Динамические системы, 2018, том 8(36), №1, 23–30

УДК 531.36+531.384

К задаче о движении тела вращения по сфере[1]

А. С. Кулешов, Д. С. Зуева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991. *E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su, dariakhramova.z@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы, имеют приложенную к центру масс G тела равнодействующую, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O. В этом случае решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент ω_3 и n угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии и на нормаль к опорной сфере соответственно. Изучается вопрос: при каком условии на форму поверхности катящегося тела уравнение, которому удовлетворяет ω_3, интегрируется методом разделения переменных отдельно от других уравнений.

Ключевые слова: тело вращения; качение по сфере; интегрируемость в явном виде.

Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere

A. S. Kuleshov, D. S. Zueva

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

Abstract. The problem of rolling without sliding of a rotationally symmetric rigid body on a sphere is considered. The rolling body is assumed to be subjected to the forces, the resultant of which is directed from the center of mass G of the body to the center O of the sphere, and depends only on the distance between G and O. In this case the solution of this problem is reduced to solving the system of two first order linear differential equations over the projections ω_3 and n of the angular velocity of the body onto its axis of symmetry and onto the normal to the sphere respectively. The problem of determination of the shape of the rolling body for which the equation for ω_3 can be solved by separation of variables is studied.

Keywords: rotationally symmetric body; body rolling on a sphere; integrability.

MSC 2010: 70F25; 70E18; 70E40

Введение

Задача о качении без скольжения динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной поверхности является одной из

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты No. 16-01-00338 и No. 17-01-00123.

классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С. А. Чаплыгин в работе [1] установил, что в случае качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости решение соответствующей задачи сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух компонент угловой скорости тела. В той же работе [1] был исследован вопрос: при каком условии на форму поверхности катящегося тела и распределение масс в нем одно из двух линейных уравнений первого порядка (относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии) интегрируется отдельно от других уравнений методом разделения переменных. Было установлено, что соответствующее уравнение интегрируется методом разделения переменных в случае, когда катящееся по плоскости тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, но лежит на оси динамической симметрии.

В 1910 году П. В. Воронец в работе [2] показал, что рассуждения С. А. Чаплыгина переносятся на случай качения тела вращения по поверхности сферы, если приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O. В этом случае задача также сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии и на нормаль к поверхности сферы.

В данной работе изучается задача о качении тела вращения по поверхности сферы при условиях П. В. Воронца. Получена система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, к интегрированию которой приводится решение задачи. Исследован вопрос, при каком условии на форму поверхности катящегося тела и распределение масс в нем линейное уравнение первого порядка на компоненту угловой скорости тела в проекции на ось динамической симметрии интегрируется отдельно от других уравнений методом разделения переменных. Таким образом, в работе полностью исследована задача, аналогичная той, что была решена С. А. Чаплыгиным в работе [1] для случая движения тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

1. Общая постановка задачи о качении тела вращения по сфере. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о качении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по абсолютно шероховатой сфере радиуса R_1. Следуя работе П. В. Воронца [2], введем четыре системы координат (в скобках указаны единичные векторы осей):

$Ox_1y_1z_1$ $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — неподвижная система координат с началом в центре опорной сферы;

$Gxyz$ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — система координат, жестко связанная с движущимся твердым телом; ее начало выбрано в центре масс G движущегося тела, а оси направлены по главным осям инерции;

$Puvn\,(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n)$ — подвижная система координат с началом в точке контакта P тела с опорной сферой и осями, направленными по касательным к координатным линиям и по нормали к поверхности тела;

$Pu_1v_1n_1\,(\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{n_1})$ — подвижная система координат, оси которой направлены по касательным к координатным линиям и по нормали к опорной сфере.

Положение точки контакта P на поверхности S тела определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{GP} = x\,(u,v)\,\mathbf{e}_1 + y\,(u,v)\,\mathbf{e}_2 + z\,(u,v)\,\mathbf{e}_3,$$

где u и v — гауссовы криволинейные координаты точки P на поверхности S. Коэффициенты первых двух квадратичных форм поверхности S катящегося тела обозначим E, F, G и L, M, N соответственно. Будем считать, что координатные линии на поверхности совпадают с ее линиями кривизны, поэтому $F = 0$, $M = 0$.

Сферическая поверхность S_1, по которой движется твердое тело, задается уравнениями:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z = R_1 \sin u_1 \cos v_1 \mathbf{e}_x + R_1 \sin u_1 \sin v_1 \mathbf{e}_y + R_1 \cos u_1 \mathbf{e}_z,$$

где u_1 и v_1 — гауссовы криволинейные координаты точки P на сфере S_1. Для единичных базисных векторов $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{u_1}$, $\mathbf{e}_{v_1}$, $\mathbf{e}_{n_1}$ имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v; \\ &\mathbf{e}_{u_1} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial u_1}, \quad \mathbf{e}_{v_1} = \frac{1}{R_1 \sin u_1}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial v_1}, \quad \mathbf{e}_{n_1} = \mathbf{e}_{u_1} \times \mathbf{e}_{v_1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Взаимная ориентация систем координат $Gxyz$ и $Puvn$ определяется при помощи матрицы направляющих косинусов, задаваемых таблицей

	x	y	z
u	c_{11}	c_{12}	c_{13}
v	c_{21}	c_{22}	c_{23}
n	c_{31}	c_{32}	c_{33}

причем коэффициенты c_{ij} являются функциями только переменных u и v и в явном виде записываются следующим образом:

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad c_{13} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}; \quad c_{31} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$c_{21} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad c_{23} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}; \quad c_{32} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$c_{33} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Следуя Воронцу [2], будем определять положение тела гауссовыми координатами u, v, u_1, v_1, и углом θ между осями Pu и Pv_1. Предположим, что тело катится по опорной сфере без проскальзывания. Это условие приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи, имеющие вид:

$$R_1\dot{u}_1 = -\sqrt{E}\dot{u}\sin\theta + \sqrt{G}\dot{v}\cos\theta, \qquad R_1\dot{v}_1\sin u_1 = \sqrt{E}\dot{u}\cos\theta + \sqrt{G}\dot{v}\sin\theta. \tag{1.2}$$

Пусть векторы скорости $\boldsymbol{w}$ центра масс G и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела задаются в системе координат $Gxyz$ компонентами w_1, w_2, w_3 и ω_1, ω_2, ω_3 соответственно. Из условия того, что точка касания P тела находится в мгновенном покое, получим формулы, связывающие компоненты векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_1 + \omega_2 z - \omega_3 y = 0, \quad w_2 + \omega_3 x - \omega_1 z = 0, \quad w_3 + \omega_1 y - \omega_2 x = 0, \tag{1.3}$$

а для компонент ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ справедливы следующие формулы (см. [2]):

$$\omega_1 = c_{11}\tau\dot{v}+c_{21}\sigma\dot{u}+c_{31}n, \quad \omega_2 = c_{12}\tau\dot{v}+c_{22}\sigma\dot{u}+c_{32}n, \quad \omega_3 = c_{13}\tau\dot{v}+c_{23}\sigma\dot{u}+c_{33}n, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} \tau = -\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{G}, \quad \sigma = \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{E}, \\ n = -\dot{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) - \dot{v}_1\cos u_1. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что силы, действующие на твердое тело, имеют потенциал, и что потенциальная энергия V зависит лишь от координат u и v точки касания P. Такой случай будет иметь место, например, когда приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O сферы и зависящую только от расстояния точек G и O друг от друга. Итак, пусть $V = V(u, v)$.

Пусть $\Theta = \Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ — кинетическая энергия системы, вычисленная с учетом неголономных связей (1.2) и соотношений (1.3)-(1.4). Она вычисляется по стандартной формуле

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = m\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\right) + A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2,$$

где m – масса движущегося тела, а A_1, A_2 и A_3 – его главные центральные моменты инерции. Данное выражение можно переписать следующим образом:

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = K_{33}n^2 + 2\left(K_{13}\dot{u} + K_{23}\dot{v}\right)n + K_{11}\dot{u}^2 + 2K_{12}\dot{u}\dot{v} + K_{22}\dot{v}^2, \tag{1.6}$$

причем на основании формул (1.3)-(1.5) можно сделать вывод, что коэффициенты K_{ij} являются функциями переменных u и v. Если мы обозначим через ρ и ε расстояния от центра масс G тела до точки касания P и до касательной плоскости к поверхности S в точке P

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = xc_{31} + yc_{32} + zc_{33},$$

то мы можем записать уравнения движения тела в таком виде (см. [2]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}\right)-\frac{\partial\Theta}{\partial u}=\sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG}-\frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot{v}+\frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}n-m\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}n^2-$$

$$-m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{N}{G}-\frac{1}{R_1}\right)n\dot{v}-\frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}\right)-\frac{\partial\Theta}{\partial v}=-\sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG}-\frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot{u}+\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}n-m\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}n^2+$$

$$+m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{L}{E}-\frac{1}{R_1}\right)n\dot{u}-\frac{\partial V}{\partial v},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)=-\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}\dot{v}-\frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}\dot{u}+m\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\dot{v}\right)n-m\varepsilon\frac{LG-NE}{\sqrt{EG}}\dot{u}\dot{v}. \tag{1.7}$$

Присоединяя к этим уравнениям последнее из уравнений (1.5), а также уравнения связей (1.2), получим систему шести уравнений, из которой определяются все неизвестные u, v, n, θ, u_1, v_1 как функции времени.

Предположим теперь, что твердое тело, катящееся по сфере, является телом вращения, то есть его моменты инерции A_1 и A_2 относительно осей Gx и Gy равны между собой ($A_1 = A_2$), а поверхность S, ограничивающая твердое тело, является поверхностью вращения вокруг оси Gz:

$$x=f\left(u\right)\cos v,\quad y=f\left(u\right)\sin v,\quad z=g\left(u\right). \tag{1.8}$$

В этом случае кинетическая энергия тела, вычисляемая по формуле (1.6), в явном виде запишется следующим образом:

$$2\Theta\left(\dot{u},\dot{v},u,v,n\right)=K_{11}\dot{u}^2+K_{22}\dot{v}^2+K_{33}n^2+2K_{23}\dot{v}n,$$

$$K_{11}=\left(A_1+Mf^2+Mg^2\right)\left(f'^2+g'^2\right)\left(\frac{g''f'-f''g'}{\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{R_1}\right)^2,$$

$$K_{22}=\frac{A_1f'^2+A_3g'^2+M\left(gf'-fg'\right)^2}{f'^2+g'^2}\left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}-\frac{f}{R_1}\right)^2,$$

$$K_{33}=\frac{A_1g'^2+A_3f'^2+M\left(ff'+gg'\right)^2}{f'^2+g'^2},$$

$$K_{23}=\frac{M\left(gf'-fg'\right)\left(ff'+gg'\right)-\left(A_3-A_1\right)f'g'}{f'^2+g'^2}\left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}-\frac{f}{R_1}\right).$$

Здесь штрихом обозначена производная по u. Очевидно, что все коэффициенты K_{ij} будут функциями только переменной u. Справедливы также следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

В этом случае два последних уравнения системы (1.7) дают:

$$\frac{d}{dt}\left(K_{23}n + K_{22}\dot{v}\right) = \left(c_1 n + k_1\dot{v}\right)\dot{u}, \quad \frac{d}{dt}\left(K_{33}n + K_{23}\dot{v}\right) = \left(c_2 n + k_2\dot{v}\right)\dot{u}, \tag{1.9}$$

где коэффициенты K_{22}, K_{23}, K_{33}, c_1, c_2, k_1, k_2 являются функциями только переменной u. Кроме того, в выражениях (1.4) для компонент угловой скорости ω_1, ω_2 и ω_3 будем иметь $c_{23} = 0$, откуда следует, что

$$\dot{v} = \frac{1}{c_{13}\tau}\omega_3 - \frac{c_{33}}{c_{13}\tau}n, \tag{1.10}$$

причем коэффициенты при переменных ω_3 и n также будут функциями только переменной u. Переходя в уравнениях (1.9) к новой независимой переменной u, приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned}\frac{K_{22}}{c_{13}\tau}\frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{23} - \frac{K_{22}c_{33}}{c_{13}\tau}\right)\frac{dn}{du} = d_1 n + s_1\omega_3,\\ \frac{K_{23}}{c_{13}\tau}\frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{33} - \frac{K_{23}c_{33}}{c_{13}\tau}\right)\frac{dn}{du} = d_2 n + s_2\omega_3,\end{aligned} \tag{1.11}$$

где d_1, s_1, d_2, s_2 – функции, зависящие от u. Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений первого порядка (1.11) относительно компонент угловой скорости n и ω_3. Если найти общее решение этой системы уравнений, то задача сводится к квадратурам.

2. Простейшие случаи интегрирования уравнений движения

Разрешим систему уравнений (1.11) относительно производных и приведем ее к виду:

$$\frac{dn}{du} = a_1 n + a_2\omega_3, \quad \frac{d\omega_3}{du} = b_1 n + b_2\omega_3. \tag{2.1}$$

Выясним, каким должен быть вид поверхности, ограничивающей тело, чтобы второе из уравнений (2.1) интегрировалось методом разделения переменных. Соответствующее условие записывается в виде $b_1 = 0$. В явном виде оно может быть представлено следующим образом:

$$\left[\left(\frac{d^2g}{du^2}\frac{df}{du} - \frac{d^2f}{du^2}\frac{dg}{du}\right)fR_1 - \left(\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2\right)\left(f\sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} + R_1\frac{dg}{du}\right)\right]\times$$

$$\times\left(f\sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} - R_1\frac{dg}{du}\right)\sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} = 0.$$

Таким образом, второе из уравнений (2.1) интегрируется разделением переменных, если поверхность, ограничивающая твердое тело, удовлетворяет уравнению

$$f\sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2}-R_1\frac{dg}{du}=0, \tag{2.2}$$

или уравнению

$$\left(\frac{d^2g}{du^2}\frac{df}{du}-\frac{d^2f}{du^2}\frac{dg}{du}\right)fR_1-\left(\left(\frac{df}{du}\right)^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2\right)\left(f\sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2}+R_1\frac{dg}{du}\right)=0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим сначала уравнение (2.2). Полагая в нем $f\left(u\right)=R_1u$, приведем его к виду

$$u\sqrt{R_1^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2}-\frac{dg}{du}=0. \tag{2.4}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$g\left(u\right)=-R_1\sqrt{1-u^2}+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, поверхность катящегося тела в данном случае удовлетворяет уравнению

$$f^2+\left(g-C_1\right)^2=R_1^2,$$

то есть катящееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар того же радиуса, что и радиус опорной сферы. Центр масс этого шара в общем случае не совпадает с геометрическим центром, а отстоит от него на расстояние C_1 вдоль оси динамической симметрии.

Теперь рассмотрим уравнение (2.3). Полагая в нем $f\left(u\right)=R_1u$, приведем его к виду

$$R_1^2u\frac{d^2g}{du^2}-\left(R_1^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2\right)\left(\frac{dg}{du}+u\sqrt{R_1^2+\left(\frac{dg}{du}\right)^2}\right)=0. \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$g\left(u\right)=\int\frac{R_1v\left(C_1R_1^2+\ln v\right)dv}{\sqrt{1-\left(C_1R_1^2+\ln v\right)^2v^2}}+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования. Полагая $C_1R_1^2=1$, представим уравнение поверхности в параметрическом виде:

$$f\left(u\right)=R_1u,\quad g\left(u\right)=R_1\int\frac{v\left(1+\ln v\right)dv}{\sqrt{1-v^2\left(1+\ln v\right)^2}}+C_2. \tag{2.6}$$

На Рис. 1 представлен общий вид поверхности, задаваемой параметрически уравнениями (2.6) при $R_1 = 1$ и $C_2 = 0$.

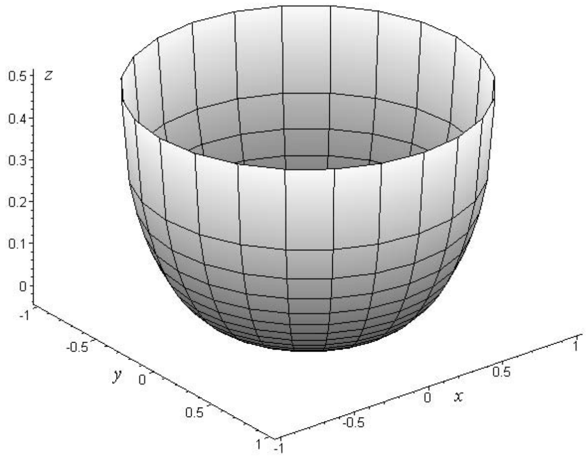

Рис. 1.

Таким образом, нами полностью исследован вопрос о том, какой должна быть форма поверхности, ограничивающей твердое тело, чтобы второе из уравнений (2.1) для него интегрировалось разделением переменных. В этом случае твердое тело либо является неоднородным динамически симметричным шаром того же радиуса, что и радиус опорной сферы, либо имеет форму, задаваемую соотношениями (2.6).

Список цитируемых источников

1. *Чаплыгин, С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии — 1897. — Т. 9, Вып. 1. — С. 10–16.

   Chaplygin, S. A. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane. Regul. Chaotic Dyn. 7, 119—130 (2002).

2. *Воронец, П. В.* К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил // Киевские Университетские Известия. — 1910. — Т. 50, Вып. 10. — С. 101–111.

   Woronetz, P. V. On the problem of the motion of a rigid body rolling without sliding on a given surface under the influence of given forces. Kievskie Universitetskie Izvestija. 50, 101–111 (1910). (Russian)

Получена 23.02.2018