УДК 519.7

Необходимые условия экстремума в задаче математического программирования¹

©2007 г. Е. Р. Аваков², А. В. Арутюнов³, А. Ф. Измаилов⁴

Поступило в июле 2006 г.

Для задач минимизации с ограничениями — равенствами и неравенствами излагаются необходимые условия первого и второго порядков локального экстремума, содержательные в случае нарушения традиционных условий регулярности ограничений. Применяемый подход основан на концепции 2-регулярности; он объединяет и обобщает предыдущие исследования авторов, основанные на этой концепции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X и Y — банаховы пространства. Будем рассматривать задачу математического программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D, \quad (1.1)$$

где

$$D = \{x \in X \mid F(x) = 0, g(x) \leq 0\}. \quad (1.2)$$

Здесь $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $F: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкие отображения.

Литература по условиям первого и второго порядков локального экстремума для задачи (1.1), (1.2) чрезвычайно обширна (см., например, [1, гл. 1; 2, § 3.2, 3.4; 3, Ch. 2, Sect. 5.2.2] и цитированную там литературу). Однако в подавляющем большинстве случаев (за некоторыми исключениями, о которых речь пойдет ниже) приводимые в этих публикациях условия экстремума содержательны лишь при выполнении в рассматриваемой точке $x_* \in D$ условия регулярности Мангасариана–Фромовица, состоящего в том, что $\text{im } F'(x_*) = Y$ и существует $\bar{\xi} \in X$ такой, что

$$F'(x_*)\bar{\xi} = 0, \quad \langle g'_i(x_*), \bar{\xi} \rangle < 0 \quad \forall i \in I(x_*), \quad (1.3)$$

где $I(x_*) = \{i = 1, \dots, m \mid g_i(x_*) = 0\}$ — множество номеров активных в точке x_* ограничений-неравенств.

Всюду в этой работе будем предполагать, что подпространство $\text{im } F'(x_*)$ замкнуто. Традиционные исследования задачи (1.1), (1.2) основываются на принципе Лагранжа и используют функцию Лагранжа этой задачи

$$L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle, \quad (1.4)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00275, 05-01-00193, 06-01-81004, 06-01-00530 и 07-01-00270) и грантов Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проекты НШ-5344.2006.1 и НШ-9344.2006.1).

²Институт проблем управления РАН, Москва, Россия.
E-mail: era@maxmin.ru

³Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: arutun@orc.ru

⁴Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: izmaf@ccas.ru

где $x \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Y^*$, $\mu \in \mathbb{R}^m$. Классическое необходимое условие первого порядка состоит в следующем: если точка x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2), то существуют множители $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Y^*$ и $\mu \in \mathbb{R}^m$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\frac{\partial L_0}{\partial x}(x_*, \lambda_0, \lambda, \mu) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \langle \mu, g(x_*) \rangle = 0. \quad (1.5)$$

При выполнении в точке x_* условия Мангасариана–Фромовица данное необходимое условие может выполняться только при $\lambda_0 > 0$ и, значит, равносильно следующему: существуют множители $\lambda \in Y^*$ и $\mu \in \mathbb{R}^m$ такие, что

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_*, 1, \lambda, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \langle \mu, g(x_*) \rangle = 0. \quad (1.6)$$

Если же условие Мангасариана–Фромовица в точке x_* нарушается, то необходимое условие (1.5) выполняется автоматически при $\lambda_0 = 0$ и некоторых $\lambda \in Y^*$ и $\mu \in \mathbb{R}^m$, не равных нулю одновременно, а в такой форме это условие просто равносильно нарушению в точке x_* условия Мангасариана–Фромовица и соответственно ничего больше не выражает. Поэтому построение более тонких необходимых условий экстремума, содержательных в случае возможного нарушения условия Мангасариана–Фромовица, представляет большой интерес.

В [4, 5] была введена следующая обобщенная функция Лагранжа задачи (1.1), (1.2):

$$L_2(x, h, \lambda_0, \lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2) = \lambda_0 f(x) + \langle \lambda^1, F(x) \rangle + \langle \mu^1, g(x) \rangle + \langle \lambda^2, F'(x)h \rangle + \langle \mu^2, g'(x)h \rangle, \quad (1.7)$$

где $x, h \in X$, а $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^1, \lambda^2 \in Y^*$, $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^m$ играют роль множителей Лагранжа. С использованием этой функции были получены содержательные в нерегулярном случае необходимые условия первого и второго порядков локального экстремума для задачи с ограничениями-равенствами (т.е. при $m = 0$), а в [6] — примыкающие к ним достаточные условия второго порядка. Элемент h играет здесь роль параметра и изменяется в некотором множестве, определяемом первой и второй производной отображения F в точке x_* . В основе этих построений лежит понятие 2-регулярности, соответствующее обобщение которого играет центральную роль и в настоящей работе.

Результаты из [4, 5] получили дальнейшее развитие в [7], где они были распространены на задачи вариационного исчисления, и в [8], где рассматривались задачи оптимального управления. В [9] эти результаты были распространены на случай ослабленных требований гладкости, а в [10] — на случай, когда $\text{im } F'(x_*)$ не предполагается замкнутым. Близкие идеи использовались в [11, 12] для случая ограничений-неравенств. Вместе с тем случай наличия как ограничений-равенств, так и ограничений-неравенств при нарушении условия Мангасариана–Фромовица до сих пор исследован не был. Данная работа восполняет этот пробел.

Несколько слов относительно используемых обозначений. Для заданного линейного нормированного пространства U через U^* обозначается его сопряженное пространство, а через $B_\varepsilon(\bar{u}) = \{u \in U \mid \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon\}$ обозначается шар с центром в точке $\bar{u} \in U$ радиуса $\varepsilon > 0$. Для заданного множества $S \subset U$ через $\text{int } S$ обозначается его внутренность, через $\text{cl } S$ его замыкание, через $\text{lin } S$ его линейная оболочка (минимальное линейное подпространство, содержащее S), через $\text{aff } S$ его аффинная оболочка (минимальное аффинное множество, содержащее S), через $\text{cone } S$ его коническая оболочка (минимальный конус, содержащий S), а через $S^\perp = \{l \in U^* \mid \langle l, u \rangle = 0 \forall u \in S\}$ его аннулятор. Далее через $\text{dist}(\bar{u}, S) = \inf_{u \in S} \|u - \bar{u}\|$ обозначается расстояние от точки $\bar{u} \in U$ до множества S . Если V — другое линейное нормированное пространство, то $\mathcal{L}(U, V)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из U в V . Для заданного линейного оператора $A: U \rightarrow V$ через $\text{im } A$ обозначается его образ (множество значений), а через $\text{ker } A$ обозначается его ядро (множество нулей).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое вытекает из [13, теоремы 17, 18].

Лемма 1. Пусть U и V — банаховы пространства, $P \subset U$ — замкнутое выпуклое множество, $\Phi: U \rightarrow V$ — непрерывное в окрестности точки $\bar{u} \in P$ отображение, $\bar{v} = \Phi(\bar{u})$. Предположим, что существуют числа $a > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\text{dist}(u, \Phi^{-1}(v) \cap P) \leq a \|\Phi(u) - v\| \quad \forall u \in B_{\varepsilon_1}(\bar{u}) \cap P, \quad \forall v \in B_{\varepsilon_2}(\bar{v}).$$

Тогда найдутся числа $c = c(a) > 0$, $\delta_1 = \delta_1(a, \varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(a) > 0$ такие, что для любого отображения $\varphi: U \rightarrow V$, удовлетворяющего на $B_{\delta_1}(\bar{u})$ условию Липшица с константой $l < 1/a$ и условию $\|\bar{v} + \varphi(\bar{u})\| \leq \delta_2$, найдется $u \in P$ такой, что

$$\Phi(u) + \varphi(u) = 0, \quad \|u - \bar{u}\| \leq c \|\bar{v} + \varphi(\bar{u})\|.$$

Лемма 2. Пусть U и V — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(U, V)$, подпространство $\text{im } A$ замкнуто, $B \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^s)$, $l \in U^*$, $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $w \in \mathbb{R}^s$. Предположим, что

$$S = \{u \in U \mid Au + v = 0, Bu + w \leq 0\} \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Тогда условие

$$\langle l, u \rangle + a \geq 0 \quad \forall u \in S \quad (2.2)$$

равносильно следующему: найдутся $\lambda \in V^*$ и $\mu \in \mathbb{R}^s$ такие, что

$$l + A^* \lambda + B^* \mu = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a + \langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Для конечномерных U и V импликация (2.2) $\Rightarrow$ (2.3) доказана в [14, гл. 3, теорема 12.3]. Распространение этого доказательства на бесконечномерный случай не составляет труда. Идея доказательства состоит в сведении неоднородного случая к однородному. А именно введем множество

$$\tilde{S} = \{(u, \tau) \in U \times \mathbb{R}_+ \mid Au + \tau v = 0, Bu + \tau w \leq 0\} \neq \emptyset$$

и докажем, что

$$\langle l, u \rangle + a\tau \geq 0 \quad \forall (u, \tau) \in \tilde{S}. \quad (2.4)$$

Действительно, при $\tau > 0$ это утверждение следует немедленно из (2.2). С другой стороны, если предположить, что существует $\tilde{u} \in U$, для которого

$$\langle l, \tilde{u} \rangle < 0, \quad A\tilde{u} = 0, \quad B\tilde{u} \leq 0,$$

то для произвольного $u \in S$ имеем $u + t\tilde{u} \in S \forall t \geq 0$, причем $\langle l, u + t\tilde{u} \rangle + a < 0$ для любого достаточно большого $t \geq 0$, что противоречит (2.2). Тем самым доказано (2.4). Требуемое утверждение теперь легко следует из (2.4) и леммы о сопряженном конусе [2, с. 277].

Импликация (2.3) $\Rightarrow$ (2.2) проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Напомним, что конус $K \subset V$ называется *конечно порожденным*, если он является конической оболочкой конечного числа точек из V .

Лемма 3. Пусть V — банахово пространство, $W \subset V$ — замкнутое линейное подпространство, а $K \subset V$ — конечно порожденный конус.

Тогда конус $W + K$ замкнут.

Доказательство. Пусть $K = \text{cone}\{\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^s\}$, где $\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^s$ — заданные точки. Доказательство проведем индукцией по s .

Пусть $s = 1$. Если $\bar{v}^1 \in W$, то $W + K = W$ — замкнутое множество. Пусть $\bar{v}^1 \notin W$. Тогда из второй теоремы отделимости для выпуклых множеств (см., например, [15, с. 210]) следует, что найдется такой линейный непрерывный функционал $\nu \in W^\perp$, что $\langle \nu, \bar{v}^1 \rangle \neq 0$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{v^k\} \subset W + K$, сходящуюся к некоторому $\bar{v} \in V$. Для всякого k точка v^k представима в виде $v^k = w^k + \theta_k \bar{v}^1$, $w^k \in W$, $\theta_k \geq 0$. Поэтому

$$\theta_k \langle \nu, \bar{v}^1 \rangle = \langle \nu, v^k \rangle \rightarrow \langle \nu, \bar{v} \rangle \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

откуда в силу неравенства $\langle \nu, \bar{v}^1 \rangle \neq 0$ следует, что последовательность $\{\theta_k\}$ ограничена. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, добьемся сходимости $\{\theta_k\}$ к некоторому $\bar{\theta}$. Тогда из равенства $w^k = v^k - \theta_k \bar{v}^1$ и из сходимости $\{v^k\}$ к $\bar{v}$ следует, что $\{w^k\} \rightarrow \bar{w} = \bar{v} - \bar{\theta} \bar{v}^1$, причем $\bar{w} \in W$ в силу замкнутости W . Отсюда имеем $\bar{v} = \bar{w} + \bar{\theta} \bar{v}^1 \in W + K$, что и требовалось.

Докажем требуемое утверждение для $s = r$, предполагая, что оно уже доказано для $s = r - 1$. Сначала предположим, что $\{-\bar{v}^1, \dots, -\bar{v}^r\} \subset W + K$. Покажем, что при этом

$$W + K = W + \text{lin } K. \tag{2.5}$$

Действительно, включение $W + K \subset W + \text{lin } K$ очевидно. С другой стороны, поскольку $\pm \bar{v}^i \in W + K \ \forall i = 1, \dots, r$ и $W + K$ — выпуклый конус, то $\text{lin } K = \text{lin}\{\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^r\} \subset W + K$, откуда в силу очевидного включения $W \subset W + K$ следует включение $W + \text{lin } K \subset W + K$, что и завершает доказательство равенства (2.5). В свою очередь из (2.5) следует замкнутость $W + K$ (поскольку, как известно, сумма замкнутого и конечномерного линейных подпространств замкнута).

Пусть теперь $-\bar{v}^i \notin W + K$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, r$, например для $i = r$. Конус $\tilde{K} = W + \text{cone}\{\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^{r-1}\}$ замкнут по предположению индукции. Рассмотрим произвольную последовательность $\{v^k\} \subset W + K$, сходящуюся к некоторому $\bar{v} \in V$. Для всякого k точка v^k представима в виде $v^k = w^k + \theta_k \bar{v}^r$, $w^k \in \tilde{K}$, $\theta_k \geq 0$. Если последовательность $\{\theta_k\}$ ограничена, то, переходя при необходимости к подпоследовательностям, добьемся сходимости $\{\theta_k\}$ к некоторому $\bar{\theta}$. Тогда из равенства $w^k = v^k - \theta_k \bar{v}^r$ и из сходимости $\{v^k\}$ к $\bar{v}$ следует, что $\{w^k\} \rightarrow \bar{w} = \bar{v} - \bar{\theta} \bar{v}^r$, причем $\bar{w} \in \tilde{K}$ в силу замкнутости $\tilde{K}$. Отсюда имеем $\bar{v} = \bar{w} + \bar{\theta} \bar{v}^r \in W + K$, что и требовалось.

Если же $\{\theta_k\} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то из равенства $v^k = w^k + \theta_k \bar{v}^r$ имеем $\frac{1}{\theta_k} w^k = \frac{v^k}{\theta_k} - \bar{v}^r$ и из сходимости $\{v^k\}$ следует, что $\{w^k/\theta_k\} \rightarrow -\bar{v}^r$. При этом все точки этой последовательности лежат в замкнутом конусе $\tilde{K}$, и поэтому $-\bar{v}^r \in \tilde{K} \subset W + K$, что противоречит предположению $-\bar{v}^r \notin W + K$. Лемма доказана.

Напомним следующее понятие. Говорят, что коразмерность линейного подпространства L в линейном пространстве V не превосходит r , если существует линейное подпространство $M \subset V$ такое, что $\dim M = r$ и $L + M = V$. Это свойство эквивалентно существованию (не обязательно непрерывных) линейных функционалов $\nu^i: V \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$, таких, что $L = \bigcap_{i=1}^r \ker \nu^i$.

Ниже нам потребуется следующее утверждение, доказанное, например, в [16, гл. 3, § 5, с. 203].

Предложение 1. Пусть U и V — банаховы пространства, $\Lambda \in \mathcal{L}(U, V)$. Предположим, что коразмерность $\text{im } \Lambda$ в V конечна.

Тогда $\text{im } \Lambda$ замкнуто.

Лемма 4. Пусть U и V — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(U, V)$, подпространство $\text{im } A$ замкнуто, $B \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^s)$.

Тогда подпространство $M = \{(v, w) \in V \times \mathbb{R}^s \mid \exists u \in X \text{ такой, что } v = Au, w = Bu\}$ замкнуто.

Доказательство. В силу замкнутости $\text{im } A$ замкнутое в $V \times \mathbb{R}^s$ подпространство $\text{im } A \times \mathbb{R}^s$ можно рассматривать как банахово пространство (с индуцированной нормой). Определим оператор $\Lambda \in \mathcal{L}(U, \text{im } A \times \mathbb{R}^s)$ формулой $\Lambda u = (Au, Bu)$. Очевидно, что коразмерность $\text{im } \Lambda$ в $\text{im } A \times \mathbb{R}^s$ не превосходит s . Поэтому согласно предложению 1 подпространство $M = \text{im } \Lambda$ замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть U и V — банаховы пространства, $A, \Lambda \in \mathcal{L}(U, V)$, подпространство $\Lambda(\ker A)$ замкнуто, $B \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^s)$, $\bar{v} \in V$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^s$. Предположим, что

$$S = \{u \in U \mid Au + \bar{v} = 0, Bu + \bar{w} \leq 0\} \neq \emptyset, \quad (2.6)$$

и пусть

$$\text{cl}(\text{lin } \Lambda(S)) = V. \quad (2.7)$$

Тогда

$$\text{int } \Lambda(S) \neq \emptyset. \quad (2.8)$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in \Lambda(S)$ (в противном случае во всех рассуждениях этого доказательства $\Lambda(S)$ следует заменить на $\Lambda(S) - v$ при произвольном фиксированном $v \in \Lambda(S)$: ни на (2.7), ни на (2.8) такая замена никак не влияет).

Положим $L = \ker A \cap \ker B$. Очевидно, что $S + L = S$, откуда следует, что $L \subset \text{lin } S$ и

$$\Lambda(L) \subset \text{lin } \Lambda(S). \quad (2.9)$$

Выберем произвольный элемент $\bar{u} \in U$ такой, что $A\bar{u} + \bar{v} = 0$. Тогда в силу (2.6), (2.7) и замкнутости $\Lambda(\ker A)$

$$\begin{aligned} V &= \text{cl}(\text{lin } \Lambda(S)) \subset \text{cl}(\text{lin } \Lambda(\ker A + \bar{u})) \subset \text{cl}(\Lambda(\ker A) + \text{lin}\{\Lambda\bar{u}\}) \subset \\ &\subset \text{cl } \Lambda(\ker A) + \text{cl}(\text{lin}\{\Lambda\bar{u}\}) = \Lambda(\ker A) + \text{lin}\{\Lambda\bar{u}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что коразмерность L в $\ker A$ не превосходит s , т.е. найдется линейное подпространство M в $\ker A$ такое, что $\dim M = s$ и $L + M = \ker A$. Из (2.10) имеем

$$V = \Lambda(L + M) + \text{lin}\{\Lambda\bar{u}\} = \Lambda(L) + \Lambda(M) + \text{lin}\{\Lambda\bar{u}\}, \quad (2.11)$$

откуда следует, что коразмерность $\Lambda(L)$ в V не превосходит $s + 1$. Поэтому в силу предложения 1 $\text{im } \Lambda(L)$ замкнуто. Из (2.9) и (2.11) легко следует, что

$$\text{lin } \Lambda(S) = \Lambda(L) + (\Lambda(M) + \text{lin}\{\Lambda\bar{u}\}) \cap \text{lin } \Lambda(S),$$

поэтому $\text{lin } \Lambda(S)$ замкнуто как сумма замкнутого и конечномерного линейных подпространств. Тогда в силу (2.7)

$$\text{lin } \Lambda(S) = V. \quad (2.12)$$

Далее так как $\Lambda(L)$ — замкнутое линейное подпространство, имеющее в V конечную коразмерность, то существует конечномерное подпространство $\tilde{V}$ в V такое, что $V = \Lambda(L) \oplus \tilde{V}$. Обозначим через π проектор на $\tilde{V}$ вдоль $\Lambda(L)$, т.е. $\pi \in \mathcal{L}(V, \tilde{V})$, $\pi^2 = \pi$, $\text{im } \pi = \tilde{V}$, $\ker \pi = \Lambda(L)$. В силу (2.12)

$$\text{lin } \pi(\Lambda(S)) = \pi(\text{lin } \Lambda(S)) = \text{im } \pi = \tilde{V}.$$

Поскольку $0 \in \Lambda(S)$, то $0 \in \pi(\Lambda(S))$ и поэтому $\text{aff } \pi(\Lambda(S)) = \text{lin } \pi(\Lambda(S)) = \tilde{V}$. Но если аффинная оболочка выпуклого множества в конечномерном пространстве совпадает со всем пространством, то внутренность этого множества непуста (см., например, [14, гл. 3, теорема 1.12]). Таким образом,

$$\text{int } \pi(\Lambda(S)) \neq \emptyset. \quad (2.13)$$

Из равенства $S + L = S$ очевидным образом следует равенство

$$\Lambda(S) + \Lambda(L) = \Lambda(S), \quad (2.14)$$

откуда в свою очередь вытекает равенство

$$\pi^{-1}(\pi(\Lambda(S))) = \Lambda(S). \quad (2.15)$$

Действительно, если $v \in \pi^{-1}(\pi(\Lambda(S)))$, то $\pi v \in \pi(\Lambda(S))$, т.е. существует $v^1 \in \Lambda(S)$ такой, что $\pi(v - v^1) = 0$. Иными словами, $v^2 = v - v^1 \in \ker \pi = \Lambda(L)$, откуда и из (2.14) следует, что $v = v^1 + v^2 \in \Lambda(S)$. Таким образом, $\pi^{-1}(\pi(\Lambda(S))) \subset \Lambda(S)$. Обратное включение очевидно.

Поскольку при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт, то из (2.13) и (2.15) следует (2.8). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть U и V — банаховы пространства, $A, \Lambda \in \mathcal{L}(U, V)$, подпространство $\Lambda(\ker A)$ замкнуто, $B \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^s)$, $\bar{v} \in V$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^s$. Предположим, что выполнено (2.6).

Тогда множество $\Lambda(S)$ замкнуто.

Доказательство. Выберем произвольный элемент $\bar{u} \in U$ такой, что $A\bar{u} + \bar{v} = 0$. Тогда

$$\Lambda(S) = \{v \in V \mid \exists u \in \ker A \text{ такой, что } v = \Lambda(\bar{u} + u), B(\bar{u} + u) + \bar{w} \leq 0\}. \quad (2.16)$$

Положим $U_0 = \ker A$, $V_0 = \Lambda(\ker A)$ и введем оператор $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(U_0, V_0 \times \mathbb{R}^s)$, $\Lambda_0 u = (\Lambda u, Bu)$, и множество

$$\Omega = \{(v, w) \in V \times \mathbb{R}^s \mid \exists u \in \ker A \text{ такой, что } v = \Lambda(\bar{u} + u), w \geq B(\bar{u} + u) + \bar{w}\}.$$

Очевидно, что коразмерность $\text{im } \Lambda_0$ в $V_0 \times \mathbb{R}^s$ конечна и поэтому в силу предложения 1 $\text{im } \Lambda_0$ замкнуто. Кроме того,

$$\Omega = \text{im } \Lambda_0 + (\Lambda\bar{u}, B\bar{u} + \bar{w}) + \{0\} \times \mathbb{R}_+^s$$

и, значит, из замкнутости $\text{im } \Lambda_0$ и леммы 3 следует замкнутость Ω . С другой стороны, в силу (2.16) $\Lambda(S) = \{v \in V \mid (v, 0) \in \Omega\}$, откуда и из замкнутости Ω следует замкнутость $\Lambda(S)$. Лемма доказана.

Наконец, отметим одно простое следствие теоремы о среднем (см. [4]). Пусть U и V — линейные нормированные пространства, $\Phi: U \rightarrow V$ — дважды дифференцируемое по Фреше в точке $\bar{u} \in U$ отображение. Тогда для $u^1, u^2 \in U$ справедлива оценка

$$\|\Delta(u^1) - \Delta(u^2)\| = o(\|u^1\| + \|u^2\|)\|u^1 - u^2\|, \quad (2.17)$$

где

$$\Delta(u) = \Phi(\bar{u} + u) - \Phi'(\bar{u})u - \frac{1}{2}\Phi''(\bar{u})[u, u].$$

3. УСЛОВИЯ 2-РЕГУЛЯРНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Всюду далее будем предполагать, что отображения F и g дважды дифференцируемы по Фреше в точке $x_* \in D$. Линеаризацией множества D в окрестности точки x_* является конус, задаваемый формулой

$$H_1(x_*) = \{\xi \in X \mid F'(x_*)\xi = 0, \langle g'_i(x_*), \xi \rangle \leq 0 \forall i \in I(x_*)\}. \quad (3.1)$$

Определение 1. Будем говорить, что в точке x_* выполнено *условие 2-регулярности по направлению* $h \in X$, если

$$\text{im } F'(x_*) + F''(x_*)[h, H_1(x_*)] = Y \quad (3.2)$$

и существуют $\bar{\xi}^1 \in X$ и $\bar{\xi}^2 \in H_1(x_*)$ такие, что

$$F'(x_*)\bar{\xi}^1 + F''(x_*)[h, \bar{\xi}^2] = 0, \quad \langle g'_i(x_*), \bar{\xi}^1 \rangle + g''_i(x_*)[h, \bar{\xi}^2] < 0 \quad \forall i \in I(x_*). \quad (3.3)$$

Заметим, что условие 2-регулярности по направлению $h = 0$ совпадает с условием Мангасариана–Фромовица (при $\bar{\xi} = \bar{\xi}^1$). Более того, если в точке x_* выполнено условие Мангасариана–Фромовица, то в этой точке выполняется и условие 2-регулярности по любому направлению $h \in X$, включая $h = 0$ (можно взять $\bar{\xi}^1 = \bar{\xi}$, $\bar{\xi}^2 = 0$).

В случае отсутствия ограничений-неравенств условие 2-регулярности принимает вид

$$\text{im } F'(x_*) + F''(x_*)[h, \ker F'(x_*)] = Y, \quad (3.4)$$

что эквивалентно введенному в [4] понятию 2-регулярности отображения F в точке x_* по направлению h .

Замечание 1. Легко проверить, что условие 2-регулярности устойчиво по отношению к малым возмущениям h .

Приведенное условие 2-регулярности позволяет охарактеризовать элементы контингентного конуса (внешнего касательного множества первого порядка) к допустимому множеству и получить содержательные необходимые условия первого порядка локального экстремума (см. разд. 4 и 5 ниже). Поэтому данное условие естественно было бы назвать условием 2-регулярности первого порядка. Наряду с ним будет использоваться, вообще говоря, более слабое условие 2-регулярности второго порядка, которое требуется для характеристики элементов касательного множества второго порядка и получения необходимых условий второго порядка локального экстремума (см. разд. 4 и 6 ниже).

Для всякого $h \in X$ введем множество индексов $I(x_*, h) = \{i \in I(x_*) \mid \langle g'_i(x_*), h \rangle = 0\}$ и положим

$$S_2(x_*, h) = \left\{ x \in X \mid F'(x_*)x + F''(x_*)[h, h] = 0, \langle g'_i(x_*), x \rangle + g''_i(x_*)[h, h] \leq 0 \forall i \in I(x_*, h) \right\}. \quad (3.5)$$

Предполагая трехкратную дифференцируемость отображений F и g по Фреше в точке x_* , введем следующее

Определение 2. Будем говорить, что в точке x_* выполнено *условие 2-регулярности второго порядка по направлению* $h \in X$, если

$$0 \in \text{int} \left(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)] + F'''(x_*)[h, h, h] \right) \quad (3.6)$$

и существуют $\bar{x}^1 \in X$ и $\bar{x}^2 \in S_2(x_*, h)$ такие, что

$$F'(x_*)\bar{x}^1 + 3F''(x_*)[h, \bar{x}^2] + F'''(x_*)[h, h, h] = 0, \quad (3.7)$$

$$\langle g'_i(x_*), \bar{x}^1 \rangle + 3g''_i(x_*)[h, \bar{x}^2] + g'''_i(x_*)[h, h, h] < 0 \quad \forall i \in I(x_*). \quad (3.8)$$

Как легко проверить, если $h \in H_1(x_*)$, то и в (3.3), и в (3.8) множество $I(x_*)$ можно заменить на $I(x_*, h)$: условие 2-регулярности и условие 2-регулярности второго порядка по направлению h от этого не изменятся. Кроме того, несложно убедиться, что если $S_2(x_*, h) \neq \emptyset$, то 2-регулярность по направлению h является достаточным условием 2-регулярности второго порядка по этому направлению, но, вообще говоря, не наоборот. Действительно, из (3.1) и (3.5) очевидным образом следует включение

$$S_2(x_*, h) + H_1(x_*) \subset S_2(x_*, h). \quad (3.9)$$

Но тогда из непустоты $S_2(x_*, h)$ в силу (3.2) легко выводится (3.6). Далее зафиксируем элементы $\tilde{x}^1 \in X$ и $\tilde{x}^2 \in S_2(x_*, h)$ такие, что $F'(x_*)\tilde{x}^1 + 3F''(x_*)[h, \tilde{x}^2] + F'''(x_*)[h, h, h] = 0$ (такие элементы существуют в силу доказанного соотношения (3.6)). Положим $\bar{x}^1 = \tilde{x}^1 + t\xi^1$, $\bar{x}^2 = \tilde{x}^2 + \frac{1}{3}t\xi^2$, где $\xi^1 \in X$ и $\xi^2 \in H_1(x_*)$ — элементы из (3.3). Тогда при достаточно большом $t > 0$ получаем (3.7), (3.8), причем из (3.9) следует, что $\bar{x}^2 \in S_2(x_*, h)$.

Отсутствие обратной импликации иллюстрируется примерами 3, 4 ниже. При отсутствии ограничений-неравенств условия 2-регулярности и 2-регулярности второго порядка эквивалентны (и соответственно эквивалентны условию (3.4)).

4. КОНТИНГЕНТНЫЙ КОНУС И КАСАТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Контингентный конус к множеству D в точке x_* определяется как

$$T_D(x_*) = \left\{ h \in X \mid \exists \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \text{ такая, что } \{t_k\} \rightarrow 0, \text{ dist}(x_* + t_k h, D) = o(t_k) \right\}. \quad (4.1)$$

Соответственно (внешнее) касательное множество второго порядка к множеству D в точке x_* по направлению $h \in X$ определяется как

$$T_D^2(x_*, h) = \left\{ x \in X \mid \exists \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \text{ такая, что } \{t_k\} \rightarrow 0, \text{ dist}\left(x_* + t_k h + \frac{1}{2}t_k^2 x, D\right) = o(t_k^2) \right\}. \quad (4.2)$$

Как известно, оба этих множества всегда замкнуты (см., например, [3]).

Введем конус

$$\begin{aligned} H_2(x_*) &= \left\{ h \in H_1(x_*) \mid \exists x \in X \text{ такой, что } F'(x_*)x + F''(x_*)[h, h] = 0, \right. \\ &\quad \left. \langle g'_i(x_*), x \rangle + g''_i(x_*)[h, h] \leq 0 \forall i \in I(x_*, h) \right\} = \\ &= \{h \in H_1(x_*) \mid S_2(x_*, h) \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

и обозначим через $H_2^1(x_*)$ конус, состоящий из таких $h \in H_2(x_*)$, что в точке x_* выполнено условие 2-регулярности по направлению h . Аналогично через $H_2^2(x_*)$ обозначим конус, состоящий из таких $h \in H_2(x_*)$, что в точке x_* выполнено условие 2-регулярности второго порядка по направлению h . В силу сказанного выше $H_2^1(x_*) \subset H_2^2(x_*)$.

Следующее утверждение вытекает из [17, теорема 6']. Тем не менее для полноты изложения приведем его доказательство.

Теорема 1. *Справедливы включения*

$$H_2^1(x_*) \subset T_D(x_*) \subset H_2(x_*). \quad (4.4)$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $g(x_*) = 0$ (в противном случае нужно заменить g на отображение с компонентами g_i , $i \in I(x_*)$).

В пространстве $Y \times \mathbb{R}^m$ введем конус $K = \{0\} \times \mathbb{R}_+^m$. Рассмотрим отображение $\Phi: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^m$, $\Phi(x) = (F(x), g(x))$. Из (1.2) следует, что

$$D = \{x \in X \mid \Phi(x) \in K\}. \quad (4.5)$$

Кроме того, $\Phi(x_*) = 0$ и в силу леммы 3 $\text{im } \Phi'(x_*)$ замкнуто. Из (3.1), (3.5), (4.3) несложно вывести, что

$$H_2(x_*) = \{h \in X \mid \Phi'(x_*)h \in K, \Phi''(x_*)[h, h] \in K + \text{im } \Phi'(x_*)\}. \quad (4.6)$$

Если $h \in T_D(x_*)$, то согласно (4.1) и (4.5) найдутся последовательности $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ и $\{r^k\} \subset X$ такие, что $\{t_k\} \rightarrow 0$, $r^k = o(t_k)$ и $\Phi(x_* + t_k h + r^k) \in K$ для всякого k . Тогда

$$K \ni \Phi(x_* + t_k h + r^k) = t_k \Phi'(x_*)h + \Phi'(x_*)r^k + \frac{1}{2}t_k^2 \Phi''(x_*)[h, h] + o(t_k^2),$$

и поэтому

$$K \ni t_k \Phi'(x_*)h + o(t_k), \quad K + \text{im } \Phi'(x_*) \ni \frac{1}{2}t_k^2 \Phi''(x_*)[h, h] + o(t_k^2),$$

причем согласно лемме 3 множество в левой части последнего включения замкнуто. Отсюда и из (4.6) немедленно следует, что $h \in H_2(x_*)$.

Пусть теперь $h \in H_2^1(x_*)$. Зафиксируем $\bar{\xi}^1 \in X$ и $\bar{\xi}^2 \in H_1(x_*)$ согласно определению 1. Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $P = X \times H_1(x_*)$ и определим отображение Φ равенством $\Phi(u) = F'(x_*)x^1 + F''(x_*)[h, x^2]$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Положим $\bar{u} = (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) \in P$, $\bar{v} = \Phi(\bar{u})$. Тогда в силу равенства в (3.3) $\bar{v} = 0$. Из (3.2) и теоремы устойчивости Робинсона (см. [18], а также теорему 2.87 и с. 71 в [3]) следует, что при некоторых $a > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ для введенных объектов выполнены все предположения леммы 1. Пусть числа $c > 0$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ определены согласно лемме 1.

Для $x \in X$ положим

$$\Delta_1(x) = F(x_* + x) - F'(x_*)x - \frac{1}{2}F''(x_*)[x, x], \quad (4.7)$$

$$\Delta_2(x) = g(x_* + x) - g'(x_*)x - \frac{1}{2}g''(x_*)[x, x]. \quad (4.8)$$

Тогда согласно оценке (2.17)

$$\Delta_1(th) = o(t^2), \quad \Delta_2(th) = o(t^2). \quad (4.9)$$

Положим

$$\tau(t) = 4 \max\{\|\Delta_1(th)\|^{1/2}, \|\Delta_2(th)\|^{1/2}, t^{3/2}\}. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) следует, что

$$\tau(t) = o(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{\tau(t)} = 0. \quad (4.11)$$

Зафиксируем произвольный $x \in S_2(x_*, h)$ (согласно (4.3) $S_2(x_*, h) \neq \emptyset$) и для произвольных $x^1, x^2 \in X$ и $t > 0$ положим

$$x(x^1, x^2; t) = x_* + th + \tau(t)x^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_t(u) = \varphi_t(x^1, x^2) &= \frac{t^2}{2\tau(t)} F''(x_*)[h, x] + tF''(x_*)[h, x^1] + \\
 &+ \frac{1}{2t\tau(t)} F''(x_*) \left[\tau(t)x^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1, \tau(t)x^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1 \right] + \\
 &+ \frac{1}{t\tau(t)} \Delta_1(x(x^1, x^2; t) - x_*). \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Из оценки (2.17) и (4.11) вытекает, что на любом ограниченном множестве отображение φ_t удовлетворяет условию Липшица с константой, стремящейся к нулю при $t \rightarrow 0+$. Кроме того, согласно оценке (2.17) и (4.11)

$$\begin{aligned}
 \left\| \Delta_1 \left(th + \tau(t)\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)\bar{\xi}^1 \right) \right\| &\leq \|\Delta_1(th)\| + \\
 &+ \left\| \Delta_1 \left(th + \tau(t)\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)\bar{\xi}^1 \right) - \Delta_1(th) \right\| = \\
 &= \|\Delta_1(th)\| + o(t\tau(t)) \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\left\| \Delta_2 \left(th + \tau(t)\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)\bar{\xi}^1 \right) \right\| = \|\Delta_2(th)\| + o(t\tau(t)). \tag{4.15}$$

Из (4.9)–(4.14) получаем, что $\varphi_t(\bar{u}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$.

Таким образом, для любого достаточно малого $t > 0$ отображение φ_t удовлетворяет на $B_{\delta_1}(\bar{u})$ условию Липшица с константой $l < 1/a$, причем $\|\bar{v} + \varphi_t(\bar{u})\| \leq \delta_2$.

Далее для $u = (x^1, x^2) \in U$ в силу (4.7), (4.12), (4.13), определения Φ и включений $h \in H_1(x_*)$, $x \in S_2(x_*, h)$ (см. также (3.1), (3.5)) имеем

$$\begin{aligned}
 F(x(x^1, x^2; t)) &= \tau(t)F'(x_*)x^2 + t\tau(t)F'(x_*)x^1 + t\tau(t)F''(x_*)[h, x^2] + \\
 &+ \frac{1}{2}t^3F''(x_*)[h, x] + t^2\tau(t)F''(x_*)[h, x^1] + \\
 &+ \frac{1}{2}F''(x_*) \left[\tau(t)x^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1, \tau(t)x^2 + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1 \right] + \Delta_1(x(t) - x_*) = \\
 &= \tau(t)F'(x_*)x^2 + t\tau(t)(\Phi(u) + \varphi_t(u)).
 \end{aligned}$$

Но тогда, применяя к множеству P и отображениям Φ и $\varphi = \varphi_t$ лемму 1, заключаем, что для любого достаточно малого $t > 0$ найдутся $x^1(t) \in X$ и $x^2(t) \in H_1(x_*)$ (см. (3.1)) такие, что при $x(t) = x(x^1(t), x^2(t); t)$ имеет место

$$F(x(t)) = 0, \tag{4.16}$$

$$\|x^1(t) - \bar{\xi}^1\| + \|x^2(t) - \bar{\xi}^2\| = \|u - \bar{u}\| \leq c\|\bar{v} + \varphi_t(\bar{u})\| = c\|\varphi_t(\bar{u})\|. \tag{4.17}$$

В (4.17) считается, что норма в $X \times X$ вводится стандартно как сумма норм в X .

Поскольку $\varphi_t(\bar{u}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, то из (4.17) следует, что

$$\|x^1(t) - \bar{\xi}^1\| \rightarrow 0, \quad \|x^2(t) - \bar{\xi}^2\| \rightarrow 0 \tag{4.18}$$

при $t \rightarrow 0+$ и, в частности, в силу (4.11) и (4.12) $x(t) = x_* + th + o(t)$. Поэтому согласно (4.1) и (4.16) остается показать, что $g(x(t)) \leq 0$ для любого достаточно малого $t > 0$.

Из (4.8), (4.12) и включения $x^2(t) \in H_1(x_*)$ (см. также (3.1)), а также из (4.10), (4.11), (4.15), (4.18) имеем

$$\begin{aligned}
g(x(t)) &= tg'(x_*)h + \tau(t)g'(x_*)x^2(t) + \frac{1}{2}t^2(g'(x_*)x + g''(x_*)[h, h]) + \\
&+ t\tau(t)(g'(x_*)x^1(t) + g''(x_*)[h, x^2(t)]) + \frac{1}{2}t^3g''(x_*)[h, x] + t^2\tau(t)g''(x_*)[h, x^1(t)] + \\
&+ \frac{1}{2}g''(x_*)\left[\tau(t)x^2(t) + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1(t), \tau(t)x^2(t) + \frac{1}{2}t^2x + t\tau(t)x^1(t)\right] + \Delta_2(x(t) - x_*) \leq \\
&\leq tg'(x_*)h + \frac{1}{2}t^2(g'(x_*)x + g''(x_*)[h, h]) + t\tau(t)(g'(x_*)\bar{\xi}^1 + g''(x_*)[h, \bar{\xi}^2]) + o(t\tau(t)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Если $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x_*, h)$, то согласно включению $h \in H_1(x_*)$ справедливо неравенство $\langle g'(x_*), h \rangle < 0$ (см. (3.1)) и из (4.19) следует, что $g_i(x(t)) < 0$ для любого достаточно малого $t > 0$. Если же $i \in I(x_*, h)$, то $\langle g'(x_*), h \rangle = 0$ и в силу включения $x \in S_2(x_*, h)$ (см. также (3.5)) из (4.19) и неравенств в (3.3) следует, что

$$g_i(x(t)) \leq t\tau(t)(g'(x_*)\bar{\xi}^1 + g''(x_*)[h, \bar{\xi}^2]) + o(t\tau(t)) < 0$$

для любого достаточно малого $t > 0$. Теорема доказана.

Таким образом, $H_2(x_*)$ является внешней аппроксимацией контингентного конуса $T_D(x_*)$, а $H_2^1(x_*)$ — его внутренней аппроксимацией. Для случая отсутствия ограничений-неравенств теорема 1 была впервые получена в [4]. Более раннюю версию этого результата при более сильных требованиях гладкости можно найти в [19].

Из приведенного доказательства теоремы 1 легко видеть, что оба включения в (4.4) останутся верны, если контингентный конус $T_D(x_*)$ заменить на так называемый внутренний касательный конус

$$T_D^i(x_*) = \{h \in X \mid \text{dist}(x_* + th, D) = o(t), t \geq 0\}$$

к множеству D в точке x_* .

Определение 3. Будем говорить, что в точке x_* выполнено *условие 2-регулярности*, если в этой точке выполнено условие 2-регулярности по любому направлению $h \in H_2(x_*) \setminus \{0\}$, т.е. если $H_2(x_*) \setminus \{0\} = H_2^1(x_*) \setminus \{0\}$.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть в точке x_* выполнено условие 2-регулярности.

Тогда $T_D(x_*) = H_2(x_*)$.

Более того, из замкнутости $T_D(x_*)$ вытекает, что равенство $T_D(x_*) = H_2(x_*)$ имеет место, если $H_2^1(x_*)$ всего лишь плотно в $H_2(x_*)$.

Напомним, что в случае выполнения в точке x_* условия Мангасариана–Фромовица в этой точке выполняется и условие 2-регулярности по любому направлению $h \in X$, т.е. $H_2^1(x_*) = H_2(x_*)$. Более того, в этом случае $H_2(x_*) = H_1(x_*)$. Действительно, для всякого $h \in H_1(x_*)$ зафиксируем элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $F'(\tilde{x})\tilde{x} = -\frac{1}{2}F''(x_*)[h, h]$ (такой элемент существует, поскольку $\text{im } F'(x_*) = Y$). Положим $x = \tilde{x} + t\bar{\xi}$, где $\bar{\xi} \in X$ — элемент из (1.3). Тогда при достаточно большом $t > 0$ получаем включение $x \in S_2(x_*, h)$, т.е. согласно (4.3) $h \in H_2(x_*)$.

Таким образом, в случае выполнения в точке x_* условия Мангасариана–Фромовица следствие 1 сводится к традиционному описанию контингентного конуса равенством $T_D(x_*) = H_1(x_*)$. Однако область применимости теоремы 1 и следствия 1 гораздо шире, чем случай выполнения условия Мангасариана–Фромовица.

Для случая отсутствия ограничений-равенств аналоги теоремы 1 и следствия 1 были получены в [11, 12].

Предполагая трехкратную дифференцируемость отображений F и g по Фреше в точке x_* , для всяких $h, x \in X$ введем множество индексов

$$I(x_*, h, x) = \{i \in I(x_*, h) \mid \langle g'_i(x_*), x \rangle + g''_i(x_*)[h, h] = 0\}$$

и положим

$$S_3(x_*, h) = \left\{ x^2 \in S_2(x_*, h) \mid \exists x^1 \in X \text{ такой, что } F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h] = 0, \right. \\ \left. \langle g'_i(x_*), x^1 \rangle + 3g''_i(x_*)[h, x^2] + g'''_i(x_*)[h, h, h] \leq 0 \forall i \in I(x_*, h, x^2) \right\}. \quad (4.20)$$

Теорема 2. Для всякого $h \in X$ справедливо включение

$$T_D^2(x_*, h) \subset S_3(x_*, h). \quad (4.21)$$

Если же $h \in H_2^2(x_*)$, то справедливо и обратное включение, т.е.

$$T_D^2(x_*, h) = S_3(x_*, h). \quad (4.22)$$

Доказательство. Вновь без ограничения общности будем считать, что $g(x_*) = 0$.

Если $T_D^2(x_*, h) \neq \emptyset$, то из (4.1) и (4.2) следует, что $h \in T_D^2(x_*)$, и поэтому в силу второго включения в (4.4) $h \in H_2(x_*)$.

Пусть $x \in T_D^2(x_*, h)$. Из (1.2), (4.2) следует, что найдутся последовательности $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ и $\{r^k\} \subset X$ такие, что $\{t_k\} \rightarrow 0$, $r^k = o(t_k^2)$ и $\Phi(x_* + t_k h + \frac{1}{2}t_k^2 x + r^k) \in K$ для всех k .

Обозначим через $\tilde{m}$ количество элементов в множестве $I(x_*, h)$. Введем конус $K = \{0\} \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ в $Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, а также отображение $\tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*, h)$, и отображение $\Phi: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, $\Phi(x) = (F(x), \tilde{g}(x))$. Тогда $\Phi(x_*) = 0$ и в силу (3.1), (4.3) и включения $h \in H_2(x_*)$ имеем $h \in \ker \Phi'(x_*)$. Кроме того, из (3.5) следует, что

$$S_2(x_*, h) = \{x \in X \mid \Phi'(x_*)x + \Phi''(x_*)[h, h] \in K\}. \quad (4.23)$$

Для всякого k , используя включение $h \in \ker \Phi'(x_*)$, имеем

$$K \ni \Phi\left(x_* + t_k h + \frac{1}{2}t_k^2 x + r^k\right) = \frac{1}{2}t_k^2 (\Phi'(x_*)x + \Phi''(x_*)[h, h]) + o(t_k^2).$$

Отсюда в силу (4.23) $x \in S_2(x_*, h)$.

Теперь переобозначим через $\tilde{m}$ количество элементов в множестве $I(x_*, h, x)$, а через $\tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ отображение с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*, h, x)$. Введем конус $K \subset Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ и отображение $\Phi: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ так же, как и выше, но с новыми $\tilde{m}$ и $\tilde{g}$. Тогда по-прежнему $\Phi(x_*) = 0$, в силу леммы 3 $\text{im } \Phi'(x_*)$ замкнуто и $h \in \ker \Phi'(x_*)$. Из (4.20) следует, что

$$S_3(x_*, h) = \{x \in S_2(x_*, h) \mid 3\Phi''(x_*)[h, x] + \Phi'''(x_*)[h, h, h] \in K + \text{im } \Phi'(x_*)\}. \quad (4.24)$$

Кроме того, из определения множества $I(x_*, h, x)$, из (4.3) и из включения $h \in H_2(x_*)$ следует равенство $\Phi'(x_*)x + \Phi''(x_*)[h, h] = 0$. Поэтому для всякого k имеем

$$K \ni \Phi\left(x_* + t_k h + \frac{1}{2}t_k^2 x + r^k\right) = \Phi'(x_*)r^k + \frac{1}{2}t_k^3 \left(\Phi''(x_*)[h, x] + \frac{1}{3}\Phi'''(x_*)[h, h, h]\right) + o(t_k^3)$$

и, следовательно,

$$K + \text{im } \Phi'(x_*) \ni \frac{1}{2}t_k^3 \left(\Phi''(x_*)[h, x] + \frac{1}{3}\Phi'''(x_*)[h, h, h] \right) + o(t_k^3),$$

причем согласно лемме 3 множество в левой части последнего включения замкнуто. Отсюда и из (4.24) немедленно следует, что $x \in S_3(x_*, h)$.

Пусть теперь $h \in H_2^2(x_*)$, а $x = x^2 \in S_3(x_*, h)$. Возьмем произвольный элемент $x^1 \in X$ такой, что

$$F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h] = 0, \quad (4.25)$$

$$\langle g'_i(x_*), x^1 \rangle + 3g''_i(x_*)[h, x^2] + g'''_i(x_*)[h, h, h] \leq 0 \quad \forall i \in I(x_*, h, x^2) \quad (4.26)$$

(такой элемент существует в силу (4.20)). Зафиксируем $\bar{x}^1 \in X$ и $\bar{x}^2 \in S_2(x_*, h)$ согласно определению 2. Для всякого фиксированного $\theta \in (0, 1]$ положим $\hat{x}^1(\theta) = (1 - \theta)x^1 + \bar{x}^1$, $\hat{x}^2(\theta) = (1 - \theta)x^2 + \bar{x}^2$. Покажем, что $\hat{x}^2(\theta) \in T_D^2(x_*, h)$. Тогда из замкнутости $T_D^2(x_*, h)$ будет следовать включение $x^2 \in T_D^2(x_*, h)$, поскольку $\hat{x}^2(\theta) \rightarrow x^2$ при $\theta \rightarrow 0+$.

Из (3.5), (4.20) и из (3.7), (3.8) и (4.25), (4.26) следует, что $\hat{x}^2(\theta) \in S_2(x_*, h)$ и

$$F'(x_*)\hat{x}^1(\theta) + 3F''(x_*)[h, \hat{x}^2(\theta)] + F'''(x_*)[h, h, h] = 0, \quad (4.27)$$

$$\langle g'_i(x_*), \hat{x}^1(\theta) \rangle + 3g''_i(x_*)[h, \hat{x}^2(\theta)] + g'''_i(x_*)[h, h, h] < 0 \quad \forall i \in I(x_*, h, x^2). \quad (4.28)$$

Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $P = X \times S_2(x_*, h)$ и определим отображение Φ равенством $\Phi(u) = F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h]$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Положим $\bar{u} = (\hat{x}^1(\theta), \hat{x}^2(\theta)) \in P$, $\bar{v} = \Phi(\bar{u})$. Тогда в силу равенства (4.27) $\bar{v} = 0$. Из (3.6) и теоремы устойчивости Робинсона следует, что при некоторых $a > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ для введенных объектов выполнены все предположения леммы 1. Пусть числа $c > 0$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ определены согласно лемме 1.

Для всякого $x \in X$ введем $\Delta_1(x)$ и $\Delta_2(x)$ согласно (4.7) и (4.8). Для произвольных $x^1, x^2 \in X$ и $t > 0$ положим

$$x(x^1, x^2; t) = x_* + th + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^1, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t(u) = \varphi_t(x^1, x^2) &= tF''(x_*)[h, x^1] + \frac{3}{t^3}F''(x_*) \left[\frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^1, \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^1 \right] + \\ &+ \frac{3!}{t^3}\Delta_1(x(x^1, x^2; t) - x_*) - F'''(x_*)[h, h, h]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Из оценки (2.17) вытекает, что отображение $\varphi_t: U \rightarrow V$ удовлетворяет на любом ограниченном множестве условию Липшица с константой, стремящейся к нулю при $t \rightarrow 0+$. Кроме того, согласно (4.7)

$$\Delta_1 \left(th + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^1 \right) = \frac{1}{3!}t^3F'''(x_*)[h, h, h] + o(t^3) \quad (4.31)$$

и аналогично согласно (4.8)

$$\Delta_2 \left(th + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^1 \right) = \frac{1}{3!}t^3F'''(x_*)[h, h, h] + o(t^3). \quad (4.32)$$

Из (4.30), (4.31) получаем, что $\varphi_t(\bar{u}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$.

Таким образом, для любого достаточно малого $t > 0$ отображение φ_t удовлетворяет на $B_{\delta_1}(\bar{u})$ условию Липшица с константой $l < 1/a$, причем $\|\bar{v} + \varphi_t(\bar{u})\| \leq \delta_2$.

Далее для $u = (x^1, x^2) \in U$ в силу (4.7), (4.29)–(4.31), определения Φ и включения $h \in H_1(x_*)$ (см. также (3.1)) имеем

$$\begin{aligned} F(x(x^1, x^2; t)) &= \frac{1}{2}t^2 F'(x_*)x^2 + \frac{1}{3!}t^3 F'(x_*)x^1 + \frac{1}{2}t^2 F''(x_*)[h, h] + \frac{1}{2}t^3 F''(x_*)[h, x^2] + \\ &+ \frac{1}{3!}t^4 F''(x_*)[h, x^1] + \frac{1}{2}F''(x_*) \left[\frac{1}{2}t^2 x^2 + \frac{1}{3!}t^3 x^1, \frac{1}{2}t^2 x^2 + \frac{1}{3!}t^3 x^1 \right] + \Delta_1(x(t) - x_*) = \\ &= \frac{1}{2}t^2 (F'(x_*)x^2 + F''(x_*)[h, h]) + \frac{1}{3!}t^3 (\Phi(u) + \varphi_t(u)) = 0. \end{aligned}$$

Но тогда, применяя к множеству P и отображениям Φ и $\varphi = \varphi_t$ лемму 1, заключаем, что для любого достаточно малого $t > 0$ найдутся $x^1(t) \in X$ и $x^2(t) \in S_2(x_*, h)$ (см. (3.5)) такие, что при $x(t) = x(x^1(t), x^2(t); t)$ имеет место

$$F(x(t)) = 0, \quad (4.33)$$

$$\|x^1(t) - \hat{x}^1(\theta)\| + \|x^2(t) - \hat{x}^2(\theta)\| = \|u - \bar{u}\| \leq c\|\bar{v} + \varphi_t(\bar{u})\| = c\|\varphi_t(\bar{u})\|. \quad (4.34)$$

В (4.34) считается, что норма в $X \times X$ вводится как сумма норм в X .

Поскольку $\varphi_t(\bar{u}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, то из (4.34) следует, что

$$\|x^1(t) - \hat{x}^1(\theta)\| \rightarrow 0, \quad \|x^2(t) - \hat{x}^2(\theta)\| \rightarrow 0 \quad (4.35)$$

при $t \rightarrow 0+$ и, в частности, в силу (4.29)

$$x(t) = x_* + th + \frac{1}{2}t^2 \hat{x}^2(\theta) + \frac{1}{2}t^2 (x^2(t) - \hat{x}^2(\theta)) + \frac{1}{3!}t^3 x^1(t) = x_* + th + \frac{1}{2}t^2 \hat{x}^2(\theta) + o(t^2).$$

Поэтому согласно (4.2) и (4.33) для доказательства включения $\hat{x}^2(\theta) \in T_D^2(x_*, h)$ остается показать, что $g(x(t)) \leq 0$ для любого достаточно малого $t > 0$.

Из (4.8), (4.29), а также из (4.32), (4.35) имеем

$$\begin{aligned} g(x(t)) &= tg'(x_*)h + \frac{1}{2}t^2 (g'(x_*)x^2(t) + g''(x_*)[h, h]) + \frac{1}{3!}t^3 g'(x_*)x^1(t) + \frac{1}{2}t^3 g''(x_*)[h, x^2(t)] + \\ &+ \frac{1}{3!}t^4 g''(x_*)[h, x^1(t)] + \frac{1}{2}g''(x_*) \left[\frac{1}{2}t^2 x^2 + \frac{1}{3!}t^3 x^1, \frac{1}{2}t^2 x^2 + \frac{1}{3!}t^3 x^1 \right] + \Delta_2(x(t) - x_*) = \\ &= tg'(x_*)h + \frac{1}{2}t^2 (g'(x_*)x^2(t) + g''(x_*)[h, h]) + \\ &+ \frac{1}{3!}t^3 (g'(x_*)x^1(t) + 3g''(x_*)[h, x^2(t)] + g'''(x_*)[h, h, h]) + o(t^3). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Если $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x_*, h)$, то согласно включению $h \in H_1(x_*)$ справедливо неравенство $\langle g'(x_*), h \rangle < 0$ (см. (3.1)) и из (4.36) следует, что $g_i(x(t)) < 0$ для любого достаточно малого $t > 0$. Если же $i \in I(x_*, h) \setminus I(x_*, h, \hat{x}^2(\theta))$, то $\langle g'(x_*), h \rangle = 0$ и согласно включению $\hat{x}^2(\theta) \in S_2(x_*, h)$ имеем $\langle g'_i(x_*), \hat{x}^2(\theta) \rangle + g''_i(x_*)[h, h] < 0$ (см. (3.5)) и из (4.35), (4.36) следует, что

$$g(x(t)) = \frac{1}{2}t^2 (g'(x_*)x^2(t) + g''(x_*)[h, h]) + o(t^2) = \frac{1}{2}t^2 (g'(x_*)\hat{x}^2(\theta) + g''(x_*)[h, h]) + o(t^2) < 0$$

для любого достаточно малого $t > 0$. Наконец, если $i \in I(x_*, h, \hat{x}^2(\theta))$, то $\langle g'(x_*), h \rangle = 0$ и согласно включению $\hat{x}^2(t) \in S_2(x_*, h)$ из (4.35), (4.36) и (4.28) следует, что

$$\begin{aligned} g_i(x(t)) &\leq \frac{1}{3!} t^3 \left(g'(x_*) x^1(t) + 3g''(x_*)[h, x^2(t)] + g'''(x_*)[h, h, h] \right) + o(t^3) = \\ &= \frac{1}{3!} t^3 \left(g'(x_*) \hat{x}^1(\theta) + 3g''(x_*)[h, \hat{x}^1(\theta)] + g'''(x_*)[h, h, h] \right) + o(t^3) < 0 \end{aligned}$$

для любого достаточно малого $t > 0$. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства теоремы 2 легко видеть, что оба ее утверждения останутся верны, если касательное множество второго порядка $T_D^2(x_*, h)$ заменить на так называемое внутреннее касательное множество второго порядка

$$T_D^{i,2}(x_*, h) = \left\{ x \in X \mid \text{dist} \left(x_* + th + \frac{1}{2} t^2 x, D \right) = o(t^2), t \geq 0 \right\}$$

к множеству D в точке x_* по направлению $h \in X$.

5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Данный раздел посвящен необходимым условиям первого порядка локального минимума в задаче (1.1), (1.2). Эти условия являются условиями первого порядка в том смысле, что в них фигурирует только первая производная целевой функции задачи. Кроме того, эти условия являются естественным развитием обычных необходимых условий первого порядка локального экстремума. Таким образом, будем предполагать, что функция f дифференцируема по Фреше в рассматриваемой точке x_* .

Из теоремы 1 немедленно вытекает следующее необходимое условие первого порядка.

Предложение 2. Пусть x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2).

Тогда

$$\langle f'(x_*), h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H_2^1(x_*).$$

Оставшаяся часть этого раздела посвящена выводу необходимого условия первого порядка в лагранжевой форме.

Для произвольного $h \in X$ введем линейный оператор $G(x_*, h): X \times X \rightarrow Y$,

$$G(x_*, h)(x^1, x^2) = F'(x_*)x^1 + F''(x_*)[h, x^2]. \quad (5.1)$$

Заметим, что именно этот оператор присутствует в левой части (3.2). Кроме того, определим конус

$$C_2(x_*) = \{ h \in H_2(x_*) \mid \langle f'(x_*), h \rangle \leq 0 \}, \quad (5.2)$$

являющийся сужением критического конуса задачи (1.1), (1.2) в точке x_* (см. (5.14) ниже). Наконец, определим обобщенную функцию Лагранжа задачи (1.1), (1.2) соотношением (1.7).

Теорема 3. Пусть x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2), причем подпространства $\text{im } F'(x_*)$ и $G(x_*, h)(X \times \ker F'(x_*))$ замкнуты.

Тогда для любого $h \in C_2(x_*)$ найдутся $\lambda_0 = \lambda_0(h) \geq 0$, $\lambda^1 = \lambda^1(h) \in Y^*$, $\lambda^2 = \lambda^2(h) \in Y^*$, $\mu^1 = \mu^1(h) \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^2 = \mu^2(h) \in \mathbb{R}^m$ такие, что λ_0 , λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно и

$$\frac{\partial L_2}{\partial x}(x_*, h, \lambda_0, \lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2) = 0, \quad (F'(x_*))^* \lambda^2 + (g'(x_*))^* \mu^2 = 0, \quad (5.3)$$

$$\mu^1 \geq 0, \quad \langle \mu^1, g(x_*) \rangle = 0, \quad \mu^2 \geq 0, \quad \langle \mu^2, g(x_*) \rangle = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $h \in H_2^1(x_*)$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\langle f'(x_*), \xi \rangle \rightarrow \min, \quad \xi \in H_2(x_*). \quad (5.5)$$

Из предложения 2 и (5.2) следует, что

$$\langle f'(x_*), h \rangle = 0. \quad (5.6)$$

Кроме того, согласно замечанию 1 найдется $\delta > 0$ такое, что $H_2(x_*) \cap B_\delta(h) \subset H_2^1(x_*)$, и поэтому в силу предложения 2

$$\langle f'(x_*), \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in H_2(x_*) \cap B_\delta(h).$$

В совокупности с (5.6) это означает, что h является локальным решением задачи (5.5).

Далее рассмотрим задачу

$$\langle f'(x_*), \xi \rangle \rightarrow \min, \quad (x, \xi) \in D_2(x_*), \quad (5.7)$$

$$D_2(x_*) = \left\{ (x, \xi) \in X \times H_1(x_*) \mid F'(x_*)x + F''(x_*)[\xi, \xi] = 0, \right. \\ \left. \langle g'_i(x_*), x \rangle + g''_i(x_*)[\xi, \xi] \leq 0 \quad \forall i \in I(x_*, h) \right\}. \quad (5.8)$$

В силу определения множества $H_2(x_*)$ (см. (3.5), (4.3)) найдется элемент $x(h) \in X$ такой, что $(x(h), h) \in D_2(x_*)$. Из сказанного выше следует, что такая точка $(x(h), h)$ является локальным решением задачи (5.7), (5.8), причем, как нетрудно видеть, из условия 2-регулярности по направлению h следует, что в этом решении ограничения задачи (5.7), (5.8) удовлетворяют условию регулярности Робинсона (см., например, [3, (3.13)]). Отсюда с помощью леммы о сопряженном конусе [2, с. 277] и (1.7) легко выводятся требуемые соотношения (5.3), (5.4) при $\lambda_0 = 1$ и некоторых $\lambda^1 \in Y^*$, $\lambda^2 \in Y^*$, $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^2 \in \mathbb{R}^m$.

Пусть теперь $h \notin H_2^1(x_*)$. Обозначим через s количество элементов в множестве $I(x_*)$ и введем отображение $\tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^s$ с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*)$.

Сначала предположим, что нарушено условие (3.2). Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $S = X \times H_1(x_*)$ и определим линейные операторы A , Λ и B равенствами $Au = F'(x_*)x$, $\Lambda u = G(x_*, h)u$, $Bu = \tilde{g}'(x_*)x$, $u = (x, \xi) \in U$. Положим $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$. Применяя лемму 6, получаем, что выпуклый конус $G(x_*, h)(X \times H_1(x_*))$ замкнут. Нарушение условия (3.2) означает, что этот конус не совпадает со всем Y , откуда в силу второй теоремы отделимости (см. [15, с. 210]) вытекает, что найдутся $y \in Y$ и $\lambda^2 \in Y^*$ такие, что

$$\langle (F'(x_*))^* \lambda^2, x \rangle + \langle (F''(x_*)[h])^* \lambda^2, \xi \rangle = \langle \lambda^2, G(x_*, h)(x, \xi) \rangle > \langle \lambda^2, y \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall \xi \in H_1(x_*)$$

(см. (5.1); при этом автоматически $\lambda^2 \neq 0$). Из полученного соотношения следует, что

$$(F'(x_*))^* \lambda^2 = 0, \quad \langle (F''(x_*)[h])^* \lambda^2, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in H_1(x_*),$$

откуда с помощью леммы о сопряженном конусе [2, с. 277] и (3.1), (1.7) выводятся требуемые соотношения (5.3), (5.4) при $\lambda_0 = 0$, некотором $\lambda^1 \in Y^*$, указанном $\lambda^2 \in Y^* \setminus \{0\}$ и $\mu^1 = 0$, $\mu^2 = 0$.

Пусть, наконец, условие (3.2) выполнено, но нарушено условие (3.3). Последнее означает, что множество

$$S = \left\{ (y, z) \in Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}} \mid \exists \xi^1 \in X, \xi^2 \in H_1(x_*) \text{ такие, что } y = G(x_*, h)(\xi^1, \xi^2), \right. \\ \left. z > \tilde{g}'(x_*)\xi^1 + \tilde{g}''(x_*)[h, \xi^2] \right\} \quad (5.9)$$

не содержит 0, причем очевидно, что множество S выпукло, а из (3.2) следует, что $\text{int } S \neq \emptyset$. Отсюда в силу первой теоремы отделимости (см. [15, с. 209]) вытекает, что найдутся $\lambda^2 \in Y^*$ и $\tilde{\mu}^2 \in \mathbb{R}^s$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\langle \lambda^2, y \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, z \rangle \geq 0 \quad \forall (y, z) \in S. \quad (5.10)$$

Согласно (5.9) $S + \{0\} \times \mathbb{R}_+^s \subset S$, откуда в силу (5.10) $\tilde{\mu}^2 \geq 0$.

Кроме того, согласно (5.9) и (5.10)

$$\begin{aligned} \langle (F'(x_*))^* \lambda^2 + (\tilde{g}'(x_*))^* \tilde{\mu}^2, \xi^1 \rangle + \langle (F''(x_*)[h])^* \lambda^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2, \xi^2 \rangle = \\ = \langle \lambda^2, G(x_*, h)(\xi^1, \xi^2) \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, \tilde{g}'(x_*) \xi^1 + \tilde{g}''(x_*)[h, \xi^2] \rangle \geq 0 \\ \forall \xi^1 \in X, \quad \forall \xi^2 \in H_1(x_*). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$(F'(x_*))^* \lambda^2 + (\tilde{g}'(x_*))^* \tilde{\mu}^2 = 0 \quad (5.11)$$

и

$$\langle (F''(x_*)[h])^* \lambda^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in H_1(x_*).$$

Из последнего соотношения в силу леммы о сопряженном конусе [2, с. 277] и (3.1) следует существование таких $\lambda^1 \in Y^*$ и $\tilde{\mu}^1 \in \mathbb{R}^s$, что $\tilde{\mu}^1 \geq 0$ и

$$(F'(x_*))^* \lambda^1 + (\tilde{g}'(x_*))^* \tilde{\mu}^1 + (F''(x_*)[h])^* \lambda^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2 = 0. \quad (5.12)$$

Определим векторы $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^2 \in \mathbb{R}^m$ равенствами $\mu_i^1 = \tilde{\mu}_i^1$, $\mu_i^2 = \tilde{\mu}_i^2$, $i \in I(x_*)$, $\mu_i^1 = \mu_i^2 = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x_*)$. Тогда из (1.7), (5.11) и (5.12) выводятся требуемые соотношения (5.3), (5.4) при $\lambda_0 = 0$ и указанных $\lambda^1 \in Y^*$, $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda^2 \in Y^*$, $\mu^2 \in \mathbb{R}^m$, причем λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно. Теорема доказана.

Положим

$$C_2^1(x_*) = C_2(x_*) \cap H_2^1(x_*). \quad (5.13)$$

Несложно убедиться, что если $h \in C_2^1(x_*)$, то соотношения (5.3), (5.4) выполняются только при $\lambda_0 > 0$. Отсюда и из доказательства теоремы 3 следует, что для всякого $h \in H_2(x_*)$ выполнение соотношений (5.3), (5.4) при $\lambda_0 = 0$ и некоторых $\lambda^1, \lambda^2 \in Y^*$ и $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^m$ таких, что λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно, эквивалентно нарушению в точке x_* условия 2-регулярности по направлению h .

Если в точке x_* выполнено условие Мангасариана–Фромовица, то доказанная теорема непосредственно превращается в традиционные необходимые условия первого порядка в форме (1.6). Действительно, как было отмечено выше, в этом случае $H_2^1(x_*) = H_2(x_*) = H_1(x_*)$ и из (5.2) и (5.13) следует, что $C_2^1(x_*)$ совпадает с обычным критическим конусом

$$C(x_*) = C_1(x_*) = \{h \in H_1(x_*) \mid \langle f'(x_*), h \rangle \leq 0\} \quad (5.14)$$

задачи (1.1), (1.2) в точке x_* . В частности, $C_2^1(x_*)$ содержит элемент $h = 0$. Применяя теорему 3 с $h = 0$ и пользуясь вытекающим из (1.4) и (1.7) равенством

$$L_2(x, 0, \lambda_0, \lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2) = L(x, \lambda_0, \lambda, \mu)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall \lambda^1 = \lambda \in Y^*, \quad \forall \lambda^2 \in Y^*, \quad \forall \mu^1 = \mu \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mu^2 \in \mathbb{R}^m,$$

получаем из (5.3), (5.4) требуемые соотношения (1.6) (напомним, что в этом случае λ_0 не может равняться нулю).

Более того, как легко видеть, при выполнении в точке x_* условия Мангасариана–Фромова второе равенство в (5.3) и условия на μ^2 в (5.4) могут выполняться одновременно лишь при $\lambda^2 = 0$ и $\mu^2 = 0$. Но тогда, пользуясь вытекающим из (1.4) и (1.7) равенством

$$L_2(x, h, \lambda_0, \lambda^1, 0, \mu^1, 0) = L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) \quad \forall x, h \in X, \quad \forall \lambda^1 = \lambda \in Y^*, \quad \forall \mu^1 = \mu \in \mathbb{R}^m,$$

получаем, что соотношения (5.3), (5.4) сводятся к (1.6) для любого $h \in C(x_*)$ (а не только для $h = 0$).

В то же время в нерегулярном случае, когда условие Мангасариана–Фромова нарушается, соотношения (5.3), (5.4) (возможно, с $\lambda^2 \neq 0$ и/или $\mu^2 \neq 0$) дают содержательную информацию о рассматриваемой точке x_* .

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}$, $m = 1$, $f(x) = \langle l, x \rangle$, $l \in \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 x_3$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Точка $x_* = 0$ допустима в задаче (1.1), (1.2), причем $F(x_*) = g(x_*) = 0$, $F'(x_*) = g'(x_*) = 0$. Таким образом, условие Мангасариана–Фромова нарушается и стандартные необходимые условия первого порядка выполняются в точке x_* тривиальным образом, каким бы ни было l .

Вместе с тем из (3.1), (3.5), (4.3) и (5.2) следует, что

$$C_2(x_*) = \{h \in \mathbb{R}^3 \mid h_1 = 0, h_2^2 \leq h_3^2, l_2 h_2 + l_3 h_3 \leq 0\}$$

и, как нетрудно проверить, $C_2^1(x_*) = C_2(x_*) \setminus \{0\}$.

Для всякого $h \in C_2(x_*)$ соотношения (5.3), (5.4) выполняются при любых числах λ^1 , λ^2 и $\mu^1 \geq 0$, $\mu^2 \geq 0$, удовлетворяющих равенствам

$$l_1 + \lambda^2 h_3 = 0, \quad l_2 + 2\mu^2 h_2 = 0, \quad l_3 - 2\mu^2 h_3 = 0. \quad (5.15)$$

Легко проверить, что если $l_2 \neq 0$ или $l_3 \neq 0$, то найдется такой $h \in C_2(x_*) \setminus \{0\}$, что μ^2 , удовлетворяющее последним двум равенствам (5.15), не существует. Поэтому согласно теореме 3 в этом случае x_* не может быть локальным решением задачи (1.1), (1.2).

В то же время если $l_2 = l_3 = 0$, то (5.15) выполняется для любого $h \in C_2(x_*) \setminus \{0\}$ при $\lambda^2 = -l_1/h_3$ и $\mu^2 = 0$. Легко видеть, что в этом случае x_* действительно является решением задачи (1.1), (1.2). Отметим, что в этом решении (1.5) выполняется только с $\lambda_0 = 0$.

Таким образом, в этом примере теорема 3 полностью характеризует наличие или отсутствие локального экстремума в точке x_* . Однако, разумеется, ситуация может измениться при добавлении к f , F или g членов порядка выше второго (см. пример 2 ниже).

6. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Этот раздел посвящен необходимым условиям второго порядка локального минимума в задаче (1.1), (1.2). Эти условия являются условиями второго порядка в том смысле, что в них фигурируют первые две производные целевой функции задачи и они являются естественным развитием обычных необходимых условий второго порядка оптимальности. Таким образом, будем предполагать, что функция f дважды дифференцируема по Фреше в рассматриваемой точке x_* . Вместе с тем придется предположить, что отображения F и g трижды дифференцируемы по Фреше в точке x_* .

Положим

$$C_2^2(x_*) = C_2(x_*) \cap H_2^2(x_*). \quad (6.1)$$

Следующее предложение содержит необходимое условие второго порядка.

Предложение 3. Пусть x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2). Тогда для любого $h \in C_2^2(x_*)$

$$\langle f'(x_*), x \rangle + f''(x_*)[h, h] \geq 0 \quad \forall x \in S_3(x_*, h). \quad (6.2)$$

Доказательство. Согласно (6.1) и теореме 2 для любых $h \in C_2^2(x_*)$ и $x \in S_3(x_*, h)$ найдется отображение $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ такое, что $r(t) = o(t^2)$ и $x_* + th + \frac{1}{2}t^2x + r(t) \in D \forall t \geq 0$. Но тогда поскольку x_* — локальное решение задачи (1.1), (1.2), то для любого достаточно малого $t \geq 0$ с учетом (5.2) и (6.1) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq f\left(x_* + th + \frac{1}{2}t^2x + r(t)\right) - f(x_*) = \\ &= \langle f'(x_*), h \rangle t + \frac{1}{2}(\langle f'(x_*), x \rangle + f''(x_*)[h, h])t^2 + o(t_k^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\langle f'(x_*), x \rangle + f''(x_*)[h, h])t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует (6.2). Предложение доказано.

Если в точке x_* выполнено условие Мангасариана–Фромовица, то согласно сказанному выше $C_2^2(x_*) = C_2^1(x_*) = C_2(x_*) = C(x_*)$. Более того, в этом случае для всякого $h \in X$ имеет место равенство $S_3(x_*, h) = S_2(x_*, h)$. Действительно, $\forall x = x^2 \in S_2(x_*, h)$ зафиксируем элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что $F'(x_*)\tilde{x} = -3F'''(x_*)[h, x] - F'''(x_*)[h, h, h]$ (такой элемент существует, поскольку $\text{im } F'(x_*) = Y$). Тогда, полагая $x^1 = \tilde{x} + t\tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi} \in X$ — элемент из (1.3), при достаточно большом $t > 0$ получим выполнение всех условий в правой части (4.20), т.е. $x \in S_3(x_*, h)$. В данном случае утверждение предложения 3 известно (см., например, [3, Лемма 3.44]).

Перейдем к необходимому условию второго порядка в лагранжевой форме.

Теорема 4. Пусть x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2), причем подпространства $\text{im } F'(x_*)$ и $G(x_*, h)(X \times \ker F'(x_*))$ замкнуты.

Тогда для любого $h \in C_2(x_*)$ найдутся $\lambda_0 = \lambda_0(h) \geq 0$, $\lambda^1 = \lambda^1(h) \in Y^*$, $\lambda^2 = \lambda^2(h) \in Y^*$, $\mu^1 = \mu^1(h) \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^2 = \mu^2(h) \in \mathbb{R}^m$ такие, что λ_0 , λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно, имеют место (5.3), (5.4) и

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial x^2} \left(x_*, h, \lambda_0, \lambda^1, \frac{1}{3}\lambda^2, \mu^1, \frac{1}{3}\mu^2 \right) [h, h] \geq 0. \quad (6.3)$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{m}$ количество элементов в множестве $I(x_*, h)$, через $\tilde{m}$ — в множестве $I(x_*)$ и введем отображения $\hat{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{m}}$ с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*, h)$, и $\tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*)$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $h \in C_2^2(x_*)$. Докажем, что в этом случае утверждение теоремы выполняется при $\lambda_0 = 1$.

Положим $U = X \times X$, $V = Y \times Y$, $s = \hat{m} + \tilde{m}$. Определим линейные операторы A и B и линейный функционал l равенствами

$$Au = (F'(x_*)x^2, F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2]),$$

$$Bu = (\hat{g}'(x_*)x^2, \tilde{g}'(x_*)x^1 + 3\tilde{g}''(x_*)[h, x^2]),$$

$\langle l, u \rangle = \langle f'(x_*), x^2 \rangle$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Положим $a = f''(x_*)[h, h]$,

$$v = (F''(x_*)[h, h], F'''(x_*)[h, h, h]), \quad w = (\hat{g}''(x_*)[h, h], \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h]).$$

Из (3.5) и (4.3) следует, что $S_2(x_*, h) \neq \emptyset$. Для произвольного $x \in S_2(x_*, h)$ из (3.5) имеем

$$F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)] \subset F''(x_*)[h, x] + F''(x_*)[h, \ker F'(x_*)]. \quad (6.4)$$

Из (3.6) следует, что

$$\text{int}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]) \neq \emptyset,$$

поэтому с учетом (6.4)

$$\text{int}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, \ker F'(x_*)]) \neq \emptyset,$$

и поскольку в левой части этого неравенства стоит линейное подпространство, то

$$\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, \ker F'(x_*)] = Y.$$

Отсюда и из определения оператора A легко следует, что $\text{im } A = \text{im } F'(x_*) \times Y$ и поэтому $\text{im } A$ — замкнутое подпространство (в силу замкнутости $\text{im } F'(x_*)$). Кроме того, из (3.5) и из условия 2-регулярности второго порядка по направлению h следует, что вводимое согласно (2.1) множество S непусто: оно содержит пару $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \in X \times S_2(x_*, h)$, удовлетворяющую (3.7), (3.8). Наконец, из (3.5), (4.20) и предложения 3 следует справедливость неравенства (2.2). Отсюда в силу леммы 2 следуют требуемые соотношения (5.3), (5.4), (6.3) при $\lambda_0 = 1$ и некоторых $\lambda^1, \lambda^2 \in Y^*$, $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим второй случай. Пусть теперь $h \notin C_2^2(x_*)$, т.е. $h \in C_2(x_*) \setminus H_2^2(x_*)$ (см. (6.1)). Докажем, что в этом случае утверждение теоремы выполняется при $\lambda_0 = 0$.

Сначала предположим, что

$$\text{int}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]) = \emptyset. \quad (6.5)$$

Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $s = \hat{m}$ и определим линейные операторы A , Λ и B равенствами $Au = F'(x_*)x^2$, $\Lambda u = F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2]$, $Bu = \hat{g}'(x_*)x^2$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Положим $\bar{v} = F''(x_*)[h, h]$, $\bar{w} = \hat{g}''(x_*)[h, h]$. Заметим, что замкнутость $G(x_*, h)(X \times \ker F'(x_*))$ равносильна замкнутости $\Lambda(\ker A)$, а из включения $h \in C_2(x_*)$ и из (4.3) и (5.2) следует, что множество $S = X \times S_2(x_*, h)$, вводимое согласно (2.6), непусто. Применяя лемму 5, получаем, что (6.5) может иметь место, только если нарушено (2.7), т.е.

$$\text{cl}(\text{lin}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)])) \neq Y. \quad (6.6)$$

Если $-F'''(x_*)[h, h, h] \in \text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]$, то последнее условие равносильно следующему:

$$\text{cl}(\text{lin}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)] + F'''(x_*)[h, h, h])) \neq Y. \quad (6.7)$$

Таким образом, (6.6) означает, что либо выполнено (6.7), либо

$$-F'''(x_*)[h, h, h] \notin \text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]. \quad (6.8)$$

Кроме того, из леммы 6 следует замкнутость $\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]$.

Из второй теоремы отделимости (см. [15, с. 210]) следует, что как в случае выполнения (6.7), так и в случае выполнения (6.8) найдется $\lambda^2 \in Y^* \setminus \{0\}$ такой, что

$$\langle \lambda^2, F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h] \rangle \geq 0 \quad \forall x^1 \in X, \quad \forall x^2 \in S_2(x_*, h).$$

Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $s = \hat{m}$ и определим линейные операторы A и B и линейный функционал l равенствами $Au = F'(x_*)x^2$, $Bu = \hat{g}'(x_*)x^2$, $\langle l, u \rangle = \langle \lambda^2, F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] \rangle$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Положим $a = \langle \lambda^2, F'''(x_*)[h, h, h] \rangle$, $v = F''(x_*)[h, h]$, $w = \hat{g}''(x_*)[h, h]$. Применяя лемму 2, получаем требуемые соотношения (5.3), (5.4) при $\lambda_0 = 0$, некоторых $\lambda^1 \in Y^*$ и $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$, указанном $\lambda^2 \in Y^* \setminus \{0\}$ и $\mu^2 = 0$.

Теперь предположим, что

$$\text{int}(\text{im } F'(x_*) + 3F''(x_*)[h, S_2(x_*, h)]) \neq \emptyset, \quad (6.9)$$

но либо нарушено (3.6), либо не существует $\bar{x}^1 \in X$ и $\bar{x}^2 \in S_2(x_*, h)$, удовлетворяющих (3.7) и (3.8). Очевидно, что при этом $0 \notin \text{int } S$, где

$$S = \left\{ (y, z) \in Y \times \mathbb{R}^{\tilde{m}} \mid \exists x^1 \in X, x^2 \in S_2(x_*, h) \text{ такие, что} \right. \\ \left. \begin{aligned} y &= F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h], \\ z &> \tilde{g}'(x_*)x^1 + 3\tilde{g}''(x_*)[h, x^2] + \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h] \end{aligned} \right\}. \quad (6.10)$$

Очевидно, что множество S является выпуклым.

Покажем, что $\text{int } S \neq \emptyset$. Положим $U = X \times X$, $V = Y$, $P = X \times S_2(x_*, h)$ и определим отображение Φ равенством $\Phi(u) = F'(x_*)x^1 + 3F''(x_*)[h, x^2] + F'''(x_*)[h, h, h]$, $u = (x^1, x^2) \in U$. Из (6.9) следует, что $\text{int } \Phi(P) \neq \emptyset$. Это значит, что найдется $\bar{u} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2) \in P$ такой, что $\bar{v} = \Phi(\bar{u}) \in \text{int } \Phi(P)$. При этом из теоремы устойчивости Робинсона следует, что при некоторых $a > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ для введенных объектов выполнены все предположения леммы 1. Пусть числа $c > 0$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ определены согласно лемме 1. Для произвольного $y \in B_{\delta_2}(\bar{v})$ введем отображение $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(u) \equiv -y$. Это отображение удовлетворяет на U условию Липшица с константой $l = 0$, а также условию $\|\bar{v} + \varphi(\bar{u})\| = \|y - \bar{v}\| \leq \delta_2$. Тогда в силу леммы 1 получаем, что найдется $u \in P$ такой, что

$$\Phi(u) = y, \quad \|u - \bar{u}\| \leq c\|y - \bar{v}\| \leq c\delta_2,$$

т.е.

$$B_{\delta_2}(\bar{v}) \subset \Phi(P \cap B_{c\delta_2}(\bar{u})). \quad (6.11)$$

Введем множество

$$\tilde{S} = B_{\delta_2}(\bar{v}) \times \left\{ z \in \mathbb{R}^{\tilde{m}} \mid \right. \\ \left. z_i > \max_{j \in I(x_*)} \left(\|g'_j(x_*)\|(\|\hat{x}^1\| + c\delta_2) + \|g''_j(x_*)[h]\|(\|\hat{x}^2\| + c\delta_2) + \|g'''_j(x_*)[h, h, h]\| \right), i \in I(x_*) \right\}.$$

Очевидно, что $\text{int } \tilde{S} \neq \emptyset$, причем из (6.10), (6.11) и из определения P и Φ следует, что $\tilde{S} \subset S$. Таким образом, $\text{int } S \neq \emptyset$.

Из первой теоремы отделимости (см. [15, с. 209]) вытекает, что найдутся $\tilde{\lambda}^2 \in Y^*$ и $\tilde{\mu}^2 \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\langle \tilde{\lambda}^2, y \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, z \rangle \geq 0 \quad \forall (y, z) \in S. \quad (6.12)$$

Согласно (6.10) $S + \{0\} \times \mathbb{R}_+^{\tilde{m}} \subset S$, откуда и из (6.12) следует, что $\tilde{\mu}^2 \geq 0$.

Кроме того, согласно (6.10) и (6.12)

$$\begin{aligned} \langle (F'(x_*))^* \tilde{\lambda}^2 + (\tilde{g}'(x_*))^* \tilde{\mu}^2, x^1 \rangle + 3 \langle (F''(x_*)[h])^* \tilde{\lambda}^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2, x^2 \rangle + \\ + \langle \tilde{\lambda}^2, F'''(x_*)[h, h, h] \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h] \rangle \geq 0 \\ \forall x^1 \in X, \quad \forall x^2 \in S_2(x_*, h). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$(F'(x_*))^* \tilde{\lambda}^2 + (\tilde{g}'(x_*))^* \tilde{\mu}^2 = 0 \quad (6.13)$$

и

$$3\langle (F''(x_*)[h])^* \tilde{\lambda}^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2, x \rangle + \langle \tilde{\lambda}^2, F'''(x_*)[h, h, h] \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h] \rangle \geq 0 \\ \forall x \in S_2(x_*, h).$$

Из последнего соотношения и из (3.5), применяя лемму 2 при $U = X$, $V = Y$, $s = \hat{m}$, $A = F'(x_*)$, $B = \hat{g}'(x_*)$, $l = (F''(x_*)[h])^* \tilde{\lambda}^2 + (\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2$, $a = \langle \tilde{\lambda}^2, F'''(x_*)[h, h, h] \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h] \rangle$, $v = F''(x_*)[h, h]$, $w = \hat{g}''(x_*)[h, h]$, получаем существование таких $\lambda^1 \in Y^*$ и $\hat{\mu}^1 \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$, что $\hat{\mu}^1 \geq 0$ и

$$(F'(x_*))^* \lambda^1 + (\hat{g}'(x_*))^* \hat{\mu}^1 + 3(F''(x_*)[h])^* \tilde{\lambda}^2 + 3(\tilde{g}''(x_*)[h])^* \tilde{\mu}^2 = 0, \quad (6.14)$$

$$\langle \lambda, F''(x_*)[h, h] \rangle + \langle \hat{\mu}^1, \hat{g}''(x_*)[h, h] \rangle + \langle \tilde{\lambda}^2, F'''(x_*)[h, h, h] \rangle + \langle \tilde{\mu}^2, \tilde{g}'''(x_*)[h, h, h] \rangle \geq 0. \quad (6.15)$$

Положим $\lambda^2 = 3\tilde{\lambda}^2$ и определим векторы $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^2 \in \mathbb{R}^m$ равенствами $\mu_i^1 = \hat{\mu}_i^1$, $i \in I(x_*, h)$, $\mu_i^1 = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x_*, h)$, $\mu_i^2 = 3\tilde{\mu}_i^2$, $i \in I(x_*)$, $\mu_i^2 = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x_*)$. Тогда из (1.7) и (6.13)–(6.15) выводятся требуемые соотношения (5.3), (5.4) и (6.3) при $\lambda_0 = 0$ и указанных $\lambda^1 \in Y^*$, $\mu^1 \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda^2 \in Y^*$, $\mu^2 \in \mathbb{R}^m$, причем λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно. Теорема доказана.

Несложно убедиться, что если $h \in C_2^2(x_*)$, то соотношения (5.3), (5.4), (6.3) выполняются только при $\lambda_0 > 0$. Отсюда и из доказательства теоремы 4 следует, что для всякого $h \in H_2(x_*)$ выполнение соотношений (5.3), (5.4), (6.3) при $\lambda_0 = 0$ и некоторых $\lambda^1, \lambda^2 \in Y^*$ и $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^m$ таких, что λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно, эквивалентно нарушению в точке x_* условия 2-регулярности второго порядка по направлению h .

Следующий пример демонстрирует ситуацию, когда теорема 3 не позволяет установить отсутствие экстремума в рассматриваемой допустимой точке, а теорема 4 позволяет.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^4$, $Y = \mathbb{R}^2$, $m = 1$, $f(x) = x_1$, $F(x) = (x_1 x_3 + x_3^3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$, $g(x) = x_1^2 - x_4^2$. Точка $x_* = 0$ допустима в задаче (1.1), (1.2), причем $F(x_*) = 0$, $g(x_*) = 0$, $F'(x_*) = 0$, $g'(x_*) = 0$ и условие Мангасариана–Фромовица в точке x_* нарушается.

Аналогично примеру 1 получаем

$$C_2(x_*) = \{h \in \mathbb{R}^4 \mid h_1 = 0, h_2^2 = h_3^2\},$$

причем $C_2^1(x_*) = \{h \in C_2(x_*) \mid h_2 \neq 0, h_4 \neq 0\}$.

Для всякого $h \in C_2^1(x_*) \setminus \{0\}$ соотношения (5.3), (5.4) выполняются с $\lambda_0 = 1$ и с произвольными $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}^2$ и $\mu^1 \geq 0$, $\mu^2 \geq 0$, удовлетворяющими равенствам

$$1 + \lambda_1^2 h_3 = 0, \quad \lambda_2^2 h_2 = 0, \quad \lambda_2^2 h_3 = 0, \quad \mu^2 h_4 = 0. \quad (6.16)$$

Таким образом, необходимые условия первого порядка из теоремы 3 в точке x_* выполняются. В то же время для $h = (0, 1, 1, 1) \in C_2^1(x_*)$ (6.16) влечет равенства $\lambda^2 = (-1, 0)$, $\mu^2 = 0$, и поэтому

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial x^2} \left(x_*, h, 1, \lambda^1, \frac{1}{3} \lambda^2, \mu^1, \frac{1}{3} \mu^2 \right) [h, h] = -2\mu^1 + 2\lambda_1^2 < 0$$

для всех $\lambda^1, \lambda^2, \mu^1 \geq 0$ и μ^2 , удовлетворяющих (6.16). Таким образом, согласно теореме 4 x_* не может быть локальным решением задачи (1.1), (1.2).

Заметим, что если в этом примере ограничение-неравенство заменить на ограничение-равенство, то

$$C_2(x_*) = \{h \in \mathbb{R}^4 \mid h_1 = h_4 = 0, h_2^2 = h_3^2\}$$

и $C_2^1(\bar{x}) = \emptyset$. Поэтому полученные ранее результаты для задач с 2-регулярными ограничениями-равенствами в данном примере неприменимы.

Известно необходимое условие второго порядка, которое может быть содержательным и при нарушении условия Мангасариана–Фромова; это условие из [20]. А именно если x_* является локальным решением задачи (1.1), (1.2), то для любого $h \in C(x_*)$ найдутся $\lambda_0 = \lambda_0(h) \geq 0$, $\lambda = \lambda(h) \in Y^*$ и $\mu = \mu(h) \in \mathbb{R}^m$, не равные нулю одновременно и такие, что выполнены условия (1.5) и

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_*, \lambda_0, \lambda, \mu)[h, h] \geq 0. \quad (6.17)$$

Покажем, что это утверждение является частным случаем теоремы 4.

Действительно, предположим вначале, что $h \in C_2(x_*)$. Выберем λ_0 , λ^1 , λ^2 , μ^1 и μ^2 согласно теореме 4. Если $\lambda^2 = 0$ и $\mu^2 = 0$, то $\lambda_0 > 0$ и требуемое утверждение при $\lambda = \lambda^1$ и $\mu = \mu^1$ вытекает из (1.4), (5.2)–(5.4) и (6.3). Пусть теперь λ^2 и μ^2 не равны нулю одновременно. Из (3.1), (4.3) и (5.2)–(5.4) имеем

$$\langle \lambda^2, F''(x_*)[h, h] \rangle + \langle \mu^2, g''(x_*)[h, h] \rangle = -\lambda_0 \langle f'(x_*), h \rangle - \langle \lambda^1, F'(x_*)h \rangle - \langle \mu^1, g'(x_*)h \rangle \geq 0. \quad (6.18)$$

Теперь требуемое утверждение при $\lambda_0 = 0$ и при $\lambda = \lambda^2$ и $\mu = \mu^2$ вытекает из второго соотношения в (5.3) и из (5.4) и (6.18).

Пусть теперь $h \in C(x_*) \setminus C_2(x_*) = C(x_*) \setminus H_2(x_*)$, т.е. $h \in H_1(x_*)$, $S_2(x_*, h) \neq \emptyset$ (см. (4.3), (5.2), (5.14)).

Вновь обозначим через $\hat{m}$ количество элементов в множестве $I(x_*, h)$. Введем конус $K = \{0\} \times \mathbb{R}^{\hat{m}}$ в $Y \times \mathbb{R}^{\hat{m}}$, отображение $\hat{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{m}}$ с компонентами $g_i(x)$, $i \in I(x_*, h)$, а также отображение $\Phi: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^{\hat{m}}$, $\Phi(x) = (F(x), \hat{g}(x))$. Тогда пустота $S_2(x_*, h)$ равносильна условию

$$\Phi''(x_*)[h, h] \notin K + \text{im } \Phi'(x_*),$$

причем из лемм 3 и 4 следует замкнутость выпуклого конуса $K + \text{im } \Phi'(x_*)$. Тогда в силу второй теоремы отделимости (см. [15, с. 210]) найдется $\nu = (\lambda, \hat{\mu}) \in Y^* \times \mathbb{R}^{\hat{m}}$ такой, что

$$\langle \nu, \eta + \Phi'(x_*)\xi \rangle \leq 0 < \langle \nu, \Phi''(x_*)[h, h] \rangle \quad \forall \xi \in X, \quad \forall \eta \in K.$$

Отсюда и из определения K и Φ следует, что $\hat{\mu} \geq 0$,

$$(F'(x_*))^* \lambda + (\hat{g}'(x_*))^* \hat{\mu} = 0, \quad \langle \lambda, F''(x_*)[h, h] \rangle + \langle \hat{\mu}, \hat{g}''(x_*)[h, h] \rangle > 0,$$

что и дает требуемое утверждение при $\lambda_0 = 0$, при указанном λ и при $\mu \in \mathbb{R}^m$, определяемом равенствами $\mu_i = \hat{\mu}_i$, $i \in I(x_*, h)$, $\mu_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x_*, h)$.

В связи с упомянутым необходимым условием экстремума из [20] полезно ввести следующее

Определение 4. Будем говорить, что в точке x_* выполнено *условие регулярности второго порядка по направлению* $h \in X$, если $\text{im } F'(x_*) = Y$ и существует $\bar{x} \in X$ такой, что

$$F'(x_*)\bar{x} + F''(x_*)[h, h] = 0, \quad (6.19)$$

$$\langle g'_i(x_*), \bar{x} \rangle + g''_i(x_*)[h, h] < 0 \quad \forall i \in I(x_*). \quad (6.20)$$

Возьмем произвольный $h \in C(x_*)$. Легко заметить, что если условие регулярности второго порядка по этому направлению h выполнено, то (1.5), (6.17) выполняются только при $\lambda_0 > 0$, хотя при этом условие Мангасариана–Фромовица может нарушаться. Этот же факт непосредственно следует из теоремы 4. Действительно, из выполнения в точке x_* условия регулярности второго порядка по направлению $h \in X$ несложно выводится 2-регулярность второго порядка по этому направлению. При этом из (3.5), (4.3), (5.2), (6.19), (6.20) следует, что $h \in C_2(x_*)$. Но из условия 2-регулярности второго порядка по направлению $h \in C_2(x_*)$ в силу (3.1), (4.3) и (5.2)–(5.4) вытекают неравенство (6.18), а также равенство

$$\langle \lambda^2, F'(x_*)\bar{x} \rangle + \langle \mu^2, g'(x_*)\bar{x} \rangle = 0,$$

где $\bar{x} \in X$ выбран согласно определению 4. Складывая полученные соотношения, имеем

$$\langle \lambda^2, F'(x_*)\bar{x} + F''(x_*)[h, h] \rangle + \langle \mu^2, g'(x_*)\bar{x} + g''(x_*)[h, h] \rangle \geq 0.$$

Согласно (5.4), (6.19) и (6.20) это неравенство может иметь место только при $\mu^2 = 0$. Но тогда из второго соотношения в (5.3) и из равенства $\text{im } F'(x_*) = Y$ следует, что $\lambda^2 = 0$. Тем самым показано, что при выполнении в точке x_* условия регулярности второго порядка по направлению $h \in C_2(x_*)$ соотношения (5.3), (5.4) могут выполняться только при $\lambda^2 = 0$ и $\mu^2 = 0$. Иными словами, в этом случае утверждение теоремы 4 полностью сводится к необходимому условию из [20] с $\lambda_0 > 0$.

С другой стороны, если в точке x_* не выполнено условие регулярности второго порядка, то, как легко заметить, необходимое условие из [20] выполняется автоматически с $\lambda_0 = 0$. В то же время теорема 4 при этом дает содержательную информацию о рассматриваемой точке x_* .

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}$, $m = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = x^3$. Легко проверить, что в допустимой точке $x_* = 0$ задачи (1.1), (1.2) выполняется необходимое условие из [20], причем $C_2(x_*) = \mathbb{R}_-$, $C_2^2(x_*) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, но необходимое условие второго порядка из теоремы 4 нарушено и, значит, точка x_* не является локальным решением задачи (1.1), (1.2). Заметим также, что здесь $C_2^1(x_*) = \emptyset$ и необходимое условие первого порядка из теоремы 3 выполняется с $\lambda_0 = 0$.

Наконец, следующий пример показывает, что 2-регулярность второго порядка может быть слабее 2-регулярности и в том случае, когда рассматриваемая точка является локальным решением задачи (1.1), (1.2).

Пример 4. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $m = 2$, $f(x) = x_1x_2$, $g(x) = (x_1^3, x_2^3)$. Точка $x_* = 0$ является локальным решением задачи (1.1), (1.2), причем $H_2^1(x_*) = \emptyset$, $C_2^2(x_*) = H_2^2(x_*) = \{h \in \mathbb{R}^2 \mid h_1 < 0, h_2 < 0\}$. Легко убедиться, что в точке x_* для $h \in C_2^2(x_*)$ необходимое условие первого порядка из теоремы 3 может выполняться с $\lambda_0 = 0$, а вот необходимое условие второго порядка из теоремы 4 выполняется только с $\lambda_0 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. Bonnans J.F., Shapiro A. Perturbation analysis of optimization problems. New York: Springer, 2000.
4. Аваков Е.Р. Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств // ЖВМиМФ. 1985. Т. 25, № 5. С. 680–693.
5. Аваков Е.Р. Необходимые условия экстремума для гладких аномальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 6. С. 3–11.
6. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
7. Аваков Е.Р. Необходимые условия первого порядка для аномальных задач вариационного исчисления // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, № 5. С. 739–745.
8. Аваков Е.Р. Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах. Принцип максимума для аномальных задач оптимального управления // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 3–29.

9. *Izmailov A.F., Solodov M.V.* The theory of 2-regularity for mappings with Lipschitzian derivatives and its applications to optimality conditions // *Math. Oper. Res.* 2002. V. 27. P. 614–635.
10. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В.* Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом // *Мат. сб.* 2005. Т. 196, №9. С. 3–22.
11. *Измаилов А.Ф.* Условия оптимальности для вырожденных экстремальных задач с ограничениями типа неравенств // *ЖВМиМФ.* 1994. Т. 34, №6. С. 837–854.
12. *Измаилов А.Ф.* К условиям оптимальности в экстремальных задачах с нерегулярными ограничениями-неравенствами // *Мат. заметки.* 1999. Т. 66, №1. С. 89–101.
13. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. факультете МГУ, 2004.
14. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1990.
16. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.
17. *Арутюнов А.В.* Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности аномальной точки // *Мат. заметки.* 2005. Т. 77, №4. С. 483–497.
18. *Robinson S.M.* Stability theory for systems of inequalities. II: Differentiable nonlinear systems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1976. V. 13. P. 497–513.
19. *Magnus R.J.* On the local structure of the zero-set of a Banach space valued mapping // *J. Funct. Anal.* 1976. V. 22. P. 58–72.
20. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // *УМН.* 1978. Т. 33, №6. С. 84–148.