Теперь об арифметических истоках идеальности математических объектов. С современной точки зрения для доказательства арифметических соотношений вроде равенства

$$n(n+1)/2 + n(n-1)/2 = n^2$$

вполне достаточно слова «смотри» в применении к удачному разбиению специальным образом расположенных камешков. То обстоятельство, что пифагорейцы могли интерпретировать подобные равенства и на языке «идеальных» чисел, связано с особой ролью чисел в музыке, т.е. с правильно найденными эмпирическими соотношениями для гармонических интервалов, подлинное теоретическое понимание которых оказалось возможным лишь спустя много веков. С точки же зрения строгости доказательств оперирование «идеальными числами» не имеет никаких преимуществ по сравнению с манипулированием реальными предметами. По этой причине увязывание прогресса в строгости рассуждений с переходом от геометрии к арифметике лишено необходимого характера.

Превосходство арифметики над геометрией связано с причинами внеисторического характера: дискретное лучше поддается строгому обоснованию, нежели непрерывное. В первом случае чувства и мышление идут рука об руку, взаимно поддерживая друг друга. В геометрии (в большинстве ее утверждений) мышлению приходится взваливать на себя все, что недоступно «разрешающей силе» чувственного восприятия. До тех пор, пока «аксиома прямоугольника» не подвергается критическому осмыслению, параллелизм мысли и предметного действия еще способен, как и в арифметике, приносить плоды. Когда же возникает вопрос об обосновании самой этой «аксиомы», на долю чувственного восприятия остается лишь функция удерживания чертежа и соответствующего рассуждения как единого целого. Все же остальное посредством подходящих аксиом и постулатов мышление берет на себя. По этой причине, на мой взгляд, практика доказательств в арифметике не могла без качественного видоизменения, связанного с различием предметов арифметики и геометрии, быть успешно перенесена в последнюю.

Правомерно ли, далее, связывать идеализацию геометрических объектов с открытием бесконечной делимости величин? Фалесова геометрия не позволяет обосновать ее возможность, так как фактически геометр не может производить деление отрезка на меньшие части сколь угодно долго. Для последнего необходимо постулирование возможности проведения окружностей сколь угодно малого радиуса и сколь угодно малых отрезков, а это по существу равносильно предположению о бесконечной делимости. Доказательство бесконечной делимости возможно только на базе развитой, евклидовой геометрии, содержащей в числе своих основоположений ее логический эквивалент. «Возникновение» линий без ширины должно происходить одновременно со становлением аксиоматического метода, а не предшествовать ему в качестве предпосылки.

Имеющее фундаментальное значение заключительное утверждение автора о том, что «апейроническая» бесконечность пространства имела результатом «идеальное» понимание объектов геометрии не вызывает само по себе каких-либо возражений.

В.А.Шапошников

Автор ставит себе задачу реконструировать развитие греческой математики от Фалеса до Гиппократа Хиосского, т.е. в период с конца VII до конца V веков до н.э. Скудность сведений по истории математики этого двухсотлетия породила непрекращающиеся уже более ста лет дискуссии буквально вокруг любого вопроса, относящегося к этому ключевому для формирования всей европейской математики периоду. Вхождение в это напряженное проблемное поле предполагает выбор одной из двух тактик: либо крайняя осторожность и взвешенность выдвигаемых положений, опирающаяся на детальный филологический и исторический анализ всех относящихся к обсуждаемой проблеме тонкостей, либо — достаточно свободное обращение с источниками, компенсируемое созданием целостной логически связной картины развития математики, обладающей эстетической и философской привлекательностью.

Судя по всему, автор тяготеет к предпочтению второй тактики, что, на мой взгляд, приводит его в ряде случаев к недостаточно бережному обращению с доксографическими свидетельствами. Приведу несколько характерных примеров.

1. Автор берется реконструировать характер «неизвестной нам геометрии», которая развивалась в «промежутке времени между Фалесом и Пифагором», связывая ее с именем Мамерка, хотя доксографических свидетельств для подобной реконструкции явно недостаточно, да и разговор о временном промежутке, разделяющем математическую активность Фалеса и Пифагора в свете того, что известно о годах их жизни, выглядит как натяжка.

2. Не всегда достаточно четко различается смысл термина «апейрон» у Анаксимандра (VI в.), у Пифагора и ранних пифагорейцев (VI — начало V в.), у Филолая (конец V в.). Кроме того, хотя часть доксографов (Симпликий, Стобей) связывают взгляды Анаксимандра с представлением о бесконечности пространства, нет необходимости трактовать его апейрон таким образом: он есть в первую очередь *порождающее начало*, его «беспредельность» — это неиссякаемость в порождении *форм*, причем порождение противоположностей и всего определенного в процессе вечного движения судя по всему мыслилось Анаксимандром *циклическим* (если не круговым!).

3. Недостаточно подтвержденным свидетельствами является, на мой взгляд, отнесение ко времени до Пифагора «понимания параллельных линий как не пересекающихся при неограниченном продолжении» (связываемое с Мамерком), а также утверждение о «широком использовании теории параллельных линий, включая V постулат, в ранней геометрии пифагорейцев». Доказательство связываемых с этим периодом теорем не требует представления о *неограниченной* продолжаемости.

4. Автор не проводит различия между доказательством от противного и доказательством «от симметрии», или на основе «принципа недостаточного основания». Не проводится различие также и между *явным* наличием схемы reductio ad absurdum в некотором рассуждении и возможностью *перестроить* некоторое рассуждение по указанной схеме. В результате становится возможным утверждать, что доказательство приведением к нелепости «присутствует уже у Анаксимандра», «более того, такие доказательства вполне могут принадлежать и житейскому языку».

Критика предложенной схемы становления доказательства в греческой математике может быть осуществлена в следующих двух планах: а) плане логической необходимости перехода от одного этапа к другому и наличия именно таких этапов становления доказательства; б) плане отождествления логических этапов развития с этапами историческими, а тем более с конкретными историческими фигурами.

Серьезное сомнение, например, вызывает выделение «финитной» геометрии Фалеса в качестве самостоятельного *исторического* этапа, хотя как *логический* этап она достаточно естественна. Остаются не вполне ясными как логическая необходимость геометрии, связанной с рассмотрением бесконечно удаленных геометрических объектов, в качестве промежуточного этапа между «финитной» геометрией и псефической арифметикой, так и историческая привязка ее к фигуре Мамерка. Неясно также, почему учение Анаксимандра об апейроне должно было иметь синхронную по времени геометрическую параллель.

Сходные сомнения и недоумения могут быть высказаны буквально по каждому пункту предлагаемой схемы. Например, почему возникновение словесного доказательства обязательно связано с переходом от демонстрации сохранения некоторого свойства при наращивании фигурных чисел к демонстрации того, что «разнодлинное» число составлено из двух треугольных? И что дает основание для отнесения этих двух типов демонстраций к последовательным историческим этапам, почему они не могли формироваться одновременно?

Нельзя не приветствовать новую попытку построения логически связной картины становления доказательства в истории греческой математики. Однако, отдавая должное смелости автора, в целях улучшения предлагаемой реконструкции представлялось полезным остановится на некоторых некорректностях, а главное – многочисленных неясностях, которые привлекли мое внимание при знакомстве с текстом доклада.

В.Г.Моров

Статья В.А.Янкова заслуживает самого серьезного внимания. Предложенная автором реконструкция раннего этапа развития эллинской математики представляется вполне оригинальной и в целом обладающей несомненным правом на существование.

Что же смущает при знакомстве со статьей Вадима Анатольевича, несколько смазывая общее благоприятное впечатление?

Настораживает практически полное отсутствие критического анализа иных подходов к историческим реконструкциям ранней греческой математики. Между тем эти попытки, особенно со второй половины прошлого столетия, представлены обширной научной литературой со своими вполне сложившимися традициями исследования. Конечно, требование определиться

по отношению к этим работам легко отвести ссылками на небольшой объем обсуждаемого текста (по сути академического доклада), усилив свои позиции напоминанием прутковской заповеди: «Нельзя объять необъятное»... Однако мне представляется, что имеющее место умолчание о предшественниках является отнюдь не привходящим обстоятельством, а существенной смысловой особенностью рассматриваемой статьи. Дело в том, что если solo Вадима Анатольевича воспринимается как нечто внятное и весьма убедительное, то в сопровождении хора, задаваемого традицией изучения предмета, вокальные ресурсы автора (а точнее, авторской концепции) могут оказаться слишком скромными, рискуя без следа расточиться среди многоголосого сопровождения.

Этот «акустический» эффект объясняется тем, что логическая чистота реконструкции, безусловно пленяющая в работе В.А.Янкова, сама по себе не дает достаточных оснований для сколько-нибудь ответственных исторических выводов. Круг источников по истории ранней греческой математики столь скуден, что вышивать по этой «канве» можно самые разнообразные узоры, сохраняя если не логическое целомудрие, то, по крайней мере, вполне приличествующую случаю благопристойность. И естественно, что чем богаче история этих «воссозданий» греческой науки, тем менее убедительными будут казаться научному сообществу попытки заключать от логически корректной реконструкции к обязывающим историческим суждениям. Для придания веса авторским построениям потребуется еще некий довесок, отсутствующее посредствующее звено, претворяющее формальную реконструкцию в сумму исторически обоснованных заключений. Если этого звена нет, то для утверждения авторских тезисов придется двинуться по одному из трех путей:

а) замалчивать историю изучения предмета;

б) добиваться директивного запрета иных точек зрения;

в) продолжить начатые исследования.

У меня нет сомнений, что именно последняя из перечисленных возможностей явится Царским путем многообещающих разысканий, начатых Вадимом Анатольевичем.

ОТВЕТ АВТОРА

Бычкову С.Н.

1. Гиппократ фигурирует у меня как первый математик, от которого сохранились точные доказательства.

Напомню в связи с этим замечание Евдема: «... его изложение было найдено вполне правильным...».

Кроме того, Гиппократ был автором первых «Начал», что в любом случае означает систематичность изложения, т.е. наличие аксиом, которые появились, собственно, еще ранее («archai» Мойриса по Диогену Лаэрцию), и вывод нового из уже известного.

На мой взгляд, одним из важнейших условий превращения набора «крючков» в язык является их *семантическая осмысленность*. Допустим, я «написал» (или «нарисовал»!) следующий «крючок»: *О* (представьте себе этот «крючок» увеличенным в несколько раз). Можно ли только на основании «синтаксического» вида «крючка» сказать о том, что этот «крючок» является буквой «о» (заметьте, что в этом случае дилемма «написал-нарисовал» однозначно разрешается в пользу первого члена). Хотя, в «синтаксическом» смысле растянутая буква «о» ничем не отличается от базового понятия «картинок» — рамки. Более того, синтаксически любой «вербальный» язык представляет собой некоторую «картинку», организованную определенным образом!

Указанное различение синтаксической и семантической составляющих языка позволяет подойти к вопросу о соотношении «вербального» и «карточного» языков. В частности, можно указать, что, видимо (здесь мне приходится домысливать за автора статьи), на синтаксическом уровне различие этих двух языков заключается в том, что «вербальный» язык синтаксически одномерен — линеен, а язык «картинок» — двухмерный, плоскостной. Является ли это различие принципиальным, решающим? Нет, потому что, оставаясь в рамках «вербального» языка, я могу построить двухмерный, плоскостной «вербальный» язык, что собственно и делает большинство людей, указывая дополнительный смысловые связи между словами (предложениями, отрывками текста) различными стрелками в своих черновиках и конспектах.

Гораздо более существенное различение между этими языками (опять-таки, если я сумел правильно «реконструировать» концепцию построения «картиночного» языка) заключается в их семантике. Например, важное семантическое различие этих двух языков заключается в том, что «вербальный» язык хорошо приспособлен для работы с индивидуальными объектами (за счет введения института собственного имени), а «картиночный» язык — для работы с неопределенными объектами (понятие «неопределенного объекта введено в работах А.Уемова, см., например: *Уемов А.И.* Системный подход и общая теория систем. М.: Мысль, 1978), в частности, «треугольником вообще». Видимо, в «картиночном» языке невозможны известные «вербальные» семантические парадоксы типа парадокса лжеца за счет возможности разграничения языковых уровней (т.е. язык «картинок» является «теоретико-типовым» языком в смысле Рассела). Однако, четкая проработка семантических аспектов языка «картинок» в статье отсутствует, что значительно снижает ее ценность.

Другая линия комментария связана с проблематикой «образа» и «образного мышления». Суть возражения заключается в следующем:

1. понятие «образа» в статье не определено достаточно четко и употребляется в различных смыслах;

2. нельзя согласиться с основным тезисом статьи о неопределенности образа, если под образом понимать некоторую психическую «картинку» индивида, поскольку любая такая «картинка» как психическая данность однозначна;

3. нельзя согласиться с выражением: «образное мышление не сводимо к словам», поскольку мышление не образно и не вербально. Вербализм и картиночность — суть способы выражения мышления, а не предикаты мышления самого по себе.

Шапошников В.А.

Фундаментальным для излагаемой в статье концепции бесконечности является следующее терминологическое различение: «мир» — «часть мира» — «ракурс мира» — «навязанный этим ракурсом образ мира» — «неопределенность образа». Для представленного в статье стиля мышления характерно использование оригинального квази-математического графического языка (языка диаграмм). Указанное терминологическое различение имеет свою параллель в характере используемых автором графем. Более того, этот язык диаграмм рассматривается не как пассивное иллюстрирование производимого другими средствами рассуждения, но как альтернативный способ мышления о соответствующих предметах. В связи с этими особенностями статьи хотелось бы высказать некоторые соображения, связанные с используемой терминологией и ее параллелью в языке диаграмм.

1. Единственное оправдание вводимого автором различения «ракурса мира» и «части мира» выражено им в следующих словах: «*Причина неопределенности любого образа* заключается в том, что порождающая его ситуация, ухватывает *не часть мира* в его отношении к субъекту, а *мир целиком в некотором его ракурсе*». Здесь невольно возникает ассоциация с различением существующим в монадологии Лейбница: каждая монада отражает универсум в целом, но в определенном ракурсе; у различных монад ракурс отличается; при этом отчетливо монада воспринимает лишь часть мира, остальное — лишь смутно. Однако, на диаграммах автора эта смутная часть никак не представлена, ее попросту нет (рамка всегда содержит нечто неопределенное), да она и не нужна! Неопределенность всякого образа не обязательно связывать с рассмотрением мира как целого. Мир можно мыслить неисчерпаемым не только *экстенсивно*, но и *интенсивно*, — в любой *части* мира достаточно источников неопределенности! Вряд ли есть смысл противопоставлять в данном контексте «ракурс мира» и «часть мира», в отличие от контекста Лейбница. Для осуществляемого в статье обсуждения вполне достаточно следующего различения: а) «мир без уточнения ракурса (= части)» — пустая рамка; б) «мир в конкретном ракурсе (= конкретной части)» — конкретным образом заполненная рамка.

2. В связи с различением «ракурса мира» и «навязанного этим ракурсом образа мира» возникают следующие вопросы: Кому мир предстает в различных ракурсах? Познающему субъекту? Тогда в чем отличие ракурса от образа этого ракурса? Не оказывается ли различение квадратной рамки (символизирующей мир и его «пребывание») и рамки круглой (символизирующей неустойчивый и изменчивый образ мира) неоправданным? Не целесообразнее ли говорить, что диаграммы изображают *образы* мира, и рамка вырезает *попавшую в образ* часть мира?

3. По поводу «неопределенности образов»: образы предполагается мыслить с помощью диаграмм (рамка и ее содержимое), однако, каждый раз содержимое рамки вроде бы вполне определено. «Неопределенность» естественнее приписать лишь тому, на основании чего производится заполнение рамки. Неопределенной является та *среда*, тот *фон*, на основании чего производится заполнение рамки. *Не определено то, как мы заполняем рамку, а не само ее содержимое*! Образ, как результат выделения всегда уже есть нечто достаточно определенное. Неопределенность же фона состоит в возможности служить источником различных достаточно определенных образов. Как выразить эту неопределенность фона на языке диаграмм?

4. Неопределенность образов, утверждает автор, отходит на задний план при их вербально-знаковом представлении. Причем, на этом пути возможно окончательное исчезновение неопределенности образов (а, следовательно, и бесконечности). Необходимость такого избавления от неопределенности связывается автором исключительно с потребностями *коммуникации*, которая не возможна посредством прямой трансляции образов без слов и знаков. При таком взгляде полностью обходится вниманием проблема роли вербальных средств в *формировании* образов. Это при том, что само эффективное выделение образов, судя по всему, невозможно без традиции обработки созерцательного фона вербальными средствами.

Несмотря на явную неоднозначность употребления основополагающего для статьи термина «образ» и недостаточную проясненность познавательного статуса разрабатываемого автором языка диаграмм, хотелось бы обратить внимание на интересность самой идеи разработки аналога математического графического языка для обсуждения философской проблематики и поучительность как успехов, так и неудач, сопутствующих автору на этой дороге.

Кричевец А.Н.

По сравнению с «данностью рода» А.Родина, «неопределенность образа» кажется более продуктивной. Действительно, род «натуральные числа» не является определенным в той степени, в какой он не есть «просто» множество всех натуральных чисел, а есть некоторая интегрирующая идея, содержание которой изменяется. В каждый момент эта идея (или образ) может быть сужена или уточнена, и это уточнение может быть закреплено знаком. Наверное, нельзя все же говорить о том, что это означивание всегда «убивает» бесконечность, но оно всегда выделяет один аспект или ракурс идеи = образа в ущерб другим аспектам = ракурсам. Обозначение натурального ряда трансфинитным числом ω оставляет, кажется, лишь один «бесконечный» аспект, который проявляется в процессе наращивания трансфинитного ряда. Автор был бы совершенно прав, утверждая, что $\omega + \omega$ это не две бесконечности, а два значка, но уже $\omega + \omega + \omega + \ldots$ могут быть заменены на ω^{ω}, напоминая об исходном смысле одиночной «ω». Остается добавить, что какая-то часть неутраченной неопределенности остается и в этом образе, фиксируемом знаком «ω», но именно эта неопределенность, а не какая-либо иная, транслируется от субъекта к субъекту в коммуникации математиков,

например, при обучении студентов, для которых эта идея является новой. Думаю, что выделение данного аспекта бесконечности (неопределенного «в себе», но уже ограниченного знаком «ω» и его употреблением) из всего, если можно так выразиться, неопределенного в квадрате набора возможных интуиций, относящихся к бесконечности, и происходит традиционно с помощью данного знака. Следовательно, обвинение в убийстве неопределенности может быть снято по крайней мере с некоторых математических символов.

Стоит еще обратить внимание на то, что ракурс трансфинитной «омеги» дополнителен в боровском смысле ракурсу свободной переменной, и они представляют, таким образом, два разных рода для натуральных чисел (см. комментарий к статье А.Родина). Подробнее — в моем ответе комментаторам статьи «Бесконечность с точки зрения сложности».

Янков В.А.

Мой комментарий можно отнести ко всем докладчикам, чьи доклады обсуждаются и чье тяготение друг к другу по стилю было уже замечено в выступлениях. Собственно, я хочу сделать некоторое «разъяснение терминов».

Мне кажется, говоря о бесконечности в ее соотношении с человеком, следует терминологически различать два ее важных вида — бесконечность «безусловную» и бесконечность «предвосхищаемую», в частности, бесконечность «построяемую».

С первой бесконечностью мы имеем дело, когда ощущаем ее полную несоизмеримость с нами. Мы можем испытывать перед ней чувство ужаса или чувство восторга, но никакими средствами мы не способны ее к себе приблизить; все наши усилия разбиваются об нее, как разбиваются волны у подножья грандиозной горы.Описание такой бесконечности и ее философские применения к миру даны Николаем Кузанским (maximum, он же minimum).

Другая бесконечность более близка к нам и проявляет себя либо как неопределенность каких-то возможностей, либо как наша способность конструировать объекты какого-то рода без всякой мыслимой остановки. В математике примеры первого рода «свободно становящиеся» последовательности, второго рода — конструктивно построяемые натуральные числа.

Первая из этих бесконечностей — потенциально неопределенная бесконечность вида — фоновый факт нашей жизни, а может быть и жизни более низкой, там где есть предвосхищение чего-то не до конца определенного.

ОТВЕТ АВТОРА

В моей статье соседствуют три плана — исходное понимание того, что такое бесконечность, далее, введение языка «образных средств» как «инструмента философствования», в том числе, инструмента для изучения бесконечности и, наконец, собственно результат использования образных средств для получения нового понимания бесконеч-

Г.М. Единство естествознания по Бору и единообразные взаимосвязанные периодические системы физики, химии, биологии и психологии. // Исследования по истории физики и механики. 1990. М., Наука, 1990. С.37–98; Исследования по истории физики и механики. 1991–1992. М.; Наука, 1996. С.101–187. *Кузнецов В.И., Идлис Г.М., Гутина В.Н.* Естествознание. М.; Агар, 1996. 384 с. См. главу III. Взаимосвязанные периодические системы фундаментальных структурных элементов материи на всевозможных последовательных основных уровнях ее естественной самоорганизации. С.80–164).

При этом в качестве наиболее значимого выступает именно последний (предельно обособленный ментальный нулевой элемент, с характерными для Божественно всемогущего Высшего Разума бесконечными интеллектуальными потенциальными возможностями (*Идлис Г.М.* К вопросу о математизации науки о науке (аксиоматические основания) // Философия и социология науки и техники. 1987. М.; Наука, 1987. С.114–136. *Идлис Г.М.* От антропного принципа к разумному первоначалу // Глобальный эволюционизм (философский аспект). М.; Институт философии РАН, 1994. С.124–139. *Идлис Г.М.* Гармония мироздания // Дельфис. 1994. №2. С.44–50. *Идлис Г.М.* Высший Разум или Мыслящий Универсум как необходимый особый предельный и вместе с тем исходный) эталонный фундаментальный структурный элемент материи // Взаимосвязь физической и религиозной картин мира. Физики-теоретики о религии. Выпуск 1. Кострома, МИИЦА-ОСТ, 1996. С.126–137.

Все это придает необходимую универсальность уже утвердившемуся в современной космологии антропному принципу, впервые выдвинутому и детально проанализированному автором в 1957 г. (*Идлис Г.М.* Структурная бесконечность Вселенной и Метагалактика как типичная обитаемая космическая система (Тезисы доклада) // Труды шестого совещания по вопросам космогонии (Москва, 5–7 июля 1957). Внегалактическая астрономия и космология. М., АН СССР, 1959. С.270–271. *Идлис Г.М.* Основные черты наблюдаемой астрономической Вселенной как характерные свойства обитаемой космической системы // Известия Астрофизического института АН Казахской ССР. 1958. Т.VII. С.39–54).

В.А.Шапошников

Первое, что обращает на себя внимание при знакомстве с докладом,— это явное преобладание синтетической тенденции над аналитической, составляющее особенность мышления автора. Провозглашая «однозначное мышление», идущее на смену «двузначной логике», автор, по-видимому, понимает его в частности и как отказ от omnis determinatio est negatio Спинозы. Положительное именование признается первичным и подлинным, а отрицательное—вторичным, да к тому же вполне определенно ценностно окрашенным (дьявол, падшесть тварного бытия). Исходную интуитивную нерасчлененность предлагается предпочесть сознательно-логическому расчленению и анализу. На мой взгляд, такая позиция есть простой отказ от философского мышления как такового. Дурные последствия этой установки не замедливают

сказаться в смешении, а порой и неоправданном отождествлении, представлений и идей, принадлежащих самым разным мыслителям как Востока, так и Запада, заимствуемым из самых разных эпох и культур.

Обратим внимание, что один из наиболее последовательных защитников синтетической тенденции в истории русской философии, Вл.Соловьев, упомянутый в начале доклада, настоятельно подчеркивал неизбежность и совершенную необходимость этапа расчленения, самоутверждения и самоопределения каждого из начал на пути к цельному знанию. Да и упомянутое положение Спинозы, не мешало последнему быть монистом.

К счастью, автор доклада не удерживается на провозглашенной им позиции, и в полной мере разделяет грех использования «двузначной логики», что и делает доклад интересным с философской точки зрения. Все рассуждение автора строится на выявлении определенных оппозиций и осуществлении ценностного выбора между ними (положительное—отрицательное, Бог—дьявол, интуиция—логический анализ, созерцание—деятельность, истина—польза, энтропийные законы—антиэнтропийные законы, бесконечность—конечное и т.п.).

Демонстрируемый автором подход к обсуждению темы «бесконечность и математика» вписывается в традицию, связанную с именами Николая Кузанского, Новалиса, Павла Флоренского. Для этого подхода характерны следующие особенности: а) убеждение в необходимости рассматривать бесконечность в математике в тесной связи с философскими, религиозными и мифопоэтическими представлениями о бесконечном; б) «игра аналогий» как метод познания; в) тенденция «гуманитаризации» математики, акцент на «творящем субъекте», а не на познаваемом объекте. Обсуждаемый доклад свидетельствует о том, что эта традиция по-прежнему жива.

Подобный взгляд на математику оказывается единственно плодотворным, коль скоро мы хотим воспользоваться ее достижениями не в естествознании, а в искусстве и философии. Более сложен вопрос о том, какую роль взгляд на математику глазами романтика и поэта играет в развитии математики как таковой, в получении новых *математических* результатов. Однако, и здесь нельзя полностью игнорировать роли «математических» изысканий Николая Кузанского в становлении дифференциального исчисления, или философско-математических исследований Павла Флоренского—в выборе московскими математиками начала XX века новой теоретико-функциональной тематики.

ОТВЕТ АВТОРА

Наибольшее созвучие с идеями доклада чувствуется в комментарии известного специалиста в философии физики Г.М.Идлиса. Единственное замечание: говорить о нулевом элементе (и другой его ипостаси—бесконечности) как наиболее фундаментальном элементе материи, «с характерными для Божественного... Разума бесконечными... возможностями» не совсем правильно. На этом пути возможно

Б 53
УДК 51
ББК В1

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда Проект №97-03-16041

БЕСКОНЕЧНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ: философские и исторические аспекты/ Под ред. А.Г.Барабашева — М: Янус-К, 1997. — 400 с.

В книге собраны материалы двух Общероссийских конференций по проблеме бесконечности в математике, состоявшихся в сентябре 1995 и сентябре 1996 гг. Впервые предпринята попытка передать «атмосферу» конференций и показать, как в процессе обсуждений рождались новые идеи и происходило общее продвижение в проблематике. Для этого, редколлегия наряду с текстами докладов поместила в книге комментарии участников (выступления при обсуждении докладов, записанные первоначально на магнитофон и затем литературно обработанные самими участниками) и ответы авторов докладов на комментарии.

В пяти главах книги рассмотрены взгляды на бесконечность в древних Китае и в Греции, описан ряд подходов к исследованию бесконечности в математике Средних веков и Нового времени. Особое внимание уделено двум способам представления бесконечности в математике: приемам рассмотрения бесконечности как завершенности, как пригодного для формальных манипуляций символа (совокупности символов), и методам финитизации бесконечности, оставления только ее конечного определяющего остатка. Предложены оригинальные метафизические концепции, содержащие новые типы рассуждений о бесконечности, критически проанализированы взгляды на бесконечность Б. де Фонтенеля, И.Канта, П.Л.Чебышева, Г.Кантора, П.А.Флоренского, Л.Брауэра, Д.Гильберта. Отдельная глава посвящена рассмотрению того, как представления о бесконечности связаны с концепциями строения Вселенной и с проблемой Бога.

Настоящая книга адекватно передает содержание уже сложившихся идей и представляет направления производимых изысканий, характеризует стиль и уровень обсуждений, свойственных российскому сообществу исследователей, работающих в области философии математики и истории математики.

This book collects material from two All-Russian conferences devoted to the problem of infinity in mathematics which took place in September 1995 and September 1996. For the first time, the editors undertook to present the «atmosphere» of our conferences and to show how new ideas were born in the process of conversations, and how common progress in problematics is facilitated. To fulfill this promise, the editors have included in the book not only the texts of the main talks, but also the commentaries of the participants (the content of conversations which took place following the talks), and also the responses of the speakers to the comments. Transcripts of the discussions were made, and then printed and checked by participants themselves.

In five chapters of the book, the views on infinity in ancient China and Greece are examined, and the various approaches toward the study of infinity in mathematics during the Middle Ages and the Great Scientific Revolution are described. Two ways of representing infinity in particular are illuminated: 1) by the means of replacing infinity with finiteness through manipulating infinity as a symbol (or system of symbols) suitable for formal procedures; 2) by methods of finitization of infinity, i.e., operations only with the finite determinate remainder of infinite series. Original metaphysical theories that include new types of assertions about infinity are introduced. The views on infinity by B.de Fontenelle, I.Kant, P.L.Chebyshev, G.Cantor, P.A.Florenskij, L.E.J.Brouwer, D.Hilbert are critically analysed. The last chapter is dedicated to the problem of how ideas about infinity are related to theories of the Universe and of God.

This book satisfactorily depicts the content of existing ideas, introduces new directions of research and illustrates the style and level of the discussions that characterise the contemporary Russian community of researchers who work in the areas of philosophy of mathematics and history of mathematics.

Б $\frac{1620100000-20}{22Н\ (03)-96}$ Без объявл.

ISBN 5-88929-039-8

СОДЕРЖАНИЕ