*КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, 2000, том 45, № 5, с. 784–787*

## ТЕОРИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР

УДК 548.1.515

# ОБРАЩЕНИЕ ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**© 2000 г. Я. А. Илюшин[1], О. А. Терехова**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

Поступила в редакцию 20.10.98 г.

Рассмотрена задача реконструкции неизвестной функции по пространственному синтезу проекций в пространствах нечетной размерности. Получены явные формулы реконструкции для пространств размерности до 11 включительно.

В последние годы в мировой научной литературе отчетливо прослеживается рост интереса исследователей к лучевому преобразованию [1–7], в первую очередь в трехмерном пространстве. Это в значительной степени обусловлено развитием техники томографических исследований объектов самой различной природы, где все более активно используются сканеры, реализующие этот вид интегрального преобразования. По сравнению с двумерным и трехмерным преобразованием Радона, которое используется, в частности, в большинстве медицинских томографов, применение лучевого преобразования приводит к необходимости обработки существенно большего объема информации. В связи с ограниченной вычислительной мощностью компьютеров применение лучевого преобразования на практике до последнего времени сдерживалось.

Лучевое преобразование переводит функцию, определенную на $R_n$, в совокупность ее интегралов по всевозможным прямым, принадлежащим пространству $R_n$. В двумерном пространстве оно совпадает с преобразованием Радона. В общем случае лучевое преобразование отображает пространство функций, определенных на $R_n$, в пространство функций, определенных на $R_{(n-1)^2}$. Таким образом, размерность пространства получаемых экспериментальных результатов превышает размерность исходных данных, т.е. количество информации, порождаемой лучевым преобразованием, является избыточным. С другой стороны, объем этих данных обычно весьма велик. Особенно это касается томографических задач в пространствах размерности более трех, которые все чаще встречаются на практике [4]. Алгоритмы обработки данных лучевого преобразования приходится строить с учетом обоих этих обстоятельств.

Одним из возможных подходов является метод пространственного синтеза проекций [1, 4, 5, 7] (обратное проецирование и суммирование). Метод впервые был применен в рентгенографии в начале двадцатого века [8]. Обратное проецирование и суммирование в двумерном пространстве может осуществляться с помощью несложной аппаратуры фотосуммирования. Существуют томографические приборы, непосредственно проводящие такое суммирование без явного предоставления информации о самих проекциях. В ряде практических ситуаций такой подход оказывается единственно возможным [4].

Можно показать, что оператор обратного проецирования и суммирования является сопряженным к оператору лучевого преобразования. Поэтому сумма обратных проекций принадлежит тому же пространству функций, что и исходный объект, и связана с ним посредством некоторого самосопряженного оператора. Тем самым задача восстановления исходной функции сводится к решению линейного интегрального уравнения с симметричным самосопряженным ядром в этом пространстве. При этом переход к пространственному синтезу проекций позволяет эффективно уменьшить объем данных, подлежащих дальнейшей обработке. Для трехмерного пространства решение задачи восстановления функции, по данным обратного проецирования и суммирования, дано в [7]. В данной работе исследованы пространства произвольной размерности.

Как показано в [7], в трехмерном пространстве пространственный синтез проекций $\Sigma(\mathbf{r})$ связан с исходной функцией $f(\mathbf{r})$ преобразованием

$$f(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^2} = \Sigma(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где звездочка означает операцию свертки. Реше-

[1] E-mail: asi@phys.msu.su

нием этого уравнения является

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^4}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^2}\right). \quad (2)$$

Рассмотрим пространственный синтез в пространстве произвольной размерности $R_n$. Будем считать, что все проекции во всех направлениях известны. Поместим начало координат в некоторой точке $R_n$. Введем сферические координаты ($r$, $\boldsymbol{\omega}$), где $\boldsymbol{\omega}$ означает направление на единичной сфере $\Omega_n$ в $n$-мерном пространстве. Тогда интеграл неизвестной функции $f(\mathbf{r})$ вдоль некоторого направления $\boldsymbol{\omega}$, проходящего через выделенную нами точку, равен $\int_0^\infty f(r, \boldsymbol{\omega})dr$. Сумма всех интегралов ( проекций ) равна

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_n}\int_0^\infty f(r, \boldsymbol{\omega})drd\Omega = f(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{n-1}}, \quad (3)$$

где интегрирование ведется по всевозможным направлениям на сфере $\Omega_n$.

При выводе формулы (2) использовалось соотношение для трехмерного пространства $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(r)$. В пространстве произвольной размерности $n$ это соотношение имеет вид [9]

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -(n-2)\Omega_n\delta(\mathbf{r}), \quad n \geq 3, \quad (4)$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа в $n$-мерном пространстве.

Рассмотрим свертку вида $r^{-m} * r^{-k}$. Эта свертка является однородной функцией степени $n - m - k$, т.е. имеет вид const $r^{n-m-k}$. Действительно,

$$r^{-m} * r^{-k} = \int_{R_n}\frac{d^n\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^k} =$$
$$= \frac{1}{r^{m+k-n}}\int_{R_n}\frac{d^n(\mathbf{r}'/r)}{|(\mathbf{r}'/r)|^m|(\mathbf{r}'/r)-(\mathbf{r}/r)|^k}. \quad (5)$$

Можно показать, что интеграл сходится при $m$, $k \leq n-1$, $m + k > n$. Проведем свертку обеих частей уравнения (3) с функцией $r^{-(n-1)}$. Получим:

$$\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{n-1}} = f(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{n-1}} * \frac{1}{r^{n-1}} =$$
$$= \operatorname{const} f(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{n-2}}. \quad (6)$$

Применяя оператор Лапласа к обеим частям уравнения (6), получим в правой части искомую функцию $f(\mathbf{r})$ с точностью до постоянного множителя.

В [2, 3] исследованы преобразования более общего вида, отображающие функции, определенные на пространстве $R_n$, в семейство интегралов по всевозможным $m$-мерным подпространствам $R_n$ ($1 \leq m < n$). В частности, при $m = 1$ получаем собственно лучевое преобразование, при $m = n - 1$ – преобразование Радона. Обратное проецирование и суммирование для таких преобразований дает свертку исходной функции с $r^{-(n-m)}$ с точностью до постоянного множителя. Действуя формально, запишем формулу типа (2) для произвольного $m$:

$$f(\mathbf{r}) = -\operatorname{const}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^k}\right).$$

При этом показатель степени $k$ должен быть таков, чтобы после дифференцирования получилась бы дельта-функция (4). Показатель определится из условия $m + k - n = n - 2$, т.е. $k = 2n - 2 - m$. Однако для всех $m$, кроме $m = n - 1$, интеграл свертки $r^{-m} * r^{-k}$ расходится. При $m = n - 2$ исходная функция восстанавливается непосредственным дифференцированием пространственного синтеза проекций

$$f(\mathbf{r}) = -\operatorname{const}\Delta\Sigma(\mathbf{r}).$$

Исследуем подходы к вычислению сверток $\frac{1}{r^{n-1}} * \frac{1}{r^{n-1}}$ в пространствах произвольной размерности $n$. Знаменатель подынтегрального выражения в (5) обращается в нуль в двух точках пространства $R_n$. Поместим начало координат на прямой $L$, соединяющей эти две точки, на равном расстоянии от обеих. На этой прямой введем координату $z$. В пространстве $R_n \setminus L$, дополняющем эту прямую до пространства $R_n$, введем систему сферических координат ($r'$, $\boldsymbol{\omega}$), где $\boldsymbol{\omega}$ есть направление на $(n-1)$-мерной сфере. Тогда интеграл свертки можно записать в виде

$$r^{-(n-1)} * r^{-(n-1)} =$$
$$= \int_{\Omega_{n-1}} d\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\frac{r'^{n-2}dr'dz}{\sqrt{((z-(r/2))^2+r'^2)((z+(r/2))^2+r'^2)}^{\,n-1}}. \quad (7)$$

Подынтегральное выражение не зависит от угловых переменных. Поэтому интегрирование по угловой части переменных сведется к умножению на площадь единичной сферы $\Omega_{n-1}$. Площадь сферы единичного радиуса в $n$-мерном пространстве равна [9]

$$\Omega_n = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Вследствие однородности свертки зависимость от $r$ можно вынести за знак интеграла. В результате получим выражение для свертки

$$r^{-(n-1)} * r^{-(n-1)} =$$
$$= \frac{2^{n-2}\Omega_{n-1}}{r^{n-2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{\rho^{n-2} d\rho d\zeta}{\sqrt{((\zeta-1)^2+\rho^2)((\zeta+1)^2+\rho^2)}^{n-1}}. \quad (8)$$

Поскольку подынтегральная функция является четной функцией $\zeta$, интегрирование по этой переменной можно вести по области положительных значений $\zeta$. Заменой переменной $t = \rho^2$ интеграл (8) приводится к виду

$$r^{-(n-1)} * r^{-(n-1)} =$$
$$= \frac{2^{n-2}\Omega_{n-1}}{r^{n-2}} \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{t^{(n-3)/2} dt d\zeta}{\sqrt{((\zeta-1)^2+t)((\zeta+1)^2+t)}^{n-1}}. \quad (9)$$

При четных значениях $n$ интегрирование по $dt$ приводит к эллиптическим интегралам, которые не выражаются через элементарные функции. Рассмотрим нечетные значения $n$. Положим $2m = n - 1$. Тогда входящий в (9) интеграл по $dt$ запишем в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{m-1} dt}{((\zeta-1)^2+t)^m((\zeta+1)^2+t)^m}. \quad (10)$$

Для вычисления таких интегралов имеются рекуррентные соотношения [10]:

$$F_{n,m} = RF_{n-1,m} + RF_{n-2,m},$$
$$F_{1,m} = R + RF_{0,m},$$
$$F_{0,m} = R + RF_{0,m-1}, \quad m \geq 2, \quad (11)$$
$$F_{0,1} = \frac{1}{a\sqrt{D}} \ln\left|\frac{p}{q}\right|,$$

где $F_{n,m} = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{(ax^2+bx+c)^m}$, $D = b^2 - 4ac$, $p$, $q$ – корни квадратного трехчлена, $R = R(a, b, c, D)$ – рациональные выражения от коэффициентов трехчлена, причем знаменатели этих дробей имеют вид $a^i c^j D^k$, где $i, j, k$ – некоторые целые числа.

Для интеграла (10) $a = 1$, $b = 2(1 + \zeta^2)$, $c = (1 - \zeta^2)^2$, $D = (4\zeta)^2$, $p = (1 + \zeta)^2$, $q = (1 - \zeta)^2$. Соотношения (11) дают общее выражение для интеграла (10) в виде $R_1 + R_2\frac{1}{4\zeta}\ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right|$. Проинтегрируем это выражение по $\zeta$. Интеграл от рационального выражения $R_1$ выражается через элементарные функции. Исследуем интеграл от второго слагаемого

$$\int_0^{\infty} R_2 \frac{1}{4\zeta} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| d\zeta = \int_0^{\infty} R_2 \frac{1}{8\zeta^2} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| d\zeta^2.$$

Этот интеграл также можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} R(\zeta^2, 1+\zeta^2) \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| d\zeta^2, \quad (12)$$

где $R(\zeta^2, 1 + \zeta^2)$ – рациональная функция своих аргументов, причем знаменатель этой дроби имеет вид $(\zeta^2)^i(1 - \zeta^2)^j$. По теореме о разложении рациональных дробей на элементарные эта функция представляется в виде

$$R(\zeta^2, 1+\zeta^2) = \sum_i \frac{A_i}{(\zeta^2)^i} + \sum_j \frac{B_j}{(1-\zeta^2)^j}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим выражение для интеграла (12) в виде

$$\int_0^{\infty} \left\{ \sum_i \frac{A_i}{(\zeta^2)^i} + \sum_j \frac{B_j}{(1-\zeta^2)^j} \right\} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| d\zeta^2,$$

где $A_i$, $B_j$ – некоторые константы. Проинтегрируем это выражение почленно. Все члены в этом выражении выражаются через элементарные функции с помощью интегрирования по частям, кроме

$$\int_0^{\infty} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \frac{d\zeta^2}{\zeta^2} \text{ и } \int_0^{\infty} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)}. \quad (14)$$

Первый из этих интегралов равен [10]

$$\int_0^{\infty} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \frac{d\zeta^2}{\zeta^2} = 2\int_0^{\infty} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \frac{d\zeta}{\zeta} =$$
$$= 4\int_0^{1} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \frac{d\zeta}{\zeta} = \pi^2.$$

Второй из этих интегралов (14) подстановкой $x = \zeta^{-1}$ приводится к первому. На практике оказывается, что интегралы (10) имеют вид

$$\frac{1}{\zeta^{2(m-1)}} \left\{ P_{m-2}(\zeta^2) + P_{m-1}(\zeta^2) \frac{1}{\zeta} \ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \right\},$$

где $P_k(\cdot)$ – некоторые полиномы степени $k$. Следовательно, свертка $r^{-(n-1)} * r^{-(n-1)}$ в пространстве нечетной размерности $n$ может быть вычислена в элементарных функциях. Таким образом, в пространствах нечетной размерности решение задачи обращения лучевого преобразования методом обратного проецирования и суммирования имеет вид

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{n-1}}\right)}{2^{n-2}(n-2)\Omega_n\Omega_{n-1}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{t^{m-1}dt}{(((\zeta-1)^2+t)((\zeta+1)^2+t))^m}d\zeta}, \tag{15}$$

где $\Sigma(\mathbf{r})$ – пространственный синтез проекций. Значения двойного интеграла, входящего в выражение (15), для $m = 2, 3, 4$ и 5 равны соответственно $\pi^2/32$, $3\pi^2/512$, $5\pi^2/4096$ и $35\pi^2/131072$ (вычислено с помощью программы MATH KERNEL 3.0). Решение задачи обращения лучевого преобразования по формуле (15) для пространств размерности 5, 7, 9 и 11 имеет вид:

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^6}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^4}\right), \quad n = 5,$$

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi^8}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^6}\right), \quad n = 7,$$

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{9}{\pi^{10}}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^8}\right), \quad n = 9,$$

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{144}{\pi^{12}}\Delta\left(\Sigma(\mathbf{r}) * \frac{1}{r^{10}}\right), \quad n = 11.$$

Эти соотношения можно записать в операторном виде

$$\Delta\cdot\Sigma\cdot\Sigma = \Delta\cdot\Sigma^2 = \mathrm{const}I, \tag{16}$$

где $I$ – тождественный оператор, $\Sigma$ – оператор обратного проецирования и суммирования. Формула (16) дает возможность исследовать собственные функции пространственного синтеза проекций на основе собственных функций оператора Лапласа, которые хорошо изучены, по крайней мере для трехмерного пространства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Вайнштейн Б.К., Михайлов А.М.* // Некоторые свойства синтеза проектирующих фанкций. Кристаллография. 1972. Т. 17. Вып. 2. С. 258.
2. *Solmon D.C.* // J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 56. P. 61.
3. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 279 с.
4. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
5. *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1987. 224 с.
6. *Defrise M., Clack R., Townsend D.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1993. V. 10. № 5. P. 869.
7. *Илюшин Я.А.* // Кристаллография. 1997. Т. 42. Вып. 2. С. 364.
8. *Bocage E.M.* French Patent 536464, Paris, France, 1921.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над нами. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литры, 1958. 472 с.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.