, как может показаться на первый взгляд [5, с. 24].

Тема *единства* современной математики — центральная в статье-манифесте Бурбаки «Архитектура математики» [4, с. 245—259]. Вопреки видимому «смешению языков», которое превращает современную математику в Вавилонское столпотворение, аксиоматический метод служит инструментом, способным вскрыть лежащее на глубине единство и взаимосвязь бесчисленных теорий многоликой математики XX в.

Ключевым термином, позволяющим внятно говорить об этом единстве, служит им словосочетание «*математические структуры*». Выделение конкретной структуры требует абстрагироваться от природы находящихся в заданном отношении элементов. Наиболее эффективный способ сделать это — построить *аксиоматическую теорию* данной структуры, т.е. явно прописать в виде конкретных аксиом нужные нам отношения элементов, исключив, тем самым, из рассмотрения все несущественное. В результате такого подхода «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры» [4, с. 251].

Математический мир в целом Бурбаки представляют как *иерархию структур*, которая идет от простого к сложному и от общего к частному. В центре его располагаются наиболее простые и универсальные *порождающие структуры*. Среди них Бурбаки выделяют *три* типа, в зависимости от базового отношения, конституирующего ту или иную структуру — *алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры*. В случае алгебраических структур это бинарное отношение типа сложения или умножения, ставящее двум элементам в соответствие третий; в случае структур порядка — отношение порядка, например «меньше или равно»; в случае топологических структур — это формализация интуитивного представления о непрерывности перехода от одного элемента множества к другому (отношение непрерывности), которое достигается, например, с помощью введения в данном множестве системы подмножеств, удовлетворяющих нескольким специальным аксиомам и называемых «открытыми» (их дополнения называются «замкнутыми»). Вводя дополнительные аксиомы, мы можем получать более сложные и богатые структуры из более простых.

За пределами заданного порождающими структурами «ядра» располагаются структуры *сложные*. Мы получаем их путем комбинирования порождающих структур с помощью введения связывающих аксиом. Например, группа или абелева группа — порождающие алгебраические структуры, а вот кольцо или поле — комбинированные сложные структуры. Так кольцо предполагает наличие двух бинарных операций, относительно одной из которых оно является абелевой группой, причем две эти операции связаны между собой законами дистрибутивности. Другой пример сложной структуры — векторное (линейное) пространство. В этом случае вводится связующая операция умножения векторов на скаляры и регламентирующие ее применение аксиомы. Еще один пример — топологическая группа, когда на одном множестве вводятся структуры группы и топологического пространства, которые связываются между собой требованием непрерывности групповых операций.

Наконец, на третьем уровне, мы встречаем *частные теории*, которые уже придают элементам рассматриваемых множеств «более определенную индивидуальность». Именно здесь мы находим более привычные разделы классической математики — действительный и комплексный анализ, различные разделы геометрии, теорию чисел. Однако, пишут Бурбаки, «они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер» [4, с. 256].

Правда, Бурбаки сразу оговариваются, что нарисованная ими картина математики есть лишь «весьма грубое приближение к истинному положению дел». Она является *схематической*, поскольку в реальности описанная иерархия может нарушаться и спутываться, *идеализированной*, поскольку по-прежнему остаются изолированные результаты, которые не ясно как вписать в общую картину, и *застывшей*, поскольку не учитывает постоянного изменения и перестройки всего здания, которое может затрагивать даже порождающие структуры.

В заключение они предлагают суммирующую архитектурную метафору, сравнивая математический мир с *большим городом*, «чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные» [4, с. 257].

Односторонность подхода Бурбаки часто видят в игнорировании ими сферы прикладной математики, отсутствии в их трактовке математики учета взаимоотношений математики с физикой и другими естественными науками. Однако здесь мы имеем дело не с недосмотром, а скорее с сознательным стремлением *отстоять права чистой математики в современном мире, заинтересованном в основном в ее приложениях*. Сверх того, по мысли Бурбаки, только позволив математике свободно развиваться как *чистой* математике, без оглядки на приложения, мы сможем обрести в ней в будущем мощное орудие для самых различных приложений, которые мы пока даже не можем предугадать!

Но способна ли чистая математика к автономному развитию? Бурбаки убеждены, что да. В докладе 1964 г. «Современное развитие математики» Ж. Дьёдонне говорил об этом так: «Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней хватило бы на столетия пищи для размышления над большими проблемами, которые мы должны ещё решить в нашей собственной науке» [17].

Важным событием для дальнейшего развития математического структурализма стало создание *теории категорий* (1942—1945) [28; 47]. На следующем шаге (около 1964 г.) была создана *теория топосов* (особого типа категорий), а к началу 1970-х — элементарная теория топосов [15]. Как отмечал Ю. И. Манин в середине 1980-х гг., «категорное мышление как альтернатива теоретико-множественному мышлению все в большей степени становится распространенным среди профессиональных математиков» [16, с. 6]. В настоящее время ряд философов математики также обсуждает возможности подобной альтернативы[11]. По замечанию К. Макларти, структурализм, основанный на теориях категорий и топосов, — это особая разновидность математического структурализма, *отличная* от бурбакистской [75].

Третьей разновидностью согласно К. Макларти является математический структурализм как весьма популярная позиция в американской философии математики. Расцвет ее пришелся на 1980-1990-е гг., и он связан, в первую очередь, с именами *Д. Хеллмэна*, *М. Резника* и *С. Шапиро*, как главных его теоретиков. Говоря об этой третьей разновидности, важно отличать применяемую математиками *структуралистскую методологию* от споров вокруг семантических и метафизических вопросов, которые в связи с этой методологией ведут философы, стремясь вскрыть ее неявные предпосылки [80, с. 345—347]. Кроме того, удобно отличать собственно структуры от реляционных систем (*relational systems*), т.е. конкретных областей объектов, с определенными на них функциями и отношениями, которые удовлетворяют заданному набору аксиом. *Структура* понимается при этом как то общее, что разделяют все *системы* определенного типа.

Согласно одному из подходов математические утверждения интерпретируются в терминах модальной логики. Этот подход, намеченный Х. Патнэмом [77, с. 47—49] и подробно разработанный Джеффри Хеллмэном [66, 67], получил название *модального структурализма*.

Другая разновидность структурализма — *паттерн-структурализм* [80, с. 363]. Для этого подхода структуры-универсалии или *паттерны* (если использовать предпочитаемый М. Резником термин) представляют собой *особый вид абстрактных объектов*, который и является

[11] См. статью С. Аводи на эту тему и спровоцированную ею полемику о роли теории категорий на страницах журнала Philosophia Mathematica [48; 65; 46; 82]. Об отношении теории категорий к основаниям физики см. [38].

подлинным предметом математики. Структура познается через абстрагирование или распознавание паттерна. Паттерны могут иметь и обычно имеют много различных инстантиаций (экземплификаций). Паттерн отличается как от всех реляционных систем, так и от всех прочих типов объектов. Он имеет особую внутреннюю композицию, состоя из связанных между собой определенным образом «позиций» (*positions, points, nodes*). Идентичность и природа этих позиций в паттерне определяются исключительно их принадлежностью паттерну и ничем другим. Именно *природа* и *идентичность* этих позиций в паттерне являются главным предметом обсуждения и исследования в паттерн-структурализме.

Главными сторонниками этой версии структурализма являются М. Резник и С. Шапиро. Развив этот подход в статьях 1980-х гг. (первая статья Резника на эту тему вышла еще в 1975 г.), они дали наиболее полное его изложение в монографиях «Математика как наука о паттернах» (1997) [81] и «Философия математики: структура и онтология» (1997) [86].

Для сторонников паттерн-структурализма математические объекты — это объекты в расширенном понимании, особые, пусть и «неполные», но все же подлинные объекты (*bona fide objects*). Они онтологически вторичны по отношению к структуре-как-целому. Математические объекты — не более чем *места* в определенных структурах. Шапиро предлагает говорить о двух сосуществующих и взаимодополняющих способах понимания таких «мест», как ролей или *позиций* в структуре (*places-are-offices perspective*) и как собственно *объектов* (*places-are-objects perspective*) [85].

Примеры для первого способа Шапиро приводит следующие: нынешний вице-президент раньше был сенатором (используемая структура — правительство США); шахматный слон, стоящий со стороны белого короля, в прошлой партии был слоном, стоящим со стороны белой королевы; в арабской системе записи чисел символ «2» играет роль двойки, в то время как в римской системе ту же роль играет последовательность символов «II».

В этой перспективе предполагается наличие некоторой *базовой онтологии*, поставляющей объекты для заполнения мест в соответствующих структурах. Например, для политических систем — это люди, удовлетворяющие особым критериям (возраст, гражданство, надлежащая процедура избрания и т.п.); в случае игры в шахматы — это небольшие, легко переставляемые объекты соответствующего цвета и формы.

Для второго способа (перспективы) примеры будут такие: «вице-президент председательствует в сенате»; «слон, стоящий на черной клетке, не может пойти на белую клетку». В этих примерах имеются в виду не конкретные вице-президент или шахматная фигура, но соответствующие роли, т.е. речь идет о самой структуре независимо от ее экземплификаций.

С точки зрения Шапиро типичные утверждения чистой математики делаются именно из второй перспективы. Например, когда мы говорим: «существует бесконечно много простых чисел». Здесь мы предполагаем структуру натуральных чисел существующей и поэтому говорим о местах в ней непосредственно, напрямую. Однако различие между позицией (*office*) и тем, кто ее занимает (*office-holder*) в математике относительно. В качестве базовой онтологии здесь могут выступать места в других структурах или даже той же самой структуре. Например, четные натуральные числа экземплифицируют структуру натуральных чисел.

Кроме того, если для сторонника модального структурализма речь о структурах есть не более чем удобный способ говорить о реляционных системах, которые структурированы соответствующим образом, то для Шапиро структуры (= паттерны) существуют первично и независимо от своих инстантиаций. Вот почему Шапиро называет собственную позицию «*ante rem* структурализмом», используя терминологию средневекового спора по проблеме универсалий и подчеркивая свою приверженность реализму (платонизму).[12]

---

[12] *Ante rem* реализм утверждает существование универсалий «до вещей», т.е. онтологическую *первичность* универсалий по отношению к партикуляриям (единичным чувственно воспринимаемым вещам). Его отличают от *in re* реализма, для которого универсалии существуют лишь «в вещах», т.е. *вторичны* по отношению к

Споры вокруг математического структурализма продолжаются, и он остается одним из заметных направлений в современной мозаике философско-математических подходов. Говорить о завершенной картине здесь, по-видимому, еще рано. Перечислим несколько открытых вопросов, которые стоят перед структуралистской философией математики:

1. Способен ли математический структурализм дать полноценное описание математических объектов, которое не требовало бы дополнения независимыми от него философскими построениями?
2. Не является ли математический структурализм адекватным лишь для отдельных областей математики (в первую очередь — алгебры), но не для всей математики?
3. Насколько математический структурализм способен дать адекватное описание математики на протяжении всей ее истории? Не описывает ли он лишь математику узкого временного периода — конца XIX—XX вв.? Применим ли он, например, к античной математике?

20.6. Натурализм и философия математики

Термин *натурализм* столь же популярен в современной философии, сколь многозначен и неуловим. Пожалуй, проще всего подобраться к главной его особенности, указав на его противоположность. Натурализм противоположен *супранатурализму*. Последний же означает апелляцию в философских рассуждениях к сверхприродному, сверхъестественному, т.е. к сфере *религиозных*, а также *метафизических* представлений в традиционном их понимании.

Классической формулировкой натуралистической позиции в современной эпистемологии и философии науки признана статья *У. В. О. Куайна* «Натурализованная эпистемология» (1969). Отправной точкой для рассуждений Куайна служит провал проектов логицизма (Б. Рассел) и логического позитивизма (Р. Карнап): он убежден в невозможности сведения научных предложений к языку наблюдения, логики и теории множеств. Причина этой невозможности коренится в справедливости прагматистского взгляда на познание (Ч. Пирс, см. пар. 4.3) и холистическом характере проверки научных теорий (П. Дюгем). В этой ситуации у нас нет никаких оснований для признания за эпистемологией (и философией науки) более высокого статуса по сравнению с конкретными естественнонаучными теориями.

Однако лишение эпистемологии статуса первой философии не означает ее гибели, напротив — только теперь она получает определенные очертания и ясное место в системе человеческого знания [78, с. 87—88; 22, с. 383]. Оказавшись на одном уровне с такими науками, как психология, лингвистика, биология, она получает законное право на взаимовыгодный обмен с ними. Куайн, правда, несколько суживает открывающуюся перспективу, предпочитая рассматривать эпистемологию как раздел психологии. Он пишет: «Старая эпистемология стремилась, в некотором смысле, включить в себя (to contain) естественную науку <…>. Напротив, эпистемология в ее новом облике сама включена в естественную науку как одна из глав психологии. Но при этом и прежнее притязание на включение естественной науки в рамки эпистемологии, по-своему, сохраняет свою силу. <…> Тем самым, имеет место взаимное включение, хотя и в различных смыслах: как эпистемологии в естественную науку, так и естественной науки в эпистемологию. <…> Мы ищем понимания науки как институции или процесса, имеющего место в мире, и мы не предполагаем, что это понимание должно быть сколько-нибудь лучше, чем сама наука, которая является его объектом» [78, с. 83—84; 22, с. 379—380].

Для натурализма математика есть часть человеческой культуры. Сама же эта культура есть верхний этаж трехэтажной *фундаментальной натуралистической пирамиды*: биологическое — социальное — культурное. Каждый следующий этаж в ней есть порождение предыдущего; он не мыслим без предыдущего, хотя и не редуцируем к нему [43]. В рамках

партикуляриям. В средние века первый взгляд связывали с именем Платона (крайний реализм), а второй — с именем Аристотеля (умеренный реализм).

такой широкой схемы возможны разные построения.

На практике чаще всего встречается либо версия натуралистической философии математики, делающая основную ставку на *верхние*, социокультурные этажи фундаментальной натуралистической пирамиды (в двух версиях — культурологической и социологической), либо на ее *нижний*, биологический этаж (опять же в двух версиях — когнитивной и эволюционной). Однако и в том, и в другом случае речь идет о рассуждениях, развертываемых принципиально в последарвиновском интеллектуальном пространстве.

Вспоминая Куайна, можно сказать, что версии натурализма в философии математики различаются тем, на какую область естественных или социальных наук они сориентированы в первую очередь: культурную антропологию, социологию, когнитивную психологию или биологию.

Натуралистическая позиция есть разновидность *реализма* (гл. 8). Однако это реализм принципиально антиплатонического типа. Его часто характеризуют как «гипотетический реализм» [54, с. 156]. Согласно этому подходу[13] наше представление о мире, как в целом, так и в частностях, есть набор гипотез, но отнюдь не случайный, а сформированный и апробированный в ходе биологической и культурной эволюции. Этот набор не может быть полностью лишен адекватности. Как удачно выразился американский палеонтолог Д. Симпсон, «обезьяна, не обладавшая реалистическим восприятием ветки дерева, на которое она совершала прыжок, вскоре была мертвой обезьяной и, тем самым, не становилась одним из наших предков. Наши восприятия действительно дают нам истинное, хотя и не полное, представление о внешнем мире, поскольку это была и есть биологическая необходимость, встроенная в нас естественным отбором. Если бы мы не были такими, нас бы здесь не было!» [87, с. 84].

Австрийский биолог К. Лоренц писал, что эволюционное происхождение нашего познавательного аппарата делает его, тем не менее, по-своему односторонним и ограниченным: «у нас развились “органы” лишь для тех сторон Сущего-в-себе, какие важно было принимать в расчет для сохранения вида, т.е. в тех случаях, когда селекционное давление было достаточно для создания этого специального аппарата познания» [26, с. 249]. Но и в отношении этой сферы мы подобны примитивному охотнику на тюленей или китобою, который замечает «только то, что представляет для него практический интерес» [26, с. 249]. Более того: с биологической точки зрения важны не столько используемые нами мысленные образы, сколько конкретная связь между получаемыми стимулами и нашими ответными реакциями (вспомним прагматицистский принцип Пирса).

Однако современная физика и математика представляют собой плоды мышления высокого уровня абстрактности, которые выводят нас далеко за пределы сети повседневных стимулов и реакций. Как эволюционно сформированное мышление со всеми его ограничениями способно создать такие теории? Отвлеченное мышление в чем-то подобно играм детенышей животных. Игра подготавливает их к взрослой жизни через предварительное проигрывание жизненно-важных отношений в «ненастоящей» ситуации. Главная ценность теоретического мышления с биологической точки зрения также состоит в способности «проиграть» мысленно, в воображении, всевозможные ситуации до того, как нам придется столкнуться с ними в «настоящей» жизни. Такое предварение существенно минимизирует риски. По мере развития, мысленное «проигрывание» может становиться «многоэтажным», порождая все более высокие уровни абстракции.

Однако главный принцип — попытаться применить в новых условиях те способы и приемы, которые хорошо себя зарекомендовали в старых. Поэтому даже высоко абстрактное мышление человека не утрачивает своей связи с его базовым *перцептивным* (относящимся к чувственному восприятию) и *кинестетическим* (мышечное чувство, связанное с движением)

---

[13] Описываемый подход, по сути, мало чем отличается от гипотетико-дедуктивного метода, фиксируемого П. Дюгемом (см. пар. 4.2). Он опирается также на популярный в США и англоязычном мире взгляд эволюционной эпистемологии, раннюю форму которого можно найти у Г. Спенсера (см. пар. 4.1), развитую — у К. Поппера и С. Тулмина (гл. 6) (*прим. А. Л.*).

опытом.

Эта тема получила развитие в исследованиях современных когнитивных психологов. В качестве примера сошлемся на концепцию неразрывной связи мышления и тела (*embodied cognition*, воплощенного познания) и проблематику концептуальных метафор американского когнитивного лингвиста *Д. Лакоффа*. Совместно с чилийско-швейцарско-американским психологом, специалистом по проблемам математического знания, *Р. Нуньесом* он выпустил книгу «Откуда приходит математика» (2000) [71].

Центральный их тезис выглядит следующим образом: «Математика как мы ее знаем (as we know it) создана и используется людьми: математиками, физиками, специалистами по информатике, экономистами — все они представители вида *Homo sapiens*. Возможно это очевидный факт, но он имеет одно важное следствие. Математика (как мы ее знаем) ограничена и структурирована свойствами человеческого мозга и умственными способностями человека. Единственная математика, которую мы знаем или можем знать, — это математика, основанная на нашем мозге и сознании (*a brain-and-mind-based mathematics*)» [71, с. 1; 23, с. 29].

В связи с этим Лакофф и Нуньес формулируют два главных вопроса:

1) Какие именно механизмы человеческого мозга и сознания позволяют людям формулировать математические идеи и строить математические рассуждения?

2) Есть ли основанная на мозге и сознании математика — всё, что математика собой представляет? Или так: имеется ли, как предполагали платоники, свободная от воплощения (*disembodied*) математика, выходящая за пределы всех тел и сознаний и структурирующая вселенную (как эту вселенную, так и всякую возможную вселенную)? [71, с. 1]

На первый из этих вопросов призвана ответить когнитивная наука, как междисциплинарное исследование сознания, мозга и их взаимосвязи. Второй же, по мнению авторов, лежит за пределами науки. Ответ на него относится к области веры, которая сродни вере в Бога. Человеческая математика не может быть и некоторой *частью* платонической математики, поскольку она существенным образом и на всех уровнях опирается на концептуальную метафору, последняя же специфична именно для живых существ.

Наше сознание не есть универсальное сознание, оно телесно укоренено (*embodied*) и специфично именно для человека и, возможно, его ближайших биологических родственников. «Конкретная природа наших тел, мозга и нашего каждодневного функционирования в мире определяет структуру человеческих понятий и рассуждений, включая математические понятия и рассуждения» [71, с. 5; 23, с. 31]. Кроме того, большая часть нашего мышления недоступна для прямой интроспекции, а значит — не осознается нами. Абстрактное, как правило, понимается нами посредством конкретного, т.е. с использованием идей и способов рассуждения, которые укоренены в сенсомоторной системе. Этот когнитивный механизм и называется *концептуальной метафорой*.

Концептуальные метафоры пронизывают собой всю математику. Простейшие примеры таких метафор: «числа — это точки на прямой» или «числа — это множества». Вообще же математика «громоздит метафору на метафору», и задача когнитивного психолога — распутать их хитросплетение и показать, как они опираются в конечном итоге на когнитивный аппарат, используемый в повседневном мышлении. Например, математическое мышление делают возможным такие повседневные понятия, как «набор объектов в ограниченной области пространства», «повторяющееся действие», «движение», «вращение», «приближение к границе» и т.п. Рядом с ними стоят наглядные схемы, такие как схема «контейнер» (внутри — граница — снаружи)[14]. Наша способность управлять своими движениями существенным образом влияет на устройство нашей понятийной системы, в первую очередь, через схему процесса. Причина нам уже известна — одна и та же нервная контролирующая система отвечает как за сложное телесное движение, так и за рациональный вывод.

Математические знания передаются от поколения к поколению, но — как? С

[14] Классический пример применения этой схемы — диаграммы Эйлера-Венна, а значит и аристотелевская теория силлогизма.

натуралистической точки зрения есть два основных способа такой передачи — биологические механизмы передачи генетической информации и социокультурные механизмы (передача через подражание и научение). На каком уровне передается математика? На биологическом или на социальном?

«Центральный элемент, глубинная структура математики, — писал по этому поводу американо-французский математик и философ математики израильского происхождения *И. Рав* в статье “Философские проблемы математики в свете эволюционной эпистемологии” (1989), — заключает в себе когнитивные механизмы, которые развились, подобно прочим биологическим механизмам, в процессе столкновения с реальностью, и оказались генетически закрепленными в ходе эволюции. Я буду называть эту центральную структуру *логико-операциональным компонентом* математики. На ее основе вырос и продолжает расти *тематический компонент* математики, который состоит из специфического содержания математики. Этот второй уровень культурно обусловлен» [79, с. 58].

К первому уровню относятся врожденные способности счета и ориентации в пространстве, которые в той или иной степени проявляют себя не только у человека, но и у других биологических видов, например, — у птиц. У всех людей они одинаковы в силу генетической тождественности биологического вида. Относящееся к этому первому уровню — это, как еще в 1941 г. отметил К. Лоренц, биологическая версия кантовского *a priori*: то, что априорно для индивида, апостериорно для вида [25].

Однако собственно математика (второй уровень) — это элемент человеческой культуры, а, следовательно, она должна подчиняться главным особенностям социально передаваемых знаний и навыков. Математик имеет дело с чем-то очень реальным и даже объективным, но эта реальность и объективность не природная, а культурная, что не лишает ее способности решающим образом определять собой человеческого индивида[15]. Наряду с биологическим априори есть «историческое априори» (Мишель Фуко, гл. 7) или априори культуры (неокантианцы, п. 3.7).

Иногда в связи с этим говорят о *социальном конструктивизме*, подразумевая позицию, согласно которой, все то, что человек склонен воспринимать как объективную реальность, на деле есть социальный конструкт. В самом деле, даже природный мир мы во многом видим через призму нашей культуры, которая социально обусловлена; сама же эта культурная призма в обычной ситуации остается для нас незаметной. Однако, как пишет сторонник этого подхода, американский социолог Р. Коллинз: «Теория социального конструктивизма относительно интеллектуальной жизни далека от того, чтобы быть антиреалистской, и предоставляет нам целое изобилие реальностей. Социальные сети существуют; также существуют и их материальные основы — церкви и школы, аудитории и покровители, которые кормили и одевали интеллектуалов; кроме того, существуют экономические, политические и геополитические процессы, составляющие внешнюю сферу причинности» [21, с. 1114].

Одна из важнейших особенностей человеческой культуры — ее *разнообразие*. Как заметил еще в годы Первой мировой войны О. Шпенглер, нет единой человеческой культуры, но множество различных культур, а, значит, не должно быть и одной общей для всех людей математики, но математик должно быть столько же, сколько этих культур [44, с. 151].

Итак, мы должны иметь много *альтернативных математик*, вместо одной универсальной, подобно тому, как мы имеем, например, много альтернативных религий или этических систем. Однако, где подобные альтернативы в математике? Надо либо предъявить примеры реальных альтернатив в области математики[16], либо дать социокультурное объяснение их отсутствия или нашей «слепоты» к ним.

Формулируя эту проблему, британский социолог *Д. Блур* попытался представить, как

[15] Об этом в статье «Местоположение математической реальности: антропологическое примечание» (1947) писал известный американский антрополог Л. Уайт. Эта статья переиздана [68, с. 304—319].

[16] *Воображаемые* альтернативы такового рода предлагал представить слушателям своих лекций в Кембридже в конце 1930-х — начале 1940-х гг. Л. Витгенштейн [8].

должна была бы выглядеть альтернатива к привычной для нас математике [51, с. 95—97]: она должна представляться нам ошибкой или неадекватностью, но быть законно укорененной в собственном целостном культурном контексте. Известно ли нам нечто подобное? Блур пытается привести ряд примеров. Правда, это не столько полноценные альтернативы, сколько историко-культурные *вариации*.

Один из таких характерных примеров — *отличие понимания числа в античности и в Новое время*. Для античности, число (ἀριθμός) — это совокупность единиц. Сама же единица числом не является, она — принцип единства и начало чисел. Характерным представлением такого числа является набор счетных камешков (ψῆφοι). Для этого подхода число — это всегда натуральное число. Альтернативное представление о числе как длине отрезка, а не наборе счетных камешков, позволяет признать числами единицу, дроби (точнее: разные дроби, представляющие одну и ту же длину, отождествляются, позволяя ввести понятие рационального числа) и иррациональные числа, приводя в итоге к понятию действительного числа.

Смена основополагающего представления в арифметике объясняется, согласно Блуру, иным пониманием соотношения арифметики и геометрии, которое коренилось в «прошлом опыте и нынешних целях» [51, с. 104]. Первое понимание было связано с пифагорейско-платоническим мировосприятием. Вторая же точка зрения, которую отстаивал С. Стевин, фламандский механик и инженер конца XVI в., была точкой зрения практика, для которого число — инструмент для измерения и расчетов в области повседневных дел «подлунного» мира, она представляла собой «нивелирование и секуляризацию числа» [51, с. 107].

В последние три десятилетия появилось особое направление — *этноматематика*, которое считает нужным всерьез говорить о насильственно насажденном и насаждаемом европоцентризме и дискриминации прочих культурных традиций в математике. Термин «этноматематика» ввел в 1984 г. один из главных энтузиастов этой идеи, бразильский преподаватель и историк математики *У. Д'Амброзио* [57]. Для ее сторонников современная академическая математика — лишь одна из многих традиций, зародившаяся в средиземноморском ареале и по ряду исторических причин вышедшая далеко за его пределы и навязавшая себя всему человечеству. Свою же задачу они видят в восстановлении в правах и остальных частей единой мозаики человеческих математик.

Можно пойти в решении проблемы альтернативных математик и по другому (по сравнению с этноматематикой) пути — признать унификацию и универсализацию в сфере математики неизбежной для человеческой культуры, но поставить при этом вопросы о натуралистических механизмах ее достижения и натуралистических причинах ее неизбежности. На мой взгляд, в истории европейской математики регулярно возникали ситуации, которые в другой культурной области (такой, как религия или этика) наверняка привели бы к расколу и образованию конкурирующих альтернатив. Однако каждый раз происходило одно из двух: 1) или альтернатива не получала достаточного развития и исчезала; 2) или вырабатывалась новая более общая точка зрения, которая вбирала в себя все альтернативы и узаконивала их сосуществование. Пример первого типа — атомистическая геометрия как альтернатива геометрии континуалистской в V—IV вв. до Р. Х. [27]. Примеры второго типа — ситуации с неевклидовыми геометриями в XIX в. и с конкурирующими подходами в основаниях математики в начале XX в. Причины этой тенденции избавляться от альтернатив остаются не вполне ясными[17], а сама она может служить серьезным аргументом против натуралистического истолкования математики.

В заключение остается отметить, что философия математики является живой областью исследований, где сталкиваются различные направления, школы и точки зрения. В представленном обзоре мы постарались рассказать о наиболее заметных явлениях в данной области, хотя за рамками рассмотрения осталось еще много интересных подходов.

---

[17] См. попытку американского философа Д. Аззуни решить названную проблему [68, с. 201—219].

Вопросы для самоконтроля

1. Какие периоды и этапы выделяют в историческом развитии философии математики? В чем их главные отличия и какова связь между ними?
2. Каковы сходства пифагореизма и математического платонизма? В чем их отличие?
3. Можно ли признать позицию Дэвида Мамфорда математическим платонизмом?
4. Как формулируется основной тезис каждой из трех программ обоснования математики (логицизма, интуиционизма и формализма)? В чем главные сходства и отличия этих программ?
5. С какими принципиальными трудностями столкнулась реализация каждой из трех программ обоснования математики? Как эти трудности повлияли на их дальнейшую судьбу?
6. Что можно сказать, сравнив отношение трех программ обоснования математики к 1) парадоксам наивной теории множеств; 2) соотношению математики и логики; 3) проблеме существования в математике; 4) бесконечности в математике?
7. Как взгляд на математику логического позитивизма соотносится с позициями трех програм обоснования математики?
8. Что такое теоремы Гёделя о неполноте, и в чем их значение для философии математики?
9. Каковы основные разновидности математического структурализма? Какие сильные и слабые стороны имеет математический структурализм в качестве философии математики?
10. Что такое натурализм и какие основные положения выдвигает натуралистическая философия математики?
11. Как соотносятся социокультурный и биологический подходы в натуралистической философии математики?
12. С какими проблемами сталкивается натуралистический подход к математике?
13. Сравните платоническую и натуралистическую версии реализма. Какая из них представляется вам более убедительной?

Использованная литература

1. Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. — М. : Наука, 1969.
2. *Аристотель*. Метафизика // Аристотель. Соч. : в 4-х т. — М. : Мысль, 1976. Т. 1.
3. *Беклемишев, Л. Д.* Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. <Статья> I / Л. Д. Беклемишев // Успехи математических наук. — 2010. — Т. 65. — Вып. 5 (395).
4. *Бурбаки, Н.* Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1963.
5. *Бурбаки, Н.* Теория множеств / Н. Бурбаки. — М. : Мир, 1965.
6. *Вейль, Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество <1944> / Г. Вейль // Математическое мышление. — М. : Наука, 1989.
7. *Вейль, Г.* О философии математики <1925—1926> / Г. Вейль. — М. : ГТТИ, 1934.
8. *Витгенштейн, Л.* Замечания по основаниям математики / Л. Витгенштейн // Философские работы. — Часть II. — М. : Гнозис, 1994.
9. *Гейтинг, А.* Интуиционизм: Введение / А. Гейтинг. — М. : Мир, 1965.
10. *Гильберт, Д.* Избранные труды : в 2-х т. / Д. Гильберт. — М. : Факториал, 1998. Т. 1: Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики.
11. *Гильберт, Д.* Основания геометрии / Д. Гильберт. — М.—Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
12. *Гильберт, Д.* Основания математики / Д. Гильберт, П. Бернайс. — Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. — М. : Наука, 1979.

13. *Гильберт, Д.* Основания математики / Д. Гильберт, П. Бернайс. — Т. 2. Теория доказательств. — М. : Наука, 1982.

14. *Гильберт, Д.* Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. М.—Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936.

15. *Голдблатт, Р.* Топосы: Категорный анализ логики / Р. Голдблатт. — М. : Мир, 1983.

16. *Джонстон, П.* Теория топосов / П. Джонстон ; под ред. Ю. И. Манина. — М. : Наука, 1986.

17. *Дьёдонне, Ж.* Современное развитие математики / Ж. Дьёдонне // Математика: Периодический сборник переводов иностранных статей. —. Т. 10. — М. : Мир, 1966.

18. *Кант, И.* Критика чистого разума / И. Кант // Собр. соч. : в 8 т. — Т. 3.— М. : Чоро, 1994.

19. *Карри, Х.* Основания математической логики / Х. Карри. — М. : Мир, 1969.

20. *Клини, С. К.* Введение в метаматематику / С. К. Клини. — М. : Иностр. лит-ра, 1957.

21. *Коллинз, Р.* Социология философий: глобальная теория интеллектуального изменения <1998> / Р. Коллинз. — Новосибирск : Сибирский хронограф, 2002.

22. *Куайн, У. В. О.* Натурализованная эпистемология / У. В. О. Куайн // Слово и объект. — М. : Логос, Праксис, 2000.

23. *Лакофф Дж., Нуньес Р.* Откуда взялась математика: как разум во плоти создает математику <фрагменты> // Горизонты когнитивной психологии : хрестоматия / Дж. Лакофф, Р. Нуньес ; под ред. В. Ф. Спиридонова и М. В. Фаликман. — М. : Языки славянских культур, РГГУ, 2012.

24. *Лебедев, А. В.* Фрагменты ранних греческих философов / А. В. Лебедев. — Часть 1. — М. : Наука, 1989.

25. *Лоренц, К.* Кантовская концепция *a priori* в свете современной биологии // Эволюция. Язык. Познание / К. Лоренц ; под общ. ред. И. П. Меркулова. — М. : Языки русской культуры, 2000.

26. *Лоренц, К.* Оборотная сторона зеркала / К. Лоренц. — М. : Республика, 1998.

27. *Лурье, С. Я.* Теория бесконечно-малых у древних атомистов / С. Я. Лурье. — М.—Л. : Изд-во АН СССР, 1935.

28. *Маклейн, С.* Категории для работающего математика / С. Маклейн. — М. : Физматлит, 2004.

29. *Марков, А. А.* Теория алгорифмов / А. А. Марков. — М.—Л. : Изд-во АН СССР, 1954.

30. Математическая логика и ее применение / под ред. Э. Нагела, П. Саппса, А. Тарского. — М. : Мир, 1965.

31. Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное / под ред. О. А. Назаровой. — М. : Территория будущего, Идея-Пресс, 2006.

32. *Платон*. Государство // Платон. Собр. соч. : в 4-х т. — Т. 3. — М. : Мысль, 1994.

33. *Пуанкаре, А.* Математика и логика / А. Пуанкаре, Л. Кутюра. — 2-е изд. — М. : URSS, 2007.

34. *Рамсей, Ф. П.* Философские работы / Ф. П. Рамсей. — М. : Канон+, 2011.

35. *Рассел, Б.* Введение в математическую философию. Избранные работы / Б. Рассел. — Новосибирск : Сиб. унив. изд-во, 2007.

36. *Рассел, Б.* Философия логического атомизма / Б. Рассел. — Томск : Водолей, 1999.

37. *Рид, К.* Гильберт / К. Рид. — М. : Наука, 1977.

38. *Родин, А.* Теория категорий и поиск новых математических оснований физики / А. Родин // Вопросы философии, 2010, № 7.

39. *Суровцев, В. А.* Автономия логики: источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна / В. А. Суровцев. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2001.

40. *Суровцев, В. А.* Ф. П. Рамсей и программа логицизма / В. А. Суровцев. — Томск :

Изд-во Томского ун-та, 2012.

41. *Тегмарк, М.* Параллельные вселенные / М. Тегмарк // В мире науки. — 2003. — № 8.

42. *Фреге, Г.* Логико-философские труды / М. Фреге. — Новосибирск : Сиб. унив. изд-во, 2008.

43. *Шеффер, Ж.-М.* Конец человеческой исключительности <2007> / Ж.-М. Шеффер ; пер. с фр. С. Н. Зенкина. — М. : НЛО, 2010.

44. *Шпенглер, О.* Закат Европы: Очерки морфологии мировой истории / О. Шпенглер. — Т. 1: Гештальт и действительность. — М. : Мысль, 1993.

45. *Ямвлих.* О пифагоровой жизни / Ямвлих ; пер. И. Ю. Мельниковой. — М. : Алетейа, 2002.

46. *Awodey, S.* An Answer to Hellman’s Question: «Does Category Theory Provides a Framework for Mathematical Structuralism?» / S. Awodey // Philosophia Mathematica (3). — 2004. — Vol. 12. — № 1.

47. *Awodey, S.* Category Theory / S. Awodey. — New York : Oxford University Press, 2006.

48. *Awodey, S.* Structure in Mathematics and Logic: a Categorical Perspective / S. Awodey // Philosophia Mathematica (3). — 1996. — Vol. 4. — № 3.

49. Philosophy of Mathematics: Selected Readings / ed. P. Benacerraf and H. Putnam. — 2 ed. — New York : Cambridge University Press, 1983.

50. *Bishop, E.* Foundations of Constructive Analysis / E. Bishop. — New York : McGraw-Hill, 1967.

51. *Bloor, D.* Knowledge and Social Imagery / D. Bloor. — London : Routledge & Kegan Paul, 1976.

52. *Brouwer L. E. J.* Collected Works / L. E. J. Brouwer ; ed. Arend Heyting and Hans Freudenthal. — Amsterdam : North-Holland, 1975.

53. *Brouwer L. E. J.* Life, Art, and Mysticism / L. E. J. Brouwer // Introduction and translation by Walter P. Van Stigt // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1996. — Vol. 37. — № 3.

54. *Campbell, D. T.* Methodological Suggestions from a Comparative Psychology of Knowledge Processes / D. T. Campbell // Inquiry. — 1959. — Vol. — № 1—4.

55. *Cole, J. C.* Mathematical Platonism (2010) / J. C. Cole // Internet Encyclopedia of Philosophy, адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/mathplat/

56. *Curry, H. B.* Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics / H. B. Curry. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1951.

57. *D’Ambrosio, U.* Ethnomathematics: Link between Traditions and Modernity / U. D’Ambrosio. — Rotterdam : Sense Publishers, 2006.

58. The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions / ed. M. Davis. — Hewlett, New York : Raven Press, 1965.

59. *Davis, P. J.* The Mathematical Experience / P. J. Davis, R. Hersh. — Boston : Hoghton Mifflin Company, 1982.

60. *Ewald, W.* From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics / W. Ewald. Volumes I and II. — New York : Oxford University Press, 1996.

61. *Gardner, M.* Is Reuben Hersh «Out There»? / M. Gardner // EMS Newsletter. — 2009. — June. — № 72.

62. *Gödel, K.* Collected Works / K. Gödel // Volume I: Publications 1929—1936. — New York : Oxford University Press, 1986.

63. *Hacking, I.* The Lure of Pythagoras / I. Hacking // IYYUN: The Jerusalem Philosophical Quarterly. — 2012. — Vol. 61.

64. *Hale, B.* Abstract Objects / B. Hale. — Oxford : Basil Blackwell, 1987.

65. *Hellman, G.* Does Category Theory Provides a Framework for Mathematical Structuralism? / G. Hellman // Philosophia Mathematica (3). — 2003. — Vol. 11. — № 2.

66. *Hellman, G.* Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation / G. Hellman. — New York : Oxford University Press, 1989.
67. *Hellman, G.* Three Varieties of Mathematical Structuralism / G. Hellman // Philosophia Mathematica (3). — 2001. — Vol. 9. — № 2.
68. 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics / ed. R. Hersh. — New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006.
69. *Kepler, J.* The Harmony of the World / J. Kepler ; tr. by E. J. Aiton, A. M. Duncan, J. V. Field // The American Philosophical Society. — 1997.
70. *Kitcher, P.* An Opinionated Introduction / eds. W. Aspray and P. Kitcher // History and Philosophy of Modern Mathematics (Minnesota Studies in the Philosophy of Science. Vol. XI). — Minneapolis : The University of Minnesota, 1988.
71. *Lakoff, G.* Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being / G. Lakoff and R. E. Núñez. — New York : Basic Books, 2000.
72. Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them? / ed. S. Lindström [and all] // Springer Science+Business Media B.V. — 2009.
73. *Linnebo, Ø.* Platonism in the Philosophy of Mathematics (2009, substantive revision — 2011) / Ø. Linnebo // Stanford Encyclopedia of Philosophy, адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/
74. *Mazur, B.* Mathematical Platonism and its Opposites / B. Mazur // EMS Newsletter. — 2008. — June. — № 68.
75. *McLarty, C.* The Last Mathematician from Hilbert's Göttingen: Saunders Mac Lane as Philosopher of Mathematics / C. McLarty // British Journal for the Philosophy of Science. — 2007. — Vol. 58. — № 1.
76. *Mumford, D.* Why I am a Platonist / D. Mumford // EMS Newsletter. — 2008. — December. — № 70.
77. *Putnam, H.* Mathematics, Matter and Method (Philosophical Papers, Volume I) / H. Putnam. — 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1979.
78. *Quine, W. V.* Epistemology Naturalized / W. V. Quine // Ontological Relativity and Other Essays. — New York : Columbia University Press, 1969.
79. *Rav, Y.* Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology / Y. Rav // Philosophica. — 1989. — Vol. 43.
80. *Reck, E.* Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics / E. Reck and M. Price // Synthese. — 2000. — Vol. 125. — № 3.
81. *Resnik, M.* Mathematics as a Science of Patterns / M. Resnik. — New York : Oxford University Press, 1997.
82. *Rodin, A.* Categories Without Structures / A. Rodin // Philosophia Mathematica (3). — 2011. Vol. 19. — № 1.
83. *Russell, B.* Autobiography <1975> / B. Russell. — London and New York : Routledge, 2009.
84. *Seldin, J. P.* Curry's Formalism as Structuralism / J. P. Seldin // Logica Universalis. — 2011. — Vol. 5. — № 1.
85. *Shapiro, S.* Mathematical Structuralism (June 6, 2010) / S. Shapiro // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/m-struct/
86. *Shapiro, S.* Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology / S. Shapiro. — New York : Oxford University Press, 1997.
87. *Simpson, G. G.* Biology and the Nature of Science / G. G. Simpson // Science. — 1963. — Vol. 139. — № 3550.
88. *Tegmark, M.* Is the Universe Actually Made of Math? Interview by A. Frank / M. Tegmark // Discover, June 16, 2008, адрес доступа: http://discovermagazine.com/2008/jul/16-is-the-universe-actually-made-of-math
89. *Tegmark, M.* The Mathematical Universe / M. Tegmark // Foundations of Physics, v. 38, № 2 (Feb. 2008).

90. *Tieszen, R. L.* What is the Philosophical Basis of Intuitionistic Mathematics? / R. L. Tieszen ; eds. D. Prawitz, B. Skyrms, D. Westerståhl // Logic, Methodology and Philosophy of Science IX. — Amsterdam : North-Holland, 1994.

91. *Weir, A.* Formalism in the Philosophy of Mathematics (Jan. 12, 2011) / A. Weir // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/formalism-mathematics/

92. *Wright, C.* Frege's Conception of Numbers as Objects / C. Wright. — Aberdeen : Aberdeen University Press, 1983.

93. *Zermelo, E.* Collected Works / E. Zermelo // Gesammelte Werke. Volume I / Band I. Set Theory, Miscellanea / Mengenlehre, Varia. Berlin — Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.

Рекомендуемая литература

Реньи А. Диалоги о математике <1962—1967> / А. Реньи // Трилогия о математике : пер. с венг. ; под ред. Б. В. Гнеденко. — М. : Мир, 1980.

Клайн, М. Математика. Утрата определенности. <1980> / М. Клайн. — М. : Мир, 1984.

Клайн, М. Математика. Поиск истины. <1985> / М. Клайн. — М. : Мир, 1988.

Беляев, Е. А. Философские и методологические проблемы математики / Е. А. Беляев, В. Я. Перминов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981.

Рузавин, Г. И. Философские проблемы оснований математики / Г. И. Рузавин. — М. : Наука, 1983.

Светлов, В. А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия : учеб. пособие / В. А. Светлов. — М. : URSS, 2006.

Лолли, Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия <2002> : пер. с итал. / Г. Лолли ; под ред. Я. Д. Сергеева. — Н. Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012.

Körner, S. The Philosophy of Mathematics: An Introduction / S. Körner. — London : Hutchinson, 1960.

Black, M. The Nature of Mathematics: A Critical Survey / M. Black. — New York : The Humanities Press, 1950.

Beth, E. W. The Foundations of Mathematics: A Study in the Philosophy of Science / E. W. Beth. — New York : Harper & Row, Publishers, 1966.

Philosophy of Mathematics: Selected Readings / eds. P. Benacerraf and H. Putnam. — 2nd ed. — New York : Cambridge University Press, 1983.

New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology / ed. T. Tymoczko. — Boston: Birkhäuser, 1986.

Math Worlds: New Directions in the Social Studies and Philosophy of Mathematics / eds. S. Restivo, P. van Bendegem, R. Fischer. — New York : State University of New York Press, 1993.

18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics / ed. R. Hersh. — New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006.

Brown, J. R. Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures / J. R. Brown. — 2nd ed. — New York : Routledge, 2008.

The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / ed. S. Shapiro. — New York : Oxford University Press, 2005.

Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science) / ed. A. D. Irvine. — Amsterdam : North Holland (Elsevier), 2009.

Colyvan, M. An Introduction to the Philosophy of Mathematics / M. Colyvan. — Cambridge : Cambridge University Press, 2012.