О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах и о существовании функций с заданной по порядку сложностью

С. Б. ГАШКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 519.7+517.5

Ключевые слова: схемы из элементов, реализующих непрерывные функции; суперпозиции непрерывных функций нескольких переменных; сложность аппроксимации непрерывных функций; колмогоровская энтропия функциональных компактов; колмогоровские меры; классы Гельдера и Витушкина; k-е модули непрерывности; булевы функции; автоматы; схемы в автоматных базисах; детерминированные функции.

Аннотация

Исследуется вопрос о сложности приближенного вычисления функций из различных функциональных компактов схемами, состоящими из элементов, реализующих заданные непрерывные операции. Для многих компактов доказано, что почти все (в смысле некоторой колмогоровской меры) функции имеют асимптотически одинаковую сложность, равную сложности самой сложной функции компакта. При некоторых естественных ограничениях на функцию $L(\varepsilon)$ доказано существование в рассматриваемых компактах функций, сложность ε-приближения которых по порядку равна $L(\varepsilon)$.

Abstract

S. B. Gashkov, On the complexity of an approximative realization of functional compacts in some spaces and the existence of functions with given order conditions of their complexity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **2**(1996), 675–774.

The question of the complexity of an approximative computation of functions from various functional compacts by schemes, consisting of continuous functions realizing elements was investigated. It was proved that almost all functions from many compacts (respectively some Kolmogorov's measure) had asymptotically equal complexity, which was equal to the complexity of the most complicated functions from these compacts. It was proved that in considered compacts there exist the functions, which have ε-approximation complexity asymptotically equal to $L(\varepsilon)$, under some natural restrictions.

Фундаментальная и прикладная математика 1996, **2**, № 3, 675–774.
© 1996 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом "Открытые системы"*

§ 1 Введение

Статья является продолжением цикла работ [5–15, 17] и содержит, в частности, подробные доказательства части результатов [9] и [12] и обобщение одной теоремы из [15], представляющее из себя попытку построения некоторой классификации непрерывных функций по сложности их приближенного вычисления схемами и формулами в некоторых естественных непрерывных базисах. Подготовлена к печати она была в 1989 году, но по техническим причинам, не зависящим от автора, выходит только сейчас. Как и в [5–15, 17] *базисом* назовем произвольное множествоB непрерывных функций (операций) $w_k\colon \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$. Чаще всего будем использовать эквивалентные друг другу базисы $\{x+y, xy, -1/2\}$ и $\{x-y, xy, 1/2\}$, состоящие из двух двуместных операций и одной константы каждый. Следуя [29] и [28], положим $\rho_B = 1/(m-1)$ и $\tau_B = 1/\log m$, где $m = m_B$ — наибольшее число существенных переменных у функций из базиса B (логарифмы здесь и далее двоичные). У всех конкретных базисов, рассматриваемых далее, величины ρ_B и τ_B равны 1.

Схемой в базисе B назовем произвольную последовательность функций $f_1(X), \ldots, f_L(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, в которой первые n функций определяются равенствами $f_i(X) = x_i$, а каждая следующая функция $f_l(X)$ вычисляется через некоторые из предыдущих с помощью одной из базисных операций w_k, $k = k(l)$. Схему назовем *формулой*, если каждая функция $f_l(X)$, $l > n$, используется в ней для вычисления следующих за ней функций не более одного раза (другими словами, граф, которым обычно изображают схему, может иметь ветвления только во входах).

Сложностью схемы (или формулы) назовем число L, а *глубиной* — наибольшую длину подпоследовательности $f_{i_1}, \ldots, f_{i_D}$, в которой каждая функция f_{i_j}, $j < D$, используется в рассматриваемой схеме для вычисления функции $f_{i_{j+1}}$ (в графовых терминах глубина — это наибольшая длина ориентированной цепи в схеме). Говорим, что функция f *реализуется* схемой S, если f равна какой-то из функций f_i схемы S. *Сложностью* (*схемной реализации*) *функции* f назовем число $L_B(f)$, равное наименьшей из сложностей схем, реализующих f. Аналогично определяется $\widetilde{L}_B(f)$ — *сложность формульной реализации* и $D_B(f)$ — *глубина функции* f. Все введенные понятия переносятся и на вектор-функции (операторы).

Предыдущие определения происходят из теории сложности булевых функций [29]. Так же, как и там, легко проверяется, что

$$D_B(f) \leqslant L_B(f) \leqslant \widetilde{L}_B(f) \leqslant 2^{D_B(f)/\tau_B}. \tag{1}$$

В терминах сложности реализации полиномов схемами в базисе $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ можно сформулировать многие задачи алгебраической теории сложности [38–42, 44, 47], В параграфе 3 приведены доказательства асимптотически точных оценок сложности реализации некоторых классов полиномов схемами в базисе $\{x-y, xy, 1/2\}$, сформулированных в [12]. Эти оценки находят применение в следующих параграфах.

Для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in C(I^n)$, где I^n есть n-мерный параллелепипед,

$$I^n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

определим сложность ε-приближения функции f схемами в базисе B как $L_B(f, \varepsilon) = \min\{L_B(g)\colon \|f - g\| \leqslant \varepsilon\}$, где $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)|\colon x \in I^n\}$ и аналогичным образом определим $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon)$ и $D_B(f, \varepsilon)$. Если все функции

$$f \in \mathcal{K} \subset C(I^n)$$

с любой точностью вычисляются в базисе B, то положим

$$L_B(\mathcal{K}, \varepsilon) = \max\{L_B(f, \varepsilon)\colon\ f \in \mathcal{K}\}$$

и аналогичным образом определим $\widetilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon)$ и $D_B(f, \varepsilon)$. Обратные к введенным функциям величины можно считать разновидностью так называемых поперечников, интенсивно изучаемых в теории приближений [33]. С несколько другой точки зрения задача о сложности приближенного вычисления функций изучается в [34, 35].

По-видимому, рассматриваемая здесь постановка задачи впервые появилась в [46]. Там, в частности, исследовалась задача о сложности приближенного вычисления действительных чисел схемами в базисе $\{x \pm y, xy, x/y, 1\}$. Методом [46] можно доказать, что для любого конечного базиса B, любого конечномерного подпространства $V \subset C(I^n)$ и почти всех (в смысле меры Лебега) функций $f \in V$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_f$

$$L_B(f, \varepsilon) \geqslant \rho_B \frac{d \log 1/\varepsilon}{\log\log 1/\varepsilon} \left(1 + \frac{\log\log\log 1/\varepsilon - c_{B,n,d}}{\log\log 1/\varepsilon}\right),$$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \geqslant c_{B,n} d \log 1/\varepsilon, \quad D_B(f, \varepsilon) \geqslant \tau_B d \log 1/\varepsilon - c_{B,n,d},$$

где $d = \dim V$, а c — константы, зависимость которых от разных параметров отмечается в индексах. Обобщение этого утверждения на некоторые бесконечномерные подмножества $C(I^n)$ приводится в § 2.

Задача о сложности приближенного вычисления непрерывных функций была поставлена в начале шестидесятых годов А. Н. Колмогоровым [22]. Мера сложности, введенная Колмогоровым, сейчас называется битовой сложностью. Недавний результат о битовой сложности классов гладких функций см. в [43]. Колмогоровская постановка задачи отличается от рассматриваемой в [5–15, 17] и настоящей статье. Подробнее об этом см. [17], где собраны вместе и подробно доказаны оценки мер сложности

$$L_B(\mathcal{K}, \varepsilon),\ \widetilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon),\ D_B(\mathcal{K}, \varepsilon)$$

для естественных полиномиальных и кусочно-полиномиальных базисов и семейства классов функций конечной гладкости. Эти оценки даются в терминах ε-энтропии и опираются на результаты [4, 23]. Далее в параграфе 4 будут

получены асимптотически точные оценки величин $L_B(\mathcal{K},\varepsilon)$ и $D_B(\mathcal{K},\varepsilon)$ для некоторых естественных базисов и семейства классов аналитических функций, рассматриваемого в [22, 23] (отличие от колмогоровской постановки задачи сказывается, в частности, в том, что в ней для классов аналитических функций не удается получить точных по порядку оценок).

Вообще говоря, ниоткуда не следует существование в произвольном классе $\mathcal{K}$ функций f, сложность которых асимптотически равна сложности этого класса, то есть $L_B(f,\varepsilon) \simeq L_B(\mathcal{K},\varepsilon)$. Действительно, если вместо любого класса $\mathcal{K}$ рассмотреть класс $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap [B]$, где $[B]$ — множество всех функций, точно выразимых в базисе B, предполагая, что B — полный базис (то есть $\mathcal{K}'$ всюду плотно в $\mathcal{K}$), то его ε-энтропия не изменится, а для любой функции $f \in \mathcal{K}'$ $L_B(f,\varepsilon) = O_f(1)$ (здесь и далее используется символ «О большое», а индекс напоминает о его зависимости от указанной величины).

Вопрос о сложности индивидуальных функций был поставлен А. Н. Колмогоровым в том же докладе [22]. Посвященный ему результат [1] может быть доказан чисто теоретико-множественным образом, поэтому его можно перенести и в рассматриваемую здесь постановку задачи. Метод [1] применим к классам функций конечной гладкости и дает нижние оценки, а верхние получаются как следствие неравенства

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant L_B(\mathcal{K},\varepsilon).$$

В параграфе 6 этот результат получен другим методом, с помощью которого доказывается также существование функций с заданной по порядку сложностью приближенной схемной реализации; в этом методе наряду с нижними получаются и верхние оценки, применим он также и к классам аналитических функций.

Для других мер сложности, например, минимальной степени полинома, приближающего функцию с точностью ε, подобные вопросы давно рассматриваются в теории приближений (см. [3, 32]). Очевидно, что для базиса $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ справедливо равенство по порядку

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp E(f,\varepsilon) = \min\{n\colon\ E_n(f) \leqslant \varepsilon\},$$

где $E(f)$ — точность приближения функции $f \in C(I)$ алгебраическими полиномами степени n; в параграфе 3 будет доказано более общее утверждение. Поэтому соответствующие результаты из [3,32] справедливы и для меры сложности $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$, но с точностью лишь по порядку. Подобным же образом получить соответствующие результаты для меры сложности $L_B(f,\varepsilon)$ не удается; другим способом это будет сделано в параграфе 6.

В параграфе 5 доказано существование функций с заданной сложностью приближенной реализации формулами в базисе $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$, а также функций, у которых меры сложности $L_B(f,\varepsilon)$ и $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$, где $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ или $\{x-y, xy, 1/2\}$, имеют «лакуны». Там же указаны примеры функциональных компактов K, для которых можно получить оценки мер сложности $L_B(\mathcal{K},\varepsilon)$ неэнтропийного вида.

В параграфе 7 в качестве приложения результатов предыдущих параграфов доказано несколько утверждений о невозможности представления функций из некоторых классов суперпозициями функций меньшего числа переменных. В некотором смысле этот параграф «параллелен»Добавлению 1 к [23].

В последнем параграфе приведены конечно-автоматные аналоги некоторых результатов из этой работы и статьи [17].

§ 2 Континуальные аналоги эффекта Шеннона

В теории сложности булевых функций доказывается, что при $n \to \infty$ почти все функции n переменных имеют сложность, асимптотически равную сложности «самой сложной» функции (см. [26–29]). Это утверждение, по предложению доказавшего его О. Б. Лупанова, называется эффектом Шеннона. В этом параграфе для некоторых бесконечномерных компактов в $C(I^n)$ будут получены нижние оценки, обосновывающие вместе с верхними оценками параграфа 4 аналоги эффекта Шеннона.

Пусть система функций

$$\{\varphi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n\}$$

удовлетворяет условиям пункта 1 параграфа 7 [22], то есть существует такое число A, что для любой конечной линейной комбинации

$$\sum a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} \in C(I^n)$$

справедливо неравенство

$$\sup|a_{\mathbf{k}}| \leqslant \left\|\sum a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}\right\| \leqslant A\sum|a_{\mathbf{k}}|, \tag{2}$$

и пусть убывающая по каждой переменной функция

$$\mathcal{F}\colon [0,+\infty)^n \to \mathbb{R}_+$$

такова, что ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} \mathcal{F}(\mathbf{k})$$

сходится. Обозначим $\mathfrak{M}$ класс всех функций

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}},$$

коэффициенты которых удовлетворяют неравенствам $|a_{\mathbf{k}}| \leqslant \mathcal{F}(\mathbf{k})$. Положим

$$G(\varepsilon) = \log\Bigg(\prod_{\mathbf{k},\mathcal{F}(\mathbf{k})>\varepsilon} \mathcal{F}(\mathbf{k})/\varepsilon\Bigg).$$

Теорема 1 [9]. *Можно построить такую колмогоровскую меру на $\mathfrak{M}$, что для любого конечного базиса B для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$ и любого положительного $\varepsilon < \varepsilon(f)$ справедливы следующие оценки*

(i) $L_B(f,\varepsilon) \geqslant \rho_B \dfrac{G(\varepsilon)}{\log G(\varepsilon)} \left(1 + \dfrac{\log\log G(\varepsilon) - c_{B,n}}{\log G(\varepsilon)}\right)$;

(ii) $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \geqslant c_{B,n} G(\varepsilon)$;

(iii) $D_B(f,\varepsilon) \geqslant \tau_B \log G(\varepsilon) - c_{B,n}$.

□ Отождествим естественным образом $\mathfrak{M}$ со счетномерным параллелепипедом

$$\mathfrak{J} = \prod_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} J_{\mathbf{k}} \subset \mathbb{R}^n, \text{ где } J_{\mathbf{k}} = [-\mathcal{F}(\mathbf{k}), \mathcal{F}(\mathbf{k})] \subset \mathbb{R}$$

(здесь и далее знак □ означает начало и конец доказательства). Определим на каждом отрезке $J_{\mathbf{k}}$ равномерно распределенную вероятностную меру $\omega_{\mathbf{k}}$. По теореме Колмогорова на $\mathfrak{J}$ существует такая счетноаддитивная вероятностная мера ω, что для любого конечного множества $M \subset \mathbb{N}^n$ и любого цилиндра

$$\mathfrak{C} = \prod_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} C_{\mathbf{k}},$$

где множество $C_{\mathbf{k}}$ $\omega_{\mathbf{k}}$-измеримо, если $\mathbf{k} \in M$, или равно $J_{\mathbf{k}}$, если $\mathbf{k} \notin M$, справедливо равенство $\omega\mathfrak{C} = \prod\limits_{\mathbf{k}\in M} \omega_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}$.

Выберем число $\lambda(l)$ так, чтобы

$$2^{G(\lambda(l))} = l^2 N(l), \text{ где } N(l) = (c_B(l+n))^{1+l/\rho_B},$$

и определим множество M_l как

$$\bigcup_{i=1}^{N_l} \mathcal{O}_{\lambda(l)}(f_i),$$

где $\{f_1, \ldots, f_{N_l}\}$ — множество всех таких $f_i \in C(I^n)$, что $L_B(f_i) \leqslant l$, а

$$\mathcal{O}_\lambda(f) = \{g\colon\ g \in \mathfrak{M} \ \&\ \|g - f\| \leqslant \lambda\}.$$

Из (2) следует включение

$$\mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_{\lambda(l)}(f_i) \subset \prod_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} [a_{\mathbf{k}} - \lambda(l), a_{\mathbf{k}} + \lambda(l)] \cap \mathfrak{M},$$

а значит, и неравенство

$$\omega^*(\mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_{\lambda(l)}(f_i)) \leqslant \prod_{\mathbf{k},\mathcal{F}(\mathbf{k})\geqslant\lambda(l)} (\lambda(l)/\mathcal{F}(\mathbf{k})) = 2^{-G(\lambda(l))},$$

где ω^* — внешняя мера. Используя субаддитивность меры ω^* и оценку О. Б. Лупанова

$$N_l \leqslant N(l) \quad \text{(см. [29])},$$

получаем тогда, что

$$\omega^*(M_l \cap \mathfrak{M}) \leqslant \sum_{i=1}^{N_l} \omega^*(\mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_{\lambda(l)}(f_i)) \leqslant N_l 2^{-G(\lambda(l))} \leqslant N(l) 2^{-G(\lambda(l))} = l^{-2},$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_l \omega^*(M_l \cap \mathfrak{M}).$$

Поэтому согласно лемме Бореля – Кантелли множество

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\,(M_l \cap \mathfrak{M})$$

имеет меру нуль. Следовательно, для почти всех $f \in \mathfrak{M}$ найдется такое $l(f)$, что

$$f \notin \bigcup_{l \geqslant l(f)} M_l. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon(f)$ таково, что $L_B(f, \varepsilon(f)) \geqslant l(f)$, и $\varepsilon < \varepsilon(f)$. Так как для некоторой функции $g \in C(I^n)$, такой, что

$$L_B(g) = L_B(f, \varepsilon),$$

справедливо неравенство $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$, то

$$f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g),$$

поэтому при $\varepsilon \leqslant \lambda(L_B(f, \varepsilon(f)))$

$$f \in M_{L_B(f,\varepsilon(f))} \subset \bigcup_{l \geqslant l(f)} M_l.$$

Противоречие с (3) показывает, что

$$\varepsilon > \lambda(L_B(f, \varepsilon(f))),$$

следовательно, при $L = L_B(f, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$L^2 N(L) = 2^{G(\lambda(L))} \geqslant 2^{G(\varepsilon)},$$

значит,

$$(3 + L/\rho_B)(c_B + \log(L + n)) > G(\varepsilon),$$

откуда и следует неравенство (i).

Неравенство (ii) доказывается аналогично, только вместо оценки числа схем данной сложности используется оценка О. Б. Лупанова [26]

$$N_l \leqslant (c_B n)^l$$

для числа различных формул в базисе B сложности не выше l.

Неравенство (iii) следует из (ii) и (1). В доказательстве использовалась лишь левая часть неравенства (2), что дает возможность применять теорему в параграфе 4 во всех случаях. □

Базис назовем *почти конечным*, если он состоит из конечного числа функций и произвольного множества действительных констант. Для таких базисов теорема 1, вообще говоря, неверна, но при некоторых ограничениях и здесь можно получить нетривиальные нижние оценки. Базис назовем *полиномиальным* (*рациональным*), если он состоит из алгебраических полиномиальных (рациональных) функций, и *жегалкинским*, если в его функции все переменные входят только в первой степени (примером такого базиса служит $\{x \pm y, xy, x/y\} \cup \mathbb{R}\}$).

Теорема 2.

(i) *Если B — полиномиальный базис, то для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$ (в смысле теоремы 1) и любого $\varepsilon < \varepsilon(f)$ справедливы неравенства*

$$L_B(f,\varepsilon) \geqslant \min\left(\frac{c_B}{n}\sqrt{G(2\varepsilon)}, \frac{G(2\varepsilon)}{2\log 1/\varepsilon}\right),$$

$$D_B(f,\varepsilon) \geqslant \tau_B \log G(2\varepsilon) - c_B \log\log \max(G(2\varepsilon), 1/\varepsilon).$$

(ii) *Если B — полиномиальный жегалкинский базис, то к оценкам пункта* (i) *добавляется асимптотическое неравенство*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \gtrsim \frac{(1+\rho_B)G(2\varepsilon)}{(n+1)\log\max(G(2\varepsilon), 1/\varepsilon)}.$$

(iii) *Если все функции из $\mathfrak{M}$ удовлетворяют одному и тому же условию Гельдера с показателем r по всем переменным и B — рациональный базис, то при любом $\varepsilon < \varepsilon(f,B)$ неравенства п.* (i) *заменяются на неравенства*

$$L_B(f,\varepsilon) \geqslant \min\left(c_B\sqrt{G(5\varepsilon+2\varepsilon^2)}, \frac{c_r G(5\varepsilon+2\varepsilon^2)}{n\log 1/\varepsilon}\right),$$

$$D_B(f,\varepsilon) \geqslant \tau_B \log G(5\varepsilon+2\varepsilon^2) - c_{B,n,r}\log\log\max(G(5\varepsilon+2\varepsilon^2), 1/\varepsilon).$$

(iv) *Если в условиях п.* (iii) *предположить, что B — рациональный жегалкинский базис, то к неравенствам п.* (iii) *добавляется неравенство*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \geqslant \frac{c_r(1+\rho_B)G(5\varepsilon+2\varepsilon^2)}{n\log 1/\varepsilon}.$$

□ Теорема является комбинацией предыдущей теоремы и теоремы 3 [17] и доказывается подобно этим теоремам. □

Аналогичная комбинация теоремы 1 и теоремы 2 [17] является следствием теоремы 1 и следующего утверждения.

Теорема 3.

(i) *Пусть B — произвольный почти конечный базис, все функции которого удовлетворяют по всем переменным одному и тому же условию Липшица и все константы которого принадлежат некоторому отрезку (такие базисы называем далее липшицевыми) и B — конечный базис, получающийся удалением из B всех констант и добавлением операций $x-y, xy$ и константы $1/2$. Тогда для любой функции f, такой, что при $\varepsilon \to 0$*

$$L_{B_0}(f,\varepsilon)\Big/\log\frac{1}{\varepsilon} \to \infty,$$

справедливы неравенства

$$L_B(f,\varepsilon) \geqslant$$
$$\geqslant c_B \min\left(\sqrt{L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)\log L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}, \frac{L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)\log L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}{\log 1/\varepsilon}\right),$$
$$D_B(f,\varepsilon) \geqslant \tau_B \log L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2) - c_B \log\max\left(1, \frac{\log 1/\varepsilon}{\log L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}\right).$$

(ii) *Если в дополнение к условиям пункта* (i) *все функции базиса B удовлетворяют условию Липшица $|f(x)-f(y)| \leqslant \max_i |x_i - y_i|$, то первое неравенство пункта* (i) *можно усилить до следующего неравенства по порядку*

$$L_B(f,\varepsilon) \gg \frac{L_{B_0}(f,2\varepsilon)\log\min(L_{B_0}(f,2\varepsilon), 1/\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

(iii) *Если в дополнение к условиям пункта* (i) *все функции базиса B удовлетворяют по каждой переменной условию Липшица с множителем 1, то к неравенствам пункта* (i) *можно добавить неравенство*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \gg \frac{\widetilde{L}_B(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}{\log\max(\widetilde{L}_B(f,\varepsilon+\varepsilon^2), 1/\varepsilon)}.$$

(iv) *Если базис является объединением липшицева и жегалкинского базисов, то справедливо неравенство*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \geqslant c_B \min\left(\sqrt{\widetilde{L}_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}, \frac{\widetilde{L}_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)}{\log 1/\varepsilon}\right).$$

□ Пусть S — схема в базисе B, реализующая функцию f с точностью ε и такая, что $L_B(S) = L_B(f,\varepsilon)$. Заменим все константы в S на рациональные дроби со знаменателем 2^m, где $m =]\log 1/\delta[$, приближающие их с точностью δ, которую выберем позднее. Из леммы 27 [17] следует, что функция g, реализуемая новой схемой, удовлетворяет неравенству

$$\|g - f\| \leqslant \varepsilon + c_B^{D_B(S)}\delta.$$

Положим

$$\delta = \varepsilon^2 c_B^{-D_B(S)},$$

тогда

$$L_{B_0}(f, \varepsilon + \varepsilon^2) \leqslant L_{B_0}(g).$$

Реализуя константу 2^{-m} в базисе $\{xy, -1/2\}$ со сложностью $O(\log m)$ и замечая, что число k всех констант в схеме не превосходит $L_B(f,\varepsilon)$, с помощью леммы 1 [15] и результата [45], получаем, что все эти константы можно реализовать в базисе $\{xy, x-y, 1/2\}$ со сложностью

$$O\left(m + k + \frac{mk}{\log mk}\right).$$

Построенная схема в базисе B_0 реализует функцию f с точностью $\varepsilon + \varepsilon^2$, поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} L_{B_0}(f, \varepsilon + \varepsilon^2) &\leqslant L_B(f,\varepsilon) + O\left(m + k + \frac{mk}{\log mk}\right) < \\ &< L_B(f,\varepsilon) + D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon + \frac{L_B(f,\varepsilon)(D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon)}{\log(L_B(f,\varepsilon)(D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon))} \end{aligned} \tag{4}$$

По условию

$$L_{B_0}(f,\varepsilon) \Big/ \log \frac{1}{\varepsilon} \to \infty,$$

откуда с помощью (4) и (1) получаем, что

$$\frac{L_B(f,\varepsilon)}{\log(D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon)} \to \infty.$$

Так как при условии $\log y \leqslant O(x)$, $\log x \leqslant O(y)$ справедливо неравенство

$$x + y + \frac{xy}{\log xy} = O\left(\frac{xy}{\log xy}\right),$$

то из (1), (4) следует, что

$$L_{B_0}(f, \varepsilon + \varepsilon^2) = O\left(\frac{L_B(f,\varepsilon)(D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon)}{\log(L_B(f,\varepsilon)(D_B(f,\varepsilon) + \log 1/\varepsilon))}\right),$$

откуда

$$L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)\log L_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)\leqslant O\big(L_B(f,\varepsilon)(D_B(f,\varepsilon)+\log 1/\varepsilon)\big). \qquad (5)$$

Из (5) и (1) вытекают оценки пункта (i).

Пункт (ii) доказывается аналогично, только вместо леммы 27 используется лемма 29 [17], в соответствии с ней выбирается $\delta=\varepsilon$ и получается неравенство

$$L_{B_0}(f,2\varepsilon)\ll L_B(f,\varepsilon)+\log 1/\varepsilon+\frac{L_B(f,\varepsilon)\log 1/\varepsilon}{\log(L_B(f,\varepsilon)\log 1/\varepsilon)},$$

из которого и следует оценка пункта (ii).

Пункт (iii) также доказывается аналогично, только вместо леммы 29 используется лемма 31 [17], в соответствии с ней выбирается $\delta=\varepsilon^2\Big/\widetilde{L}_B(\Phi)$, и все константы, входящие в формулу Φ, реализуются с точностью δ формулами в базисе $\{xy, x-y, 1/2\}$ со сложностью $O(\log 1/\delta)$ каждая. Получаем тогда равенство

$$\widetilde{L}_{B_0}(f,\varepsilon+\varepsilon^2)=O\left(\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)\log 1/\delta\right),$$

из которого и следует оценка пункта (iii).

Для доказательства пункта (iv) используем лемму 33 [17], выбираем

$$\delta=\varepsilon^2 c_B^{-\widetilde{L}_B(\Phi)},$$

а далее рассуждаем аналогично доказательству п. (iii). □

§ 3 О сложности вычисления некоторых классов многочленов нескольких переменных

В этом параграфе будут, в частности, доказаны утверждения [12]. Произвольный полином $f(X)\in\mathbb{R}[X]$, $X=(x_1,\ldots,x_n)$ записываем в виде $\sum\limits_{\alpha\in M_f}a_\alpha X^\alpha$, где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, $X^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $M_f\subset\mathbb{N}^n$. Множество всех полиномов $f(X)\in\mathbb{R}[X]$, таких, что $M_f=M$, обозначим $\mathcal{P}(M)$; его подмножество, состоящее из всех полиномов с коэффициентами $0,\ldots,k-1$, обозначим $\mathcal{P}_k(M)$. Множество $M\subset\mathbb{N}^n$ назовем *правильным*, если вместе с каждым вектором оно содержит и все меньшие его вектора (по определению $\alpha\leqslant\beta$, если при всех i $\alpha_i\leqslant\beta_i$). Множество, полученное из правильного параллельным переносом, назовем *T-правильным*. Множество

$$\{\gamma\in\mathbb{N}^n\colon\ \alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta\}$$

назовем *n-мерным интервалом*, а числа $\beta_i-\alpha_i+1$ — его *линейными размерами*. Интервал, все размеры которого, кроме, быть может, одного, равны единице, назовем *шпалой*. *Длиной* шпалы назовем наибольший ее размер. Мощность множества M обозначим $|M|$.

Теорема 4 [11]. *Пусть базис $B=\{xy, x-y, 1/2\}$, M — правильное множество, $\log_k|M|\to\infty$. Тогда справедливы неравенства*

(i) $$\max_{f\in\mathcal{P}_k(M)} L_B(f)=L_B(\mathcal{P}_k(M))\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|M|}{\log_k|M|}\left(1+\frac{4\log_k\log_k|M|+O(n+\log k)}{\log|M|}\right)+O\left(|M|^{1-\frac{1}{n}}n\log|M|\right)+2^n.$$

(ii) $$L_B(\mathcal{P}_k(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_k|M|}\left(1+\frac{3\log_k\log_k|M|+O(1)}{\log_k|M|}\right)+$$
$$+O(|M\cap\mathbb{N}^{n-1}\times\{0\}|).$$

(iii) *Если M — правильный n-мерный интервал, то*

$$L_B(\mathcal{P}_k(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_k|M|}\left(1+\frac{5\log_k\log_k|M|+O(1)}{\log_k|M|}\right).$$

(iv) *Пусть $\mathcal{F}\colon\mathbb{N}^n\to\mathbb{R}$ — функция, убывающая по каждой переменной, $f(X)=\sum\limits_{\alpha\in M}a_\alpha\varphi_\alpha(X)$ — обобщенный полином, где $M\subset\mathbb{N}^n$, $\varphi_\alpha\in C(I^n)$, $a_\alpha\in\mathbb{R}$, $|a_\alpha|\leqslant\mathcal{F}(\alpha)$, $\alpha\in M$, $G(\varepsilon)$ — функция, равная $\log_2\left(\prod\limits_{\alpha\in M}|\mathcal{F}(\alpha)|/\varepsilon\right)$, C — число, равное $\sum\limits_{\alpha\in M}\mathcal{F}(\alpha)$, K — число, равное $\sum\limits_{\alpha\in M}\|\varphi_\alpha\|$. Тогда*

$$L_B(f,\varepsilon)\leqslant\frac{G(\varepsilon/2K)}{\log_2G(\varepsilon/2K)}\left(1+\frac{3\log_2\log_2G(\varepsilon/2K)+O(1)}{\log_2G(\varepsilon/2K)}\right)+$$
$$+O(|M|+\log\log1/\varepsilon)+L_B(\{\varphi_\alpha\colon\ \alpha\in M\},\varepsilon/2C).$$

□ Для доказательства понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Правильное множество $M\subset\mathbb{N}^n$ можно покрыть не более чем $n\cdot|M|^{(n-1)/n}$ непересекающимися шпалами.*

□ Индукция по n. База ($n=1$) очевидна. Шаг индукции. Разрежем M на слои: $M=\bigcup_{i=1}^p M_i$, где $M_i=N_i\times\{i\}$, $N_i\subset\mathbb{N}^{n-1}$, $N_0\supseteq N_1\supseteq\ldots$, N_i — правильные множества. Выберем индекс j так, чтобы

$$|N_j|<|M|^{(n-1)/n},\quad |N_{j-1}|\geqslant|M|^{(n-1)/n}.$$

Возможно, что $j = 0$, то есть при всех j справедливо неравенство

$$|N_j| < |M|^{(n-1)/n},$$

или $j = p + 1$, то есть при всех j

$$|N_j| \geqslant |M|^{(n-1)/n}.$$

Покроем каждое N_i при $i < j$ шпалами согласно предположению индукции, а при $i \geqslant j$ — шпалами, параллельными оси Ox_n. Общее число шпал в этом покрытии не превосходит

$$|N_j| + \sum_{i=0}^{j-1} (n-1)|M_i|^{(n-2)/(n-1)}.$$

Оценивая $|N_j|$ сверху как $|M|^{(n-1)/n}$, а сумму — с помощью неравенства Йенсена для степенной функции, получаем для мощности покрытия оценку

$$|M|^{(n-1)/n} + (n-1)j^{\frac{1}{n-1}}|M_{j-1}|^{(n-2)/(n-1)}.$$

Так как

$$j|M|^{(n-1)/n} \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} |M_i| \leqslant |M|,$$

то $j \leqslant |M|^{1/n}$, и получаем оценку

$$|M|^{(n-1)/n} + (n-1)|M|^{\frac{1}{n(n-1)}}|M|^{(n-2)/(n-1)} = n|M|^{(n-1)/n}. \ \square$$

Лемма 2. *Правильное множество $M \subset \mathbb{N}^n$ можно покрыть не более чем*

$$\frac{|M|}{m} + n|M|^{(n-1)/n}$$

непересекающимися шпалами длины, не большей m.

$\square$ С помощью леммы 1 покроем M не более чем $n|M|^{(n-1)/n}$ шпалами. Каждую из них разрежем на шпалы длины m и, может быть, одну шпалу меньшей длины. Число коротких шпал не больше $n|M|^{(n-1)/n}$, а длинных — не больше $|M|/m$. $\square$

Докажем п. (i) теоремы. Разрежем M с помощью леммы 2 на шпалы длины не более s^3, где

$$s = [\log_k |M| - 4 \log_k \log_k |M|].$$

Их количество p не превосходит

$$s^{-3}|M| + n|M|^{(n-1)/n}.$$

Каждую из этих p шпал разрежем на шпалы длины не более s так, чтобы их количество q не превзошло

$$s^{-1}|M| + n|M|^{(n-1)/n}.$$

В соответствии со сделанными разрезами представим полином $f(X)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{p} f_i = \sum_{i=1}^{p} X^{\alpha_i} \sum_{j=0}^{s^2-1} f_{ij} x_{t_i}^{js}, \quad \text{где } X = (x_1, \ldots, x_n),\ \alpha_i \in M,\ f_{ij} = \sum_{l=0}^{s-1} b_l x_{t_i}^{l}.$$

С помощью sn умножений вычисляем все мономы

$$x_t^l, \quad 1 \leqslant t \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant s,$$

а с помощью дополнительных $s^2 n$ умножений вычисляем все мономы

$$x_t^{js}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s^2,\ 1 \leqslant t \leqslant n.$$

Теперь для вычисления всех полиномов вида

$$\sum_{l=0}^{s-1} b_l x_t^l, \quad 1 \leqslant t \leqslant n,$$

достаточно $O(k^s n)$ элементов, а для вычисления всех полиномов вида

$$x_t^{js} \sum_{l=0}^{s-1} b_l x_t^l, \quad 1 \leqslant t \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant s^2 - 1,$$

нужно еще $k^s s^2 n$ элементов. Используя задачу 27 из п. 4.6.3 [21], замечаем, что для вычисления всех мономов

$$X^{\alpha_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

достаточно

$$2p \log_2 |M| + 2^n$$

элементов. Теперь для вычисления f нужно еще $O(p) + q$ элементов. В итоге получаем оценку

$$L_B(f) \leqslant q + O(p) + 2p \log_2 |M| + 2^n + k^s s^2 n + sn + s^2 n \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|M|}{\log_2 |M|} \left(1 + \frac{4 \log_k \log_k |M| + 3n + O(\log k)}{\log_k |M|}\right) + 5n|M|^{1-\frac{1}{n}} \log |M| + 2^n.$$

Пункт (i) доказан.

Докажем пункт (ii). Воспользуемся представлением

$$f = \sum_{\beta \in M_0} X^\beta \sum_i x_n^{s^2 i} \sum_j x_n^{js} f_{\beta,i,j}, \quad \text{где } M_0 = M \cap \mathbb{N}^{n-1} \times \{0\}, \\ s = [\log_k |M| - 3 \log_k \log_k |M|]. \tag{6}$$

Вычислим все мономы

$$x_n, x_n^2, \ldots, x_n^s, x_n^{2s}, \ldots, x_n^{s^2}, x_n^{2s^2}, \ldots, x_n^{js^2}, \ldots$$

с помощью не более чем

$$O(s) + s^{-2}|M|$$

умножений, а потом — все мономы

$$X^\beta, \quad \beta \in M_0,$$

с помощью $|M_0|$ умножений. С помощью $O(k^s)$ сложений вычислим все полиномы вида

$$\sum_{l=0}^{s-1} b_l x_n^l, \quad b_l \in \{0, 1, \ldots, k\},$$

а потом с помощью $k^s s$ умножений — все полиномы вида

$$x_n^{js} \sum_{l=0}^{s-1} b_l x_n^l, \quad b_l \in \{0, 1, \ldots, k\}, \ 0 \leqslant j < s.$$

Обозначим $m_{\beta,i}$ число мономов вида

$$a X^\beta x_n^{l+is^2}, \quad 0 \leqslant l < s^2,$$

в полиноме f. Тогда

$$\sum_{\beta,i} m_{\beta,i} = |M|.$$

Заметим, что сумму n слагаемых можно вычислить с помощью $n+2$ операций вычитания. Поэтому каждый полином

$$\sum_j x_n^{js} f_{\beta,i,j}$$

вычисляется со сложностью не более

$$]m_{\beta,i}/s[+2,$$

а система из всех таких полиномов — со сложностью не более

$$|M|/s + 2|M|/s^2 + 3|M_0|.$$

Для вычисления всех полиномов

$$\sum_i x_n^{s^2 i} \sum_j x_n^{js} f_{\beta,i,j}$$

нужно еще

$$2|M|/s^2 + 2|M_0|$$

операций, а для вычисления f — согласно представлению (6) еще $2|M_0|+2$ операций. В итоге получаем оценку

$$L_B(f) \leqslant |M|/s + 5|M|/s^2 + 8|M_0| + k^s s + O(k^s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|M|}{\log_k |M|}\left(1 + \frac{3\log_k \log_k |M| + O(1)}{\log_k |M|}\right) + 8|M_0|.$$

Пункт (ii) доказан.

Докажем пункт (iii). Обозначим размеры интервала M через $d_1, \ldots, d_n$. Если для некоторого i

$$d_i > \log_k^2 |M|,$$

то из пункта (ii) следует более сильное неравенство, чем в п. (ii). Поэтому далее предполагаем, что при всех i

$$d_i \leqslant \log_k^2 |M|.$$

Выберем индекс l так, чтобы

$$\log_k^2 |M| < \prod_{j=l+1}^{n} d_j \leqslant \log_k^4 |M|, \tag{7}$$

и воспользуемся представлением

$$f = \sum_\alpha X^\alpha \sum_i f_{\alpha,i}, \quad \text{где } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0, \ldots, 0) \in M, \tag{8}$$

и число мономов в каждом полиноме $f_{\alpha,i}$ не превосходит

$$s = [\log_k |M| - 5\log_k \log_k |M|],$$

а значения индекса i не превосходят величины

$$\left]\frac{1}{s}\prod_{j=l+1}^{n} d_j\right[.$$

Вычислим все мономы вида

$$X^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0, \ldots, 0) \in M,$$

и

$$X^\beta, \quad \beta = (0, \dots, 0, \beta_{l+1}, \dots, \beta_n) \in M$$

с помощью

$$\prod_{j=1}^{l} d_j + \prod_{j=l+1}^{n} d_j$$

умножений. Так как среди полиномов $f_{\alpha,i}$ не более

$$k^s \Big] s^{-1} \prod_{j=l+1}^{n} d_j \Big[$$

различных, то для их вычисления требуется

$$O\Big(k^s s^{-1} \prod_{j=l+1}^{n} d_j\Big)$$

сложений. Для вычисления f согласно представлению (7) нужно еще

$$|M|/s + O\Big(\prod_{j=1}^{l} d_j\Big)$$

операций. В итоге, учитывая (8), получаем оценку

$$L_B(f) \leqslant |M|/s + O\Big(\prod_{j=1}^{l} d_j + k^s s^{-1} \prod_{j=l+1}^{n} d_j\Big) \leqslant |M|/s + O(\log_k^{-2} |M|)|M| \leqslant \\ \leqslant \frac{|M|}{\log_k |M|} \left(1 + \frac{5 \log_k \log_k |M| + O(1)}{\log_k |M|}\right).$$

Осталось доказать пункт (iv). Выберем функции $\psi_\alpha(X)$ так, чтобы

$$\begin{gathered} L_B(\{\psi_\alpha(X)\colon\ \alpha \in M\}) = L_B(\{\varphi_\alpha(X)\colon\ \alpha \in M\}, \varepsilon/2C), \\ \|\varphi_\alpha - \psi_\alpha\| \leqslant \varepsilon/2C, \end{gathered} \tag{9}$$

число $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$2^{-n} \leqslant \varepsilon/2K < 2^{-n+1},$$

и числа $b_\alpha \in \mathbb{Z}$ так, чтобы

$$|2^{-n} b_\alpha - a_\alpha| \leqslant 2^{-n}, \quad |b_\alpha| \leqslant 2^n |a_\alpha| \leqslant 2KF(\alpha)/\varepsilon.$$

Тогда

$$\|f - 2^{-n} \sum_{\alpha \in M} b_\alpha \psi_\alpha\| \leqslant \varepsilon,$$

следовательно,

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant L_B\left(2^{-n}\sum_{\alpha\in M} b_\alpha\psi_\alpha\right) \leqslant O(\log n) + L_B\left(\sum_{\alpha\in M} b_\alpha\psi_\alpha\right) \leqslant \\ \leqslant O(\log n + |M|) + L_B(\{\psi_\alpha(X)\colon\ \alpha\in M\}) + L_B(\{b_\alpha\colon\ \alpha\in M\}). \tag{10}$$

Запишем числа b_α в двоичной системе и рассмотрим полином

$$P(x,y) = \sum_{\alpha\in M} x^\alpha \sum_{i=0}^{n_\alpha} b_{\alpha,i}y^i,$$

где $b_{\alpha,i}$ — соответствующие цифры, а

$$n_\alpha \leqslant \log(2KF(\alpha)/\varepsilon)$$

при всех $\alpha\in M$.

Так как

$$\sum_{\alpha\in M}(n_\alpha+1) \leqslant G(\varepsilon/2K) + |M|,$$

то, применяя пункт (ii), получаем оценку

$$L_B(P(x,y)) \leqslant O(|M|) + L_B\left(\left\{\sum_{i=0}^{n_\alpha} b_{\alpha,i}y^i\right\}\right) \leqslant \\ \leqslant O(|M|) + \frac{G(\varepsilon/2K)}{\log_2 G(\varepsilon/2K)}\left(1 + \frac{3\log_2\log_2 G(\varepsilon/2K) + O(1)}{\log_2 G(\varepsilon/2K)}\right). \tag{11}$$

Коэффициенты полинома $P(x,2)$ равны b_α, поэтому из (9)–(11) следует неравенство пункта (iv). □

Замечания. Теорема 4 (i)–(iii) справедлива и для полиномов над конечным полем и соответствующего базиса $\{1, xy, x+y\}$. Она является обобщением некоторых результатов [46], а ее доказательство основано на конструкциях, параллельных конструкциям О. Б. Лупанова [29]; из нее получается как следствие частный случай теоремы о сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов [29]. Мощностным методом [29] получается нижняя оценка

$$L_B(\mathcal{P}_k(M)) \gtrsim \frac{|M|}{\log_k|M|}.$$

Поэтому оценка пункта (i) при фиксированных n и k и $|M|\to\infty$ является асимптотически точной. При некоторых ограничениях на $|M_0|$ оценка пункта (ii) дает лучший остаточный член. Пункт (iii) интересен тем, что дает асимптотику без каких-либо ограничений на n и k (кроме естественного условия $\log_k|M|\to\infty$). Однако какое-то ограничение на форму множества M в нем необходимо, ибо

$$L_B(x_1+\cdots x_n) = n + O(1),$$

а $|M|/\log|M|$ в этом случае есть $o(n)$.

Теорема 4 (i)–(iii) справедлива также и для монотонного базиса $\{1,xy,x+y\}$. Ограничения на геометрию множества M в этом случае необходимы, так как без них, согласно [10], теорема, вообще говоря, не верна. В случае, если $\log_k|M|$ ограничен, оценки теоремы 4 теряют точность. Однако для правильного интервала M при $k\to\infty$ с помощью теоремы 4 (iii) и мощностного метода [29] можно получить асимптотику

$$L_B(\mathcal{P}_k(M))\simeq\frac{|M|}{\log_k(|M|\log_k)}.$$

Теорема 5. *Пусть $M\subset\mathbb{N}^n$ — правильное множество.*
(i) *Для $B=\{1,xy,x+y\}$ справедливо неравенство*

$$D_B(\mathcal{P}_k(M))\leqslant\log_2(|M|\log_2 k)+O\sqrt{\log_2(n+1)\log_2(|M|\log_2 k)},$$

а для $B=\{xy,x+y\}\cup\mathbb{R}$ — неравенство

$$D_B(\mathcal{P}(M))\leqslant\log_2|M|+O\sqrt{1+\log_2 n\log_2|M|}.$$

(ii) *Для $B=\{1,xy,x+y\}$ справедливо неравенство*

$$\widetilde{L}(\mathcal{P}_k(M))\leqslant 3]\log_2 k[|M|-2,$$

а для $B=\{xy,x+y\}\cup\mathbb{R}$ — неравенство

$$\widetilde{L}(\mathcal{P}(M))\leqslant 3|M|-2.$$

(iii) *Если M — правильный интервал и $B=\{1,xy,x+y\}$, то при $n\to\infty$*

$$\widetilde{L}_B(\mathcal{P}_k(M))\simeq\frac{|M|}{\log_k n},$$

а при $\log_2 k+d_1+\cdots+d_n=2$

$$D_B(\mathcal{P}_k(M))=\log_2|M|-\log_2\log_k n+O(1).$$

□ Для доказательства пункта (i) нужны две леммы.

Лемма 3. *Правильное множество $M\subset\mathbb{N}^n$ при любом $m\leqslant|M|$ можно разбить не более чем на $(n+1)|M|/m$ T-правильных множеств мощности не более m каждое.*

□ Индукция по n. База ($n=1$) очевидна. Шаг индукции. Разрежем M на слои так же, как и в доказательстве леммы 1, и выберем j так, чтобы

$$|M_j|\geqslant m\quad\text{и}\quad|M_{j+1}|<m$$

(случаи, когда $|M_0| < m$ или при любом j $|M_j| \geqslant m$ рассматриваются аналогично). По предположению индукции множества M_i при $i \leqslant j$ можно разрезать не более чем на

$$\sum_{i=0}^{j} n|M_i|/m$$

T-правильных множеств. Определим числовую последовательность k_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, так, чтобы $k_1 = j$ и при любом $s < r$

$$\sum_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} |M_i| \leqslant m/2 < \sum_{i=k_s+1}^{k_{s+1}} |M_i|$$

(возможно, что при всех k

$$\sum_{i=j+1}^{k} |M_i| \leqslant m/2,$$

тогда $r = 1$).

Так как при $i < r$

$$m/2 < \sum_{i=k_s+1}^{k_{s+1}} |M_i| \leqslant 2 \sum_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} |M_i| \leqslant m$$

и множества

$$\bigcup_{i=k_s+1}^{k_{s+1}} M_i$$

T-правильные, то множество

$$\bigcup_{i>j} M_i$$

можно разбить на r штук T-правильных множеств. В итоге множество M разбито не более чем на

$$\sum_{i=0}^{j} n|M_i|/m + r \leqslant \sum_{i=0}^{j} n|M_i|/m + \frac{2}{m}\sum_{i>j}|M_i| + 1 \leqslant \frac{n+1}{m}|M|$$

T-правильных частей мощности не более m каждая. □

Лемма 4. *Пусть полином $f(X) \in \mathcal{P}(M)$, $M \subset \mathbb{N}^n$ — правильное множество, базис $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ и*

$$\log_2 |M| \leqslant (1+]\log_2(n+1)[)C_v^2.$$

Тогда

$$D_B(f) \leqslant (1+]\log_2(n+1)[)C_{v+1}^2.$$

Если коэффициенты $f(X)$ равны 0 и 1, то это верно и для $B = \{xy, x+y, 1\}$.

□ Индукция по v. База ($v = 1$) очевидна. Шаг индукции. С помощью леммы 3 разобьем M на

$$s \leqslant (n+1)2^{q(v-1)}$$

Т-правильных частей мощности не более

$$2^{qC_{v-1}^2}$$

каждая, где

$$q = 1 +]\log_2(n+1)[,$$

и соответственно этому разбиению представим $f(X)$ в виде

$$f = \sum_{i=1}^{s} f_i X^{\alpha_i}, \tag{12}$$

где

$$\alpha_i \in M, \quad f_i = \sum_{\beta \in K_i} a_\beta X^\beta, \quad |K_i| \leqslant 2^{qC_{v-1}^2},$$

K_i — правильное множество, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Из предположения индукции следует, что

$$\max_i D_B(f_i) \leqslant qC_v^2, \tag{13}$$

а из (12)–(13) — нужная оценка

$$D_B(f) \leqslant]\log_2 s[+ 1 + \max_i\{D_B(f_i), D_B(X^{\alpha_i})\} \leqslant$$

$$\leqslant 1 +]\log_2(n+1)[+ q(v-1) + \max_i\{qC_v^2,]\log_2|M|[\} \leqslant qv + qC_v^2 \leqslant qC_{v+1}^2. \ \square$$

Для доказательства пункта (i) выберем v так, чтобы

$$qC_{v-1}^2 < \log_2|M| \leqslant qC_v^2,$$

и, применив лемму 4, получим,что для $f \in \mathcal{P}(M)$

$$D_B(f) \leqslant qC_{v+1} = q(C_{v-1}^2 + 2v - 1) \leqslant \log_2|M| + 2\sqrt{2q\log_2|M|} + q \leqslant$$

$$\leqslant \log_2|M| + O(\sqrt{\log_2(n+1)\log_2|M|}).$$

Такое же неравенство верно и для $f \in \mathcal{P}_2(M)$ и $B = \{xy, x+y, 1\}$.

Случай $f \in \mathcal{P}_k(M)$ сводится к случаю $k = 2$, если представить $f(X)$ в виде $g(X, 2)$, где полином $g(X, Y)$ имеет коэффициенты $0, 1$ и состоит из $|M|]\log_2 k[$ мономов.

В случае $n = 1$ и $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ разложим f на линейные и квадратные множители и заметим, что каждый из них реализуется с глубиной $O(1)$, а их произведение — с глубиной $\log_2|M| + O(1)$.

Докажем индукцией по n, что для любого $f \in \mathcal{P}(M)$ и $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$

$$\widetilde{L}_B(f) \leqslant 3|M| - 2.$$

База ($n = 1$) непосредственно проверяется с помощью схемы Горнера. Шаг индукции. Воспользуемся представлением

$$f = \sum_{i=0}^{d_n} x_n^i f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (f_{d_n} x_n + f_{d_n-1}) x_n + \cdots + f_0,$$

из которого следует, что

$$\widetilde{L}_B(f) \leqslant \sum_{i=0}^{d_n} \widetilde{L}_B(f_i) + 2d_n, \quad \text{где } f_i = \sum_{\alpha \in M_i} a_\alpha X^\alpha,\ M_i \subset \mathbb{N}^{n-1}.$$

Применяя предположение индукции, получаем тогда нужное неравенство

$$\widetilde{L}_B(f) \leqslant \sum_{i=0}^{d_n} (3|M_i| - 2) + 2d_n = 3|M| - 2.$$

Аналогично для $f \in \mathcal{P}_2(M)$ и $B = \{xy, x+y, 1\}$ получаем неравенство

$$\widetilde{L}_B(f) \leqslant 2|M| - 2.$$

Случай $f \in \mathcal{P}_k(M)$ сводится к случаю $k = 2$ так же, как и в пункте (i). Пункт (iii) доказан в [13]. □

Замечания. Пункты (i) и (iii) теоремы 5 является некоторым аналогом результатов [42–44] и [26]. Ее оценки являются асимптотически точными, что вытекает из (1) и того факта, что для $f \in \mathcal{P}(M)$ с алгебраически независимыми коэффициентами и базиса $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$L_B(f) \geqslant [(5|M| - 1)/2]$$

(см. [21, с. 529–531, 535]).

Индукцией по построению формулы в базисе B можно показать, что мультипликативная сложность $f \notin \mathbb{Z}[X]$ не меньше $\deg f$. Отсюда и из [21, с. 529–531, 535] следует, что если все коэффициенты полинома f от одной переменой алгебраически независимы, то

$$\widetilde{L}_B(f) = 3|M| - 2 \quad \text{и} \quad L_B(f) = \frac{5}{2}|M| + O(1),$$

то есть оценка теоремы 5 (ii), вообще говоря, точная. Без требования алгебраической независимости коэффициентов предыдущие утверждения, вообще говоря, неверны, что видно на примере полинома

$$f_n = 1 + x + \cdots + x^n \in \mathcal{P}_2(M), \quad M = \{0, 1, \ldots, n\},$$

для которого

$$\widetilde{L}_B(f) \simeq |M|, \quad L_B(f) \asymp \log|M|, \quad D_B(f) = \log|M| + O(1).$$

Все эти равенства доказываются с помощью формул

$$f_{2^m-1} = (\ldots((1+x)(1+x^2))(1+x^4)\ldots)(1+x^{2^{m-1}}),$$

$$f_n = (\ldots((f_{2^{\alpha_1}-1} + x^{2^{\alpha_1}} f_{2^{\alpha_2}-1}) + x^{2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}} f_{2^{\alpha_3}-1}) + \cdots) + x^{2^{\alpha_1}+\cdots+2^{\alpha_s-1}} f_{2^{\alpha_s}-1},$$

где $n+1 = 2^{\alpha_1} + \cdots + 2^{\alpha_s}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s$,

$$f_n = f_{n-[\sqrt{n}]^2-1} + x^{n-[\sqrt{n}]^2}(1+x+\cdots+x^{[\sqrt{n}]})(1+x^{[\sqrt{n}]}+x^{2[\sqrt{n}]}+\cdots+x^{[\sqrt{n}]^2-[\sqrt{n}]}).$$

Оценки пункта (iii) уточняют при больших n одну из оценок пункта (ii), а при некоторых ограничениях на M — и одну из оценок пункта (i).

В теории сложности булевых функций асимптотически точные оценки получены О. Б. Лупановым для любых конечных полных базисов [26–29]. Получить подобные результаты в рассматриваемых в настоящей статье задачах не удается, однако одну оценку теоремы 5 (ii) можно (с ухудшением мультипликативной константы) перенести на довольно широкий класс полиномиальных базисов.

Базис B назовем полным, если для любых I^n, $f \in C(I^n)$, $\varepsilon > 0$ определена величина $L_B(f, \varepsilon)$.

Теорема 6. *Для любого полного жегалкинского базиса B, такого, что $\mathbb{R} \subset B$, справедлива оценка*

$$\widetilde{L}_B(\mathcal{P}(M)) \leqslant O(|M|).$$

□ Можно считать, что B содержит нелинейный полином и полином, не являющийся мономом (в противном случае B не был бы полным). Далее понадобится

Лемма 5. *Полиномы xy и $x+c$ при любом $c \in \mathbb{R}$ можно реализовать в базисе B простыми формулами (то есть не содержащими кратных вхождений переменных).*

□ Первый случай: базис B состоит только из линейных функций и мономов. Тогда он содержит некоторый моном

$$ax_1 \ldots x_n, \quad n \geqslant 2,$$

и линейный полином

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + a_0,$$

у которого $a_1 \ldots a_m \neq 0$ и либо $a_0 \neq 0$, либо $m \geqslant 2$. Любую функцию вида cx можно реализовать простой формулой, подставив в моном вместо $x_2, \ldots, x_n$

подходящие константы. Подставляя в моном вместо $x_3, \ldots, x_n$ единицы, а потом полученную формулу — в формулу, реализующую $\dfrac{1}{a}x$, получаем простую формулу для x_1x_2.

Для реализации $x+c$ подставляем в линейный полином вместо x_1 формулу для x/a_1, а вместо $x_2, \ldots, x_m$ — подходящие константы; в случае $m=1$ подставляем вместо x_1 формулу для a_0x/ca_1 и полученную формулу — в формулу, реализующую cx/a_0.

Второй случай: базис B содержит нелинейный полином f, не являющийся мономом. Без ограничения общности считаем, что f перестает быть таковым при любой подстановке констант вместо некоторых переменных. Представим f в виде $f_1xy + f_2x + f_3y + f_4$, где f_i — жегалкинские полиномы, не содержащие x и y.

Рассмотрим два возможных случая: а) $f_1 = 0$, б) $f_1 \neq 0$. В случае а) имеем $f = f_2x + f_3y + f_4$, $f_2 \neq 0$, $f_3 \neq 0$ (иначе x или y были бы фиктивными переменными). Так как при подстановке $x = y = 0$ полином f превращается в f_4, то f_4 или моном, или линейная функция согласно сделанному предположению. Если первое, то подставив вместо всех переменных (кроме x и y) константы так, чтобы $f_2f_3 \neq 0$ (это возможно, так как полином f_2f_3 не равен нулю), получим из f линейную функцию от x и y, и поэтому согласно рассмотренному первому случаю можно считать лемму доказанной. Следовательно, можно считать, что f_4 — линейная функция. Но f нелинеен, значит, f_2 или f_3 отличны от констант. Пусть, например, $f_2 \neq \mathrm{const}$. Тогда, подставляя $y = 0$, получим из f нелинейный полином $xf_2 + f_4$, который согласно сделанному предположению должен быть мономом. Значит, как и ранее, можно считать лемму доказанной.

Рассмотрим случай б). Можно считать без ограничения общности, что для любых переменных x и y выполнены условия б). Докажем, что любая функция $x + c$ реализуется простой формулой в базисе $\{f\} \cup \mathbb{R}$.

Подставим в f константы так, чтобы получилась функция

$$\varphi_1xy + \varphi_2x + \varphi_3y + \varphi_4, \quad \text{где} \quad \varphi_i \in \mathbb{R},\ \varphi_1 \neq 0,$$

и положим

$$g_a(x) = (\varphi_1a + \varphi_2)x + \varphi_3a + \varphi_4.$$

Для любого числа $w \neq 0$ положим

$$a = (w - \varphi_2)/\varphi_1 \quad \text{и} \quad b = (1 - \varphi_2w)/\varphi_1w.$$

Тогда

$$\varphi_1a + \varphi_2 = w, \quad (\varphi_1b + \varphi_2)w = 1,$$

значит,

$$g_a(g_b(x)) = (\varphi_1b + \varphi_2)(\varphi_1a + \varphi_2)x + (\varphi_3b + \varphi_4)(\varphi_1a + \varphi_2) + \varphi_3a + \varphi_4 = \\ = x + (w+1)(\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3\varphi_2 + \varphi_3)/\varphi_1.$$

Поэтому в случае

$$\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3\varphi_2 + \varphi_3 \neq 0,$$

варьируя w, можно реализовать простыми формулами все функции $x+c$, кроме

$$x + (\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3\varphi_2 + \varphi_3)/\varphi_1;$$

но и ее можно реализовать, представив в виде $(x + c/2) + c/2$. В случае

$$\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3\varphi_2 + \varphi_2 \neq 0$$

аналогичным образом доказывается то же самое утверждение. Значит, осталось рассмотреть случай, когда

$$\begin{cases} f_1(f_4f_1 - f_3f_2 + f_2) = 0, \\ f_1(f_4f_1 - f_3f_2 + f_3) = 0 \end{cases}$$

или, что равносильно,

$$\begin{cases} f_2 = f_3, \\ f_1f_4 = f_2(f_2 - 1). \end{cases} \tag{14}$$

Тогда

$$g_a(x) = (\varphi_1 a + \varphi_2)(x + \varphi_2/\varphi_1) - \varphi_2/\varphi_1.$$

Допустим, что рациональная функция f_2/f_1 принимает разные значения, например, b_1 и b_2, в каких-то разных точках. Значит, все функции вида $c(x - b_i) + b_i$ можно реализовать простыми формулами, а потому и все функции $x + a$ тоже, так как при $a \neq b_1 - b_2$, взяв

$$c = 1 + \frac{a}{b_2 - b_1},$$

получаем, что

$$x + a = c\left(\left(\frac{1}{c}(x - b_2) + b_2\right) - b_1\right) + b_1,$$

а при $a = b_1 - b_2$ — что

$$x + a = (x + a/2) + a/2.$$

Поэтому далее можно считать, что f_1 и f_2 пропорциональны, т. е. $f_2 = cf_1$. Из (14) тогда следует, что

$$f = f_1(x + c)(y + c) - c.$$

Без ограничения общности можно считать, что подобные тождества справедливы для любых x и y, причем константа c в них одна и та же, иначе можно было бы реализовать простыми формулами все функции вида $a(x+c_i)-c_i$, где

$i = 1, 2$, $c_1 \neq c_2$, а a — произвольное число, и согласно предыдущему абзацу требуемое уже было бы доказано.

Следовательно, при некотором $c \in \mathbb{R}$ полином

$$f(x_1, \ldots, x_n) + c$$

делится на

$$(x_1 + c) \ldots (x_n + c),$$

а так как он жегалкинский, то

$$f = a(x_1 + c) \ldots (x_n + c) - c, \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Обозначим T_c множество всех полиномов вида

$$a \prod_i (x_i - c)^{m_i} - c, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Согласно предыдущему абзацу все нелинейные полиномы из B, не являющиеся мономами, содержатся в одном классе T_c. Но целиком базис B лежать в T_c не может, так как T_c замкнут относительно суперпозиции и все его функции при замене любой переменной на константу c сами превращаются в c, значит, базис B был бы неполным, что невозможно. Поэтому B содержит нелинейный полином $f \in T_c$ и либо моном, либо линейную функцию, не принадлежащую классу T_c.

В обоих случаях подстановками констант можно получить какую-то функцию $b_1 x + b_2 \notin T_c$ и все функции вида $d(x - c) + c$, $d \in \mathbb{R}$.

Положив при любом $a \neq 0$

$$d_1 = \frac{a}{b_2 - c + b_1 c} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{1}{d_1 b_1},$$

можно представить $x + a$ в виде суперпозиции функций

$$d_1(x - c) + c, \quad b_1 x + b_2, \quad d_2(x - c) + c.$$

Значит, все функции $x + a$ представимы простыми формулами в базисе B во всех возможных случаях. Подставим в функцию

$$\varphi_1 xy + \varphi_2 x + \varphi_3 y + \varphi_4, \quad \text{где} \quad \varphi_1 \neq 0,$$

вместо x и y простые формулы для $x - \varphi_2/\varphi_1$ и $x - \varphi_3/\varphi_1$ и полученную формулу подставим в простую формулу для функции

$$x + \frac{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_3}{\varphi_1} - \varphi_4.$$

Полученная простая формула реализует функцию $\varphi_1 xy$. Подставим в нее вместо y число $1/\varphi_1^2$, а в полученную формулу подставим исходную формулу для $\varphi_1 xy$. Полученная простая формула реализует xy. □

В одномерном случае теорема 6 следует из леммы 5 и схемы Горнера. В многомерном случае она следует из леммы 5 и теоремы 5 (ii), так как благодаря равенству

$$x + y = \left(\varepsilon x + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon y + \frac{1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^{-2} - \varepsilon^2 xy$$

функцию $x + y$ можно с любой точностью на любом прямоугольнике реализовать простой формулой ограниченной сложности. □

§ 4 О сложности приближенной реализации некоторых функциональных компактов в пространствах с базисом

Допустим, что выполнены предположения, сделанные в начале параграфа 2, и положим

$$\mathcal{P}(u) = \{\mathbf{k}\colon\ \mathcal{F}(\mathbf{k}) \geqslant u\}, \quad P(u) = |\mathcal{P}(u)|,$$
$$Q(u) = -\sum_{\mathbf{k},\ \mathcal{F}(\mathbf{k})\geqslant u} \log \mathcal{F}(\mathbf{k}), \quad R(u) = \sum_{\mathbf{k},\ \mathcal{F}(\mathbf{k})<u} \mathcal{F}(\mathbf{k}),$$
$$v(u) = \max\{v\colon\ R(v) \leqslant u/2A\}, \quad s(u) = P(v(u)) = |S(u)|,$$
$$S(u) = \{\mathbf{k}\colon\ \mathcal{F}(\mathbf{k}) \geqslant v(u)\}, \quad \delta(u) = \frac{u}{2As(u)}, \quad w(u) = \max\{v(u), \delta(u)\},$$
$$T(u) = s(u)\log\tfrac{2}{\delta(u)} - Q(w(u)).$$

Тогда для класса $\mathfrak{M}$, определенного в начале параграфа 2, справедливо неравенство

$$G(\varepsilon) \leqslant H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \leqslant T(\varepsilon),$$

где $H_\varepsilon(\mathfrak{M})$ — ε-энтропия класса $\mathfrak{M}$, то есть двоичный логарифм минимальной мощности ε-сети для $\mathfrak{M}$, причем для справедливости нижней оценки вместо условия (2) достаточно выполнение более слабого условия

$$\min_{\mathbf{k},\ a_\mathbf{k}\neq 0} |a_\mathbf{k}| \leqslant \left\|\sum a_\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}\right\|.$$

Действительно, построим для любого $\gamma > 0$ на отрезке $I_\mathbf{k} = [-\mathcal{F}(\mathbf{k}), \mathcal{F}(\mathbf{k})]$ 2ε-различимое множество $M_\mathbf{k}$ мощности не меньше $\mathcal{F}(\mathbf{k})/(\varepsilon+\gamma)$. Тогда множество

$$\left\{g\colon\ g = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon+\gamma)} c_\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k},\ c_\mathbf{k} \in M_\mathbf{k}\right\}$$

является 2ε-различимым подмножеством в $\mathfrak{M}$, откуда

$$G(\varepsilon) \leqslant H_\varepsilon(\mathfrak{M}).$$

Построим на каждом отрезке $I_{\mathbf{k}}$ $\delta(\varepsilon)$-сеть $N_{\mathbf{k}}$ мощности не больше $1 + \mathcal{F}(\mathbf{k})/\delta(\varepsilon)$. Тогда множество

$$\left\{g\colon\ g = \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} d_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}},\ d_{\mathbf{k}} \in N_{\mathbf{k}}\right\}$$

образует ε-сеть в $\mathfrak{M}$, действительно, если

$$f = \sum c_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} \in \mathfrak{M}$$

и

$$\mathbf{k} \in S(\varepsilon) \Longrightarrow |d_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k}}| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

то

$$\left\|f - \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} d_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}\right\| \leqslant \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} |c_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}}|\,\|\varphi_{\mathbf{k}}\| + \sum_{\mathbf{k}\notin S(\varepsilon)} |c_{\mathbf{k}}|\,\|\varphi_{\mathbf{k}}\| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому

$$H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \leqslant \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} \log\left(1 + \frac{\mathcal{F}(\mathbf{k})}{\delta(\varepsilon)}\right) \leqslant s(\varepsilon) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(w(\varepsilon))} \log\frac{\mathcal{F}(\mathbf{k})}{\delta(\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant s(\varepsilon) + P(w(\varepsilon))\log\frac{1}{\delta(\varepsilon)} - Q(w(\varepsilon)) \leqslant s(\varepsilon)\log\frac{2}{\delta(\varepsilon)} - Q(w(\varepsilon)) = T(\varepsilon).$$

Далее приводятся две общие теоремы, из которых будут получены конкретные следствия.

Теорема 7 [9]**.**

$$L_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \leqslant \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)}\left(1 + \frac{3\log\log T(\varepsilon) + O_{\mathfrak{M}}(1)}{\log T(\varepsilon)}\right) +$$
$$+ O(s(\varepsilon) + \log\log 1/\varepsilon) + L_B\left(\Phi_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{8C}\right),$$

где $C = \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathcal{F}(\mathbf{k})$, $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, $\Phi_\varepsilon = \{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{k} \in S(\varepsilon)\}$.

□ Построим на каждом отрезке $I_{\mathbf{k}}$ $\delta(\varepsilon)/2$-сеть $N_{\mathbf{k}}$, тогда множество

$$\left\{g\colon\ g = \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} d_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}},\ d_{\mathbf{k}} \in N_{\mathbf{k}}\right\}$$

образует $3\varepsilon/4$-сеть в $\mathfrak{M}$. Для оценки $L_B(g,\varepsilon/4)$ применим теорему 4, пункт (iv), при $M = S(\varepsilon)$, $K = As(\varepsilon)$, тогда

$$G(\varepsilon/8K) = G(\delta(\varepsilon)/4) = s(\varepsilon)\log\frac{4}{\delta(\varepsilon)} - Q(v(\varepsilon)) \leqslant$$
$$\leqslant O(s(\varepsilon)) + \sum_{\mathbf{k}\in S(\varepsilon)} \log\left(1 + \frac{\mathcal{F}(\mathbf{k})}{\delta(\varepsilon)}\right) \leqslant O(s(\varepsilon)) + T(\varepsilon),$$

и из оценки теоремы 4 (iv) и неравенства

$$L_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \leqslant \max_g L_B(g,\varepsilon/4)$$

следует оценка теоремы 7. □

Пусть система функций $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \in C(I^n)$ такова, что для любой линейной комбинации

$$\left\|\sum a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}\right\| = \sup_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|,$$

в частности, $\|\varphi_{\mathbf{k}}\| = 1$ для всех $\mathbf{k}$. Тогда справедлив следующий аналог теорем 1 и 7.

Теорема 8. *Пусть*

$$\mathfrak{M} = \left\{g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\colon\ \forall\mathbf{k}\ |a_{\mathbf{k}}| \leqslant \mathcal{F}(\mathbf{k})\right\}.$$

Тогда

$$G(\varepsilon) \leqslant H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \leqslant G(\varepsilon) + O(\varepsilon)\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon)} \frac{1}{\mathcal{F}(\mathbf{k})} \leqslant G(\varepsilon) + P(\varepsilon)$$

и на $\mathfrak{M}$ можно построить такую колмогоровскую меру, что для почти всех $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f,\varepsilon) \geqslant \frac{G(\varepsilon)}{\log G(\varepsilon)}\left(1 + \frac{\log\log G(\varepsilon) - O_f(1)}{\log G(\varepsilon)}\right)$$

и для любой $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant \frac{G(\varepsilon/2)}{\log G(\varepsilon/2)}\left(1 + \frac{3\log\log G\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + O(1)}{\log G(\varepsilon/2)}\right) +$$
$$+ O\left(P\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \log\log 1/\varepsilon\right) + L_B\left(\Phi_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2C}\right),$$

где $C = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{F}(\mathbf{k})$, $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, $\Phi_\varepsilon = \{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon/2)\}$.

Перед тем, как применять теоремы 7–8, сделаем несколько замечаний. Верхние оценки теорем 7–8 справедливы для любого базиса, содержащего $x-y$, xy и произвольную константу $a \in (-1,1)$. Нижняя оценка теоремы 8 справедлива для любого конечного базиса B, если добавить в нее множитель О. Б. Лупанова ρ_B.

Как и в [23], можно разрешить мультииндексу $\mathbf{k}$ принимать любые значения из $\mathbb{Z}^n$.

При использовании теоремы 7 в качестве $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ часто будем брать произведение одномерных систем

$$\{\varphi_{k,j}(x_j)\},\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

удовлетворяющих условию (2), а последнее слагаемое в ней заменить на

$$L_B(\{\varphi_{k,j}(x_j)\colon\ |k| \leqslant s(\varepsilon),\ 1 \leqslant j \leqslant n\},\ O_{\mathfrak{M}}(\varepsilon/s(\varepsilon)));$$

в одномерном случае в качестве $\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$ часто будем брать системы, равномерно ограниченные и ортонормальные относительно какого-либо веса $p(x)$. В качестве $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ будем брать функции вида

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \begin{cases} Ce^{-r^q(\ln r)^t}, & \text{если } r = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i k_i \geqslant 1, \\ C, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \tag{15}$$

где $C, q \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда, чуть обобщая соответствующие рассуждения из [23], можно проверить, что $G(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ и $H_\varepsilon(\mathfrak{M})$ равны

$$\frac{\gamma(\ln 1/\varepsilon)^{1+n/q}}{(\ln\ln 1/\varepsilon)^{tn/q}}(1+O(\ln\ln\ln 1/\varepsilon)),$$

где

$$\gamma = \frac{q^{1+tn/q}}{(q+n)n!}(\log e)\prod_{i=1}^{n} h_i^{-1},$$

и справедливы равенства по порядку

$$P()\varepsilon) \asymp s(\varepsilon) \asymp (\ln 1/\varepsilon)^{n/q}(\ln\ln 1/\varepsilon)^{-tn/q}.$$

Следуя [23], рассмотрим семейство функциональных классов $A_{I^n}^G(N)$, состоящих из функций $f \in C(I^n)$, имеющих аналитическое продолжение на $G \subset \mathbb{C}^n$, ограниченное по модулю константой N. В качестве G можно взять эллиптический полицилиндр $Э_1 \times \ldots \times Э_n$, где $Э_i$ — эллипсы с фокусами a_i, b_i и суммой полуосей α_i, или произведение полос

$$P_1(d_1) \times \ldots \times P_n(d_n),$$

где

$$P_i(d_i) = \{z\colon\ |\operatorname{Im} z| < d_i\},$$

причем в последнем случае класс $A^G_{I^n}(N)$ по определению состоит из 2π-периодических по всем переменным функций, и $I^n = [-\pi, \pi]^n$. Для всех этих классов в [23] вычислена асимптотика ε-энтропии, которая имеет вид

$$c_{G,I^n}(\log 1/\varepsilon)^{n+1},$$

где c_{G,I^n} — константа.

Следствие 1. *Пусть базис*

$$B = \{x - y, xy, \cos x, 1/2\}$$

и A — любой из упоминавшихся классов. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{H_\varepsilon(A)}{\log H_\varepsilon(A)}\left(1 + \frac{\log\log H_\varepsilon(A) - O(1)}{\log H_\varepsilon(A)}\right) \leqslant L_B(A,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H_\varepsilon(A)}{\log H_\varepsilon(A)}\left(1 + \frac{3\log\log H_\varepsilon(A) + O_A(1)}{\log H_\varepsilon(A)}\right),$$

$$\widetilde{L}_B(A,\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(A),$$

$$\log H_\varepsilon(A) - O(1) \leqslant D_B(A,\varepsilon) \leqslant \log H_\varepsilon(A) + O\left(\sqrt{\log H_\varepsilon(A)}\right),$$

причем $\cos x$ нужен в B лишь для справедливости двух последних соотношений для классов периодических функций.

Следствие 2. *Пусть $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ и $\mathfrak{M}$ — класс, соответствующий системе*

$$T_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = T_{k_1}(x_1)\ldots T_{k_n}(x_n)$$

(где $T_{k_i}(x_i) = \cos(k_i \arccos x_i)$ — полиномы Чебышева), интервалу $I^n = [-1,1]^n$ и функции $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ вида (15). Тогда

$$\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\left(1 + \frac{\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) - O(1)}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\right) \leqslant L_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\left(1 + \frac{3\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) + O_{\mathfrak{M}}(1)}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\right) \simeq$$
$$\simeq \gamma(\ln 1/\varepsilon)^{1+n/q}(\ln\ln 1/\varepsilon)^{-1-tn/q}, \widetilde{L}_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \asymp$$
$$\asymp (\ln 1/\varepsilon)^{1+n/q}(\ln\ln 1/\varepsilon)^{-tn/q},$$

$$\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) - O(1) \leqslant D_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \leqslant \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) + O\left(\sqrt{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\right) \simeq \left(1 + \frac{n}{q}\right)\log\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Можно указать такую колмогоровскую меру на $\mathfrak{M}$, что для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$ и любого положительного $\varepsilon < \varepsilon(f)$ будут выполнены соотношения, аналогичные вышеприведенным.

Следствие 3. *Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ класс, определенный по функции $\mathcal{F}(k) = 2^{-k}$ и системе*

$$\{\cos 3^k x\colon\ k \in \mathbb{N}\},$$

а через $\mathfrak{M}_2$ — класс, определенный по системе

$$\{2\varphi(3^k x)\colon\ k \in \mathbb{N}\},\quad \text{где}\quad \varphi(x) = \min\{|x - m|\colon\ m \in \mathbb{Z}\},$$

и введем на них метрики пространств $C[-\pi, \pi]$ и $C[0, 1]$ соответственно. Тогда для класса $\mathfrak{M}_1$ и базиса $B_1 = \{x - y, xy, cosx, 1/2\}$, а также для класса $\mathfrak{M}_2$ и базиса $B_2 = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$ справедливы все соотношения, аналогичные указанным в следствии 2, кроме соотношений для $D_{B_2}(f, \varepsilon)$. Для класса $\mathfrak{M}_1$, базиса $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ и меры сложности L_B также справедливы соотношения, аналогичные указанным в следствии 2.

Следствие 4. *Для классов $\mathfrak{M}$ следствия 2 и базисов B теоремы 6*

$$\widetilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \asymp \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log 1/\varepsilon},$$

причем для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$ относительно соответствующей колмогоровской меры верно равенство по порядку $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon)$. Для базиса $B = \{xy, x + y\} \cup \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$D_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \log \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log 1/\varepsilon} + O\left(\sqrt{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\right)$$

и для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$ — неравенство

$$D_B(f, \varepsilon) \geqslant \log \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log 1/\varepsilon} - O_f(1),$$

причем при $n = 1$ в первом можно заменить $O\left(\sqrt{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}\right)$ на $O(1)$.

Следствие 5. *Для $B = \{xy, x + y\} \cup \mathbb{R}$ и класса $\mathfrak{M}_1$ следствия 3*

$$L_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \asymp \log 1/\varepsilon$$

и для почти всех $f \in \mathfrak{M}_1$ справедливо равенство по порядку

$$L_B(f, \varepsilon) \asymp L_B(\mathfrak{M}_1, \varepsilon).$$

Следствие 6. *Для любой аналитической функции $f \in C(I^n)$ и любого базиса B теоремы 6 справедливо неравенство по порядку*

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \ll (\log 1/\varepsilon)^n,$$

причем существует такая аналитическая функция $f \in C(I^n)$, *что*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp (\log 1/\varepsilon)^n, \quad D_B(f,\varepsilon) \geqslant n \log\log 1/\varepsilon - O(1).$$

Для $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ *и любой аналитической функции* $f \in C(I^n)$

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant n \log\log 1/\varepsilon + O_f\left(\sqrt{n(\log n)\log\log 1/\varepsilon} + 1\right).$$

Для $B = \{xy, x-y, 1/2\}$ *и любой аналитической функции* $f \in C(I^n)$

$$L_B(f,\varepsilon) \ll \frac{(\log 1/\varepsilon)^{n+1}}{\log\log 1/\varepsilon}, \quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \ll (\log 1/\varepsilon)^{n+1},$$

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant (n+1)\log\log 1/\varepsilon + O_f\left(\sqrt{n\log(n+1)\log\log 1/\varepsilon} + 1\right),$$

причем существует такая аналитическая функция $f \in C(I^n)$, *что*

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp (\log 1/\varepsilon)^{n+1}, \quad D_B(f,\varepsilon) \geqslant (n+1)\log\log 1/\varepsilon - O(1),$$

$$L_B(f,\varepsilon) \asymp \frac{(\log 1/\varepsilon)^{n+1}}{\log\log 1/\varepsilon}.$$

□ Все нижние оценки в следствиях 1–6 вытекают из теорем 1–2, соотношений (1), (14), замечаний, сделанных перед формулировкой следствий и соответствующих результатов [22]. Для доказательства следствия 6 достаточно заметить, что любая аналитическая функция $f \in C(I^n)$ принадлежит классу $A^G_{I^n}(N)$ при подходящем N и эллиптическом полицилиндре $G = \mathcal{E}^n$. Верхние оценки $L_B(f,\varepsilon)$ для конечных базисов B получаются с помощью теоремы 7, сделанных после нее замечаний и оценки

$$L_B((\varphi_1,\ldots,\varphi_m),\varepsilon) \leqslant O(m + \log 1/\varepsilon). \tag{16}$$

В случае

$$\varphi_k(x) = T_k((x-a)/|I|)$$

эта оценка следует из оценки

$$L_B(T_1(x),\ldots,T_m(x)) \leqslant O(m),$$

вытекающей из известной рекуррентной формулы для полиномов Чебышева, и оценки

$$L_B((x-a)/|I|,\delta) \leqslant \frac{O(\log 1/\delta)}{\log\log 1/\delta},$$

вытекающей из теоремы 4.

В случае

$$\varphi_k(x) = 2\varphi(3^k x)$$

справедлива оценка

$$L_B((\varphi_1,\dots,\varphi_m)) \leqslant O(m),$$

которая доказывается рассмотрением последовательности

$$\varphi_0 = x - |x-1/3| + |x-2/3| - 1/3, \quad \varphi_1 = \varphi_0(1-|2x-1|),\dots,$$
$$\varphi_k = \varphi_0(\varphi_{k-1}(x)),\dots,$$
$$\varphi_m = \varphi_0(\varphi_{m-1}(x))$$
(здесь $B = \{x-y, xy, |x|, 1/2\}$).

В случае

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \cos kx, & k \geqslant 0, \\ -\sin kx, & k < 0 \end{cases}$$

оценка (16) следует из оценки

$$L_B((\cos x, \sin x), \delta) \leqslant \frac{O(\log 1/\delta)}{\log\log 1/\delta}$$

(для этой величины известны гораздо лучшие оценки [38–40]; нужная нам оценка, например, для $cosx$ получается, если приблизим его на $[-\pi,\pi]$ с точностью δ полиномом Тейлора

$$P_k(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + \frac{y^{4k}}{4k!}, \quad k = \frac{O(\log 1/\delta)}{\log\log 1/\delta},$$

представим в виде

$$\frac{1}{4k!}(y^{4k} - 4k(4k-1)y^{4k-2} + \dots - 4k(4k-1)\dots 3y^2 + 4k!),$$

вычислим $1, 2,\dots, 4k, 4k(4k-1),\dots, 4k(4k-1)\dots 3, 4k!$, потом по схеме Горнера вычислим $4k!P_k(y)$ и воспользуемся оценкой

$$L_B\left(\frac{1}{4k!}, O\left(\frac{\delta}{4k!}\right)\right) \leqslant L_B\left(\frac{1}{4k!}, O(\delta^2)\right) \leqslant \frac{O(\log 1/\delta)}{\log\log 1/\delta},$$

вытекающей из теоремы 4).

В случае

$$\varphi_k(x) = \cos 3^k x$$

оценка (16) выводится из оценки

$$L_B(\cos x, \delta) \leqslant \frac{O(\log 1/\delta)}{\log\log 1/\delta}$$

рассмотрением последовательности

$$\varphi_0 = \cos x,\ \varphi_1 = 4\varphi_0^3 - 3\varphi_0, \dots,\ \varphi_m = 4\varphi_{m-1}^3 - 3\varphi_{m-1}.$$

Оценки для $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$ в следствиях 1, 2 доказываются с помощью схемы Горнера (или применения теоремы 5 (ii)), а в следствии 3 — также с помощью неравенства

$$\widetilde{L}_B((\varphi_1,\dots,\varphi_m)) \leqslant O(m^2).$$

В случае $\varphi_k(x) = 2\varphi(3^k x)$ они доказываются с помощью рассмотрения последовательности

$$u_1(x) = 1 - |2x-1|, \dots, u_k(x) = u_{k-1}(u_1(x)), \dots, u_{2k}(x) = u_{2k-1}(u_1(x)),$$
$$\varphi_k(x) = u_{2k}(3^k 2^{-2k} x).$$

В следствии 4 оценка доказывается с помощью теоремы 6, а в следствии 5 — с помощью оценки (16).

Оценки для $D_B(f,\varepsilon)$ доказываются с помощью теоремы 5 (i). □

Замечания. Если добавить к базису мнимую единицу i, то все предыдущие результаты можно перенести на соответствующие классы функций комплексной переменной. Если в следствии 6 взять базис $B = \{x^2 \pm y, xy, x-y, 1/2\}$, то для любой аналитической функции $f \in C(I^n)$

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant (n+1)\log\log 1/\varepsilon + O_f(1).$$

Доказательство получается с помощью того факта, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$D_B(n) \leqslant \log\log n + O(1).$$

Следствия 2–3 дают примеры континуальных аналогов эффекта Шеннона (известного в теории сложности булевых функций [28, 30]). В следствиях 4–5 этот эффект доказан в ослабленной форме. Следствия 1–6 содержат в обобщенном и дополненном виде результаты из [9].

Классы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ из следствия 3 содержат нигде не дифференцируемые функции Вейерштрасса и Ван дер Вардена соответственно, поэтому для мер сложности

$$L_{B_1}(f,\varepsilon),\ \widetilde{L}_{B_2}(f,\varepsilon),\ \widetilde{L}_{B_3}(f,\varepsilon),$$

где $B_1 = \{x-y, xy, 1/2\}$, $B_2 = B_1 \cup \{\cos x\}$, $B_3 = B_1 \cup \{|x|\}$ обратные теоремы бернштейновского типа, вообще говоря, неверны. Этот факт для колмогоровской сложности был отмечен самим А. Н. Колмогоровым [22]. В то же время для любой меры сложности $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$, где B — любой базис из теоремы 6, такие теоремы верны и немедленно вытекают из теоремы 6 и бернштейновских обратных теорем.

Утверждения следствия 3 можно дополнить тем, что для для функций Ван дер Вардена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} 3^{-k} 2\{3^k x\}$$

и Вейерштрасса

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} 2^{-k} \cos 3^k x$$

и любого жегалкинского базиса B справедливы неравенства по порядку

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \gg 1/\varepsilon, \quad \widetilde{L}_B(v,\varepsilon) \gg \frac{\varepsilon^{-\log_2 3}}{\log 1/\varepsilon},$$

для любого базиса из теоремы 6 и для базиса $B = \{x-y, xy, |x|, 1/2\}$ — неравенства

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \leqslant O(1/\varepsilon)\log 1/\varepsilon, \quad \widetilde{L}_B(v,\varepsilon) \leqslant O\left(\varepsilon^{-\log_2 3}\right),$$

для базиса $B = \{xy, x+y, |x|\} \cup [-1,1]$ — неравенства

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \leqslant O(1/\varepsilon), \quad \widetilde{L}_B(v,\varepsilon) \leqslant O\left(\varepsilon^{-\log_2 3} \Big/ \log 1/\varepsilon\right),$$

для базиса $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ — неравенства и равенство по порядку

$$\log_2 1/\varepsilon - O(1) \leqslant D_B(f,\varepsilon) \leqslant \log_2 1/\varepsilon + \log_2\log_2 1/\varepsilon + O(1),$$

$$(\log_2 3)(\log_2 1/\varepsilon - \log_2\log_2 1/\varepsilon - O(1)) \leqslant D_B(v,\varepsilon) \leqslant (\log_2 3)(\log_2 1/\varepsilon) + O(1),$$

$$L_B(v,\varepsilon) \asymp \log 1/\varepsilon,$$

для базиса $B = \{xy, x-y, 1/2\}$ — неравенство и равенство по порядку

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant O(\log^2 \varepsilon), \quad L_B(v,\varepsilon) \asymp \log 1/\varepsilon,$$

а для базиса $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$ — неравенство

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant O(\log 1/\varepsilon).$$

Можно рассмотреть также следующие варианты нигде не дифференцируемых функций Ван дер Вардена и Вейерштрасса

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} 4^{-k} \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} 4^k x\right)\right), \quad v_1(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} 3^{-k} \cos 3^k x.$$

Для них справедливы те же оценки, что и для $f(x)$ и $v(x)$, только показатель степени $\log_2 3$ нужно заменить на 1, оценки для $\widetilde{L}_B(f_1,\varepsilon)$ уменьшить в $O(\log 1/\varepsilon)$ раз по сравнению с оценками для $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$, в оценках для $D_B(v_1,\varepsilon)$ по сравнению с оценками для $D_B(v,\varepsilon)$ исчезает множитель $\log_2 3$, а для функции f_1 и базиса $B = \{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$ получаются равенства

$$\widetilde{L}_B(f_1,\varepsilon) \asymp 1/\varepsilon, \quad D_B(f_1,\varepsilon) = \log_2 1/\varepsilon + O(1).$$

Функции $v(x)$ и $v_1(x)$ являются тем самым эффективными примерами функций, для которых выполнено одно из утверждений следствия 5. Следствие 3 вместе с приведенными оценками показывает, что мера сложности $\widetilde{L}_B(\mathfrak{M},\varepsilon)$ существенно зависит от базиса. Эти же оценки показывают, что функции $v(x)$ и $v_1(x)$ легко вычислимы в базисе $\{xy, x+y\}\cup\mathbb{R}$ благодаря возможности ее вычисления «узкими» схемами (т. е. схемами, у которых сложность и глубина по порядку совпадают); при вычислении формулами они оказываются трудно вычислимыми.

Верхние оценки, приведенные выше, доказываются с помощью оценок модулей непрерывности

$$\omega(f,\tau)\leqslant O(\tau\log 1/\tau),\quad \omega(v,\tau)\leqslant O\left(\tau^{\log_3 2}\right)$$

$$\omega_2(f_1,\tau)\leqslant O(\tau),\quad \omega_2(v_1,\tau)\leqslant O(\tau),$$

теоремы Джексона, теорем 5, 6, следствия 3 и леммы 38 [17] (оценки для модулей непрерывности v и v_1 имеются в п. 93 [2], а оценки для f и f_1 доказываются рассуждениями, подобными имеющимся в [18], кроме того в [2] показано, что для всюду плотного множества значений x

$$\limsup_{\tau\to 0}|\Delta_\tau(v,x)|\Big/\tau^{\log_3 2}>0,\quad \limsup_{\tau\to 0}|\Delta_\tau(v_1,x)|\Big/\tau\log 1/\tau>0,$$

$$\omega(v_1,\tau)\leqslant O(\tau\log 1/\tau),$$

и можно показать, что для почти всех x

$$\limsup_{\tau\to 0}|\Delta_\tau(f_1,x)|\Big/\tau\sqrt{\log 1/\tau\,\log\log\log 1/\tau}\geqslant 1/2,$$

для континуума значений x

$$|\Delta_\tau(f_1,x)|\leqslant O(\tau)$$

и для всех $x\in\mathbb{R}$

$$\limsup_{\tau\to 0}\Delta_\tau(f_1,x)/\tau\geqslant 1,\quad \liminf_{\tau\to 0}|\Delta_\tau(f_1,x)/\tau\leqslant -1,$$

а также, что $\omega(f_1,\tau)\leqslant O(\tau\log 1/\tau)$, где $\Delta_\tau(f,x)$ — это $f(x+\tau)-f(x)$, а ω и ω_2 — модули непрерывности первого и второго порядков). Нижние оценки доказаны в [16].

Подобно сделанным замечаниям можно доказать, что для любого $r\in\mathbb{N}$ и сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\alpha}1/\varphi(n)$$

можно эффективно указать такую r-кратно дифференцируемую почти всюду функцию $f \in C(I)$, что для базиса $B = \{x+y, xy, 1/x\} \cup \mathbb{R}$ или $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ справедливы неравенства по порядку

$$\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi(\log 1/\varepsilon)}\right)^{1/r} \ll \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \ll \varepsilon^{-1/r}, \quad \log 1/\varepsilon \ll L_B(f,\varepsilon) \ll \log^2 \varepsilon,$$

а также, что для любой стремящейся к нулю функции $\delta(\varepsilon)$ найдется подпоследовательность $\varepsilon_n \to 0$ и такая r-кратно дифференцируемая почти всюду функция $f \in C(I)$, что

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon_n) \asymp \varepsilon_n^{-1/r}\delta(\varepsilon_n).$$

Из теоремы 6 и леммы 17 [17] вытекает

Следствие 7. *Для любого базиса B из теоремы 6 и любого класса $\mathcal{K} \subset C(I)$ справедливо равенство*

$$\widetilde{L}_B(\mathcal{K},\varepsilon) \asymp E(\mathcal{K},\varepsilon),$$

где $E(\mathcal{K},\varepsilon)$ — минимальная степень полинома, достаточная для ε-приближения любой функции $f \in \mathcal{K}$.

В формулировке следствия 7 устранить ограничение на полиномиальные базисы, вообще говоря, нельзя. Это показывает пример функции $g(x)$, указанный в [16], и базиса

$$B = \{x+y, xy, T_3(x), 1/2\}$$

для которых

$$\widetilde{L}_B(g,\varepsilon) \leqslant O(\log^2 \varepsilon).$$

Укажем теперь некоторые следствия из теоремы 8. Положим

$$a_m = 2^{k+i}k(k+1),$$

где

$$i = [\log(m+3)], \quad k = [\log\log(m+3)], \quad b_1 = 0, \quad b_m = a_m\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_m}\right),$$

$$\psi(x) = \max(0, 2\min(x, 1-x)), \quad \psi_m(x) = \psi(a_m x - b_m).$$

При $m \neq 2^{2^k} - 3$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо, что

$$b_m = a_m\left(\sum_{t=1}^{2^{2^k}-4}\frac{1}{a_t} + \sum_{t=2^{2^k}-3}^{2^i-4}\frac{1}{a_t} + \sum_{t=2^i-3}^{m-1}\frac{1}{a_t}\right) =$$

$$= a_m\left(\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{s=0}^{2^p-1}\sum_{2^{2^p+s}-3}^{2^{2^p+s+1}-4}\frac{2^{-p-2^p-s}}{p(p+1)} + \sum_{s=0}^{i-2^k-1}\sum_{t=2^{2^k+s}-3}^{2^{2^k+s+1}-4}\frac{2^{-k-2^k-s}}{k(k+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=2^i-3}^{n-1}\frac{2^{-k-i}}{k(k+1)}\right) = a_m\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{i-2^k}{2^k k(k+1)} + \frac{m-2^i+3}{2^{k+i}k(k+1)}\right) \in \mathbb{N},$$

а также

$$b_m < a_m \leqslant O((m+3)\log(m+3)(\log\log(m+3))^2).$$

Из предыдущего следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} 1/a_m = 1,$$

поэтому при любом m носитель функции ψ_m

$$\operatorname{supp}\psi_m = [s_{m-1}, s_m] \subset [0,1],$$

где

$$s_m = 1/a_1 + \cdots + 1/a_m.$$

Для любого мультииндекса $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$, компоненты которого не имеют вида $2^{2^k} - 3$, положим

$$\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \psi_{m_1}(x_1)\ldots\psi_{m_n}(x_n) \in C[0,1]^n.$$

Тогда $\|\psi_{\mathbf{m}}\| = 1$, по каждой переменной x_i функция $\psi_{\mathbf{m}}$ удовлетворяет условию Липшица с множителем $2a_{m_i}$ и система $\psi_{\mathbf{m}}$ удовлетворяет условию теоремы 8.

Рассмотрим базисы

$$B_1 = \{xy, x-y, 1/2\}, \quad B_2 = B_1 \cup \{|x|\},$$
$$B_3 = \left\{\frac{x+y}{2}, -x, \max(x,y), x*y\right\} \cup [0,1],$$
$$\text{где } x*y = \lambda(x)\lambda(y), \quad \lambda(x) = \min(\max(0,x), 1/2).$$

Справедливы следующие оценки, которые будут использованы при выводе следствий из теоремы 8:

$$L_{B_1}(\Phi_\varepsilon, \delta) \leqslant O\left(\left(n\log\frac{n}{\delta}\right)P\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right), \quad L_{B_2}(\Phi_\varepsilon) \leqslant O\left(nP\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

$$\widetilde{L}_{B_2}(\Phi_\varepsilon) \leqslant O\left(P\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\log P\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n\right), \quad D_{B_2}(\Phi_\varepsilon) \leqslant \log\log P\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \log n + O(1),$$

$$\text{где } \Phi_\varepsilon = \left\{\psi_{\mathbf{m}}\colon\ \mathbf{m} \in \mathcal{P}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\},$$

$$\widetilde{L}_{B_3}(\{4^{-n}a_{m_1}^{-1}\ldots a_{m_n}^{-1}\psi_{\mathbf{m}} \colon \mathbf{m} \in \mathcal{P}(\varepsilon)\}) \leqslant O(n\mathcal{P}(\varepsilon)),$$
$$D_{B_3}(\{4^{-n}a_{m_1}^{-1}\ldots a_{m_n}^{-1}\psi_{\mathbf{m}} \colon \mathbf{m} \in \mathcal{P}(\varepsilon)\}) \leqslant \log n + O(1).$$

Последние две вытекают из равенств

$$4^{-1}a_m^{-1}\psi_m(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x - s_{m-1}}{2}, \frac{s_m - x}{2}\right)\right),$$
$$4^{-n}a_{m_1}^{-1}\ldots a_{m_n}^{-1}\psi_n(\mathbf{x}) = 4^{-1}a_{m_1}^{-1}\psi_{m_1}(x_1)\ldots 4^{-1}a_{m_n}^{-1}\psi_{m_n}(x_n).$$

Остальные доказываются с помощью неравенств

$$L_{B_1}(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_m)\leqslant O(m),\quad D_{B_1}(a_m,b_m)\leqslant\log\log m+O(1),$$
$$\widetilde{L}_{B_2}(\psi_{\mathbf{m}})\leqslant O(n)+n\widetilde{L}_{B_2}(\psi)+2\widetilde{L}_{B_2}(a_{m_1},\dots,a_{m_n},b_{m_1},\dots,b_{m_n})\leqslant$$
$$\leqslant O(n)+O(\log m_1\dots m_n)\leqslant O(n)+O(\log P(\varepsilon/2)).$$

При выводе первой оценки используется лемма 38 [17].

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — функциональный компакт, удовлетворяющий условиям теоремы 8 и определенный по системе $\{\psi_m\}$ и такой функции $\mathcal{F}(\mathbf{k})$, что*

$$P(\varepsilon)=o(G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon))\quad\text{и}\quad G(\varepsilon)\simeq G(\varepsilon/2).$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$ справедливы асимптотические равенства

$$L_{B_2}(\mathfrak{M},\varepsilon)\simeq G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon)\simeq H_\varepsilon(\mathfrak{M})/\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})$$

и для почти всех $f\in\mathfrak{M}$ относительно соответствующей колмогоровской меры

$$L_{B_2}(f,\varepsilon)\simeq L_{B_2}(\mathfrak{M},\varepsilon)$$

(континуальный аналог эффекта Шеннона). Если же

$$P(\varepsilon)=O(G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon))\quad\text{и}\quad G(\varepsilon)=O(G(\varepsilon/2)),$$

то справедливы равенства по порядку и неравенства

$$L_{B_2}(\mathfrak{M},\varepsilon)\asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M})/\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}),\quad \widetilde{L}_{B_2}(\mathfrak{M},\varepsilon)\asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M}),$$
$$\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})-O(1)\leqslant D_{B_2}(\mathfrak{M},\varepsilon)\leqslant\log P(\varepsilon)+$$
$$+\max\left(\log\log P(\varepsilon)+\log n+O(1),\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon})\right)\leqslant$$
$$\leqslant\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})-\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})+$$
$$+\max\left(\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})+\log n+O(1),\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon})\right).$$

Следствие 9. *Пусть класс $\mathfrak{M}_1$ состоит из всех таких функций*

$$f(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

что $0\leqslant c_{\mathbf{k}}\leqslant\mathcal{F}(\mathbf{k})$. Тогда

$$G(2\varepsilon)\leqslant H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)\leqslant G(2\varepsilon)+O(\varepsilon)\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(2\varepsilon)}1/\mathcal{F}(\mathbf{k})\leqslant G(2\varepsilon)+P(2\varepsilon).$$

Если

$$\mathcal{F}(\mathbf{k})\leqslant 4^{-n-1}a_{k_1}^{-1}\dots a_{k_n}^{-1}$$

то

$$\widetilde{L}_{B_3}(\mathfrak{M}_1,\varepsilon)\leqslant O(n\mathcal{P}(\varepsilon)),\quad D_{B_3}(\mathfrak{M}_1,\varepsilon)\leqslant\log(n\mathcal{P}(\varepsilon))+O(1).$$

Для почти всех $f\in\mathfrak{M}_1$ относительно соответствующей колмогоровской меры

$$L_{B_3}(f,\varepsilon)\gtrsim\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log 1/\varepsilon},\quad D_{B_3}(f,\varepsilon)\geqslant\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})-\log\log 1/\varepsilon-O(1).$$

□ Для доказательства следствия 9 достаточно воспользоваться равенством

$$\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\max_{\mathbf{k}}\{c_{\mathbf{k}}4^n a_{k_1}\dots a_{k_n}*4^{-n-1}a_{k_1}^{-1}\dots a_{k_n}^{-1}\}$$

и теоремами 3 (ii) и 1. В доказательстве следствия 8 применяется теорема 5 (i). □

Из следствий 2, 4, 8, 9 с помощью выбора функции $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ согласно равенству (15) вытекает

Следствие 10. *Для любых $\gamma>0$, $\alpha>1$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ существует такая функция $f\in C(I^n)$, что $f\in\mathfrak{M}$,*

$$H_\varepsilon(\mathfrak{M})\simeq\alpha\gamma(\log 1/\varepsilon)^\alpha(\log\log 1/\varepsilon)^{\beta+1},$$

и справедливы асимптотические равенства и равенства по порядку

$$L_{B_2}(f,\varepsilon)\simeq\gamma(\log 1/\varepsilon)^\alpha(\log\log 1/\varepsilon)^\beta,\quad \widetilde{L}_{B_2}(f,\varepsilon)\asymp(\log 1/\varepsilon)^\alpha(\log\log 1/\varepsilon)^{\beta+1},$$

$$D_{B_2}(f,\varepsilon)=\alpha\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}),$$

$$L_{B_3}(f,\varepsilon)\asymp\widetilde{L}_{B_3}(f,\varepsilon)\asymp(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}(\log\log 1/\varepsilon)^\beta,$$

$$D_{B_3}(f,\varepsilon)=(\alpha-1)\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}).$$

Существует также такая функция $g\in C(I^n)$, что для $B=\{xy,x+y\}\cup\mathbb{R}$

$$L_{B_1}(g,\varepsilon)\simeq\gamma(\log 1/\varepsilon)^\alpha(\log\log 1/\varepsilon)^\beta,\quad \widetilde{L}_{B_1}(g,\varepsilon)\asymp(\log 1/\varepsilon)^\alpha(\log\log 1/\varepsilon)^{\beta+1},$$

$$D_{B_1}(g,\varepsilon)=\alpha\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}),$$

$$L_B(g,\varepsilon)\asymp\widetilde{L}_B(g,\varepsilon)\asymp(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}(\log\log 1/\varepsilon)^\beta,$$

$$D_B(g,\varepsilon)=(\alpha-1)\log\log 1/\varepsilon+O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}),$$

причем при $n=1$ в последнем равенстве $O(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon})$ можно заменить на $O(1)$.

Следствие 10 показывает, что оценки теорем 2, 3, вообще говоря, по порядку достижимые. Можно привести и другие примеры применения следствий 8, 9, подобные следствию 10. Например, выбрав в определении классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ размерность $n=1$ и функцию

$$\mathcal{F}(k)=2^{-(\log k)^a},\quad\text{где}\quad a>1,$$

получаем после некоторых вычислений равенства

$$P(\varepsilon) = 2^{(\log 1/\varepsilon)^{1/a}} + O(1), \quad G(\varepsilon) \simeq H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \simeq \frac{a}{\ln 2} P(\varepsilon) \log^{a-1} P(\varepsilon),$$

$$G(\varepsilon) \simeq H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) \simeq G(2\varepsilon).$$

Тогда для почти всех $f \in \mathfrak{M}_1$ относительно соответствующей колмогоровской меры при $a > 2$ справедливы асимптотические равенства

$$L_{B_2}(f,\varepsilon) \simeq H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)/\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1),$$

при $a \geqslant 2$ — равенства по порядку

$$L_{B_2}(f,\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)/\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1), \quad \widetilde{L}_{B_2}(f,\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)$$

и при любом $a > 1$ — неравенства

$$\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) - O(1) \leqslant$$

$$\leqslant D_{B_2}(f,\varepsilon) \leqslant \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) + \log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) + O(\sqrt{\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)}),$$

$$\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)}{(\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1))^a} \ll L_{B_3}(f,\varepsilon) \leqslant \widetilde{L}_{B_3}(f,\varepsilon) \leqslant \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1)}{(\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1))^{a-1}},$$

$$\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) - \log\log 1/\varepsilon - O(1) \leqslant D_{B_3}(f,\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) - (a-1)\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) + O(1).$$

Выбрав функцию

$$\mathcal{F}(k) = 4\big((\|k\|+3)\log(\|k\|+3)(\log\log(\|k\|+3))^2\big)^{-1},$$

где $\|k\| = \max\limits_i k_i$, получим, что класс $\mathfrak{M}$ состоит из функций, удовлетворяющих по каждой переменной условию Липшица с множителем 1. Можно проверить, что справедливы равенства по порядку

$$P(\varepsilon) \asymp \big(\varepsilon(\log 1/\varepsilon)(\log\log 1/\varepsilon)^2\big)^{-n} \asymp G(\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M})$$

и из теоремы 8 следует, что для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$

$$\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \ll L_{B_2}(f,\varepsilon) \ll H_\varepsilon(\mathfrak{M}),$$

$$\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \ll L_{B_1}(f,\varepsilon) \ll H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}),$$

$$H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \ll \widetilde{L}_{B_2}(f,\varepsilon) \ll H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}),$$

$$\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) - O(1) \leqslant D_{B_2}(f,\varepsilon) \leqslant \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) + \log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) + O(\sqrt{\log\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})}).$$

Из теоремы 2 и теоремы Ньюмена (см. [19] с. 141) следует, что для $B = \{xy, x+y, 1/x\} \cup \mathbb{R}$ и почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$

$$\frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \ll \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \ll H_\varepsilon(\mathfrak{M}) \log^2 H_\varepsilon(\mathfrak{M}).$$

В случае $n = 1$ нижнюю оценку можно усилить до $H_\varepsilon(\mathfrak{M})$, рассуждая подобно доказательству теоремы 9 [17]. В том же случае для базиса

$$B = \{x + c, cx\colon\ |c| \leqslant 1\} \cup \{\max(x,y), -x, x/2\}$$

с помощью той же теоремы можно доказать существование такой функции $f \in \mathfrak{M}_1$, что справедливы равенства по порядку

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp H_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) \asymp \widetilde{L}_B(\mathfrak{M}_1,\varepsilon).$$

Метод, изложенный в параграфе 4, позволяет доказать существование такой функции $f \in C(I^n)$, у которой $(r-1)$-я производная по каждой переменной удовлетворяет условию Липшица и

$$\left(\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)(\log\log 1/\varepsilon)^2\right)^{-\frac{n}{r}}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ll L_B(f,\varepsilon) \ll \left(\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-\frac{n}{r}},$$

где $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$.

Упомянутую нижнюю оценку можно доказать также методом [1], но этот метод не дает верхних оценок; в качестве верхней оценки тогда придется взять оценку теоремы 5 [17]:

$$L_B(f,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-n/r})(\log 1/\varepsilon)^{-1}.$$

В некоторых случаях можно получить асимптотически точные оценки сложности приближения компактов растущей размерности, правда, если рост размерности ограничивается некоторой функцией от ε.

Следствие 11. *Пусть $\mathcal{M}$ — компакт с базисом, удовлетворяющий условиям следствия 2 при $\mathcal{F}(\mathbf{k}) = ce^{-(\mathbf{h},gk)}$. Тогда при ограниченных $\lambda = (\max h_i)/(\min h_i)$, $\|h\|$ и $n \to \infty$, но так, что $n^2 = o(logc/\varepsilon)\big/\log\log c/\varepsilon$, справедливы асимптотические равенства*

$$H_\varepsilon(\mathcal{M}) \simeq \left(\log c/\varepsilon\right)^{n+1}\big/\left((n+1)!(\log e)^n \prod_i h_i\right),\quad L_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \simeq H_\varepsilon(\mathcal{M})/\log H_\varepsilon(\mathcal{M}).$$

Для компакта аналитических функций $\mathcal{A}(\mathcal{E}^n, N, I^n)$ при ограниченных $\rho_i/|I_i|$, где ρ_i — сумма полосей эллипса $\mathcal{E}_i$, и ограниченном

$$(\max\log(2\rho_i/|I_i|))/(\min\log(2\rho_i/|I_i|))$$

при $n \to \infty$, но так, что $n^2 = o(\log N/\varepsilon)/\log\log N/\varepsilon$, справедливы асимптотические равенства

$$H_\varepsilon(\mathcal{A}) \simeq (\log N/\varepsilon)^{n+1} \Big/ \Big((n+1)! \prod_i \log(2\rho_i/|I_i|) \Big),$$

$$L_B(\mathcal{A}, \varepsilon) \simeq H_\varepsilon(\mathcal{A})/\log H_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

□ Повторяя с соответствующими уточнениями рассуждения § 7 [23], получаем, что

$$H_\varepsilon(\mathcal{M}) \leqslant (\log c/\varepsilon)^{n+1} \Big/ \Big((n+1)!(\log e)^n \prod_i h_i \Big) + \\ + ((\log c/\varepsilon)^n \log\log c/\varepsilon) \Big/ \Big(n!(\log e)^n \prod_i h_i \Big) + \\ + O\Big(\lambda (\log c/\varepsilon)^n \Big/ \Big((n-1)!(\log e)^n \prod_i h_i \Big) \Big),$$

а для класса, удовлетворяющего условиям леммы 3 § 7 [23]

$$H_\varepsilon(\mathcal{M}') \geqslant \Big((\log c'/\varepsilon)^{n+1} \Big/ \Big((n+1)!(\log e)^n \prod_i h_i \Big) \Big) (1 - O(n^2(\lambda + \log\log c'/\varepsilon))/m),$$

где $m \geqslant \ln c'/\varepsilon - n \ln\log c'/\varepsilon - O(1)$, откуда при $h_i = \ln(2\rho_i/|I_i|) \quad c = 2^n N$, $c' = N e^{O(\sum h_i/\log N/\varepsilon)}$ получаем нужные неравенства для $H_\varepsilon(\mathcal{A})$. Нужные оценки сложности получаются отсюда с помощью теорем 1 и 7, ибо вычисление величины T в теореме 7 в рассматриваемом случае совпадает с упоминавшимся вычислением ε-энтропии. □

§ 5 Классы с неэнтропийными оценками сложности. Существование «лакун» в мерах сложности некоторых функций

Как отмечалось во введении, из нижней оценки для $L_B(\mathcal{K}, \varepsilon)$ не следует никаких оценок для $L_B(f, \varepsilon)$ — мер сложности индивидуальных функций из K. А. Н. Колмогоров [22] поставил вопрос о существовании таких $f \in K$, что $L_B(f, \varepsilon) \asymp L_B(\mathcal{K}, \varepsilon)$. Интересен также вопрос о существовании таких $f \in K$, что $L_B(f, \varepsilon) \asymp L(\varepsilon)$, где $L(\varepsilon) = O(L_B(\mathcal{K}, \varepsilon))$ — заданная функция. Подобные вопросы о существовании функций с заданной точностью приближения пространствами полиномов ограниченной степени и вообще любыми флагами конечномерных подпространств рассматривались С. Н. Бернштейном [3]

и А. Ф. Тиманом [32], а о существовании компактов с заданными последовательностями поперечников — В. М. Тихомировым [33].

В следующей теореме доказывается существование функций с заданной сложностью приближенной реализации формулами в стандартном почти-конечном полиномиальном базисе, и функций, имеющих «лакуны» в соответствующих мерах сложности, как «формульной», так и «схемной».

Теорема 9.

(i) *Пусть функции* $L_i(\varepsilon)$, $L_1(\varepsilon) \geqslant 2L_2(\varepsilon)$, *монотонно стремятся к* ∞ *при* $\varepsilon \to 0$ *и не имеют «скачков», то есть*

$$\lim_{\delta \to \varepsilon -} L_i(\delta) = O(\lim_{\delta \to \varepsilon +} L_i(\delta)).$$

Тогда существует такая функция $f \in C(I)$, *что*

$$L_2(\varepsilon) \ll \widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \ll L_1(\varepsilon)$$

и для некоторых последовательностей $\{\varepsilon_{i,n}\}$, $i = 1, 2$, *таких, что*

$$\varepsilon_{1,n} < \varepsilon_{2,n}, \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_{1,n} = \lim_{n \to \infty} \varepsilon_{2,n} = 0,$$

справедливо равенство $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon_{i,n}) = L_i(\varepsilon_{i,n})$, *где* $B = \{xy, x + y\} \cup \mathbb{R}$.

(ii) *Существуют такие функции* $f \in C(I)$, *что меры сложности* $L_B(f, \varepsilon)$, $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon)$ *как для базиса* $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$, *так и для* $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ *содержат «лакуны», то есть для некоторой последовательности* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$

$$\left(\lim_{\delta \to 0+} L_B(f, \varepsilon_n - \delta)\right) \Big/ L_B(f, \varepsilon_n) \to \infty.$$

(iii) *Пусть* $L(\varepsilon) \leqslant O(\varepsilon^{-1/r})$, $r \notin \mathbb{N}$, *и не имеет «скачков», тогда существует такая функция* $f \in W(r, M_f, \|f\|, I)$, *что для* $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp L(\varepsilon),$$

а в случае $r \in \mathbb{N}$ *то же самое верно для некоторой функции*

$$f \in W_2(r, r + 1, M_f, \|f\|, I).$$

Если $\log L(\varepsilon) \leqslant o(\log 1/\varepsilon)$, *то существует функция* $f \in C^\infty(I)$, *а если* $L(\varepsilon) \leqslant O(\log 1/\varepsilon)$, *то функция* $f \in A(\mathcal{Э}, N_f, I)$, *такая, что* $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp L(\varepsilon)$.

□ Следуя одной идее С. Н. Бернштейна (не связанной с упоминавшимся выше его результатом), в качестве $f(x)$ возьмем $g(\arccos x)$, где $g(x)$ — функция типа Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\alpha} a_n \cos b_n x$, $3 \leqslant q_n = b_{n+1}/b_n \equiv 1 \pmod 2$, $a_n > 0$,

$\sum\limits_{n=m}^{\alpha} a_n = R_m$, а $\{R_m\}$ и $\{q_n\}$ выберем позднее. Так же, как и в [2, гл. 2, п. 42], проверяем, что среди всех тригполиномов порядка n, где $b_m \leqslant n < b_{m+1}$ наименее уклоняется от g только начальный отрезок S_m ее ряда Фурье, причем

$$\|g - S_m\| = R_{m+1}.$$

Отсюда следует, что для всех n $b_m \leqslant n < b_{m+1} \Longrightarrow E_n(f(x)) = R_{m+1}$, поэтому при $R_{m+1} \leqslant \varepsilon < R_m$ согласно теореме 5

$$b_m \leqslant \widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant 3b_m + 1.$$

Если $\varepsilon = R_{m+1}$, то $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) = \widetilde{L}_B(P_m)$, где $P_m = S_m(\arccos x)$, ибо $\widetilde{L}_B(P_m) \leqslant 3b_m + 1 < b_{m+1}$, а для любого другого полинома Q степени, меньшей b_{m+1}, имеем $\|Q - f\| > \|P_m - f\| = \|S_m - g\| = R_{m+1} = \varepsilon$.

Последовательности $\varepsilon_{i,n}$ и b_n определяем по индукции. Выберем число $\varepsilon_{2,n}$ так, чтобы $2b_n \leqslant L_2(\varepsilon_{2,n}) = O(b_n)$, а $\varepsilon_{1,n} < \varepsilon_{2,n}$ так, чтобы

$$L_1(\varepsilon_{1,n}) \asymp L_1(\varepsilon_{2,n}), \quad \varepsilon_{1,n} \in [R_{n+2}, R_{n+1}).$$

Выберем нечетное $q_n \geqslant 3$ так, чтобы $b_n q_n \leqslant L_1(\varepsilon_{2,n}) \leqslant b_n(q_n + 2)$ и положим $b_{n+1} = b_n q_n$, чем и завершим индуктивный шаг определения. Определим последовательность a_n так, чтобы $R_{n+1} = \varepsilon_{2,n}$. Согласно этим определениям $R_{n+1} \leqslant \varepsilon < R_n \Longrightarrow$

$$L_2(\varepsilon) \leqslant L_2(R_{n+1}) = L_2(\varepsilon_{2,n}) \asymp b_n \ll \widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \ll L_1(\varepsilon_{2,n-1}) = L_1(R_n) \leqslant L_1(\varepsilon),$$

значит всегда $L_2(\varepsilon) \ll \widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \ll L_1(\varepsilon)$. Кроме того, $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon_{2,n}) = \widetilde{L}_B(f, R_{n+1}) = \widetilde{L}_B(P_n) \asymp b_n \asymp L_2(\varepsilon_{2,n})$, а так как $\varepsilon_{1,n} \in [R_{n+2}, R_{n+1})$, то справедливы равенства по порядку

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon_{1,n}) \asymp b_{n+1} \asymp L_1(\varepsilon_{2,n}) \asymp L_1(\varepsilon_{1,n}).$$

Пункт (i) доказан.

Докажем (ii). Обозначим $\mathfrak{C}(f, \varepsilon)$ произвольную из упомянутых в теореме мер сложности. Определим $a_n = 2^{-n}$ и выберем b_m по индукции так, чтобы $(\log b_{m+1})/\mathfrak{C}(P_m) \to \infty$ (так как $P_n = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m T_{b_m}(x)$, то величина $\mathfrak{C}(P_m)$ конечна, ибо P_m точно реализуется в $B = \{x - y, xy, 1/2\}$). Из результатов п. (i) и (1) следует, что

$$\mathfrak{C}(f, R_{m+1} - O) \geqslant \log b_{m+1}, \quad \mathfrak{C}(f, R_{m+1}) = \mathfrak{C}(P_m),$$

откуда и следует утверждение теоремы. Пункт (ii) доказан.

Докажем (iii). Выберем $L_1(\varepsilon) = 2L_2(\varepsilon) = 2[L(\varepsilon)]$, тогда с помощью п. (i) получаем, что при $b_n = (2k + 1)^n$, где k — константа, зависящая от L, и

$L(R_{n+1} \asymp b_n$ справедливо равенство $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon)$. Заметим, что оно справедливо и для приближения только на отрезке $[-2/3, 2/3]$. Достаточно проверить нижнюю оценку. Доказательство нижней оценки в п. (i) основывалось на замечании, что если полином Q на отрезке $[-1,1]$ уклоняется от f не более чем на R_{m+1}, то его степень не меньше b_m. Покажем, что то же верно и для отрезка $[-2/3, 2/3]$. Как и в [2, гл. 2, п. 42] заметим, что тогда разность $Q - P_m$ имеет на отрезке $[-2/3, 2/3]$ корней с учетом кратности не менее, чем на отрезке $[\arccos 2/3, \arccos(-2/3)]$ имеет экстремумов $\cos b_{m+1}x$, то есть больше b_m, значит, и степень Q больше b_m. Тем самым равенство $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon)$ верно и для для отрезка $[-2/3, 2/3]$.

Пусть $L(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1/r})$, тогда обратная к L функция

$$L^{-1}(n) = \inf\{\varepsilon\colon\ L(\varepsilon) \leqslant n\} = O(n^{-r}),$$

откуда при некотором $c > 0$

$$a_n = R_n - R_{n+1} \leqslant L^{-1}(cb_{n-1}) = O(b_n^{-r}).$$

Достаточно проверить, что на отрезке $[-2/3, 2/3]$ $f \in W_{]r-1[}H^\alpha$, $\alpha = r-]r-1[$, если $r \notin \mathbb{N}$, и $f \in W_{r-1}Z$ при $r \in \mathbb{N}$ (H^α — класс Гельдера с показателем α, Z — класс Зигмунда, состоящий из всех функций, у которых $\omega_2(t) = O(t)$), в случае произвольного отрезка I сделаем линейную замену переменных.

Пусть $r \notin \mathbb{N}$. Тогда надо доказать, что

$$D^{]r-1[}f = \sum_{m=0}^{\alpha} a_m D^{]r-1[}T_{b_m}(x) \in H^\alpha.$$

Разобьем сумму на части $\sum\limits_{b_m \leqslant 1/h}$ и $\sum\limits_{b_m > 1/h}$. Последняя оценивается с помощью неравенства Бернштейна (см. [19, 32, 33]) как

$$O\biggl(\sum_{b_n > 1/h} b_n^{-r} b_n^{]r-1[}\biggr) = O\biggl(\sum_{b_n > 1/h} b_n^{-\alpha}\biggr) = O(h^\alpha).$$

Модуль непрерывности первой суммы оценивается как

$$\omega(h) = O\biggl(\sum_{b_n \leqslant 1/h} b_n^{-r} h \|D^{]r[}T_{b_m}\|_{C[-2/3,2/3]}\biggr) = O\biggl(\sum_{b_n \leqslant 1/h} b_n^{1-\alpha} h\biggr) = O(h^\alpha).$$

Отсюда $\omega(D^{]r-1[}f, h) = O(h^\alpha)$, значит, $D^{]r-1[}f \in H^\alpha$.

Если $r \in \mathbb{N}$, то модуль непрерывности второго порядка первой суммы оценивается как

$$\omega_2(h) = O\biggl(\sum_{b_n \leqslant 1/h} b_n^{-r} h^2 \|D^{r+1}T_{b_m}\|_{C[-2/3,2/3]}\biggr) = O\biggl(\sum_{b_n \leqslant 1/h} b_n h^2\biggr) = O(h),$$

аналогично оценивается вторая сумма и получается, что $D^{r-1}f \in Z$.

С помощью теоремы А. Ф. Тимана – Ю. А. Брудного [19, 32] можно получить, что для любого r на отрезке $[-1,1]$ $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1/r})$, но это далее не понадобится. Так как в силу той же теоремы для любой f, $f \in W(r, M_f, \|f\|, I)$ или $f \in W_2(r, r+1, M_f, \|f\|, I)$ в случае $r \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \leqslant O(\varepsilon^{-1/r}),$$

то ослабить соответствующее условие на $L(\varepsilon)$ нельзя.

Пусть теперь $\log L(\varepsilon) = o(\log 1/\varepsilon)$, тогда при любом $c > 0$

$$L^{-1}(n) = O(n^{-c}), \quad a_n = R_n - R_{n+1} \leqslant L^{-1}(kb_{n-1}) = O(b_n^{-c}),$$

откуда с помощью теорем о дифференцировании рядов следует, что $f \in C^\infty(I)$. Условие $\log L(\varepsilon) = o(\log 1/\varepsilon)$ ослабить нельзя, так как если $f \in C^\infty(I)$, то для любого r имеем $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1/r})$.

Если же $L(\varepsilon) = O(\log 1/\varepsilon)$, то аналогично $a_n \leqslant 2^{-cn}$, и согласно [23] $f \in \mathcal{A}(\mathcal{Э}, N, I)$ при подходящем эллипсе $\mathcal{Э}$. Условие ослабить нельзя, так как если $f \in \mathcal{A}(\mathcal{Э}, N, I)$, то $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) = O(\log 1/\varepsilon)$ согласно § 4.

Можно еще дополнительно доказать, что для построенных функций f и базиса $B = \{x-y, xy, 1/2\}$ $L_B(f,\varepsilon) = O(L(\varepsilon - \varepsilon^2))$ при $L(\varepsilon) \gg \log 1/\varepsilon \log\log 1/\varepsilon$. Заметим еще, что если в формулировке теоремы условие отсутствия скачков заменить на более сильное условие, что функции L_i не имеют двусторонних разрывов и $L_i(\mathbb{R}_+)$ содержит все натуральные числа, начиная с некоторого, и $L_1(\varepsilon)/L_2(\varepsilon) \to \infty$, то в п. (i) неравенства можно заменить на неравенства

$$(L_2(\varepsilon) - 2)/3 \leqslant \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \leqslant 3L_1(\varepsilon) + 1,$$

а равенства по порядку — на равенства $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon_{2,n}) = L_2(\varepsilon_{2,n})$ и неравенства $L_1(\varepsilon_{1,n}) \lesssim \widetilde{L}_B(f,\varepsilon_{1,n}) = 3L_1(\varepsilon_{1,n}) + 1$.

В оставшейся части параграфа будет получен некоторый аналог теоремы 7 и указаны примеры классов, для которых можно получить оценки сложности неэнтропийного вида.

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\alpha} a_n T_{3^n}(x)$, где $|a_n| \leqslant \mathcal{F}(n)$, $\mathfrak{M}_0$ — его подкласс, определяемый неравенствами $\mathcal{F}(n)/2 \leqslant a_n$, а $g_{\mathfrak{M}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\alpha} \mathcal{F}(n) T_{3^n}(x)$. Напомним обозначения § 4:

$$Q(u) = \sum_{\mathcal{F}(k) \geqslant u} \log 1/\mathcal{F}(k), \quad R(u) = \sum_{\mathcal{F}(k) < u} \mathcal{F}(k),$$
$$v(u) = \max\{v\colon\ R(v) \leqslant u/2\}, \quad S(u) = \{k\colon\ \mathcal{F}(k) \geqslant v(u)\}, \quad s(u) = |S(u)|.$$

Допустим, что $\sum\limits_{k>n} \mathcal{F}(k) \leqslant n\mathcal{F}(n)$ или, что равносильно, $\{nR_n\}$ монотонно не возрастает, где $R_n = \sum\limits_{k \geqslant n} \mathcal{F}(k)$. Тогда введенная в § 4 функция

$w(u) = \max\{v(u), \delta(u)\}$, где $\delta(u) = u/(2s(u))$, будет равна $v(u)$ и поэтому $T(u) = s(u)\log 2/\delta(u) - Q(w(u)) = s(u)\log 4s(u)/u - Q(v(u))$.

Теорема 10. *Пусть* $B = \{xy, x-y, 1/2\}$ *и* $B_R = \{xy, x-y\} \cup \mathbb{R}$. *Тогда*

(i) $$L_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)} \left(1 + \frac{3\log\log T(\varepsilon) + O(1)}{\log T(\varepsilon)}\right) + O(s(\varepsilon))$$

и для почти всех $f \in \mathfrak{M}$ *относительно некоторой колмогоровской меры*

$$L_B(f, \varepsilon) \geqslant \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)} \left(1 + \frac{\log\log T(\varepsilon) - O(1)}{\log T(\varepsilon)} - O(1/\log^a s(\varepsilon))\right),$$

если при всех k *верно, что* $\log \mathcal{F}(k-1)/\mathcal{F}(k) \gg (\log^a k)/k$. *Последнее условие выполняется для не слишком медленно убывающих* $\mathcal{F}(k)$, *например, для* $\mathcal{F}(k) = 2^{-\log^c k}$ *при* $c \geqslant a+1$. *Если к тому же* $a \geqslant 1$ *и* $\log s(\varepsilon) \gg \log\log 1/\varepsilon$, *то вычитаемое в скобках можно не писать.*

При выполнении условия $\log \mathcal{F}(k-1)/\mathcal{F}(k) \gg (\log^a k)/k$, $a > 1$, *в верхней оценке последнее слагаемое можно заменить на слагаемое* $O(1/\log^{a-1} T(\varepsilon))$ *внутри скобок.*

(ii) *Пусть* $\mathcal{F}(k) \leqslant k^{-2-c}$, *где* $c > 0$, *тогда*

$$\widetilde{L}_{B_R}(g_{\mathfrak{M}}, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{B_R}(\mathfrak{M}, \varepsilon) \asymp 3^{s(2\varepsilon)} \ll \widetilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant O(3^{s(2\varepsilon)}) + s(2\varepsilon)\log 1/\varepsilon,$$

причем, очевидно, уже при $3^{s(\varepsilon)} \gg \log 1/\varepsilon \log\log 1/\varepsilon$ *последнее слагаемое поглощается первым и тогда справедливы равенства по порядку*

$$\widetilde{L}_{B_R}(g_{\mathfrak{M}}, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{B_R}(\mathfrak{M}, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_B(g_{\mathfrak{M}}, \varepsilon) \asymp 3^{s(2\varepsilon)}.$$

Кроме того, для всех функций $f \in \mathfrak{M}_0$ *верно, что* $\widetilde{L}_{B_R}(f, \varepsilon) \gg 3^{s(4\varepsilon)}$ *и для почти всех* $f \in \mathfrak{M}_0$ *относительно некоторой колмогоровской меры*

$$L_B(f, \varepsilon) \gtrsim \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)}.$$

Если к тому же $\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(n+1) > C > 1$, *то для всех функций* $f \in \mathfrak{M}_0$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp 3^{s(\varepsilon)}.$$

Следствие 12.

(i) *Если* $\mathcal{F}(n)$ *удовлетворяет условиям* (15), *то*

$$L_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)} \left(1 + \frac{3\log\log T(\varepsilon) + O(1)}{\log T(\varepsilon)}\right)$$

и для почти всех $f \in \mathfrak{M}$ *относительно некоторой колмогоровской меры*

$$L_B(f, \varepsilon) \geqslant \frac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)} \left(1 + \frac{\log\log T(\varepsilon) - O(1)}{\log T(\varepsilon)}\right),$$

а также справедливы равенства по порядку

$$\widetilde{L}_B(\mathfrak{M},\varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{B_R}(\mathfrak{M},\varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{B_R}(g_{\mathfrak{M}},\varepsilon) \asymp \widetilde{L}_B(g_{\mathfrak{M}},\varepsilon) \asymp 3^{s(2\varepsilon)},$$

причем при $q \geqslant 1$ *для всех* $f \in \mathfrak{M}_0$ *имеем* $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{B_R}(f,\varepsilon) \asymp 3^{s(\varepsilon)}$.

(ii) *Если* $\mathcal{F}(n) = 2^{-\log^a n}$, $a > 1$, *то* $T(\varepsilon) \simeq s(\varepsilon)\log^{\max(a-1,1)} s(\varepsilon)$, *для почти всех* $f \in \mathfrak{M}$ *справедливо равенство* $L_B(f,\varepsilon) \asymp \dfrac{T(\varepsilon)}{\log T(\varepsilon)}$, *а если* $a > 2$, *то выполнены первые три соотношения п.* (i).

(iii) *Если в определении класса* $\mathfrak{M}$ *систему* $\{T_{3^n}(x)\}$ *заменить на систему* $\{T_{3^{3^n}}(x)\}$, *то в верхних оценках для* $L_B(\mathfrak{M},\varepsilon)$ *величину* $O(s(\varepsilon))$ *надо заменить на* $O(3^{s(\varepsilon)})$, *нижнюю оценку для* $\widetilde{L}_{B_R}(g_{\mathfrak{M}},\varepsilon)$, *заменить на* $3^{2^{s(2\varepsilon)}-1}$, *а нижние оценки для* $\widetilde{L}_{B_R}(f,\varepsilon)$, $f \in \mathfrak{M}_0$, *заменить на* $3^{2^{s(4\varepsilon)}-1}$, *откуда следует, что* $L_{B_R}(f,\varepsilon) \gg 2^{s(4\varepsilon)}$.

Если выбрать $\mathcal{F}(n)$ *как в п.* (i) *и* (ii), *то* $T(\varepsilon) = o(2^{s(\varepsilon)})$, *значит, для всех* $f \in \mathfrak{M}_0$ *имеем* $2^{s(4\varepsilon)} \ll L_B(f,\varepsilon) \ll 2^{s(\varepsilon)}$, *а в случае* $q \geqslant 1$ *справедливо равенство по порядку* $L_B(f,\varepsilon) \asymp 2^{s(\varepsilon)}$.

□ Нижняя оценка для $L_B(f,\varepsilon)$ получается так же, как и в теореме 1, только надо заметить, что ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(f) \cap \mathfrak{M}$ содержится в множестве

$$V_{2\varepsilon,n}(f) = \left\{ g \in \mathfrak{M}\colon\ f - g = \sum_{n=0}^{\alpha} a_n T_{3^n}(x),\ \sum_{n=0}^{\alpha} |a_n| \leqslant 2\varepsilon \right\},$$

ибо если $g \in \mathcal{O}_\varepsilon(f) \cap \mathfrak{M}$, то

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant \|g - f\| \leqslant \varepsilon,$$

так как система $\{T_{3^n}(x)\}$ изометрична системе $\{\cos 3^n x\}$, которая удовлетворяет условиям леммы 7 (такие системы называются в [20] сидоновскими).

Лемма 7. *Для любой последовательности* $\{a_n\}$

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 3^n x \right\| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\alpha} |a_n|.$$

Для доказательства достаточно выбрать

$$x = -\pi/2 + \sum_{n=0}^{\infty} \pi(\operatorname{sign} a_n)/3^{n+1}$$

и заметить, что $3^n x = (\pi/2)x_n + \pi(\operatorname{sign} a_n)/3 + y_n$, где $|y_n| \leqslant \pi/6$, $x_n = -3^n + 2\sum\limits_{m=0}^{n-1} \pm 3^m \equiv 3 \pmod 4$ (ибо $x_{n+1} - x_n = 0$ или $-4 \cdot 3^n$), откуда следует, что

$$a_n \cos 3^n x > |a_n|/2.\ \square$$

Далее оценивается мера множества $V_{2\varepsilon,n}(f)$ как

$$(2\varepsilon)^{n+1} \Big/ \left((n+1)! \prod_{k=0}^{n} \mathcal{F}(k) \right)$$

и $L(\varepsilon)$ выбирается с целью применения леммы Бореля – Кантелли так, чтобы $(3 + L(\varepsilon))(\log \Omega(L(\varepsilon))) \leqslant H(\varepsilon) = T(\varepsilon) - O(s(\varepsilon))$. Отсюда, как и в теореме 1, выводится, что для почти всех $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f,\varepsilon) \geqslant \frac{H}{\log H} \left(1 + \frac{\log\log H - O(1)}{\log H} \right).$$

Остается применить лемму 8.

Лемма 8.
(i) $T(u) \leqslant s(u) \log 4s(u)/u$.
(ii) *Если при всех* k $\log \mathcal{F}(k-1)/\mathcal{F}(k) \asymp (\log^a k)/k$, *то*

$$T(u) \gtrsim s(u) \log^a s(u).$$

□ Пункт (i) очевиден. Пункт (ii) следует из преобразования Абеля и интегрального признака сходимости:

$$T(u) = s(u) \log 4s(u)/u - Q(v(u)) =$$
$$= s(u) + \sum_{n=1}^{s(u)-1} n \log(\mathcal{F}(n-1)/\mathcal{F}(n)) \gtrsim \sum_{n=1}^{s(u)-1} \log^a n \asymp s(u) \log^a s(u). \ \square$$

Для класса $\mathfrak{M}_0$ доказательство аналогично. □

Верхняя оценка для $L_B(\mathfrak{M},\varepsilon)$ следует из теоремы 7 и леммы 9.

Лемма 9. *Сложность реализации системы* $\{T_{3^n}(x)\colon\ n \leqslant m\}$ *в базисе* B *схемами равна по порядку* m, *а формулами —* 3^m.

□ Верхние оценки следуют из тождеств

$$T_{3^n}(x) = T_3(T_{3^{n-1}}(x)), \quad T_{3^n}(x) = (4T_{3^{n-1}}(x)T_{3^{n-1}}(x) - 3)T_{3^{n-1}}(x).$$

Первая нижняя оценка очевидна, а вторая следует из леммы 17 [17]. □

Пусть теперь $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) T_{3^n}(x) \in \mathfrak{M}$. Так как

$$\left\| g - \sum_{n=0}^{m} a(n) T_{3^n}(x) \right\| \leqslant R_{m+1},$$

то согласно определениям функции $s(u)$ и леммам 2 и 9 [17]

$$\widetilde{L}_{B_R}(g,\varepsilon)\leqslant\Omega\biggl(\widetilde{L}_{B_R}\biggl(\sum_{n=0}^{s(2\varepsilon)-1}a(n)T_{3^n}(x)\biggr)\biggr)=\Omega(3^{s(2\varepsilon)}),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_B(g,\varepsilon)&\leqslant\Omega\biggl(\widetilde{L}_B\biggl(\sum_{n=0}^{s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)-1}a(n)T_{3^n}(x),\varepsilon^2\biggr)\biggr)\leqslant\\&\leqslant O(s(2\varepsilon-2\varepsilon^2))+\sum_{n=0}^{s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)-1}\widetilde{L}_B(a(n),\varepsilon^2/s(2\varepsilon-2\varepsilon^2))+O(3^{s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)})\leqslant\\&\leqslant O(3^{s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)}+s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)\log 1/\varepsilon).\end{aligned}$$

Для получения верхних оценок остается доказать леммы 10 и 11.

Лемма 10. *Пусть* $\mathcal{F}(k)\leqslant k^{-2-c}$, *где* $c>0$, *тогда*

$$s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)\leqslant s(2\varepsilon)+1.$$

□ Так как

$$\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon)}\mathcal{F}(n)\leqslant\varepsilon,\quad\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)}\mathcal{F}(n)\leqslant\varepsilon-\varepsilon^2,$$
$$\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon)-1}\mathcal{F}(n)>\varepsilon,\quad\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)-1}\mathcal{F}(n)>\varepsilon-\varepsilon^2,$$

то можно считать, что

$$\varepsilon-\varepsilon^2<\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon)}\mathcal{F}(n)\leqslant\varepsilon,$$

иначе уже $s(2\varepsilon-2\varepsilon^2)=s(2\varepsilon)$. Отсюда

$$s(2\varepsilon)^{-1-c}\gg(s(2\varepsilon)+1)\mathcal{F}(s(2\varepsilon))\geqslant\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon)}\mathcal{F}(n)\gtrsim\varepsilon,$$

$s(2\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1+c})$, $\mathcal{F}(s(2\varepsilon))\gg\varepsilon^{2-c}>\varepsilon^2$ при $\varepsilon<\varepsilon_0$, значит, $\sum\limits_{n\geqslant s(2\varepsilon)+1}\mathcal{F}(n)\leqslant$ $\leqslant\varepsilon-\mathcal{F}(s(2\varepsilon))<\varepsilon-\varepsilon^2$, откуда и следует лемма. □

Лемма 11. *Пусть при всех* n $\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(n+1)>C>1$, *тогда* $s(\varepsilon)\leqslant s(2\varepsilon)+$ $+O(1)$.

□ Так как

$$\sum_{n\geqslant s(2\varepsilon)}\mathcal{F}(n)\leqslant\varepsilon,$$

то $\mathcal{F}(s(2\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$, значит, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что $\mathcal{F}(s(2\varepsilon)+\Delta) < \delta\varepsilon$, а так как

$$\sum_{k \geqslant n} \mathcal{F}(k) \leqslant \mathcal{F}(n) \sum_{k=0} C^{-k} = \mathcal{F}(n)/(1-1/C),$$

то при $\delta = (1-1/C)/2$

$$\sum_{n \geqslant s(2\varepsilon)+\Delta} \mathcal{F}(n) \leqslant \mathcal{F}(s(2\varepsilon)+\Delta)/(1-1/C) < \delta\varepsilon/(1-1/C) \leqslant \varepsilon/2,$$

откуда $s(\varepsilon) \leqslant s(2\varepsilon)+\Delta$. □

Рассмотрим $g_{\mathfrak{M}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}(n) T_{3^n}(x)$. Согласно полученной при доказательстве теоремы 9 импликации

$$R_{m+1} \leqslant \varepsilon < R_m \Longrightarrow \widetilde{L}_{B_R}(g_{\mathfrak{M}}, \varepsilon) \geqslant b_m = 3^m,$$

а согласно определению функции $s(u)$ имеем $m+1 = s(2\varepsilon)$, откуда и следует нижняя оценка. Из нее вытекают нижние оценки для произвольных функций $f \in \mathfrak{M}_0$, если заметить, что $R_n/2 \leqslant R'_n \leqslant R_n$, где

$$R_n = \sum_{k \geqslant n} \mathcal{F}(k), \quad R'_n = \sum_{k \geqslant n} a_k(f),$$

и вывести отсюда, что

$$s'(2\varepsilon) - 1 = \min\{n\colon\ R'_n \leqslant \varepsilon\} \geqslant \min\{n\colon\ R_n \leqslant 2\varepsilon\} = s(4\varepsilon) - 1. \ \square$$

§ 6 О существовании функций со сложностью приближенного вычисления, по порядку совпадающей с заданной

Покажем, что с использованием системы Фабера – Шаудера (см. [20], с. 214) можно методом параграфа 3 получить во многих случаях точные по порядку результаты о существовании «самых сложных» функций. Как и ранее, обозначим $W(r, M, N, I^n)$ класс всех функций $f \in C(I^n)$, у которых $\|f\| \leqslant N$ и по каждой переменной производная порядка $]r-1[$ удовлетворяет условию Гельдера

$$\omega(\tau) \leqslant M\tau^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = r -]r-1[.$$

Теорема 11. *Для любых* $r \notin \mathbb{N}$, $r, M, N \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *в классе* $W(r, M, N, I^n)$ *существуют такие функции* f, *что для базиса* $B = \{xy, x - y, 1/2\}$ *справедливы равенства по порядку*

$$L_B(f, \varepsilon) \asymp \frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)} \asymp \frac{\varepsilon^{-n/r}}{\log 1/\varepsilon},$$

а для базиса $B = \{xy, x - y, |x|, 1/2\}$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp H_\varepsilon(W), \quad D_B(f, \varepsilon) \simeq \log H_\varepsilon(W).$$

□ Верхние оценки следуют из теорем 5–7 [17]. Нижняя оценка для глубины вытекает из оценки для $\widetilde{L}(f, \varepsilon)$ с помощью соотношения (1). Докажем остальные оценки. Для простоты предположим, что $I^n = [0, 1]^n$ и рассмотрим вначале случай $n = 1$.

Рассмотрим систему Фабера – Шаудера $\{\varphi_k(x)\}$, где $\varphi_1(x) = x$ и для любых $m \in \mathbb{N}$, $k = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1}$

$$\varphi(x) = \max(1 - 2^{m+1}|x + 1 - (2k - 1)2^{-m-1}|, 0).$$

Система $\{2\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условиям (2) параграфа 2 при $A = 2$. Действительно, $\|\varphi_k(x)\| = 1$ и справедлива

Лемма 12.

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} c_k \varphi_k(x) \right\| \geqslant \frac{1}{2} \max |c_k|. \tag{17}$$

□ В справедливости неравенства (17) можно убедиться индукцией по s. База ($s = 1$) очевидна. Шаг индукции. Представим функцию

$$f = \sum_{k=1}^{s} c_k \varphi_k(x)$$

в виде

$$f = h + g = \sum_{k=1}^{2^t} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=2^t+1}^{s} c_k \varphi_k(x),$$

где $2^t < s \leqslant 2^{t+1}$, и заметим, что

$$\|g\| = \max_{2^t < k \leqslant s} |c_k| = \max_{x \in M_t} |g(x)|,$$

где

$$M_t = \{(2i - 1)2^{-t-1} \colon\ i = 1, 2, \ldots, 2^t\}.$$

Так как $g(x) = 0$ при $x \in N_t = \bigcup_{i=0}^{t-1} M_i$, то из предположения индукции следует, что

$$\|f\| \geqslant \max_{x \in N_t} |h(x)| = \|h\| \geqslant \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant k \leqslant 2^t} |c_k|.$$

Можно считать, что

$$\|h\| < \frac{1}{2} \max_{2^t < k \leqslant s} |c_k|,$$

иначе все уже доказано. Тогда

$$\|f\| \geqslant \|g\| - \|h\| > \frac{1}{2} \max_{2^t < k \leqslant s} |c_k|$$

и все опять доказано. □

Построим последовательность векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, в которой $\alpha_1 = (1, -1)$ и каждый следующий вектор получается из предыдущего приписыванием в его конце всех его компонент в обратном порядке с противоположными знаками:

$$\alpha_{i+1} = (\alpha_{i+1,1}, \ldots, \alpha_{i+1,2^{i+1}}) = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,2^i}, -\alpha_{i,2^i}, \ldots, -\alpha_{i,1}).$$

Положим

$$\varphi^{(r)} = \sum_{i=1}^{2^{r-1}} \alpha_{r-1,i} \varphi_{2^{r-1}+i} \tag{18}$$

и определим сплайн $\psi^{(r)}$ степени r с носителем $[0, 1]$ так, чтобы

$$D^{r-1} \psi^{(r)} = \varphi^{(r)}. \tag{19}$$

Индукцией по r проверяем, что на каждом отрезке $[(i-1)2^{-r}, i2^{-r}]$ сплайн $\psi^{(r)}$ совпадает с некоторым полиномом. Выберем ρ так, чтобы $2^{\rho-1} < r \leqslant 2^\rho$, и положим

$$\tilde{r} = r + \rho, \quad s_0 = 0,\ s_1 = 1, \ldots,\ s_l = \sum_{i=0}^{l-1} 2^{i\tilde{r}}, \ldots, \quad \varphi_1^{(r)} = \psi^{(r)}.$$

Для любого $k \in (s_l, s_{l+1}]$ определим функцию $\varphi_k^{(r)}$ как

$$\psi^{(r)}(2^{l\tilde{r}} x - k + s_l + 1).$$

Тогда

$$\operatorname{supp} \varphi_k^{(r)} = [(k - s_l - 1)2^{l\tilde{r}}, (k - s_l)2^{l\tilde{r}}]$$

и система $\{a_r \varphi_k^{(r)}\}$ удовлетворяет условиям (2) параграфа 2 при подходящем a_r. Для доказательства проверим с помощью индукции по r, что

$$\|\varphi_k^{(r)}\| \leqslant O_r(1),$$

и установим, что справедлива

Лемма 13.

$$\max_{1\leqslant k\leqslant s}|c_k| = O_r\left(\left\|\sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k^{(r)}(x)\right\|\right).$$

□ Для ее доказательства потребуется

Лемма 14. *Для любого полинома $p(x)$ степени d, числа $k\leqslant d$ и $(q+1)$-точечного множества M_q, разбивающего отрезок I на $q\geqslant d$ равных отрезков, справедливо неравенство*

$$\|D^k p\|_{C(I)} \leqslant O_q(|I|^{-k}\max_{x\in M_q}|p(x)|).$$

□ Из неравенств В. А. и А. А. Марковых [32] следует, что

$$\|D^k p\|_{C(I)} = O_d(|I|^{-k}\|p(x)\|_{C(I)}).$$

Неравенство

$$\|p\|_{C(I)} = O_q(\max_{x\in M_q}|p(x)|)$$

доказывается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа и очевидной оценки для суммы модулей фундаментальных полиномов Лагранжа. □

Индукцией по s докажем неравенство

$$\|f\| \geqslant \max_{x\in N_{(l+1)\tilde r}}|f(x)| \geqslant b_r \max_{1\leqslant k\leqslant s}|c_k|, \quad \text{где} \quad s_l < s \leqslant s_{l+1}. \tag{20}$$

В качестве базы используем неравенство

$$\|f\| \geqslant \max_{x\in N_{\tilde r}}|f(x)| = |c_1|\max_{x\in N_{\tilde r}}|\psi^{(r)}(x)| \geqslant b_r|c_1|.$$

Представим функцию

$$f = \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k^{(r)}(x)$$

в виде

$$h+g = \sum_{k=1}^{s_l} c_k\varphi_k^{(r)}(x) + \sum_{k=s_l+1}^{s} c_k\varphi_k^{(r)}(x),$$

где $s_l < s \leqslant s_{l+1}$. Так как $g(x) = 0$ при $x\in N_{l\tilde r}$, то по предположению индукции

$$\|f\| \geqslant \max_{x\in N_{(l+1)\tilde r}}|f(x)| \geqslant \max_{x\in N_{l\tilde r}}|h(x)| \geqslant b_r \max_{1\leqslant k\leqslant s_l}|c_k|. \tag{21}$$

Рассмотрим производную $r-1$-го порядка

$$D^{r-1}f = \sum_{k=1}^{s} c_k D^{r-1}\varphi_k^{(r)}(x) = \sum_{p=0}^{l}\sum_{k=s_p+1}^{\min(s_{p+1},s)} c_k 2^{p\tilde r(r-1)} D^{r-1}\psi^{(r)}(2^{p\tilde r}x-k+s_p+1).$$

Разлагая ее по системе $\{\varphi_k\}$ и используя соотношения (17)–(19), получаем, что

$$\|D^{r-1}f\| \geqslant \max_{s_l<k\leqslant s} |c_k| 2^{l\tilde{r}(r-1)-1}.$$

Применяя лемму 14 к каждому из отрезков

$$[i2^{-(l\tilde{r}+r)}, (i+1)2^{-(l\tilde{r}+r)}],$$

выводим отсюда, что при достаточно малом b_r

$$\|f\| \geqslant \max_{x\in N_{(l+1)\tilde{r}}} |f(x)| \geqslant b_r \max_{s_l<k\leqslant s} |c_k|.$$

Вместе с (21) это и дает неравенство (20). □

Выберем $\mathcal{F}(k) = Ck^{-r}$, где $C, r \in \mathbb{R}_+$, и определим так же, как и в параграфе 1 класс $\mathfrak{M}$ по системе $\{a_r\varphi_k^{]r[}\}$ (а в случае $r \leqslant 1$ — по системе $\{2\varphi_k\}$). Так как для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ имеет место разложение

$$f = \sum_k c_k \varphi_k^{]r[},$$

где $|c_k| \leqslant \mathcal{F}(k)$, то ее производная $D^{]r-1[}f$ согласно (17)–(18) представима рядом

$$\sum_k O_r(k^{-\alpha})\varphi_k, \quad \text{где} \quad \alpha = r -]r-1[.$$

Поэтому согласно теореме Чисельского (см. [20], с. 221) при $r \notin \mathbb{N}$

$$\mathfrak{M} \subseteq W(r, O_r(1), O_r(1), [0,1]). \tag{22}$$

Применяя теорему 2, получаем, что для почти всех функций $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f,\varepsilon) \gg G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon), \quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \gg G(\varepsilon),$$

где $B = \{x-y, xy, |x|, 1/2\}$,

$$G(\varepsilon) = \sum_{k\in\mathcal{P}(\varepsilon)} \log \mathcal{F}(k)/\varepsilon \geqslant P(\varepsilon)\log\frac{c}{\varepsilon} - r\log(P(\varepsilon)!) \geqslant$$
$$\geqslant P(\varepsilon)\log\frac{c}{\varepsilon} - r(P(\varepsilon)\log P(\varepsilon) - P(\varepsilon)\log e + O(\log P(\varepsilon))) \gtrsim \varepsilon^{-1/r}.$$

Из полученных неравенств и включения (22) следуют нужные оценки.

В случае $n > 1$ рассмотрим произведение n экземпляров одномерных систем $\{a_r\varphi_k^{]r[}\}$, индукцией по n проверим выполнение условий (2) параграфа 2, положим $\mathcal{F}(k) = C\|k\|^{-r}$, оставим в полученной системе только элементы, индексы $\mathbf{k}$ которых удовлетворяют условиям «однородности»: для некоторого l и для всех i

$$k_i \in (s_l, s_{l+1}]$$

(остальные элементы считаем нулями), потом, как и в случае $n = 1$, определим класс $\mathfrak{M}$, с помощью неравенства (где для краткости $N = s_l$, $M = s_{l-1}$, $Cs_{l+1}^{-r} \geqslant \varepsilon > Cs_{l+2}^{-r}$)

$$\sum_{\substack{k,\|k\|\leqslant N\\ \min k_i > M}} \log(C\|k\|^{-r}/\varepsilon) \gg]r[(N-M)^n = \Omega_{r,n}(s_{l+2}^n) \geqslant$$
$$\geqslant \Omega_{r,n}((C/\varepsilon)^{n/r}) = \Omega_{r,n}(\varepsilon^{-n/r})$$

получим оценку $G(\varepsilon) \geqslant \Omega_{r,n}(\varepsilon^{-n/r})$, применим теорему 2 и выведем из (22) аналогичное включение для класса $\mathfrak{M} \subset C([0,1]^n)$. Заканчиваем доказательство так же, как и в случае $n = 1$. □

Замечание. При $r \in \mathbb{N}$ можно доказать, что для класса Бернштейна $W_{r-1}B(M,N,I^n)$, состоящего из функций $f \in C(I^n)$, $\|f\| \leqslant N$, у которых модуль непрерывности по i-й переменной производной $r-1$-го порядка по той же переменной удовлетворяет неравенству

$$\omega(D_i^{r-1}f,\tau) \leqslant M\tau(1+|\log\tau|),$$

верно следующее:

$$L_B(W_{r-1}B,\varepsilon) = \frac{O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n/r}}{\log\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \widetilde{L}_{B_1}(W_{r-1}B,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n/r},$$

и найдется такая функция $f \in W_{r-1}B(M,N,I^n)$, что

$$L_B(f,\varepsilon) \gg \frac{(1/\varepsilon)^{n/r}}{\log 1/\varepsilon}, \quad \widetilde{L}_{B_1}(f,\varepsilon) \gg (1/\varepsilon)^{n/r},$$

где $B = \{x-y, xy, 1/2\}$, $B_1 = B \cup \{|x|\}$.

А для класса Зигмунда $W_{r-1}Z(M,N,I^n)$, состоящего из функций $f \in C(I^n)$, $\|f\| \leqslant N$, у которых модуль непрерывности второго порядка по i-й переменной производной $r-1$-го порядка по той же переменной удовлетворяет неравенству

$$\omega_2(D_i^{r-1}f,\tau) \leqslant M\tau,$$

справедливо следующее:

$$L_B(W_{r-1}Z,\varepsilon) = \frac{O(1/\varepsilon)^{n/r}}{\log 1/\varepsilon}, \quad \widetilde{L}_{B_1}(W_{r-1}Z,\varepsilon) = O(1/\varepsilon)^{n/r},$$

и существует такая $f \in W_{r-1}Z(M,N,I^n)$, что

$$L_B(f,\varepsilon) \gg \frac{(1/\varepsilon)^{n/r}}{\log 1/\varepsilon}, \quad \widetilde{L}_{B_1}(f,\varepsilon) \gg (1/\varepsilon)^{n/r}.$$

В следующей теореме будет доказано более общее утверждение. Обозначим $\lambda_{r,k}(f,\varepsilon)$ величину $|I|/\tau$, где $\tau^r\omega_k(D^rf,\tau) = \varepsilon$, $r,k > 0$, $r,k \in \mathbb{N}$, $\omega_k(D^rf,\tau)$ — k-й модуль непрерывности r-й производной функции f. Как и в § 5 [17], положим $\lambda_{k,f}(\varepsilon) = |I|/\omega_k^{-1}(f,\varepsilon)$. Используем также обозначения $\lambda_{k,\omega}((f,\varepsilon)) = |I|/\omega_k^{-1}(\varepsilon)$, $\lambda_{r,k}(\omega,\varepsilon) = |I|/\tau$, где $\tau^r\omega_k(\tau) = \varepsilon$.

Теорема 12. *Пусть $\omega_k(\tau)$ удовлетворяет условиям*

$$2^{-k} < \liminf_{\tau\to 0}\omega_k(\tau)/\omega_k(2\tau) \leqslant \limsup_{\tau\to 0}\omega_k(\tau)/\omega_k(2\tau) < 1$$

и не убывает с ростом τ и класс

$$K = W_r H_k^{\omega}(N, I) = \{f \in C^r(I)\colon \|f\| \leqslant N \text{ и } \omega_k(D^r f, \tau) \leqslant \omega_k(\tau)\}.$$

(i) *Тогда найдется такая $f \in K$, что*

$$\omega_k(D^r f, \tau) = \Omega_{r,k}(\omega_k(\tau)), \quad \omega_{k+r}(f, \tau) = \Omega_{r,k}(\tau^r \omega_k(\tau)),$$
$$L_B(f, \varepsilon) = \Omega_{r,k}(L_B(\mathcal{K}, \varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r+k,f}(\varepsilon))/\log \lambda_{r+k,f}(\varepsilon) =$$
$$= \Omega_{r,k}(\lambda_{r,k}(f, \varepsilon))/\log \lambda_{r,k}(f, \varepsilon),$$
$$\widetilde{L}_{B_1}(f, \varepsilon) = \Omega_{r,k}(\widetilde{L}_{B_1}(\mathcal{K}, \varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r+k,f}(\varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r,k}(f, \varepsilon)),$$

где $B_1 = B \cup \{|x|\}$, $B = \{x - y, xy, 1/2\}$.

(ii) *Для $B_R = B \cup \mathbb{R}$ найдется такая $f \in K$, что*

$$\omega_k(D^r f, \tau) = \Omega_{r,k}(\omega_k(\tau)), \quad \omega_{k+r}(f, \tau) = \Omega_{r,k}(\tau^r \omega_k(\tau)),$$
$$\widetilde{L}_{B_R}(f, \varepsilon) = \Omega_{r,k}(\widetilde{L}_{B_R}(\mathcal{K}, \varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r+k,f}(\varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r,k}(f, \varepsilon)),$$

и вообще для любой функции $L(\varepsilon) = O_{r,k}(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon))$, не имеющей скачков в смысле теоремы 9, найдется такая $f \in K$, что

$$\widetilde{L}_{B_R}(f, \varepsilon) = \Omega_{r,k}(L(\varepsilon)).$$

Замечание. Утверждения теоремы 11 и предыдущего замечания (кроме касающихся классов Бернштейна) вытекают в одномерном случае из теоремы 12 при $k = 1$, $\omega_1(\tau) = M\tau^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $k = 2$, $\omega_2(\tau) = M\tau$. Теорема 12 (ii) обобщает одно утверждение теоремы 9 (iii).

Существование функции, у которой k-й модуль непрерывности совпадает по порядку с заданной функцией типа k-го модуля непрерывности, следует из одной теоремы Бари – Стечкина (см. [19], с. 170) при более слабых условиях на ω_k, но здесь доказаны еще и утверждения о сложности.

Доказательство теоремы. Сначала заметим, что из условия на ω следует, что

$$\lambda_{r+k,\omega}(\Omega_{r,k}(\varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r+k,\omega}(\varepsilon)), \quad \lambda_{r,k}(\omega, \Omega_{r,k}(\varepsilon)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon)).$$

Докажем (i). Так как $\omega_{k+r}(f, \tau) \leqslant \tau^r \omega_k(D^r f, \tau)$, то

$$\lambda_{r+k,f}(\varepsilon) \leqslant \lambda_{r,k}(f, \varepsilon),$$

и верхние оценки следуют из теорем 5–6 [17] (и доказываемых далее нижних оценок).

Докажем нижние оценки методом теоремы 11. Используем применяемые в ней обозначения. Для любого $n \in (s_l, s_{l+1}]$ определим функцию ψ_n как $a_r \varphi_n^{r+k}$, тогда при подходящем a_r система $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям (2) § 2. Выберем $\mathcal{F}(n) = Cn^{-r}\omega_k(1/n)$ и определим так же, как и в параграфе 2, класс $\mathfrak{M}$ по системе $\{\psi_n\}$. Тогда для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $1 \leqslant m \leqslant r+k$

$$D^m f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s_{l+1} \geqslant n > s_l} \mathcal{F}(n) D^m \psi_n$$

(так как $\operatorname{supp}\psi_i \cap \operatorname{supp}\psi_j = \varnothing$ при $i \neq j \in (s_l, s_{l+1}$, а ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} s_l^{-r+m} O_{r,k}(\omega_k(1/s_l)),$$

как будет видно далее, сходится, значит, согласно признаку Вейерштрасса почленное дифференцирование законно).

Выберем p так, чтобы $s_p = \Omega_{r,k}(1/\tau)$ и представим f в виде $g + h$, где

$$g = \sum_{l=0}^{p} \sum_{s_{l+1} \geqslant n > s_l} \mathcal{F}(n)\psi_n, \quad h = \sum_{l>p}^{\infty} \sum_{s_{l+1} \geqslant n > s_l} \mathcal{F}(n)\psi_n.$$

Учитывая сделанное ранее в скобках замечание, оценим $\omega_k(D^r h, \tau)$ как $O_k(\|D^k h\|)$, а $\|D^k h\|$ — как

$$\sum_{l>p}^{\infty} O_r(\mathcal{F}(s_l))(s_{l+1} - s_l)^r \leqslant \sum_{l>p}^{\infty} O_{r,k}(\omega_k(1/s_l)) \leqslant O_{r,k}(\omega_k(1/s_p)) \sum_{l=0}^{\infty} q^{-l} \leqslant$$
$$\leqslant O_{r,k}(\omega_k(1/s_p)) \leqslant O_{r,k}(\omega_k(\tau)).$$

Аналогично оценим $\omega_k(D^r g, \tau)$ как $\tau^k \|D^{r+k} g\|$, а $\|D^{r+k} g\|$ — как

$$\sum_{l=0}^{p} O_{r,k}(\mathcal{F}(s_l))\|D^{r+k}\psi_{s_l}\| s_l^{r+k} \leqslant \sum_{l=0}^{p} s_l^k O_{r,k}(\omega_k(1/s_l)) \leqslant$$
$$\leqslant O_{r,k}(s_p^k \omega_k(1/s_p)) \sum_{l=0}^{\infty} q^{-l} \leqslant O_{r,k}(s_p^k \omega_k(1/s_p)) \leqslant O_{r,k}(\tau^{-k}\omega_k(\tau)).$$

Из доказанного следует, что выбрав $C = C_{r,k}$ в определении $\mathcal{F}$ достаточно малым, получим, что $\omega_k(D^r f, \tau) \leqslant \omega_k(\tau)$, откуда $\mathfrak{M} \subseteq W_r H_k^{\omega}(N, I)$ при некотором N. Теперь нижние оценки получаются как и в теореме 11, если для класса $\mathfrak{M}$ оценить снизу функцию $G(\varepsilon)$ как

$$\sum_{n \in \mathcal{P}(\varepsilon)} \log(\mathcal{F}(n)/\varepsilon) \geqslant \sum_{n \in \mathcal{P}(\varepsilon)} \log(\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(m)) \geqslant \sum_{n \leqslant m/2} \log(\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(m)) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n \leqslant m/2} \log((m/n)^r \omega_k(1/n)/\omega_k(1/m)) \geqslant \sum_{n \leqslant m/2} r \geqslant \Omega_r(m),$$

где $m = \max\{n\colon\ \mathcal{F}(n) \geqslant \varepsilon\} \geqslant 1/\max\{\tau\colon\ \tau^r\omega_k(\tau) = \varepsilon/C\} - 1$, откуда $G(\varepsilon) \geqslant \Omega_r(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon/C)) = \Omega_{r,k}(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon))$.

Утверждения о модулях непрерывности функции f вытекают из остального, если заметить, что если для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$, $\omega_k(f, \varepsilon_n) = o(\varepsilon_n^r\omega_k(\varepsilon_n))$ или $\omega_k(D^r f, \varepsilon_n) = o(\omega_k(\varepsilon_n))$, то для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ соответственно $\lambda_{r+k, f(\varepsilon_n) = o(\lambda_{r+k,\omega(\varepsilon_n))}}$ или $\lambda_{r,k}(f, \varepsilon_n) = o(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon_n))$.

Докажем (ii). Достаточно доказать последнюю часть этого утверждения, так как первая вытекает из нее, что доказывается подобно п. (i). Сделаем это методом, использованным в теореме 9. Достаточно внести изменения в доказательство, что f принадлежит соответствующему классу.

Пусть $L(\varepsilon) = O_{r,k}(\lambda_{r,k}(\omega, \varepsilon))$, тогда обратная к L функция

$$L^{-1}(n) = \inf\{\varepsilon\colon\ L(\varepsilon) \leqslant n\} = O_{r,k}(n^{-r}\omega_k(1/n)),$$

откуда при некотором $k > 0$

$$a_n = R_n - R_{n+1} \leqslant L^{-1}(kb_{n-1}) = O_{r,k}(b_n^{-r}\omega_k(1/b_n)).$$

Достаточно проверить, что на отрезке $[-2/3, 2/3]$

$$f \in W_r H_k^{c\omega}, \quad c = c_{r,k},$$

а в случае произвольного отрезка I сделаем линейную замену переменных. Дифференцируя почленно ряд для f, получаем

$$D^r f = \sum_{m=0}^{\alpha} a_m D^r T_{b_m}(x).$$

Разобьем сумму на части $\sum\limits_{b_m \leqslant 1/\tau}$ и $\sum\limits_{b_m > 1/\tau}$. Последняя оценивается с помощью неравенства Бернштейна (и с учетом условий, наложенных на ω_k) как

$$O_{r,k}\left(\sum_{b_n > 1/\tau} b_n^{-r}\omega_k(1/b_n)b_n^r\right) = O_{r,k}\left(\sum_{b_n > 1/\tau} \omega_k(1/b_n)\right) = O_{r,k}(\omega_k(\tau)).$$

Модуль непрерывности первой суммы подобным же образом оценивается как

$$\begin{aligned}
&\omega_k\left(\sum_{b_m \leqslant 1/\tau} a_m D^r T_{b_m}(x), \tau\right) = \\
&\quad = O_{r,k}\left(\sum_{b_n \leqslant 1/\tau} b_n^{-r}\omega_k(1/b_n)\tau^k \|D^{k+r}T_{b_n}\|_{C[-2/3,2/3]}\right) = \\
&\quad = O_{r,k}\left(\sum_{b_n \leqslant 1/\tau} b_n^k\omega_k(1/b_n)\tau^k\right) = O_{r,k}(\omega_k(\tau)).
\end{aligned}$$

Отсюда $\omega(D^r f,\tau)\leqslant O_{r,k}(\omega_k(\tau))$, значит,

$$f\in W_rH_k^{c\omega}(\|f\|,[-2/3,2/3]),\quad c=c_{r,k}.\ \square$$

Замечание. Подобно теореме 11, теорему 12 (i) можно обобщить на многомерный однородный случай.

Далее будет описан метод, который позволяет доказать существование функций с заданной по порядку сложностью приближенной реализации при незначительных ограничениях на последнюю.

Пусть, как и в теореме 8, $\mathfrak{M}$ — класс всех функций

$$g(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\in C(I^n),$$

где $|a_{\mathbf{k}}|\leqslant\mathcal{F}(\mathbf{k})$, $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}\mathcal{F}(\mathbf{k})=C<\infty$,

$$G(\varepsilon)=\log\prod_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon)}\mathcal{F}(\mathbf{k})/\varepsilon,\quad \mathcal{P}(\varepsilon)=\{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n\colon\ \mathcal{F}(\mathbf{k})\geqslant\varepsilon\},\quad P(\varepsilon)=|\mathcal{P}(\varepsilon)|,$$

система $\{\varphi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k}\in\mathbb{N}^n\}$ такова, что для любой линейной комбинации

$$\left\|\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}\right\|=\sup_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}}|.$$

Теорема 13. *Пусть $\lambda(m),\mu(m),l(m)\in\mathbb{N}$ — произвольные монотонно возрастающие последовательности, удовлетворяющие условиям: для любого m*

$$\lambda(m)-\lambda(m-1)\geqslant 4,\quad \lambda(m)=O(\lambda(m-1)),$$

$$l(m)=O(l(m-1)),\quad \sum_{k=1}^{m-1}l(k)=O(l(m)),$$

$$l(m)\leqslant\mu(m)/2,\quad \mu(m)\leqslant G(\varepsilon(m))-G(\varepsilon(m-1)/8)-P(\varepsilon(m-1)/8),$$

где $\varepsilon(m)=2^{-\lambda(m)}$.

Тогда для любого конечного базиса B найдется такая $f\in\mathfrak{M}$, что для любого $\varepsilon<0$ справедливы неравенства

$$L_B(f,\varepsilon)\gg\frac{H}{\log H},\quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon)\gg H,\quad D_B(f,\varepsilon)\geqslant\tau_B\log H-O(1),$$

где

$$2^H=C_{\mu(a)}^{l(a)},\quad a=\lambda^{-1}(\log 1/8\varepsilon),\quad \lambda^{-1}(n)=\{\max m\colon\ \lambda(m)\leqslant n\},$$

а если $\{x-y,xy,1/2\}\subseteq B$, то

$$L_B(f,\varepsilon)\leqslant O\left(L_B\left(\Phi_\delta,\frac{\delta}{2C}\right)+l(a)+\log 1/\varepsilon+\frac{l(a)\log\log 1/\varepsilon}{\log(l(a)\log\log 1/\varepsilon)}\right),$$

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \leqslant O\left(\widetilde{L}_B\left(\Phi_\delta, \frac{\delta}{2C}\right) + l(a)\log 1/\varepsilon\right),$$

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant \max\left\{D_B\left(\Phi_\delta, \frac{\delta}{2C}\right), \log\log 1/\varepsilon + o\left(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}\right)\right\} + \log l(a) + O(1),$$

где $\delta = 2^{-\lambda(a+2)}$, $\Phi_\delta = \{\varphi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\delta)\}$.

□ Рассмотрим последовательность булевых массивов

$$A_m = \{a_{\mathbf{k},j,m}\colon \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon(m)/8),\ 1 \leqslant j \leqslant \lambda(m)\},$$

удовлетворяющих условиям: элемент массива равен нулю при любых $\mathbf{k}, j$ таких, что $j < \log 1/\mathcal{F}(\mathbf{k})$, а также при любом $j \in]\lambda(m-1), \lambda(m-1)+3]$; массив A_{m-1} является подмассивом A_m, то есть

$$a_{\mathbf{k},j,m-1} = a_{\mathbf{k},j,m}$$

при любых $\mathbf{k}, j$, таких, что

$$\mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon(m-1)/8), \quad 1 \leqslant j \leqslant \lambda(m-1);$$

справедливо равенство

$$\|A_m\| - \|A_{m-1}\| = l(m),$$

где $\|A\|$ — число единиц в массиве A.

Такие последовательности можно построить, так как число элементов массива A_m, не входящих в A_{m-1} и не равных заведомо нулю, оценивается снизу как

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))} (\lambda(m) + \log\mathcal{F}(\mathbf{k})) - \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m-1)/8)} (\lambda(m-1) + 3 + \log\mathcal{F}(\mathbf{k})) + P(\varepsilon(m-1)/8)\right) =$$
$$= G(\varepsilon(m)) - G(\varepsilon(m-1)/8) - P(\varepsilon(m-1)/8) \geqslant \mu(m),$$

а по условию $l(m) \leqslant \mu(m)/2$.

Отсюда также следует, что число способов доопределения массива A_{m-1} до массива A_m, удовлетворяющих указанным условиям, не меньше чем $C^{l(m)}_{\mu(m)}$.

Последовательности массивов A_m сопоставим последовательность функций

$$f_m(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m)/8)} a_{\mathbf{k},m}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))} a_{\mathbf{k},m}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

где

$$a_{\mathbf{k},m} = \sum_{j=1}^{\lambda(m)} a_{\mathbf{k},j,m}2^{-j}. \tag{23}$$

Докажем, что для любого конечного базиса B последовательность A_m можно выбрать так, чтобы для всех m выполнялись неравенства

$$\begin{cases} L_B(f_m, \varepsilon(m)/4) \gg \dfrac{\log C_{\mu(m)}^{l(m)}}{\log\log C_{\mu(m)}^{l(m)}}, \\ \widetilde{L}_B(f_m, \varepsilon(m)/4) \gg \log C_{\mu(m)}^{l(m)}, \\ D_B(f_m, \varepsilon(m)/4) \geqslant \log\log C_{\mu(m)}^{l(m)} - O(1). \end{cases} \tag{24}$$

Строить последовательность A_m будем по индукции. База очевидна. Допустим, что $A_1, \ldots, A_{m-1}$ уже построены. Рассмотрим множество всех доопределений массива A_{m-1} до массива A_m и соответствующее множество функций, из которого будем выбирать f_m. Любые две функции из этого множества различаются хотя бы в одном коэффициенте не менее чем на $\varepsilon(m)$, а значит, согласно условию, наложенному на систему $\{\varphi_{\mathbf{k}}\}$, уклоняются друг от друга по норме $\|\cdot\|_{C(I^n)}$ тоже не менее чем на $\varepsilon(m)$. Поэтому $\varepsilon(m)/2$-емкость этого множества, а следовательно, и $\varepsilon(m)/4$-энтропия не меньше $\log C_{\mu(m)}^{l(m)}$ (согласно теореме 4 [23]). Отсюда так же, как и в теореме 1, выводим с помощью соответствующих оценок О. Б. Лупанова [26, 29] и соотношения (1), что функцию f_m можно выбрать так, что выполнятся неравенства (23).

Заметим, что

$$a_{\mathbf{k},m} - a_{\mathbf{k},p} = \sum_{j=\lambda(m)+4}^{\lambda(p)} a_{\mathbf{k},j,p} 2^{-j} \leqslant \varepsilon(m)/8,$$

значит, существует

$$a_{\mathbf{k}} = \lim_{m\to\infty} a_{\mathbf{k},m} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k},m} \leqslant \varepsilon(m)/8.$$

Поэтому функция

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \in C(I^n)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|f - f_m\| \leqslant \max\left(\max_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k},m}|, \max_{\mathbf{k}\notin\mathcal{P}(\varepsilon(m)/8)} a_{\mathbf{k}} \right) \leqslant \varepsilon(m)/8, \tag{25}$$

которое следует из свойств системы $\{\varphi_{\mathbf{k}}\}$.

Значит, для любой меры сложности l справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_B(f, \varepsilon(m)/8) \geqslant \mathcal{L}_B(f_m, \varepsilon(m)/4),$$

поэтому при всех

$$\varepsilon \in]\varepsilon(m+1)/8, \varepsilon(m)/8]$$

для $L_B(f,\varepsilon)$, $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$ и $D_B(f,\varepsilon)$ выполняются неравенства (23). Из неравенства

$$\varepsilon(m+1)/8 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(m)/8$$

следует, что

$$m = \lambda^{-1}(\log 1/8\varepsilon),$$

значит, нижние оценки теоремы 13 доказаны, причем соотношения

$$l(m) = O(l(m-1)), \quad \sum_{k=1}^{m-1} l(k) = O(l(m))$$

не использовались.

Докажем верхние оценки. В силу (24) для любой меры сложности $\mathcal{L}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_B(f,\varepsilon(m)) \leqslant \mathcal{L}_B(f_m,\varepsilon(m)/2).$$

Так как

$$f_m = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))} a_{\mathbf{k},m}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

то для мер сложности $\mathcal{L} = L_B$ и $\widetilde{L}_B$ справедлива оценка

$$\mathcal{L}(f_m,\varepsilon(m)/2) \leqslant \mathcal{L}\left(\Phi_{\varepsilon(m)}, \frac{\varepsilon(m)}{4C}\right) + \mathcal{L}(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\}) + O(l(m)),$$

а для глубины — оценка

$$D_B\left(f_m, \frac{\varepsilon(m)}{2}\right) \leqslant 2 + \log l(a) + \\ + \max\left\{D_B\left(\Phi_{\varepsilon(m)}, \frac{\varepsilon(m)}{4C}\right), D_B(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\})\right\},$$

ведь число ненулевых слагаемых в рассматриваемой сумме не больше $O(l(m))$. Из равенства (22) и теоремы 5 следует, что

$$D_B(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\}) \leqslant \log\lambda(m) + O\sqrt{\log\lambda(m)},$$

$$\widetilde{L}_B(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\}) = O(\lambda(m)l(m)).$$

Так как

$$\sum_{\mathbf{k},j} a_{\mathbf{k},j} = \|A_m\| = \|A_1\| + \sum_{i=2}^{m}(\|A_i\| - \|A_{i-1}\|) = \sum_{i=1}^{m} l(i) = O(l(m)),$$

то в случае $l(m) \geqslant \lambda(m)$

$$L_B(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\}) \leqslant \lambda(m) + \sum_{i=1}^{m} l(i) = O(l(m)),$$

а в случае $l(m) < \lambda(m)$, используя теорему [45], получаем, что

$$L_B(\{a_{\mathbf{k},m}\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon(m))\}) = O\left(l(m) + L_B\left\{2^{-\alpha_j}\colon\ 1 \leqslant j \leqslant O(l(m))\right\}\right) =$$

$$= O\left(l(m) + \lambda(m) + \frac{l(m)\log\lambda(m)}{\log(l(m)\log\lambda(m))}\right).$$

Остается заметить, что при $\varepsilon(m) < \varepsilon \leqslant \varepsilon(m-1)$ справедливы соотношения

$$\lambda^{-1}(\log 1/\varepsilon) = m-1, \quad m-2 = \lambda^{-1}(\log 8/\varepsilon) = a \leqslant m-1, \quad l(m) = O(l(a)),$$

$$\lambda(m-1) \leqslant \log 1/\varepsilon < \lambda(m), \quad \lambda(m) = O(\log 1/\varepsilon), \quad \varepsilon(m) \geqslant 2^{-\lambda(a+2)},$$

и применить полученные ранее оценки. □

Перед тем, как получить некоторые следствия из теоремы 13, заметим, что если

$$\log l(m) < c\log\mu(m),$$

где $c < 1$ — некоторая константа, то справедливо равенство

$$H = \log C_{\mu(a)}^{l(a)} \asymp l(a)\log\mu(a)$$

и нижние оценки теоремы 13 приобретают вид

$$L_B(f,\varepsilon) \gg \frac{l(a)\log\mu(a)}{\log(l(a)\log\mu(a))}, \quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \gg l(a)\log\mu(a),$$

$$D_B(f,\varepsilon) \geqslant \tau_B(\log l(a) + \log\log\mu(a)) - O(1).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — компакт, определенный перед следствием 8.

Следствие 13. *Для любой монотонно стремящейся к ∞ при $\varepsilon \to 0$ функции $L(\varepsilon)$, удовлетворяющей при $x \to 0$ условиям*

$$L(\varepsilon/2) = O(L(\varepsilon)), \quad \log\frac{1}{L^{-1}(2x)} = O\left(\log\frac{1}{L^{-1}(x)}\right),$$

найдется такая функция $f \in C(I^n)$, что для базиса

$$B = \{x-y, xy, x^2, |x|, 1/2\}$$

справедливы равенства по порядку

$$L_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon), \quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon)\log L(\varepsilon), \quad D_B(f,\varepsilon) \asymp \log L(\varepsilon).$$

□ Положим

$$\lambda(x) = \log\frac{1}{L^{-1}(2^{cx})} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(\mathbf{k}) = 2^{-\lambda\left(\frac{n}{c_1}\log(\|k\|+1)\right)},$$

где константы c и c_1 выберем далее. Тогда из условия

$$\log \frac{1}{L^{-1}(2x)} = O\left(\log \frac{1}{L^{-1}(x)}\right)$$

следует, что $\lambda(x+1) = O_c(\lambda(x))$, и из условия

$$L(\varepsilon/2) = O(L(\varepsilon)) \text{ —}$$

что при достаточно большом c

$$\lambda(x+1) - \lambda(x) \geqslant 6.$$

Далее получаем, что

$$\lambda^{-1}(x+6) - \lambda^{-1}(x) \leqslant 1, \quad 6x - O(1) < \lambda(x) < 2^{O_c(x)},$$

$$\log(x+2) \ll \lambda^{-1}(x) \leqslant \frac{x}{6} + O(1), \quad \log\log 1/\varepsilon \ll \log L(\varepsilon) \ll \log 1/\varepsilon,$$

$$P(\varepsilon) \asymp 2^{c_1 \lambda^{-1}(\log 1/\varepsilon)}.$$

Положим

$$\varepsilon(m) = 2^{-[\lambda(m)]}, \quad \mu(m) = [G(\varepsilon(m)) - G(\varepsilon(m-1)/8) - P(\varepsilon(m-1)/8)].$$

Тогда

$$P(\varepsilon(m-1)/8) \leqslant \mu(m) \leqslant G(\varepsilon(m)) \leqslant P(\varepsilon(m)) \log \frac{O(1)}{\varepsilon(m)} = O(P(\varepsilon((m))\lambda(m)),$$

$$c_1 m - O(1) \leqslant \log \mu(m) = O(m) = O(\log P(\varepsilon(m))).$$

Выберем $l(m)$ равным $[2^{cm}]$, тогда при $c_1 > 2c$

$$m \ll \log l(m) \leqslant cm < \frac{1}{2} \log \mu(m)$$

и

$$l(\lambda^{-1}(\log 1/\varepsilon)) = l\left(\frac{1}{c} \log L(\varepsilon)\right) = [L(\varepsilon)].$$

Так как число a, определенное по последовательности $[\lambda(m)]$ так же, как в теореме 13, отличается от $\lambda^{-1}(\log 1/\varepsilon)$ на аддитивную константу $O(1)$, то справедливы равенства по порядку

$$l(a) \asymp L(\varepsilon), \quad \log l(a) \asymp \log \mu(a) \asymp a \asymp \log P(\delta),$$

где δ, как и в теореме 13, равно $2^{-[\lambda(a+2)]}$.

Нижние оценки следствия вытекают теперь из теоремы 13 с учетом сделанного после нее замечания, причем

$$D_B(f, \varepsilon) \geqslant \log L(\varepsilon) + \log\log L(\varepsilon) - O(1).$$

Для доказательства верхних оценок применим теорему 13 и лемму 15. Пусть $\Phi_\delta = \{\varphi_{\mathbf{k}}\colon \mathbf{k} \in P(\delta)\}$, где система $\{\varphi_{\mathbf{k}}\}$ определена так же, как перед следствием 8.

Лемма 15. *Пусть Φ — произвольное подмножество Φ_δ, состоящее не более чем из d функций, $d \leqslant P(\delta)$, а базис $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$. Тогда*

$$L_B(\Phi) \ll d + \log P(\delta) + \frac{d \log P(\delta)}{\log(d \log P(\delta))}, \quad \widetilde{L}_B(\Phi) = O(d \log P(\delta)),$$

$$D_B(\Phi) \leqslant \log\log P(\delta) + O\left(\sqrt{\log\log P(\delta)}\right).$$

□ По определению

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \varphi_{k_1}(x_1) \dots \varphi_{k_n}(x_n),$$

где

$$\varphi_m(x) = \varphi(a_m x - b_m), \quad \varphi(x) = \max(0, 2\min(x, 1-x)), \quad a_m, b_m \in \mathbb{N},$$

$$b_m < a_m = O(m \log m (\log\log m)^2).$$

Поэтому с помощью теоремы 5 получаем, что

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}_B(\varphi_{\mathbf{k}}) = O(n + \widetilde{L}_B(a_{k_i}, b_{k_i}\colon\ 1 \leqslant i \leqslant n)) = \\
&\quad = O\left(n + \sum_{i=1}^{m} \log(k_i + 1)\right) = O(n + \log P(\delta)), \\
&D_B(\varphi_{\mathbf{k}}) \leqslant O(1) + \log n + \max_i D_B(a_{k_i}, b_{k_i}) \leqslant \\
&\quad \leqslant \log\log(\|k\| + 3) + O\left(\sqrt{\log\log(\|k\| + 3)}\right) + \log n \leqslant \\
&\quad \leqslant \log\log P(\delta) + O\left(\sqrt{\log\log P(\delta)}\right) + \log n,
\end{aligned}$$

откуда и следуют последние неравенства леммы. □

Число $L_B(\Phi)$ можно оценить как $O(nd)$ плюс сложность системы из не более чем $2nd$ натуральных чисел, равных $O(P^2(\delta))$. Разлагая все эти числа по степеням двойки и вычисляя все степени

$$2, 2^2, \dots, 2^{2\log P(\delta) + O(1)}$$

со сложностью $2\log P(\delta) + O(1)$, сводим задачу к оценке сложности $p = O(nd)$ линейных форм от $q = O(\log P(\delta))$ переменных с коэффициентами 0, 1 и методом [45] получаем оценку

$$O\left(p + q + \frac{pq}{\log pq}\right) = O\left(nd + \log P(\delta) + \frac{nd \log P(\delta)}{\log(d \log P(\delta))}\right). \square$$

Повторяя доказательство верхних оценок в теореме 13, заметим что в сумме

$$f_m = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon(m))} a_{\mathbf{k},m} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

число ненулевых слагаемых не больше

$$\sum_{\mathbf{k},j} a_{\mathbf{k},j,m} = \|A_m\| = O(l(m)),$$

что дает возможность воспользоваться леммой 15 при $d = O(l(m))$ и получить равенства

$$L_B(f_m) = O\left(l(m) + \log(P(\varepsilon(m))\lambda(m)) + \right.$$
$$\left. + \frac{l(m)\log P(\varepsilon(m))}{\log(l(m)\log P(\varepsilon(m)))} + \frac{l(m)\log\lambda(m)}{\log(l(m)\log\lambda(m))}\right) = O(l(m)),$$
$$\widetilde{L}_B(f_m) = O(l(m)\log P(\varepsilon(m)) + \lambda(m)l(m)) = O\left(l(m)\log\frac{l(m)}{\varepsilon_m}\right).$$

Если воспользоваться наличием в базисе B функции x^2 (это будем делать только в этом месте), то в последней оценке можно заменить $\lambda(m)$ на $\log\lambda(m)$, так как

$$\widetilde{L}_B(x^n) = O(\log n),$$

и получим равенство

$$\widetilde{L}_B(f_m) = O(l(m)\log l(m)).$$

Для глубины с помощью леммы 15 получаем оценку

$$D_B(f_m) \leqslant \log(nl(m)) + \log\lambda(m) + O\left(\sqrt{\log\lambda(m)}\right).$$

Заканчивая доказательство так же, как и в теореме 13, и вспоминая, что

$$\lambda(m) = O(\log 1/\varepsilon), \quad l(m) \asymp l(a) \asymp L(\varepsilon), \quad \log P(\varepsilon(m)) \asymp \log l(a) \asymp \log L(\varepsilon),$$

получаем оценку

$$L_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon), \quad \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon)\log L(\varepsilon),$$

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant \log(nL(\varepsilon)) + \log\log 1/\varepsilon + O\left(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}\right) \ll \log L(\varepsilon).$$

Отметим, что при

$$\log L(\varepsilon) = O(\log 1/\varepsilon)$$

равенство по порядку

$$\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp L(\varepsilon)\log L(\varepsilon)$$

справедливо и для базиса $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$, а также

$$D_B(f,\varepsilon) \leqslant \log L(\varepsilon) + \log\log L(\varepsilon) + O\left(\sqrt{\log\log L(\varepsilon)}\right). \square$$

Замечание. При $L(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-(n-c)})$, где $c > 0$ — произвольная константа, можно доказать, что функции f, существование которых утверждает следствие 13, удовлетворяют условию Липшица по всем своим переменным.

При

$$L(\varepsilon) = \left(\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-n/r}$$

можно доказать тем же методом, что и в следствии 13, существование такой функции $f \in C(I^n)$, у которой $(r-1)$-я производная по каждой переменной удовлетворяет условию Липшица и

$$\left(\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-n/r} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ll L_B(f,\varepsilon) \ll$$
$$\ll \left(\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-n/r},$$
$$\left(\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-n/r} \ll \widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \ll \left(\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-n/r} \log \frac{1}{\varepsilon},$$
$$\frac{n}{r}\left(\log \frac{1}{\varepsilon} - \log\log \frac{1}{\varepsilon} - 2\log\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) - O(1) \leqslant D_B(f,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{r}\left(\log \frac{1}{\varepsilon} - 2\log\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) O\left(\sqrt{\log\log \frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

где $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$.

Можно доказать, что для любого конечного базиса B и любой стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$ функции $\delta(\varepsilon)$ найдется такая $f \in C(I)$, у которой $(r-1)$-я производная удовлетворяет условию Липшица и

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{L_B(f,\varepsilon)\log 1/\varepsilon}{\delta(\varepsilon)(1/\varepsilon)^{1/r}} > 0, \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)(1/\varepsilon)^{1/r}} > 0.$$

Например, в случае $r = 1$ возьмем достаточно быстро растущую последовательность $\lambda(m)$, разобьем отрезок I на отрезки I_m длины $|I|2^{-m}$, а отрезки I_m — на отрезки длиной $|I_m|2^{-\lambda(m)}$ и по полученному разбиению отрезка I построим систему функций $\{\varphi_k(x)\}$ подобно тому, как это сделано перед следствием 8. Положив $\mathcal{F}(k) = \dfrac{1}{2a_k}$, где $\dfrac{1}{a_k}$ — длина k-го отрезка построенного разбиения, определим, аналогично тому, как это делалось ранее, класс $\mathfrak{M}$. Ясно, что все его функции удовлетворяют условию Липшица с множителем 1. В качестве $\mu(m)$ возьмем $2^{\lambda(m)-m}$ и положим $l(m) = \mu(m)/2$. Тогда так же, как в теореме 13, получим, что для некоторой функции $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f, \varepsilon(m)/4) \gg \frac{\mu(m)}{\log \mu(m)} \gg \frac{\delta(\varepsilon(m))}{\varepsilon(m)\log 1/\varepsilon(m)},$$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon(m)/4) \gg \mu(m) \gg \delta(\varepsilon(m))/\varepsilon(m),$$

что и требовалось доказать.

Ценой усложнения доказательства теорему 13 и следствие 13 можно освободить от некоторых ограничений и усилить. Обозначение $f(\varepsilon) \downarrow 0$ означает далее, что $f(\varepsilon)$ монотонно стремится к нулю.

Теорема 14.

(i) *Для любой монотонно стремящейся к ∞ при $\varepsilon \to 0$ функции $L(\varepsilon)$ такой, что*

$$L(\varepsilon/2) = O(L(\varepsilon)) \quad \textit{и} \quad L(\varepsilon) \gg \log 1/\varepsilon,$$

найдется такая функция $f \in C(I^n)$, что для $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$ справедливо равенство по порядку

$$L_B(f, \varepsilon) \asymp L(\varepsilon).$$

Если к тому же

$$L(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-\frac{n}{r}+\delta},$$

где $n, r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ — не зависящие от ε константы, то такую функцию f можно выбрать в любом классе $W(r, M, N, I^n)$.

(ii) *Если дополнительно к условиям п.* (i) *выполнено условие*

$$\left(\frac{\log L(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \downarrow 0\right) \& \left(\frac{L(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \to \infty\right),$$

то равенство по порядку можно заменить асимптотическим равенством

$$L_B(f, \varepsilon) \simeq L(\varepsilon).$$

(iii) *Если условие*

$$\frac{L(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \downarrow 0$$

заменить на условие

$$\frac{\log L(\varepsilon)}{(\log 1/\varepsilon)^a} \downarrow 0,$$

где $a < 1/2$, то можно доказать существование бесконечно дифференцируемой и 2π-периодической по всем переменным функции $f \in C(\mathbb{R}^n)$ такой, что для базиса $B = \{xy, x-y, \cos x, 1/2\}$ справедливо равенство пункта (ii)*, а для базиса $B = \{xy, x-y, 1/2\}$ — равенство пункта* (i).

(iv) *Если выполнены условия*

$$L(\varepsilon) \asymp L(\varepsilon \log 1/\varepsilon) \quad \textit{и} \quad \log 1/\varepsilon \ll L(\varepsilon) = O(\log 1/\varepsilon)^{n-\delta}, \quad \delta > 0,$$

то существует аналитическая и 2π-периодическая по всем переменным функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ такая, что для нее справедливы равенства пункта (iii).

□ Как и ранее, используем обозначения, введенные в параграфах 2 и 4. Докажем пункты (i) и (ii). Рассмотрим вначале случай $r = 1$.

Пусть

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = 4(||\mathbf{k}|| + 3)^{-1}(\log(||\mathbf{k}|| + 3))^{-1}(\log\log(||\mathbf{k}|| + 3))^{-2}$$

и система $\{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$ и класс $\mathfrak{M}$ определены так же, как и в следствии 8. Положим

$$M_m = \left\{(\mathbf{k}, j)\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\varepsilon(m))\ \&\ \lambda(m-1)+1 < j \leqslant \lambda(m)\ \&\ 2^{-j} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathbf{k})\right\},$$

где $\varepsilon(m) = 2^{-\lambda(m)}$, а последовательность $\{\lambda(m)\}$ (в которой $\lambda(0) = 0$) будет определена позднее. Обозначим мощность множества M_m через $\mu(m)$. Пусть $\{\varkappa(m)\}$ — такая последовательность, что $\varkappa(m) \leqslant \frac{1}{2}\mu(m)$; более точно ее выберем позднее. Обозначим $\mathfrak{A}_m$ множество всех булевых массивов $A_m = \{a_{\mathbf{k},j}\colon\ (\mathbf{k}, j) \in M_m\ \&\ a_{\mathbf{k},j} \in (0,1)\}$, содержащих $\varkappa(m)$ единиц, и положим $\mathfrak{A} = \bigotimes\limits_m \mathfrak{A}_m$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ — произвольная последовательность $\{A_m\}$,

$$A_m = \{a_{\mathbf{k},j}\colon\ (\mathbf{k}, j) \in M_m\}.$$

Сопоставим ей функцию

$$f_A = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}, \quad \text{где } a_{\mathbf{k}} = \sum_j a_{\mathbf{k},j}2^{-j}.$$

Множество всех таких функций обозначим $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\{\lambda(m)\}, \{\varkappa(m)\}, \mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$.

Определим на множестве $\mathfrak{A}$ (и тем самым на $\mathfrak{F}$) вероятностную меру ν, являющуюся произведением мер ν_m, равномерно распределенных на множествах $\mathfrak{A}$. Далее рассуждаем так же, как и в доказательстве теоремы 1. Пусть

$$\frac{1}{4}\varepsilon(m+1) \leqslant \varepsilon < \frac{1}{4}\varepsilon(m).$$

Тогда для любой функции $g \in C(I^n)$ множество $\mathcal{O}_\varepsilon(g) \cap \mathfrak{F}$ состоит только из функций f_A, у которых последовательность A начинается с m фиксированных членов $A_1, \ldots, A_m$. Действительно, в противном случае найдутся функции f_A и $f_{A'}$ такие, что для всех $l \leqslant m$ $A_l \neq A'_l$, значит,

$$||f_A - f_{A'}|| \geqslant \sup_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}} - a'_{\mathbf{k}}| \geqslant \sup_j |a_{\mathbf{k},j} - a'_{\mathbf{k},j}|\varepsilon(l) - \frac{1}{2}\varepsilon(l) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(m) > 2\varepsilon,$$

что противоречит включению $f_A, f_{A'} \in \mathcal{O}_\varepsilon(g)$.

Поэтому внешняя мера

$$\nu^*(\mathcal{O}_\varepsilon(g) \cap \mathfrak{F}) \leqslant \left(\prod_{j=1}^{m} C_{\mu(j)}^{\varkappa(j)}\right)^{-1}.$$

Повторяя далее рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что для почти всех относительно меры ν функций $f \in \mathfrak{F}$ и любого $\varepsilon > 0$

$$L_B(f,\varepsilon) \gtrsim \mathcal{G}(\varepsilon(m))/\log \mathcal{G}(\varepsilon(m)), \tag{26}$$

где

$$\mathcal{G}(\varepsilon(m)) = \sum_{j=1}^{m} \log C_{\mu(j)}^{\varkappa(j)}, \quad \frac{1}{4}\varepsilon(m+1) \leqslant \varepsilon < \frac{1}{4}\varepsilon(m).$$

Последовательность $\{\varkappa(m)\}$ можно выбрать так, чтобы

$$|\mathcal{G}(\varepsilon(m)) - L(\varepsilon(m))\log L(\varepsilon(m))| \leqslant \log \mu(m). \tag{27}$$

Для этого, рассуждая по индукции, выбираем $\varkappa(m)$ так, чтобы

$$\left|\log C_{\mu(j)}^{\varkappa(j)} - (L(\varepsilon(j))\log L(\varepsilon(j)) - L(\varepsilon(j-1))\log L(\varepsilon(j-1)))\right| \leqslant \log \mu(j),$$

и соответствующим образом подбираем знаки в этих разностях (в случае $j = 1$, разумеется, в скобке вычитаемое отсутствует). Так как

$$P(2\varepsilon(m)) \leqslant \mu(m) \leqslant \log \frac{1}{\varepsilon(m)} P(\varepsilon(m)), \tag{28}$$

то справедливы равенства

$$\log \mu(m) \simeq \log P(\varepsilon(m)) \asymp \log \frac{1}{\varepsilon(m)}, \tag{29}$$

поэтому из (26) и (27) и условия

$$L(\varepsilon) \gg \log 1/\varepsilon$$

следует, что

$$L_B(f,\varepsilon) \gg L(\varepsilon(m)).$$

Выбрав $\lambda(m)$ с помощью следующей леммы, выводим из нее и из условия $L(\varepsilon/2) = O(L(\varepsilon))$, что $L_B(f,\varepsilon) \gg L(\varepsilon)$.

Лемма 16. *Для любой монотонной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такой, что $f(x)/x$ стремится к бесконечности, а $(\log f(x))/x$ монотонно стремится к нулю, можно определить такую последовательность*

$$\{\lambda(m)\}, \quad \lambda(m) \in \mathbb{N},$$

что

$$\beta(m) = \lambda(m+1) - \lambda(m) > 2, \quad f(\lambda(m+1)) \simeq f(\lambda(m)), \quad \log f(\lambda(m)) \gtrsim m/\log m,$$

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda(j)=o(f(\lambda(m))).$$

Если условия леммы заменить на более слабые условия

$$f(x)\gg x\quad и\quad f(x+1)=O(f(x)),$$

то ее утверждение останется справедливым, только знаки o *и* $\simeq$ *заменятся на* O *и* $\asymp$.

□ Так как

$$\frac{\log f(x+1)}{x+1}\leqslant\frac{\log f(x)}{x},$$

то

$$0\leqslant\log f(x+1)-\log f(x)\leqslant\frac{\log f(x)}{x}\to 0,$$

значит,

$$f(x+1)\simeq f(x).$$

Положим

$$h(m)=m\min_{n\geqslant m}\{f(n)/n\},$$

тогда

$$h(m)\leqslant f(m)\quad\frac{m}{h(m)}\downarrow 0.$$

Определим по индукции последовательность $\{g(m)\}$, так, чтобы

$$g(1)=1,\quad g(m+1)=\min\{h(m+1),(m+2)g(m)/m\}.$$

Тогда при $m\geqslant m_0$

$$m\leqslant g(m)\leqslant h(m)=o(f(m)),\quad\frac{g(m+1)}{m+1}\geqslant\frac{g(m)}{m}.$$

Проверим, что $m/g(m)$ монотонно стремится к нулю. Это очевидно, если $g(m)$ бесконечно часто совпадает с $h(m)$. Если же при любом $m\geqslant m_0$

$$g(m+1)=(m+2)g(m)/m,$$

то

$$g(m)=\frac{g(m)}{g(m-1)}\cdots\frac{g(2)}{g(1)}m^2,$$

и опять утверждение очевидно.

Положим $\alpha(m)=\sqrt{g(m)/m}$ и выберем последовательность $\{\varphi(m)\}$ так, чтобы

$$0<\varphi(m)\leqslant\alpha(m),\quad 0\leqslant\Delta\varphi(m)=\varphi(m+1)-\varphi(m)\leqslant\frac{1}{m},\quad\varphi(m)\to\infty.$$

Тогда

$$\varphi(m) = \varphi(1) + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta\varphi(j) \leqslant \varphi(1) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \leqslant \ln m + O(1),$$

$$\varphi(m) - \varphi(m - [\varphi(m)]) \leqslant \sum_{j=m-[\varphi(m)]}^{m-1} \frac{1}{j} = O(\varphi(m))/m,$$

$$\frac{m}{\varphi(m)} - \frac{m - [\varphi(m)]}{\varphi(m - [\varphi(m)])} = \frac{\varphi(m)[\varphi(m)] - O(\varphi(m))}{\varphi(m)\varphi(m - [\varphi(m)])} \simeq 1,$$

$$\frac{m+1}{\varphi(m+1)} - \frac{m}{\varphi(m)} = \frac{\varphi(m) - O(1)}{\varphi(m+1)\varphi(m)} \to 0.$$

Положим

$$\zeta(m) = [2^{m/\varphi(m)}].$$

Из предыдущего следует, что

$$\zeta(m+1) - \zeta(m) = O(\zeta(m)/\varphi(m)), \quad \zeta(m+1) \simeq \zeta(m), \quad \log\zeta(m) \gtrsim m/\log m.$$

Отделяя в сумме последние $[\varphi(m)]$ слагаемых, получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{m} \zeta(j) \leqslant \sum_{j=1}^{m-[\varphi(m)]} \zeta(j) + \varphi(m)\zeta(m).$$

Учитывая вытекающее из предыдущего равенство

$$\zeta(m) \simeq 2\zeta(m - [\varphi(m)])$$

и применяя достаточное число раз полученную оценку, находим, что

$$\sum_{j=1}^{m} \zeta(j) \leqslant O(\varphi(m)\zeta(m)) + \sum_{j=1}^{m_0} \zeta(j) \leqslant O(\varphi(m)\zeta(m)) + O(1) =$$
$$= O(\varphi(m)\zeta(m)) = O(\zeta(m)\alpha(m)) = O(\zeta(m)\alpha(\zeta(m))) = o(g(\zeta(m))).$$

Положим

$$\lambda(m) = [f^{-1}(g(\zeta(m)))],$$

тогда при $m \geqslant n \geqslant m_0$

$$\lambda(m) \leqslant \zeta(m), \quad \frac{m}{n} \leqslant \frac{g(m)}{g(n)} = \frac{g(m)}{g(m-1)} \cdots \frac{g(n+1)}{g(n)} \leqslant \frac{m+1}{m-1} \cdots \frac{n+2}{n} \lesssim \left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

$$g(\zeta(m))(\zeta(m+1)/\zeta(m)) \leqslant g(\zeta(m+1)) \lesssim g(\zeta(m))(\zeta(m+1)/\zeta(m))^2 \simeq g(\zeta(m)),$$

$$g(\zeta(m+1)) - g(\zeta(m)) = O(g(\zeta(m))/\varphi(m)),$$

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda(j)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\zeta(j)=o(g(\zeta(m)))=o(f(\lambda(m))),$$
$$f(\lambda(m))\simeq g(\zeta(m))\simeq g(\zeta(m+1))\simeq f(\lambda(m+1)),$$
$$\log f(\lambda(m))\simeq\log g(\zeta(m))\geqslant\log\zeta(m)\gtrsim m/\log m.$$

Так как

$$\beta(m)=\lambda(m+1)-\lambda(m)>f^{-1}(g(\zeta(m+1)))-f^{-1}(g(\zeta(m)))-1,$$

то осталось проверить, что

$$f^{-1}(g(\zeta(m+1)))-f^{-1}(g(\zeta(m)))\geqslant 4.$$

Из условия леммы следует, что

$$f(x)=2^{x/\rho(x)},\ \text{ где } 1/\rho(x)\downarrow 0.$$

Можно считать, что последовательность $\varphi(m)$ выбрана так, чтобы

$$\varphi(m)<o(\rho(m)).$$

Обозначим $f^{-1}(g(\zeta(m)))$ через $x(m)$. Тогда

$$f(x(m))=g(\zeta(m))=2^{m/\psi(m)},$$

где

$$\varphi(m)/2\lesssim\psi(m)\lesssim\varphi(m),$$

откуда при $m\geqslant m_0$

$$x(m)\geqslant m,\quad \rho(x(m))\geqslant\rho(m),$$
$$f(x(m)+4)=2^{\frac{x+4}{\rho(x+4)}}\leqslant 2^{\frac{x+4}{\rho(x)}}=$$
$$=f(x(m))\left(1+\frac{O(1)}{\rho(x(m))}\right)=g(\zeta(m))\left(1+\frac{o(1)}{\varphi(m)}\right)<g(\zeta(m+1)),$$

значит,

$$f^{-1}(g(\zeta(m+1)))\geqslant x(m)+4,\quad f^{-1}(g(\zeta(m+1)))-f^{-1}(g(\zeta(m)))\geqslant 4.$$

Осталось доказать последнее утверждение леммы. Для этого предполагаем без ограничения общности, что $f(x)\geqslant x$, определения $\{h(m)\}$, $\{\lambda(m)\}$, $\{x(m)\}$ и $\{g(m)\}$ оставляем без изменений (но уже не обязательно, чтобы $m/g(m)\to 0$), определяем $\zeta(m)$ равенством

$$\zeta(m)=]c^4[,\ \text{ где } c=\sup_x f(x+1)/f(x),$$

с помощью условия $\sup f(x+1)/f(x) < \infty$ проверяем равенства

$$f(\lambda(m)) \asymp g(\zeta(m)) \asymp g(\zeta(m+1)) \asymp f(\lambda(m+1)),$$

и оценки

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda(j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \zeta(j) = O(f(\lambda(m))), \quad \log f(\lambda(m)) > 2m - O(1)$$

и, наконец, проверяем, что

$$f(x(m)+4) \leqslant c^4 f(x(m)) = c^4 g(\zeta(m)) \leqslant g(\zeta(m))(\zeta(m+1)/\zeta(m)) \leqslant g(\zeta(m+1)). \ \square$$

Для получения верхней оценки воспользуемся неравенством

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant L_B(f_m), \tag{30}$$

где

$$f_m = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))} a_{\mathbf{k},m}\psi_{\mathbf{k}}, \quad a_{\mathbf{k},m} = \sum_{\substack{j \\ (k,j)\in\bigcup_{i=1}^{m} M_i}} a_{\mathbf{k},j}2^{-j}, \quad \varepsilon(m) \leqslant \varepsilon < \varepsilon(m-1).$$

Так как

$$f_m = \sum_{l=1}^{m} g_l,$$

где

$$g_l = \sum_{(\mathbf{k},j)\in M_l} a_{\mathbf{k},j}2^{-j}\psi_{\mathbf{k}},$$

то

$$L_B(f_m) \leqslant \sum_{l=1}^{m} L_B(2^{\lambda(l-1)+2}g_l) + O(\lambda(m)). \tag{31}$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 13, из (38) выводится, что

$$\begin{aligned} L_B(f_m) \leqslant L_B(\psi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\ \&\ (\exists j\ a_{\mathbf{k},j}=1)) + \\ + O\left(\lambda(m) + K(m) + \frac{K(m)\log\beta(m)}{\log(K(m)\log\beta(m))}\right), \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\beta(m) = \max_{1\leqslant l\leqslant m}(\lambda(l)-\lambda(l-1)), \quad K(m) = \sum_{l=1}^{m} \varkappa(l).$$

Далее пользуемся оценкой

$$L_B(\psi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\ \&\ (\exists j\ a_{\mathbf{k},j}=1))\leqslant\sum_{l=1}^{m}L_B(\psi_{\mathbf{k}}\colon\ \exists j\ (a_{\mathbf{k},j}=1\ \&\ (\mathbf{k},j)\in M_l)). \tag{33}$$

Так как

$$(\mathbf{k},j)\in M_l\Longrightarrow\mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(l)),$$

то для оценки слагаемых в (33) можно воспользоваться леммой 15 и получить оценку

$$\begin{aligned}L_B(\psi_{\mathbf{k}}\colon\ \mathbf{k}\in\mathcal{P}(\varepsilon(m))\ \&\ (\exists j\ a_{\mathbf{k},j}=1))\leqslant\\ \leqslant K(m)+\sum_{l=1}^{m}\log P(\varepsilon(l))+\sum_{l=1}^{m}\frac{\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l))}{\log(\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l)))}.\end{aligned} \tag{34}$$

Пусть $L(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-n+\delta})$.

Тогда из (27)–(29) следует, что

$$\varkappa(m)\ll L(\varepsilon(m))=O(\varepsilon(m)^{-n+\delta})$$

и

$$\log C_{\mu(m)}^{\varkappa(m)}\varkappa(m)\log\mu(m)\simeq\varkappa(m)\log P(\varepsilon(m)).$$

Поэтому из (29), (30), (32), (34) можно с помощью леммы 16 вывести равенство

$$L_B(f,\varepsilon)=O\biggl(L(\varepsilon(m))+\sum_{l=1}^{m}\frac{\varkappa(l)\log\mu(l)}{\log(\varkappa(l)\log\mu(l))}\biggr). \tag{35}$$

Применяя неравенство Йенсена к выпуклой функции $x/logx$, из (35) получаем равенство

$$L_B(f,\varepsilon)=O\left(L(\varepsilon(m))+\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{m}\varkappa(l)\log\mu(l)}{\displaystyle\log\biggl(\sum_{l=1}^{m}(\varkappa(l)\log\mu(l))/m\biggr)}\right). \tag{36}$$

Из (43), (34), (36) и условий п. (i) с помощью леммы 16 следует, что

$$L_B(f,\varepsilon)=O(L(\varepsilon(m))).$$

Вспоминая, что $\varepsilon(m)\leqslant\varepsilon(m-1)$, и учитывая уже полученную нижнюю оценку, выводим отсюда с помощью леммы 16 равенство пункта (i). Тем самым при $r=1$ утверждение пункта (i) доказано.

Для доказательства пункта (ii) можно воспользоваться следующим уточнением леммы 15.

Лемма 17. *Пусть Φ — произвольное подмножество Φ_δ, состоящее не более чем из d функций. Тогда для базиса $B = \{xy, x-y, |x|, 1/2\}$*

$$L_B(\Phi) \leqslant \frac{(1+o(1))d\log P(\delta)}{\log(d\log P(\delta))} + O(nd + \log P(\delta)).$$

□ Повторяя доказательство леммы 15, получаем что

$$L_B(\Phi) \leqslant O(nd) + L_B(a_{k_i}, b_{k_i}\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\delta)\ \&\ \psi_{\mathbf{k}} \in \Phi\ \&\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Вспомнив, что

$$a_m = 2^{k+i}k(k+1),\ \text{ где } i = [\log(m+3)],\ k = [\log\log(m+3)],$$

последнее слагаемое можно оценить как

$$O(nd + \log P(\delta)) + L_B(b_{k_i}\colon\ \mathbf{k} \in \mathcal{P}(\delta)\ \&\ \psi_{\mathbf{k}} \in \Phi\ \&\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Так как все числа $b_{k_i} \in \mathbb{N}$ и не больше, чем

$$2^q = O(m(\log m)(\log\log m)^2),\ \text{ где } m \leqslant P(\delta)^{1/n},$$

то, разлагая их по степеням двойки, и вычисляя $2, 4, \ldots, 2^q$ со сложностью $O(q) = O(\log P(\delta))$, сводим задачу к вычислению nd линейных форм с коэффициентами $0, 1$ от q переменных. Методом [45] можно оценить сложность этой системы линейных форм как

$$\frac{(1+o(1))ndq}{\log(ndq)} + O(nd+q) = \frac{(1+o(1))d\log P(\delta)}{\log(d\log P(\delta))} + O(nd + \log P(\delta)).$$

Из полученных оценок и следует утверждение леммы. □

Пусть выполнено условие

$$\left(\frac{\log L(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \downarrow 0\right)\ \&\ \left(\frac{L(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \to \infty\right). \tag{37}$$

Повторяя доказательство пункта (i), выбираем $\lambda(m)$ с помощью леммы 16, положив в ней $f(x) = L(2^{-x})$. Далее, выбираем $\varkappa(m) \leqslant L(\varepsilon(m))$ так, чтобы выполнялось соотношение (27). Из (27), (29) тогда следует, что

$$\mathcal{G}(\varepsilon(m)) \simeq L(\varepsilon(m))\log L(\varepsilon(m)) \tag{38}$$

и

$$\log C_{\mu(m)}^{\varkappa(m)} \simeq \varkappa(m)\log\mu(m) \simeq \varkappa(m)\log P(\varepsilon(m)), \tag{39}$$

а поэтому из (26) следует оценка

$$L_B(f,\varepsilon) \gtrsim L(\varepsilon(m)). \tag{40}$$

С помощью леммы 16 и вытекающего из (37) равенства

$$L(2\varepsilon) \simeq L(\varepsilon)$$

из (40) следует, что

$$L_B(f,\varepsilon) \gtrsim L(\varepsilon).$$

Применяя для оценки слагаемых в (33) лемму 17, получаем с помощью теоремы Штольца (см. Фихтенгольц, т. 1, гл. 1, § 2.33) вместо (34) оценку

$$L_B(f_m) \leqslant O\biggl(K(m) + \sum_{l=1}^{m} \log P(\varepsilon(l))\biggr) + (1+o(1)) \sum_{l=1}^{m} \frac{\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l))}{\log(\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l)))}. \quad (41)$$

Из (29) и условия (37) следует, что при $m \to \infty$

$$\frac{\log P(\varepsilon(m))}{\log(\varkappa(m))} \to \infty. \quad (42)$$

Из (29), (41), (42) с помощью леммы 16 следует неравенство

$$L_B(f_m) \leqslant o(L(\varepsilon(m))) + (1+o(1)) \sum_{l=1}^{m} \frac{\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l))}{\log(\varkappa(l)\log P(\varepsilon(l)))}. \quad (43)$$

Подобно (36), из (43) с помощью (29) и теоремы Штольца выводим оценку

$$L_B(f,\varepsilon) \leqslant o(L(\varepsilon(m))) + \frac{(1+o(1))\sum\limits_{l=1}^{m} \varkappa(l)\log\mu(l)}{\log\biggl(\sum\limits_{l=1}^{m}(\varkappa(l)\log\mu(l))/m\biggr)}. \quad (44)$$

Из (38), (39) и определения $\mathcal{G}(\varepsilon(m))$ с помощью теоремы Штольца получаем равенство

$$\sum_{l=1}^{m} \varkappa(l)\log\mu(l) \simeq \mathcal{G}(\varepsilon(m)) \simeq L(\varepsilon(m))\log L(\varepsilon(m)). \quad (45)$$

Из (43), (44), (37) и соотношений леммы 16 следует, что

$$L_B(f,\varepsilon) \lesssim L(\varepsilon(m)) \lesssim L(\varepsilon),$$

тем самым равенство пункта (ii) доказано.

Для того, чтобы доказать первую часть утверждения (i), выбираем функцию

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \|\mathbf{k}\|^{-c}, \quad c > 0,$$

так, чтобы

$$L(\varepsilon) = O(P(\varepsilon))^{1-\delta}, \quad \delta > 0,$$

и повторяем проведенные выше рассуждения.

Случай $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$, рассматривается аналогично, только в определении класса $\mathfrak{M}$ функцию $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ возведем в r-ю степень, а в определении системы $\{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$ функцию

$$\psi(x) = \max(0, 2\min(x, 1-x))$$

заменим на функцию $c_r(g(x)(1-g(x)))^r$, где $g(x) = \max(0, \min(x, 1))$, при подходящем c_r. Тогда любая функция из класса $\mathfrak{M}$ будет $(r-1)$-кратно непрерывно дифференцируемой по каждой переменной и

$$\mathfrak{M} \subset W(r, M_r, N_r, [0,1]^n).$$

Случай произвольного класса $W(r, M, N, I^n)$ сводится к рассмотренному.

Докажем пункт (iii). Рассмотрим класс $\mathfrak{M}$, определяемый по тригонометрической системе

$$\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\} = \{\cos k_1 x_1 \dots \cos k_n x_n\}$$

и функции

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = 2^{-(\log\|\mathbf{k}\|)^a}, \ a > 1, \quad \text{при } \|\mathbf{k}\| > 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(\mathbf{k}) = 2 \ \text{ при } \|\mathbf{k}\| \leqslant 1.$$

Он состоит из бесконечно дифференцируемых 2π-периодических и четных по всем переменным функций. Вычислим для этого класса функции $P(u)$, $R(u)$, $Q(u)$, $v(u)$, $w(u)$, $s(u)$, $\delta(u)$. Ясно, что

$$P(u) = l^n, \quad \text{где } l = \left[2^{(\log 1/u)^{1/a}}\right] + 1. \tag{46}$$

Тогда

$$R(u) = \sum_{\mathbf{k}, \mathcal{F}(\mathbf{k}) < u} \mathcal{F}(\mathbf{k}) = \sum_{\|\mathbf{k}\| \geqslant l} 2^{-(\log\|\mathbf{k}\|)^a} \leqslant \sum_{k=l}^{\infty} n(k+1)^{n-1} 2^{-(\log k)^a} \leqslant$$
$$\leqslant O\left(n \int_l^{\infty} x^{n-1} 2^{-(\log x)^a}\, dx\right) = O\left(n \int_{\log l}^{\infty} 2^{-x^a + nx}\, dx\right).$$

Так как при $k > l$ и $u < u_0$

$$((k+1)^a - n(k+1)) - (k^a - nk) > 1,$$

то

$$\int_c^{\infty} 2^{-x^a+nx}\, dx = \sum_{k=[c]+1}^{\infty} 2^{-k^a+nk} + O\left(2^{-[c+1]^a+n[c+1]} + 2^{-c^a+nc}\right) =$$
$$= O\left(2^{-[c+1]^a+n[c+1]}\right) + O\left(2^{-[c+1]^a+n[c+1]} + 2^{-c^a+nc}\right) = O\left(2^{-c^a+nc}\right).$$

Взяв

$$c = \log l = (\log 1/u)^{1/a} + O(1/l),$$

получаем тогда, что

$$-c^a + c = \log u - O(1/l)(\log 1/u)^{1-1/a} + (\log 1/u)^{1/a} = \log u + (\log 1/u)^{1/a} - o(1)$$

и справедливо равенство

$$R(u) = O\left(nu2^{(\log 1/u)^{1/a}}\right).$$

Поэтому функцию

$$v(u) = \max\{v\colon\ R(v) \leqslant u/2A\}$$

оцениваем снизу как

$$u2^{-(\log 1/u)^{1/a}} - O(\log 1/u)^{2/a-1},$$

значит, согласно (46)

$$\begin{aligned} s(u) = P(v(u)) &= 2^{n(\log 1/v(u))^{\frac{1}{a}}} + O\left(2^{(n-1)(\log 1/v(u))^{\frac{1}{a}}}\right) = \\ &= 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}} + (n/a)(\log 1/u)^{\frac{2}{a}-1} + O(\log 1/u)^{\frac{3}{a}-2}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\delta(u) = u2^{-n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}} - O(\log 1/u)^{\frac{2}{a}-1},$$

$$w(u) = \max\{v(u), \delta(u)\} = u2^{-(\log 1/u)^{1/a}} - O(\log 1/u)^{2/a-1}. \tag{48}$$

Вычислим теперь $Q(u)$:

$$Q(u) = -\sum_{\mathbf{k},\mathcal{F}(\mathbf{k})\geqslant u} \log \mathcal{F}(\mathbf{k}) = \sum_{||\mathbf{k}||\leqslant l} (\log ||\mathbf{k}||)^a = \sum_{k=1}^{l} ((k+1)^n - k^n)(\log k)^a + O(2^n).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{l} k^m (\log k)^a = \int_1^l x^m (\log x)^a \, dx + O(l^m (\log l)^a),$$

$$\begin{aligned} \int_1^l x^m (\log x)^a \, dx &= \frac{l^{m+1}}{m+1}(\log l)^a - \frac{a}{(m+1)\ln 2}\int_1^l x^m (\log x)^{a-1} \, dx = \\ &= \frac{l^{m+1}}{m+1}\left((\log l)^a - \frac{a}{\ln 2}(\log l)^{a-1} + O((\log l)^{a-2})\right), \end{aligned}$$

значит,

$$\sum_{k=1}^{l} k^m (\log k)^a = \frac{l^{m+1}}{m+1}\left((\log l)^a - \frac{a}{\ln 2}(\log l)^{a-1} + O((\log l)^{a-2})\right),$$

$$Q(u) = l^n\left((\log l)^a - \frac{a}{\ln 2}(\log l)^{a-1} + O((\log l)^{a-2})\right) =$$

$$= 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}}\left(\log\frac{1}{u} - \frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} + O\left(\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{2}{a}}\right)\right).$$

Отсюда и из (46)–(48) следует, что

$$G(u) = P(u)\log 1/u - Q(u) = 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} + O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{2}{a}}\right),$$

$$T(u) = s(u)\log\frac{2}{\delta(u)} - Q(w(u)) = 2^{n\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{a}}} + \frac{n}{a}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{2}{a}-1} +$$

$$+ O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{3}{a}-2}\left(\log\frac{1}{u} + n\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{a}} + O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{2}{a}-1}\right) -$$

$$- 2^{n\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{a}}} + \frac{n}{a}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{2}{a}-1} +$$

$$+ O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{3}{a}-2}\left(\log\frac{1}{u} + \left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{a}} - \frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} +\right.$$

$$\left. + O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\frac{2}{a}-1} + O\left(\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{2}{a}}\right)\right).$$

Поэтому при $a \geqslant 2$

$$T(u) = \frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}}\left(1 + O\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\max\left\{\frac{2}{a}-1, -\frac{1}{a}\right\}}\right),$$

значит, при $a > 2$ справедливы асимптотические равенства

$$G(u) \simeq T(u) \simeq \frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}},$$

а при $a = 2$ — равенства по порядку

$$G(u) \asymp T(u) \asymp \frac{a}{\ln 2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{a}} 2^{n(\log 1/u)^{\frac{1}{a}}}.$$

Из доказанного и теорем 1, 7, подобно следствию 1, выводится, что при $a > 2$, $B = \{xy, x - y, 1/2\}$ и почти всех $f \in \mathfrak{M}$

$$L_B(f, \varepsilon) \simeq G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon) \simeq \frac{a}{n \ln 2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{2}{a}} 2^{n(\log 1/\varepsilon)^{\frac{1}{a}}},$$

а при $a = 2$ справедливы равенства по порядку

$$L_B(f, \varepsilon) \asymp G(\varepsilon)/\log G(\varepsilon) \asymp 2^{n(\log 1/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Аналог неравенства (16) при этом выводится из неравенств

$$\begin{gathered} L_B((\cos k_1 x_1 \dots \cos k_n x_n\colon\ \mathbf{k} \in S(\varepsilon)), \delta) \leqslant L_B\left((\cos x_1, \dots, \cos x_n), c_n \frac{\delta}{l(v(\varepsilon))^2}\right) + \\ + L_B((T_1(x_i), \dots, T_{l(v(\varepsilon))}(x_i))\colon\ 1 \leqslant i \leqslant n) + (n-1)s(\varepsilon), \\ L_B((T_1(x_i), \dots, T_l(x_i), U_1(x_i), \dots, U_l(x_i))\colon\ 1 \leqslant i \leqslant n) = O(nl), \end{gathered} \tag{49}$$

где

$$S(\varepsilon) = \{0, 1, \dots, l(v(\varepsilon))\}^n,$$

T_i, U_i — полиномы Чебышева первого и второго рода. Первое из этих неравенств получается с помощью известной оценки для производной полиномов Чебышева, а второе — с помощью тождеств

$$T_m(x) = xT_{m-1}(x) - (1 - x^2)U_{m-1}(x), U_m(x) = T_{m-1}(x) + xU_{m-1}(x).$$

Пусть теперь $L(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям пункта (iii), в частности,

$$\frac{\log L(\varepsilon)}{(\log 1/\varepsilon)^b} \downarrow 0, \quad b < 1/2. \tag{50}$$

Выберем $a \in (2, 1/b)$, тогда $\dfrac{\log L(\varepsilon)}{\log P(\varepsilon)} \to 0$. Так как $L(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям также пункта (ii), то можно повторить рассуждения доказательства этого пункта. Из (46) и (28) при этом будет следовать выполнение условия (29) и нижняя оценка будет доказана так же, как и в пункте (ii).

Для получения верхней оценки выбираем m так, чтобы

$$\varepsilon(m) \leqslant \delta(\varepsilon) < \varepsilon(m-1),$$

а вместо $\mathcal{P}(\varepsilon)$ рассматриваем $S(\varepsilon)$. Из (46) и (47) следует, что

$$\log s(\varepsilon) \simeq \log P(\varepsilon),$$

а из (48) и (50) —

$$\frac{\log L(\varepsilon)}{(\log 1/\varepsilon)^b} \geqslant \frac{\log L(\delta(\varepsilon))}{(\log 1/\delta(\varepsilon))^b},$$

откуда

$$\log L(\varepsilon) \leqslant \log L(\delta(\varepsilon)) \leqslant (\log L(\varepsilon)) \left(1 + nb(\log 1/\varepsilon)^{\frac{1}{a}-1} + O(\log 1/\varepsilon)^{\frac{2}{a}-2}\right),$$

значит,

$$\log L(\delta(\varepsilon)) - \log L(\varepsilon) \to 0, \quad L(\delta(\varepsilon)) \simeq L(\varepsilon).$$

Далее доказательство проводится так же, как в пунктах (i)–(ii), только вместо леммы 16 используются леммы 18 и 19. Обозначим Φ_ε множество $\{\cos k_1 x_1 \ldots \cos k_n x_n\colon\ 0 \leqslant k_i \leqslant l(v(\varepsilon)),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $\{0, 1, \ldots, l(v(\varepsilon))\}^n = S(\varepsilon)$.

Лемма 18. *Пусть Φ — произвольное подмножество Φ_ε, состоящее не более чем из d функций. Тогда для базиса $B = \{xy, x - y, \cos x, 1/2\}$*

$$L_B(\Phi) \leqslant \frac{(1 + o(1))d \log s(\varepsilon)}{\log(d \log s(\varepsilon))} + O(nd + \log s(\varepsilon)).$$

□ Лемма доказывается методом [45] подобно лемме 17. □

Лемма 19. *Пусть Φ — произвольное подмножество Φ_ε, состоящее не более чем из d функций. Тогда для базиса $B = \{xy, x - y, 1/2\}$*

$$L_B(\Phi, \delta) \leqslant \frac{8(1 + o(1))d \log s(\varepsilon)}{\log(d \log s(\varepsilon))} + O(nd + n \log(s(\varepsilon)/\delta)).$$

□ Лемма доказывается методом [45] с помощью аналога неравенств (49) и тождеств

$$T_{i+j}(x) = T_i(x)T_j(x) - (1 - x^2)U_i(x)U_j(x),$$
$$U_{i+j}(x) = T_i(x)U_j(x) + U_i(x)T_j(x),$$

которые означают, что если $(1-x^2)$ и 0 заранее вычислены, то для вычисления $T_{i+j}(x)$ и $U_{i+j}(x)$ по известным полиномам

$$T_j(x),\ T_i(x),\ U_j(x),\ U_i(x)$$

требуется 8 операций из базиса B. □

Докажем пункт (iv). Рассмотрим класс $\mathfrak{M}$, определяемый по тригонометрической системе

$$\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\} = \{\cos k_1 x_1 \ldots \cos k_n x_n\}$$

и функции $\mathcal{F}(\mathbf{k}) = Ce^{-\mathbf{h},\mathbf{k}}$, $C > 0$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n_+$. Он состоит из аналитических 2π-периодических и четных по всем переменным функций (см. [23]). В параграфе 4 было вычислено, что

$$P(\varepsilon) \asymp s(\varepsilon) \asymp (\log 1/\varepsilon)^n,$$

значит, справедливы равенства

$$\log s(\varepsilon) \simeq \log P(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \asymp \varepsilon(\log 1/\varepsilon)^{-n}.$$

Из условий пункта (iv) следуют равенства

$$L(\delta(\varepsilon)) \asymp L(\varepsilon), \quad L(\varepsilon) = O(P(\varepsilon))^{\sigma}, \quad \sigma < 1.$$

Далее доказательство проводится так же, как в пункте (iii). □

Замечание. Для систем $\{\varphi_k\}$, удовлетворяющих условию Сидона

$$\sum_k |c_k| \leqslant \Big\| \sum c_k \varphi_k \Big\| \leqslant A \sum_k |c_k|,$$

примером которых служит рассматривавшаяся в параграфе 4 система $\{\cos 3^k x\}$ (см. [20], с. 328), все полученные ранее нижние оценки можно несколько уточнить. А именно, в оценках теорем 1, 2 и неравенстве (21) можно вместо $G(\varepsilon)$ взять $G(2\varepsilon) + \log(P(2\varepsilon)!)$. Некоторое улучшение прежних оценок будет тогда наблюдаться при

$$\mathcal{F}(k) = 2^{-(\log k)^a}, \quad a \leqslant 2.$$

Можно доказать, что для сидоновской и чебышевской систем

$$\{\cos 3^k x\} \quad \text{и} \quad \{T_{3^k}(x)\}$$

и соответствующих классов $\mathfrak{M}$ справедливы соотношения, полученные в доказательстве пункта (iii) теоремы 14. Из теоремы 11 и сделанных выше замечаний следует, что используемые в ней базисы не являются сидоновскими.

Для базиса B_3 из следствий 9, 10 методом теоремы 14 с помощью теоремы 3 можно доказать, что если при некотором $c > 1$ и любом $\varepsilon > 0$

$$cL(\varepsilon) < L(\varepsilon/2) = O(L(\varepsilon)),$$

то существуют функции $f \in C(I^n)$ такие, что

$$L(\varepsilon) \ll L_{B_3}(f, \varepsilon) \leqslant \widetilde{L}_{B_3}(f, \varepsilon) \ll L(\varepsilon).$$

Если вместо нормы $\|\,\|_{C(I^n)}$ взять $\|\,\|_{C(K^n)}$, где $K^n \subset \mathbb{C}^n$ — описанный вокруг I^n полицилиндр, то для любой функции $L(\varepsilon)$, удовлетворяющей условиям пунктов (ii) и (iv), и базиса $B = \{xy, x - y, 1/2\}$ найдутся аналитические в K^n функции f, для которых выполнено равенство пункта (ii).

Для базиса $B = \{xy, x - y, 1/2\}$ и любой функции $f \in C(I^n)$, принимающей иррациональные значения в некоторой двоично-рациональной точке, можно доказать, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\widetilde{L}_B(f, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} > 0,$$

а для базиса $B = \{xy, x - y, 1/x, 1\}$ и любой монотонной функции

$$L(\varepsilon) \gg \log 1/\varepsilon$$

найдется аналитическая функция $f \in C[a,b]$ такая, что

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)}{L(\varepsilon)} < 1.$$

Существует аналитическая функция $f \in C[a,b]$, для которой справедливо равенство $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon) \asymp \log 1/\varepsilon$.

§ 7 Обобщение некоторых результатов второго параграфа и замечание о представлении непрерывных функций суперпозициями

Теорема 15. *Пусть*

$$B \subset \{f \in C(I^m)\colon\ f(I^m) \subseteq I\},$$

причем все его функции удовлетворяют условию Липшица

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leqslant M\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

и

$$K \subset \{f \in C(I^n)\colon\ f(I^n) \subseteq I\}.$$

Тогда

$$D_B(\mathcal{K},\varepsilon) \geqslant \tau_B \log(H_{2\varepsilon}(K)/H_\delta(B)) - c_{B,n},$$

где $\delta = \dfrac{M-1}{2}\varepsilon M^{-D_B(K,\varepsilon)}$,
а в случае $M = 1$ *число* δ *будет равно* $\varepsilon/2D_B(\mathcal{K},\varepsilon)$. *Если*

$$B \subset W(1,1,N_I,I^m),$$

то

$$\widetilde{L}_B(\mathcal{K},\varepsilon) \gg H_{2\varepsilon}(K)/H_\delta(B),$$

где $\delta = \varepsilon/2\widetilde{L}_B(\mathcal{K},\varepsilon)$.

□ Для любой функции $f \in K$ и $\varepsilon > 0$ выберем функцию $g \in C(I^n)$ так, чтобы

$$\|f-g\| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad D_B(g) \leqslant D_B(\mathcal{K},\varepsilon).$$

Пусть Φ — формула глубины $D_B(g)$ в базисе B, реализующая функцию g. Выберем для B 2δ-сеть

$$N \subset \{f\colon\ f(I^m) \subseteq I\}$$

мощности $2^{H_\delta(B)}$ и заменим в Φ каждую функцию на ближайшую к ней функцию из N. Полученная формула Φ_δ реализует некоторую функцию $g_\delta \in C(I^n)$. Индукцией по $D_B(g)$ проверим, что справедливо неравенство

$$\|g - g_\delta\| \leqslant 2\delta\left(1 + M + M^2 + \cdots + M^{D_B(g)-1}\right) \leqslant \frac{M^{D_B(g)}}{M-1} 2\delta \leqslant \varepsilon. \tag{51}$$

Значит, множество всех таких функций образует 2ε-сеть для K. Поэтому, оценивая число всех формул в базисе N глубины не больше $D_B(\mathcal{K}, \varepsilon)$ с помощью (1) и упоминавшейся в параграфе 2 оценки О. Б. Лупанова как

$$|N|^{2^{D_B(\mathcal{K},\varepsilon)/\tau_B}} \leqslant (O(n))^{2^{D_B(\mathcal{K},\varepsilon)/\tau_B}}$$

и логарифмируя, получаем, что

$$H_{2\varepsilon}(K) \leqslant (H_\delta(B) + O_n(1)) 2^{D_B(\mathcal{K},\varepsilon)/\tau_B},$$

откуда и следует оценка теоремы. Последнее неравенство теоремы доказывается аналогично, только вместо (51) используется оценка

$$\|g - g_\delta\| \leqslant \delta \widetilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon). \square$$

Следствие 14. *Пусть*

$$B = W(q, M, N, I^m) \cap \{f\colon\ f(I^m) \subseteq I\}, \quad K = W(r, M', N', I^n) \cap \{f\colon\ f(I^n) \subseteq I\}$$

и $\dfrac{n}{r} > \dfrac{m}{q}$. *Тогда* $D_B(\mathcal{K}, \varepsilon) \gg \log 1/\varepsilon$.

$\square$ Следствие непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 14 [23]. $\square$

Замечание. По порядку эта оценка точна, так как для $B = \left\{\dfrac{x+y}{2}, \max(x, y), -x, 1\right\}$ и $K = W\left(1, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8}, [-1, 1]\right) \cap \{f\colon\ f(0) = 0\}$ справедливо асимптотическое равенство

$$D_B(\mathcal{K}, \varepsilon) \simeq \log 1/\varepsilon.$$

Для справедливости теоремы 15 ограниченность базиса B, вообще говоря, необходима. Соответствующий пример имеется в § 2 [17].

Методом теоремы 11 можно доказать для любых $r, M, N \in \mathbb{R}_+$, $I^n \subset \mathbb{R}^n$ существование функции $f \in W(r, M, N, I^n)$ такой, что для любого базиса

$$B = W(q, M, N, I^m) \cap \{f\colon\ f(I^n) \subseteq I\}, \quad M, N \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{r} > \frac{m}{q}$$

справедливо равенство по порядку

$$D_B(f, \varepsilon) \asymp \log 1/\varepsilon.$$

Сформулированные результаты являются некоторыми количественными аналогами теорем 16 и 17 [23].

Используя одну идею из [30] (развитую там применительно к колмогоровской сложности) и результаты параграфов 2, 4, 5, можно предложить еще одно доказательство теоремы А. Г. Витушкина и некоторых ее аналогов, один из которых несколько уточняет известный результат Д. Гильберта. Обозначим F_r^n класс всех r-кратно непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, J_β^n — класс Жеврэ всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, таких, что для любых $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathbf{D}^{\mathbf{r}} f(\mathbf{x})| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C_{||\mathbf{x}||}^{r_i+1} (r_i+1)^{\beta r_i},$$

A^n — класс всех аналитических на $\mathbb{R}^n$ функций, A_p^n — его подкласс, состоящий из всех 2π-периодических по всем переменным функций, аналитические продолжения которых удовлетворяют условию

$$|f(z)| = O\left(e^{\sum_i |\operatorname{Im} z_i|^p}\right).$$

Известно (см., напр., [37]), что $J_1 = A$.

Множество всех суперпозиций функций из B обозначаем $[B]$.

Теорема 16.

(i) *При* $\dfrac{n}{r} > \dfrac{m}{q}$ *класс* F_r^n *не содержится в* $[F_q^m]$;

(ii) *при* $n > m$ *класс* A^n *не содержится в* $[A^m]$;

(iii) *при* $n(p-1)/p > m(q-1)/q$ *класс* A_p^n *не содержится в* $[A_q^m]$, *а при* $n(p-1)/p > m$ — *и в классе* $[A^m]$.

(iv) *при* $n\beta > m\gamma$ *класс* J_β^n *не содержится в* $[J_\gamma^m]$.

□ Выберем

$$B = \{x - y, xy, 1/2\} \quad \text{и} \quad I^n = [-\pi, \pi]^n.$$

Методом теорем 1, 11 можно с помощью лемм 5, 6 [17] доказать существование функции $f_1 \in F_r^n$ такой, что

$$L_B(f_1, \varepsilon) \gg \frac{\varepsilon^{-n/r}}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+n/r} \left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n/r}} \tag{52}$$

(здесь и далее приближение осуществляется в метрике пространства $C(I^n)$). Методом теоремы 1 можно с помощью теоремы 21 [23] доказать существование такой функции $f_2 \in A_p^n$, что

$$L_B(f_2, \varepsilon) \gg \frac{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n(p-1)}{p}+1}}{\log\log \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{53}$$

Объясним подробнее, как еще можно доказать существование такой $f_3 \in J^n_\beta$, что

$$L_B(f_3, \varepsilon) \gg \frac{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n\beta+1}}{\log\log \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{54}$$

Как и в параграфе 4, определим по тригонометрической системе в пространстве $C(I^n)$ и функции

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = e^{-\sum_i |k_i|^{1/\beta}}$$

класс $\mathfrak{M}$. Так как

$$\sum_{i=1}^n |k_i|^{1/\beta} \leqslant O(|\mathbf{k}|^{1/\beta}),$$

то согласно теореме 1 и замечаниям из параграфе 4 в классе $\mathfrak{M}$ найдется функция f, удовлетворяющая неравенству (54). Дифференцируя ряд Фурье для f, получаем оценку

$$|\mathbf{D}^{\mathbf{r}} f(\mathbf{x})| \leqslant \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \prod_{i=1}^n |k_i|^{r_i} \leqslant \prod_{i=1}^n \sum_k e^{-|k|^{1/\beta}} |k|^{r_i} = O\left(\prod_{i=1}^n \int_1^\infty e^{-x^{1/\beta}} x^{r_i}\, dx\right) =$$
$$= O\left(\prod_{i=1}^n e^{-x} x^{\beta r_i + \beta - 1}\, dx\right) = O\left(\prod_{i=1}^n \Gamma(\beta r_i + \beta - 1)\right) \leqslant \prod_{i=1}^n c_\beta^{r_i+1} (r_i+1)^{\beta r_i},$$

из которой следует, что $f \in J^n_\beta$.

Пункт (ii) следует из (iii). Для доказательства пунктов (i), (iii), (iv) достаточно проверить, что функции f_i, удовлетворяющие неравенствам (59)–(61), не выражаются суперпозициями функций из соответствующих классов K^m. Допустим противное, а именно, что f **точно** реализуется формулой Φ в базисе $\mathfrak{B} \subset K^m$. Можно считать, что переменные в Φ принадлежат отрезку $[-\pi, \pi]$. Выберем отрезок I так, чтобы при ограничении всех функций из Φ на I^m эта формула по-прежнему реализовала бы на $[-\pi, \pi]^n$ функцию f. Пусть J — отрезок, содержащий I строго внутри. Заметим, что все функции из Φ принадлежат некоторому классу

$$W(1, M, N, J^m).$$

При достаточно малом ε, выбирая $\delta = \Omega(\varepsilon)$ с помощью (51) и заменяя в Φ каждую функцию на ее наилучшее приближение на I^m в базисе B, получаем, что $L_B(f, \varepsilon) = O(L_B(\mathfrak{B}, \delta))$.

Осталось оценить сверху $L_B(\mathfrak{B}, \delta)$ и заметить, что получается противоречие с неравенствами (52)–(54).

Для этого для любой $g \in K^m$ оценим на I^m сложность $L_B(g, \delta)$. В случае $K^m = F^m_q$ эта оценка следует из теоремы 1. 5, в случае $K^m = A^m$ — из следствия 6 параграфа 4, в случае $K^m = A^m_q$ оценка доказывается подобно следствиям 2, 3 параграфа 4 с помощью теоремы 21 [23]. Для ее доказательства в случае $K^m = G^m_\gamma$ потребуется

Лемма 20. *Для любого $p > 0$ существует функция $\varphi(\mathbf{x}) \in J^m_{1+1/p}$, равная 1 на $[-1,1]^m$ и нулю вне $[-2,2]^m$.*

□ С помощью формулы Лейбница для кратной производной проверяется, что класс J_β замкнут относительно умножения, поэтому достаточно доказать лемму при $m = 1$, а для этого достаточно построить функцию

$$h(x) \in J^1_{1+1/p},$$

такую, что

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 1, \end{cases}$$

и перемножить функции $h(x+2)$ и $h(2-x)$. Обобщая один пример из [18], в качестве $h(x)$ на $(0,1)$ возьмем

$$\exp\left(-x^{-p}\exp(-(1-x)^{-p})\right).$$

На интервале $(0, \varepsilon_p)$ производную $D^r h(x)$ можно оценить, как и в [37], учитывая, что $h(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, и при $|z| < \varepsilon$

$$\left|\exp(-(1-z)^{-p})\right| < \delta(\varepsilon),$$

значит,

$$|D^r h(x)| \leqslant \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{|h(z)|}{|z-x|^{r+1}}dz \leqslant c_p^r r! x^{-r}\exp(-c_p x^{-p}),$$

где $\mathcal{C}$ — окружность с центром x, касающаяся лучей $\arg z = \pm\pi/4p$. Максимизируя по x, получаем при $x \in (0, \varepsilon_p)$ оценку

$$|D^r h(x)| \leqslant c_p^r r^{r(1+1/p)}.$$

На интервале $(1-\varepsilon_p, 1)$ производную $D^r h(x)$ вычисляем по формуле

$$D^r h(x) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{h(z)}{(z-x)^{r+1}}dz,$$

где $\mathcal{C}$ — окружность с центром x, касающаяся лучей $\arg(1-z) = \pm\pi/4p$. Так как при $x \to 1$

$$-x^{-p}\exp(-(1-x)^{-p}) = (1 + O_p(1-x))\exp(-(1-x)^{-p}),$$

то

$$h(x) = 1 + O\left(\exp(-(1-x)^{-p})\right),$$

и замечая, что

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{h(z)}{(z-x)^{r+1}}dz = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-x)^{r+1}} + \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{h(z)-1}{(z-x)^{r+1}}dz = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{h(z)-1}{(z-x)^{r+1}}dz,$$

получаем как и ранее при $x \in (1, 1-\varepsilon_p)$ оценку

$$|D^r h(x)| \leqslant \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{|h(z)-1|}{|z-x|^{r+1}} dz \leqslant c_p^r r! (1-x)^{-r} \exp(-c_p (1-x)^{-p}) \leqslant c_p^r r^{r(1+1/p)}.$$

Так как $h(x)$ аналитически продолжается в окрестность отрезка $[\varepsilon_p, 1-\varepsilon_p]$, то согласно [37] на нем

$$|D^r h(x)| \leqslant c^r r^r.$$

В итоге $h(x) \in J^1_{1+1/p}$. $\square$

Пусть

$$g \in J^m_\gamma, \quad 1 + 1/p < \gamma,$$

тогда

$$gh \in J^m_\gamma, \quad \operatorname{supp} gh \subseteq [-2, 2]^m,$$

и можно выбрать 2π-периодическую по всем переменным функцию $f \in J^m_\gamma$ так, что $f = gh = g$ на кубе $[-1, 1]^m$. Согласно лемме 6 [17] можно считать, что $I = [-1, 1]$. Разложим функцию $f(\mathbf{x})$ в m-кратный ряд Фурье. Вычисляя его коэффициенты $a_{\mathbf{k}}$ по формулам Фурье и r-кратно интегрируя по частям по подходящей переменной, получаем оценку

$$|a_{\mathbf{k}}| \leqslant (2\pi)^{-m_{k_i}-r} \int\limits_{[0,2\pi]^m} \ldots \int |D_i^r f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leqslant k_i^{-r} \|D_i^r f(\mathbf{x})\| \leqslant k_i^{-r} c^r r^{\gamma r} = \|k\|^{-r} c^r r^{\gamma r}.$$

Выбрав

$$r = \left[(\|\mathbf{k}\|/2c)^{1/\gamma} \right],$$

заметим, что при достаточно большом $\|\mathbf{k}\|$

$$|a_{\mathbf{k}}| \leqslant 2^{-r} \|\mathbf{k}\| \leqslant 2^{-c_\gamma \|\mathbf{k}\|^{1/\gamma}},$$

то есть $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, определенному по тригонометрической системе с помощью функции

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = e^{-c_\gamma, m^{|\mathbf{k}|^{1/\gamma}}}$$

(см. параграф 4). Теперь методом, которым доказывались следствия 2, 3 параграфа 4, получаем нужную оценку

$$L_B(g, \delta) \leqslant L_B(f, \delta) = O\left(\frac{(\log 1/\delta)^{1+m\gamma}}{\log\log 1/\delta} \right) = O\left(\frac{(\log 1/\varepsilon)^{1+m\gamma}}{\log\log 1/\varepsilon} \right). \square$$

По существу также было доказано, что для любого класса J^n_β на любом параллелепипеде I^n справедливо равенство по порядку

$$L_B(J^n_\beta, \varepsilon) \asymp \frac{(\log 1/\varepsilon)^{1+n\beta}}{\log\log 1/\varepsilon},$$

причем для некоторых $f \in J_\beta^n$

$$L_B(f,\varepsilon) \asymp L_B(J_\beta^n,\varepsilon).$$

Отсюда и из теоремы 1 следует равенство по порядку

$$H_\varepsilon(J_\beta^n) \asymp (\log 1/\varepsilon)^{1+n\beta},$$

что можно проверить и непосредственно.

В одномерном случае предыдущие утверждения можно уточнить. Обозначим $J_\beta^1(m)$ класс всех таких $f(x) \in J_\beta^1$, что

$$|D^r f(x)| \leqslant c_{|\mathbf{x}|} m^r (r!)^\beta.$$

Применяя результаты П. Л. Ульянова [36] и рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 16, можно получить асимптотику

$$L_B(J_\beta^1(m),\varepsilon) \simeq \gamma \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+\beta} \Big/ \ln\ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{(e/\beta)^\beta m|I|}{(\beta+1)^2 2\pi},$$

причем найдутся такие функции $f \in J_\beta^1(m)$, что

$$L_B(f,\varepsilon) \simeq L_B\left(J_\beta^1(m),\varepsilon\right),$$

а также

$$H_\varepsilon\left(J_\beta^1(m)\right) \simeq \gamma(\beta+1)(\log e)(\ln 1/\varepsilon)^{1+\beta}.$$

§ 8 О некоторых автоматных аналогах

Некоторые результаты предыдущих параграфов имеют теоретико-автоматные аналогии. Обозначим $\mathbb{Z}_2$ множество $\{0,1\}^\infty$ двоичных последовательностей, $\mathbb{Z}_2^n$ — декартову степень множества $\mathbb{Z}_2$, а $\mathcal{P}^n$ — множество n-местных детерминированных функций. На множестве $\mathbb{Z}^2$ определим метрику

$$\rho(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 2^{-m}, \quad \text{где} \quad m = \min\{i\colon\ b_i \neq c_i\},$$

индуцированную метрикой поля 2-адических чисел. На множестве $\mathbb{Z}_2^n$ определим метрику равенством

$$\rho(b,c) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \rho(\mathbf{b}_i,\mathbf{c}_i),$$

где $b = (\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$, $c = (\mathbf{c}_1\ldots,g\mathbf{c}_n)$, $\quad \mathbf{b}_i,\mathbf{c}_i \in \mathbb{Z}_2$. Тогда класс $\mathcal{P}^n$ совпадает, как известно, с множеством всех функций

$$f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2,$$

удовлетворяющих условию Липшица

$$\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leqslant \rho(\mathbf{x}, gy),$$

а множество $\mathbb{Z}_2^n$ гомеоморфно n-ой степени канторова множества.

Определим метрику на множестве $\mathcal{P}^n$ равенством

$$\rho(f, g) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n} \rho(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})).$$

Эта метрика удовлетворяет условию «неархимедовости»:

$$\rho(f, g) \leqslant \max(\rho(f, h), \rho(h, g)).$$

Тогда ε-емкость и ε-энтропия компактов $(\mathbb{Z}_2^n, \rho)$ и $(\mathcal{P}^n, \rho)$ вычисляются по формулам (в которых $]x[= \min\{n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant x\}$).

$$C_\varepsilon(\mathbb{Z}_2^n) = H_\varepsilon(\mathbb{Z}_2^n) = n \left] \log \frac{1}{2\varepsilon} \right[, \quad C_\varepsilon(\mathcal{P}^n) = H_\varepsilon(\mathcal{P}^n) = \frac{2^{]\log \frac{1}{\varepsilon}[n} - 2^n}{2^n - 1}.$$

Пусть $B \subset \mathcal{P} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n$ — произвольный A-полный базис (определение см. в [25]).Тогда обычным образом можно определить $L_B(f, \varepsilon)$ для любых $f \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. В качестве B часто будем использовать стандартный полный базис $B_0 = \{\&, \vee, {}^-, z_0, z_1\}$, состоящий из детерминированных функций единичного веса и задержек (см. [25]). Как известно [25], функции из $\mathcal{P}^n$ можно отождествить с бесконечными полными корневыми 2^n-арными деревьями, ребра которых помечены символами 0 или 1. Выбирая для каждого ребра эти символы с вероятностью $1/2$, определяем на множестве $\mathcal{P}^n$ естественную вероятностную меру. Тогда справедлив следующий аналог теоремы 5 [17] и теоремы 1 из § 2 настоящей статьи.

Теорема 17. *Для любой функции $f \in \mathcal{P}^n$ справедлива оценка*

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant \frac{2^{]\log \frac{1}{\varepsilon}[n}}{(2^n - 1) n \log \frac{1}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{3 \log\log 1/\varepsilon + O\left(\sqrt{\log\log 1/\varepsilon}\right)}{n \log \frac{1}{\varepsilon}} \right)$$

и для почти всех функций $f \in \mathcal{P}^n$ — оценка

$$L_B(f, \varepsilon) \geqslant \frac{2^{]\log \frac{1}{\varepsilon}[n}}{(2^n - 1) n \log \frac{1}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\log\log 1/\varepsilon - O(1)}{n \log \frac{1}{\varepsilon}} \right).$$

□ Нижняя оценка доказывается методом теоремы 1. Она справедлива и для реализации детерминированных функций схемами с обратной связью. Верхняя оценка легко получается с помощью теоремы О. Б. Лупанова о сложности схемной реализации булевых функций [29]. □

Теорема 17 может быть использована для получения следующего аналога теоремы 16.

Теорема 18. *Для почти всех $f \in \mathcal{P}^{n+1}$ справедливо неравенство*

$$L_{\mathcal{P}^n}(f,\varepsilon) \gtrsim \frac{n(2^n-1)}{(n+1)(2^{n+1}-1)} 2^{]\log 1/\varepsilon[},$$

а в случае реализации схемами с обратной связью — неравенство

$$L_{\mathcal{P}^n}(f,\varepsilon) \gg \frac{\log 1/\varepsilon}{\log\log 1/\varepsilon}.$$

□ Пусть f такова, что для нее выполняется неравенство теоремы 17. Рассмотрим схему в базисе $\mathcal{P}^n$ сложности $L_{\mathcal{P}^n}(f,\varepsilon)$, приближающую функцию f с точностью ε. Заменим в этой схеме все функции из $\mathcal{P}^n$ на ε-приближающие их схемы в базисе B_0 сложности не выше $L_{B_0}(\mathcal{P}^n,\varepsilon)$. Тогда, пользуясь тем, что функции из множества $\mathcal{P}^n$ удовлетворяют условию Липшица, и «неархимедовостью» метрики ρ, получаем оценку

$$L_{B_0}(f,\varepsilon) \leqslant L_{\mathcal{P}^n}(f,\varepsilon) L_{B_0}(\mathcal{P}^n,\varepsilon),$$

из которой с помощью теоремы 17 получаем первую из нужных нам оценок. Вторая оценка получается таким же образом, если устранить обратные связи известным приемом из [25]. □

Следствие 15. *Почти все функции класса $\mathcal{P}^{n+1}$ не выражаются через функции класса $\mathcal{P}^n$ с помощью суперпозиции и обратной связи.*

Существование таких функций было ранее доказано в [30].

Класс $\mathcal{P}^n_{\text{од}}$ всех ограниченно-детерминированных функций из $\mathcal{P}^n$ (определение см. в [25]) всюду плотен в пространстве $(\mathcal{P}^n,\rho)$ и имеет те же самые ε-емкость и ε-энтропию, что и $\mathcal{P}^n$, но образует в нем множество меры нуль, и для любой функции $f \in \mathcal{P}^n_{\text{од}}$ очевидно неравенство

$$L_{B_0}(f,\varepsilon) \ll \log 1/\varepsilon,$$

причем эта оценка, вообще говоря, по порядку точная. В то же время

$$L_{B_0}(\mathcal{P}^n_{\text{од}},\varepsilon) \simeq L_{B_0}(\mathcal{P}^n,\varepsilon).$$

Из сказанного видно, что применить метод теоремы 18 для доказательства невыразимости класса $\mathcal{P}^{n+1}_{\text{од}}$ через класс $\mathcal{P}^n_{\text{од}}$ с помощью операции суперпозиции не удастся. И действительно, Д. Н. Бабиным было недавно доказано, что класс $\mathcal{P}^{n+1}_{\text{од}}$ выражается через класс $\mathcal{P}^n_{\text{од}}$ с помощью операции суперпозиции.

Справедлив следующий автоматный аналог теорем 13 и 14.

Теорема 19. *Для любой возрастающей последовательности $\{l(m)\}$, $l(m) \in \mathbb{N}$, такой, что при $m \geqslant m_0$*

$$\Delta l(m) = l(m) - l(m-1) \gg m, \quad l(m) \leqslant \frac{2^{mn}}{mn} - 1,$$

найдется функция $f \in \mathcal{P}^n$, для которой справедливо равенство по порядку

$$L_B(f,\varepsilon) \asymp l(]\log 1/\varepsilon[).$$

Если к тому же

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log l(m)}{\log m} = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \Delta l(m)/m = \infty,$$

то

$$L_B(f,\varepsilon) \simeq l(]\log 1/2\varepsilon[).$$

□ Пусть $\{k(m)\}$, $0 \leqslant k(m) \leqslant 2^{mn-1}$, некоторая последовательность, которую более точно определим далее. Как известно, произвольную функцию $f \in \mathcal{P}^n$ можно отождествить с последовательностью булевых функций $\{f_m\}$, $f_m \in P_2^{mn}$ (P_2^k — это класс всех k-местных булевых функций). Обозначим через $\mathfrak{A}_m$ класс всех функций $f_m \in P_2^{mn}$, таких, что

$$\operatorname{card}\{\widetilde{\alpha}\colon\ f_m(\widetilde{\alpha}) = 1\} = k(m),$$

а через μ_m — равномерно распределенную на $\mathfrak{A}_m$ вероятностную меру. Тогда на множестве

$$\mathfrak{A} = \bigotimes_m \mathfrak{A}_m \subset \mathcal{P}^n$$

естественным образом определяется мера $\mu = \bigotimes\limits_m \mu_m$

Последовательность $\{k(m)\}$ можно выбрать так, чтобы

$$\left|\log C_{2^{ni}}^{k(i)} - (l(i)\log l(i) - l(i-1)\log l(i-1))\right| = O(ni),$$

(ведь $l(i)\log l(i) \leqslant logC_{2^{ni}}^{2^{ni-1}}$), тогда имеем

$$nik(i) \geqslant \Delta l(i)\log l(i) - ni \gg i\log i,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \log C_{2^{ni}}^{k(i)} - l(m)\log l(m)\right| = O(nm^2),$$

откуда следует асимптотическое равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \log C_{2^{ni}}^{k(i)}\right) \Bigg/ \log\left(\sum_{i=1}^{m} \log C_{2^{ni}}^{k(i)}\right) \simeq l(m),$$

и согласно лемме Бореля – Кантелли для почти всех функций $f \in \mathfrak{A}$

$$L_B(f,\varepsilon) \gtrsim l(]\log 1/2\varepsilon[).$$

Получим верхнюю оценку. Так как

$$k(m)/\log m \gg (\Delta l(m)\log l(m))/(nm\log m) \to \infty,$$

то, применяя теорему О. Б. Лупанова [27] о сложности булевых функций с данным числом единиц, получаем асимптотическую оценку

$$L_{\{\&,\vee,^-\}}(f_m) \leqslant \frac{(1+o(1))\log C_{2^{mn}}^{k(m)}}{\log\log C_{2^{mn}}^{k(m)}} + O(mn).$$

Заменяя в соответствующей схеме логические элементы на ограниченно-детерминированные функции единичного веса, получаем ограниченно-детерминированную функцию F_m единичного веса, которая в базисе B_0 имеет ту же сложность, что и f_m в базисе $\{\&,\vee,^-\}$. Построим константную о. д. функцию $G_1 = 1000\ldots$ и с помощью цепи из $\tau-1$ задержки — константные о. д. функции

$$G_2 = 01000\ldots, G_3 = 001000\ldots, \ldots, G_{\tau-1} = \underbrace{0\ldots0}_{\tau-1}1000\ldots.$$

Тогда f реализуется с точностью $2^{-\tau} \leqslant \varepsilon < 2^{-\tau+1}$ формулой

$$\Phi = \bigvee_{t=1}^{\tau-1} F_t \,\&\, G_t,$$

откуда с помощью теоремы Штольца, неравенства Иенсена для функции $x/\log x$ и условия $\log l(m)/\log m \to \infty$ следует асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} L_{B_0}(F,\varepsilon) &\leqslant \sum_{t=1}^{\tau} L_{B_0}(F_t) + O(\tau) \leqslant (1+o(1))\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\log C_{2^{nt}}^{k(t)}}{\log\log C_{2^{nt}}^{k(t)}} + O(\tau^2) \leqslant \\ &\leqslant (1+o(1))\frac{\sum_{t=1}^{\tau-1}\log C_{2^{nt}}^{k(t)}}{\log\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}\log C_{2^{nt}}^{k(t)}\Big/\tau\right)} + O(\tau^2) \leqslant \\ &\leqslant O(\tau^2) + (1+o(1))l(\tau-1) \leqslant (1+o(1))l(\tau-1) \lesssim l(]\log 1/2\varepsilon[). \end{aligned}$$

В случае $\Delta l(m) \gg m$ вместе с теоремой О. Б. Лупанова применяем теорему Б. И. Финикова (см. [27]) и получаем ту же оценку, но не асимптотическую, а лишь по порядку. □

Подобным приемом доказывается и верхняя оценка в теореме 17.

Литература

[1] Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций // УМН. — 1984. — Т. 39, № 3. — С. 157–169.

[2] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.

[3] Бернштейн С. Н. Собр. соч. Т. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1954.

[4] Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования. — М.: Физматгиз, 1958.

[5] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1983. — № 4. — С. 36–43.

[6] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1984. — № 3. — С. 35–41.

[7] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в непрерывных базисах // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1984. — № 6. — С. 53–57.

[8] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных при помощи схем и формул в некоторых базисах, состоящих из непрерывных функций // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1986. — № 3. — С. 48–57.

[9] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах эффекта Шеннона // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1986. — № 6. — С. 25–33.

[10] Гашков С. Б. О сложности монотонных вычислений многочленов // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1987. — № 5. — С. 7–13.

[11] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации функций, удовлетворяющих условию Липшица, схемами в непрерывных базисах // Мат. заметки. — 1988. — Т. 43, № 4. — С. 543–557.

[12] Гашков С. Б. О сложности вычисления некоторых классов многочленов нескольких переменных // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1988. — № 1. — С. 89–91.

[13] Гашков С. Б. О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестник МГУ. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 88–92.

[14] Гашков С. Б. О сложности приближенного вычисления действительных чисел схемами и формулами в различных рациональных базисах // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 26–46.

[15] Гашков С. Б. Сложнореализуемые булевы функции и трудновычислимые действительные числа // Дискретная математика. — 1991. — Т. 3, № 1. — С. 48–60.

[16] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классических функций // Труды института математики СО РАН. Том 127. — 1994. — С. 14–33.

[17] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в полиномиальных и некоторых других базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1995. — С. 144–207.

[18] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

[19] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.

[20] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984.

[21] Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[22] Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963. — P. 369–376.

[23] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. — 1959. — Т. 14, № 2 (86). — С. 3–86.

[24] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987.

[25] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1986.

[26] Лупанов О. Б. О сложности реализации булевых функций формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 61–80.

[27] Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.

[28] Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 43–81.

[29] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд. МГУ, 1984.

[30] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. Вып. 37. — М.: Наука, 1981. — С. 5–18.

[31] Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций. — М.: Наука, 1991.

[32] Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960.

[33] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд. МГУ, 1976.

[34] Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. — М.: Мир, 1983.

[35] Трауб Дж., Вожьняковский Х., Васильковский Г. Информация, неопределенность, сложность. — М.: Мир, 1988.

[36] Ульянов П. Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 2. — С. 287–290.

[37] Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1986.

[38] Borodin A., Munro I. Computational complexity of algebraic and numeric problems. — N.Y.: American Elsevier, 1975.

[39] Borwein J. M., Borwein R. P. On the complexity of familiar functions and numbers // SIAM Rewiew. — 1988. — V. 30, № 4. — P. 589–601.

[40] Borwein J. M., Borwein R. P. The AGM and fast evaluation of elementary functions // SIAM Rewiew. — 1984. — V. 26, № 4. — P. 351–365.

[41] Brent R. Fast multiple precision evaluation of elementary functions // J. Assoc. Comp. Mach. — 1976. — V. 23. — P. 242–251.

[42] Maruyama K. On the parallel evaluation of polynomials. — IEEE Trans. Comput. C-22. № 1. — 1973.

[43] Makovoz J. On the Kolmogorov complexity of functions. — J. of complexity. — 1986. — № 2. — P. 121–130.

[44] Munro I., Patterson M. Optimal algorithms for parallel polynomial evaluation // IBM RC 3497. August 11, 1971, Computer sciences.

[45] Pippenger N. On the evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. — 1980. — № 9. — P. 230–250.

[46] Strassen V. Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing. — 1973. — V. 11. — P. 181–196.

[47] Strassen V. Algebraische Berechnungskomplexität.- Anniv. Oberwolfach. — 1984. — P. 509–550.

Статья поступила в редакцию в июне 1995 г.