

**А.Б. КИСЕЛЕВ**, доктор физ.-мат. наук

профессор Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
Москва, Российская Федерация, E-mail: akis2006@yandex.ru

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ СЖАТИИ И РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЕВ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В работе представлены точные решения одномерных нестационарных задач адиабатического сжатия и расширения сферического и цилиндрического слоев из вязкой жидкости, описываемой моделью Навье-Стокса. Решения получены в лагранжевых переменных и в предположении, что в начальный момент времени распределения радиальных скоростей удовлетворяют условию несжимаемости. Эти решения, в частности, могут быть использованы для тестирования программ численного расчета и оценки эффективности новых численных методов. Кроме того, решение для сферического слоя может быть полезным при выборе кинетического уравнения для пористости (или параметра объемной поврежденности, при моделировании так называемого вязкого разрушения) материала. Ранее аналогичные

результаты были получены для толстостенных оболочек из несжимаемого вязкопластического материала, описываемого уравнениями модели типа Соколовского-Пэжины (Киселев А.Б. Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. вып. 4. СС. 675...679; Киселев А.Б. К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2012. № 6. СС. 20...25).

**Ключевые слова:** сферический и цилиндрический слой, вязкая жидкость, несжимаемость, адиабатический процесс.

**A.B. KISELEV**, Doctor of Phis.-Math. Sciences

professor Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow M.V. Lomonosov State University  
Moscow, Russian Federation, E-mail: akis2006@yandex.ru

## ANALITICHESKIE RECHENIAY ZADACH OB ADIABATICHESKOM SCHATI I RASCHIRENII SFERICHESKOGO I CHILINDRICHESKOGO SLOEV IZ NESGIMAEMOI VIAZKOI CHIDKOSTI

In paper present analytical solutions for one-dimensional dynamical problems of adiabatic compression and extension of spherical and cylindrical layers from viscous fluid Navier-Stokes type. Solutions obtained in Lagrangian coordinates and at hypothesis that in initial moment distributions of radial velocity satisfy condition of incompressibility. These solutions, in particular, can be used for testing programs of computing calculations and for estimate of effectiveness of new numerical methods. In addition, solution for spherical layer can be useful for sampling kinetic equation for porosity (or volume damage parameter under modeling so-called viscous fracture) of material. Previously similar results were

obtained for thick-walled shells from incompressibility viscoplastic material Socolovsky-Perzyna type (Kiselev A.B. Analytical solutions for problems of adiabatic compression of thick-walled spherical and cylindrical shells from incompressibility viscoplastic material // J. of Appl. Math. and Mech. 2012. Vol. 76. № 4. PP. 675...679; Kiselev A.B. To investigation of process of no stationary extension of thick-walled spherical and cylindrical viscoplastic shells // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2012. № 6. PP. 20...25).

**Key words:** spherical and layers, viscous fluid, incompressibility, adiabatically process.

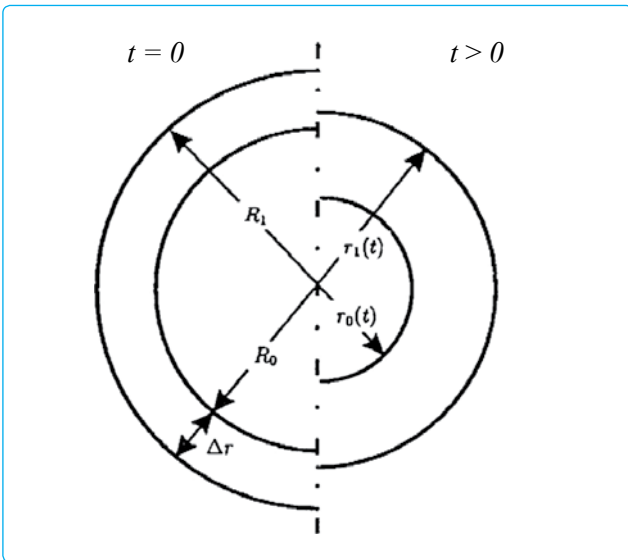
Для тестирования новых программ и методов численного расчета задач механики сплошной среды необходимо знание точных решений. Особенно остро стоит вопрос для численных методов и программ, ориентированных на решение задач динамической упруговязкопластичности и динамики вязкой жидкости, ввиду их особой сложности.

В данной работе представлены точные решения одномерных задач сжатия и расширения сферического и цилиндрического слоев из вязкой жидкости модели Навье-Стокса. Решения получены в лагранжевых переменных и в предположении, что в начальный момент времени распределения радиальных скоростей удовлетворяют условиям несжимаемости.

Найденные решения, в частности, могут быть использованы для тестирования программ численного расчета и оценки эффективности новых численных методов. Ранее аналогичные результаты были получены для толстостенных оболочек из несжимаемого вязкопластического материала [1, 2], описываемого уравнениями модели типа Соколовского-Пэжины [3].

### 1. Сжатие сферического слоя

В одномерном приближении (все параметры зависят от радиальной лагранжевой координаты  $R$  и времени  $t$ ) рассмотрим процесс адиабатического сжатия сферического слоя жидкости, внутренний и внешний радиусы которого меняются с течением времени по закону  $r_0 = r(R_0, t)$  и  $r_1 = r(R_1, t)$  соответственно, где  $R_0$  и  $R_1$  – ее внутренний и внешний радиусы при  $t = 0$  (рисунок).  $R = r|_{t=0}$  – так называемая начальная лагранжева координата материальной частицы;  $r$  – ее эйлерова координата.



Поведение среды описывается уравнениями модели вязкой жидкости Навье-Стокса [4], которые в предположении несжимаемости и одномерном сферическом приближении имеют следующий вид:

$$\sigma_R = -p + 2\mu e_R, \quad \sigma_\theta = -p + 2\mu e_\theta. \tag{1}$$

Здесь  $\sigma_R, \sigma_\theta$  – радиальное и кольцевое напряжения соответственно;  $p = -(\sigma_R + 2\sigma_\theta)/3$  – давление;  $e_R = \partial v / \partial R$ ,  $e_\theta = v / R$  – радиальная и кольцевая скорости деформаций соответственно;  $v$  – радиальная скорость;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости.

Условие несжимаемости жидкости  $e_R + 2e_\theta = 0$  дает уравнение для нахождения распределения скоростей в сферическом слое:

$$\frac{\partial v}{\partial R} + 2\frac{v}{R} = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) имеет следующий вид:

$$v = \frac{C(t)}{R^2}. \tag{3}$$

$C(t) \leq 0$ , поскольку происходит сжатие слоя и скорость  $v \leq 0$ . В начальный момент времени  $t = 0$   $C(0) = V_0 R_0^2$ , где  $V_0$  – начальная скорость внутренней поверхности слоя.

Используя соотношения (1)...(3), получим:

$$\sigma_R = -4\mu \frac{C(t)}{R^3} - p, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{C(t)}{R^3} - p. \tag{4}$$

Уравнение движения имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + 2\frac{\sigma_R - \sigma_\theta}{R}, \tag{5}$$

где  $\rho$  – плотность жидкости; точка над символом здесь и далее означает материальную производную по времени  $t$ .

Уравнение для плотности внутренней энергии (на единицу массы)  $U^{sph}$  в адиабатическом приближении

$$\rho \dot{U}^{sph} = \sigma_R \frac{\partial v}{\partial R} + 2\sigma_\theta \frac{v}{R}$$

с учетом соотношений (3) и (4) примет следующий вид:

$$\rho \dot{U}^{sph} = 12\mu \frac{C^2(t)}{R^6}. \tag{6}$$

Скорость изменения полной внутренней энергии слоя  $\dot{U}_\Sigma^{sph}$  в момент времени  $t$  будет

$$\dot{U}_\Sigma^{sph} = \int_{R_0}^{R_1} 4\pi R^2 \rho \dot{U}^{sph} dR.$$

Используя (6), получим

$$\dot{U}_\Sigma^{sph} = 16\pi\mu C^2(t) \left( \frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R_1^3} \right). \tag{7}$$

Подстановка выражения (4) в уравнение движения (5) дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\rho}{R^2} \dot{C}(t). \tag{8}$$

Кинетическая энергия сферического слоя определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{sph} &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{R_1} 4\pi R^2 \rho V^2 dR = \frac{1}{2} \int_{R_2}^{R_1} 4\pi \rho \frac{C^2(t)}{R^2} dR = \\ &= 2\pi\rho C^2(t) \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Его начальная кинетическая энергия –

$$K_0^{sph} = 2\pi\rho V_0^2 R_0^3 \left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right).$$

В процессе сжатия слоя его кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию и в момент остановки сжатия  $t = t_s^{sph}$ , если такой момент времени  $t_s^{sph} < +\infty$  наступает, вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию. В момент времени  $t$  ( $0 \leq t \leq t_s^{sph}$ ) выполняется закон сохранения полной энергии:  $K^{sph}(t) + U_{\Sigma}^{sph}(t) = K_0^{sph}$  или

$$\dot{K}^{sph}(t) + \dot{U}_{\Sigma}^{sph}(t) = 0. \tag{10}$$

Используя соотношения (7) и (9), из (10) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $C = C(t)$ :

$$\dot{C}(t) + \alpha C(t) = 0, \tag{11}$$

где

$$\alpha = \frac{4\mu}{\rho R_0^2} \left(1 + \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0^2}{R_1^2}\right).$$

Решение уравнения (11) с начальным условием  $C(0) = V_0 R_0^2$  будет

$$C(t) = V_0 R_0^2 \exp(-\alpha t). \tag{12}$$

Как видно из (12), остановки движения жидкости не происходит за конечное время  $t_s^{sph}$ , что принципиально отличает полученное ранее решение от решений для сферических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала [1, 2]. С течением времени скорость жидкости асимптотически стремится к нулю:

$$v(R, t) = V_0 \frac{R_0^2}{R^2} \exp(-\alpha t). \tag{13}$$

Используя (13), найдем значение текущей эйлеровой радиальной координаты для лагранжевой материальной частицы с координатой  $R$ :

$$r = r(R, t) = R + \int_0^t v(R, t) dt = R \left(1 + \frac{V_0 R_0^2}{\alpha R^3} (1 - \exp(-\alpha t))\right). \tag{14}$$

Полученное решение имеет смысл до момента времени, когда значения координат внутренней поверхности оболочки станут нулевыми, т.е. произойдет схлопывание слоя. Используя (14), найдем этот момент времени:

$$t_s^{sph} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha R_0}{V_0}\right). \tag{15}$$

Как видно из (15), начальная скорость внутренней поверхности слоя не может быть произвольной величиной и должна быть ограничена:

$$V_0 > (V_0^{sph})^* = -\alpha R_0 = -\frac{4\mu}{\rho R_0} \left(1 + \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0^2}{R_1^2}\right). \tag{16}$$

Значение модуля критической скорости при сжатии слоя  $|(V_0^{sph})^*|$  более всего зависит от величины динамической вязкости  $\mu$  и размеров слоя (его внутреннего радиуса  $R_0$ ). Так для глицерина, плотность которого  $\rho = 1260$  кг/м<sup>3</sup>, а значения динамической вязкости при трех различных температурах равны  $\mu = 12,10$  Па·с при температуре  $T = 0$  °С,  $\mu = 1,48$  Па·с при  $T = 20$  °С и  $\mu = 0,33$  Па·с при  $T = 40$  °С (см. [5]) для случая, например, когда  $R_0 = 0,001$  м и  $R_1 = 0,002$  м, получим следующие значения критических скоростей:  $|V_0^*| = 67$  м/с,  $|V_0^*| = 8,3$  м/с и  $|V_0^*| = 1,8$  м/с соответственно. Если же размер слоя уменьшить, например, в 10 раз (сохраняя тем же отношение радиусов  $R_0 / R_1$ ), то в 10 раз возрастет и критическая скорость.

Градиент давления можно найти из формулы (8):

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \alpha \rho V_0 \frac{R_0^2}{R^2} \exp(-\alpha t).$$

В начальный момент времени  $t = 0$  градиент давления следующим образом распределен по радиусу:

$$\frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=0} = \frac{4\mu}{R^2} \left(1 + \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0^2}{R_1^2}\right) V_0.$$

В конце процесса схлопывания слоя  $t = t_s^{sph}$  распределение градиента давления будет следующим:

$$\frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=t_s^{sph}} = \frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=0} \cdot \left(1 + \frac{4\mu}{\rho V_0 R_0} \left(1 + \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0^2}{R_1^2}\right)\right).$$

Максимальной величины начальная кинетическая энергия сферического слоя при фиксированном внешнем радиусе  $R_1$  и начальной скорости  $V_0$  достигается при следующем соотношении его радиусов  $R_0 = 0,75 R_1$ :  $(K_0^{sph})_{\max} = 0,5\pi\rho V_0^2 R_0^3$ .

## 2. Расширение сферического слоя

В случае расширения слоя радиальные скорости направлены от его центра и  $V_0 > 0$ . Все выше полученные формулы справедливы и в случае расширения слоя. Теряет смысл только введение критической скорости  $V_0^*$  (16).

Как следует из формулы (13), полная остановка расширения слоя происходит за бесконечно большое время  $t_s^{sph} \rightarrow +\infty$ . Используя (14), найдем эйлерову координату материальной частицы с лагранжевой координатой  $R$  при  $t_s^{sph} \rightarrow +\infty$ :

$$r(R, +\infty) = R \left(1 + \frac{\rho V_0 R_0^4}{2\mu R^3 (1 + R_0 / R_1 + R_0^2 / R_1^2)}\right).$$

Введем объемное содержание пор в материале  $\omega$  (теперь заменим термин «сферический слой» на «сферическая пора», более точно описывающий существо дела). Тогда, если принять, что в малом пред-

ставительном объеме жидкости все поры имеют один размер,  $\omega = (r(R_0, t) / r(R_1, t))^3$ . Используя (14), получим формулу для изменения пористости материала применительно к рассмотренной ранее модельной задаче:

$$\omega = \omega_0 \left( \frac{1 + V_0(1 - e^{-at}) / \alpha R_0}{1 + \omega_0 V_0(1 - e^{-at}) / \alpha R_0} \right)^3.$$

Здесь  $\omega_0 = (R_0 / R_1)^3$  – начальная пористость.

Конечное значение пористости при  $t \rightarrow +\infty$  будет равно величине

$$\omega|_{t \rightarrow +\infty} = \omega_0 \left( \frac{1 + V_0 / \alpha R_0}{1 + \omega_0 V_0 / \alpha R_0} \right)^3.$$

### 3. Сжатие цилиндрического слоя

Рассмотрим теперь бесконечный цилиндрический слой, имеющий в начальный момент времени  $t = 0$  внутренний радиус  $R_0$  и внешний радиус  $R_1$ . В момент времени  $t > 0$  внутренний радиус  $r_0 = r(R_0, t)$ , внешний –  $r_1 = r(R_1, t)$ .

Поскольку в одномерном цилиндрическом приближении движение жидкости вдоль оси симметрии  $z$  отсутствуют, то есть скорость деформации  $e_z = 0$ , уравнения модели вязкой несжимаемой жидкости Навье-Стокса [4] будут иметь вид:

$$\sigma_r = -p + 2\mu e_r, \quad \sigma_\theta = -p + 2\mu e_\theta, \quad \sigma_z = -p. \quad (17)$$

Здесь  $\sigma_z$  – напряжение вдоль оси  $z$ ; давление  $p$  теперь запишется следующим образом:

$$p = -(\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta) / 3 = -(\sigma_r + \sigma_\theta) / 2.$$

Условие несжимаемости жидкости  $e_r + e_\theta = 0$  дает уравнение для нахождения распределения скоростей в цилиндрическом слое:

$$\frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R} = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) имеет следующий вид:

$$v = \frac{B(t)}{R}. \quad (19)$$

$B(t) \leq 0$ , поскольку происходит сжатие слоя и скорость  $v \leq 0$ . В начальный момент времени  $t = 0$   $C(0) = V_0 R_0$ , где  $V_0$  – начальная скорость внутренней поверхности слоя.

Используя соотношения (17)...(19), получим:

$$\sigma_r = -2\mu \frac{B(t)}{R^2} - p, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{B(t)}{R^2} - p. \quad (20)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial R} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R}. \quad (21)$$

Уравнение для плотности внутренней энергии (на единицу массы)  $U^{cyl}$  в адиабатическом приближении для цилиндрического случая

$$\rho \dot{U}^{cyl} = \sigma_r \frac{\partial v}{\partial R} + \sigma_\theta \frac{v}{R}$$

с учетом соотношений (19) и (20) примет следующий вид:

$$\rho \dot{U}^{cyl} = 4\mu \frac{B^2(t)}{R^4}. \quad (22)$$

Скорость изменения полной внутренней энергии цилиндрического слоя единичной длины  $\dot{U}_\Sigma^{cyl}$  в момент времени  $t$  будет

$$\dot{U}_\Sigma^{cyl} = \int_{R_0}^{R_1} 2\pi R \rho \dot{U}^{cyl} dR.$$

Используя (22), получим

$$\dot{U}_\Sigma^{cyl} = 4\pi\mu B^2(t) \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_1^2} \right). \quad (23)$$

Подстановка выражения (20) в уравнение движения (21) дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\rho}{R} \dot{B}(t). \quad (24)$$

Кинетическая энергия цилиндрического слоя единичной длины определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{cyl} &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{R_1} 2\pi R \rho v^2 dR = \frac{1}{2} \int_{R_0}^{R_1} 2\pi \rho \frac{B^2(t)}{R} dR = \\ &= \pi \rho B^2(t) \ln \frac{R_1}{R_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Его начальная кинетическая энергия –

$$K_0^{cyl} = \pi \rho V_0^2 R_0^2 \ln \frac{R_1}{R_0}.$$

В процессе сжатия слоя его кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию и в момент остановки сжатия  $t = t_s^{cyl}$ , если такой момент времени  $t_s^{cyl} < +\infty$  наступает, вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию. В момент времени  $t$  ( $0 \leq t \leq t_s^{cyl}$ ) выполняется закон сохранения полной энергии:  $K^{cyl}(t) + U_\Sigma^{cyl}(t) = K_0^{cyl}$  или

$$\dot{K}^{cyl}(t) + \dot{U}_\Sigma^{cyl}(t) = 0. \quad (26)$$

Используя соотношения (23) и (25), из (26) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $B = B(t)$ :

$$\dot{B}(t) + \beta B(t) = 0, \quad (27)$$

где

$$\beta = \frac{2\mu(R_1^2 - R_0^2)}{\rho R_0^2 R_1^2} \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right)^{-1}.$$

Решение уравнения (27) с начальным условием  $B(0) = V_0 R_0$  будет

$$B(t) = V_0 R_0 \exp(-\beta t). \quad (28)$$

Как видно из (28), остановки движения жидкости в случае цилиндрической симметрии не происходит за конечное время  $t_s^{cyl}$ , как и в случае сферической симметрии. С течением времени скорость жидкости в цилиндрическом слое асимптотически стремится к нулю:

$$v(R, t) = V_0 \frac{R_0}{R} \exp(-\beta t). \quad (29)$$

Используя (29), найдем значение текущей эйлеровой радиальной координаты для лагранжевой материальной частицы с координатой  $R$ :

$$r = r(R, t) = R + \int_0^t v(R, t) dt = R \left( 1 + \frac{V_0 R_0}{\beta R^2} (1 - \exp(-\beta t)) \right). \quad (30)$$

Полученное решение имеет смысл до момента времени, когда значения координат внутренней поверхности слоя станут нулевыми, т.е. произойдет схлопывание слоя. Используя (30), найдем этот момент времени:

$$t_s^{cyl} = -\frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta R_0}{V_0} \right). \quad (31)$$

Как видно из (31), начальная скорость внутренней поверхности цилиндрического слоя не может быть произвольной величиной и должна быть ограничена:

$$V_0 > (V_0^{cyl})^* = -\beta R_0 = -\frac{2\mu(R_1^2 - R_0^2)}{\rho R_0 R_1^2} \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right)^{-1}. \quad (32)$$

Градиент давления можно найти из формулы (8):

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \beta \rho V_0 \frac{R_0}{R} \exp(-\beta t).$$

В начальный момент времени  $t = 0$  градиент давления следующим образом распределен по радиусу:

$$\frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=0} = \frac{2\mu(R_1^2 - R_0^2)}{R_0 R_1^2 R} \ln \frac{R_1}{R_0} V_0.$$

В конце процесса схлопывания слоя  $t = t_s^{cyl}$  распределение градиента давления будет следующим:

$$\frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=t_s^{cyl}} = \frac{\partial p}{\partial R} \Big|_{t=0} \cdot \left( 1 + \frac{2\mu(R_1^2 - R_0^2)}{\rho V_0 R_0 R_1^2} \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right)^{-1} \right).$$

Максимальной величины начальная кинетическая энергия цилиндрического слоя единичной длины при фиксированном внешнем радиусе  $R_1$  и начальной скорости  $V_0$  достигается при следующем соотношении его радиусов  $R_0 = R_1 / \sqrt{e} \approx 0,6065 R_1$ :  $(K_0^{cyl})_{\max} = 0,5\pi\rho V_0^2 R_0^2$ .

#### 4. Расширение цилиндрического слоя

В случае расширения цилиндрического слоя радиальные скорости направлены от его центра и  $V_0 > 0$ . Все полученные в параграфе 3 формулы справедливы и в случае расширения слоя. Теряет смысл только введение критической скорости  $(V_0^{cyl})^*$  (32) и пористости среды.

Как следует из формулы (29), полная остановка расширения цилиндрического слоя происходит за бесконечно большое время  $t_s^{cyl} \rightarrow +\infty$ . Используя (30), найдем эйлерову координату материальной частицы с лагранжевой координатой  $R$  при  $t_s^{cyl} \rightarrow +\infty$ :

$$r(R, +\infty) = R \left( 1 + \frac{\rho V_0 R_0^3}{2\mu R^2 (1 - R_0^2 / R_1^2)} \ln \frac{R_1}{R_0} \right).$$

#### 5. Замечание

Отметим, что поскольку из условий несжимаемости материала сферического и цилиндрического слоев (2), (18) определяются распределения радиальных скоростей в них, в том числе и на граничных поверхностях  $R = R_0$ ,  $R = R_1$ , т.е. имеют место кинематические граничные условия, другие граничные условия, например, свободной поверхности, в данной постановке для рассмотренных ранее задач не могут быть реализованы.

#### 6. Заключение

Таким образом, получены точные решения одномерных задач сжатия и расширения сферического и цилиндрического слоев из несжимаемой вязкой жидкости. Решения могут использоваться для тестирования программ численного расчета и оценки эффективности новых численных методов, аналогично тому, как это было сделано в работе [6], в которой использовалось точное решение, полученное в [7]. Кроме того, решение для сферического слоя может быть полезным при выборе кинетического уравнения для пористости (или параметра объемной поврежденности, при моделировании так называемого вязкого разрушения) материала  $\omega$  (см., например, [8...10]).

### Литература

1. Киселев А.Б. Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. СС. 675...679.
2. Киселев А.Б. К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2012. № 6. СС. 20...25.
3. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. 318 с.
5. Дубровский И.М., Егоров Б.В., Рябошапка К.П. Справочник по физике. Киев: Наукова думка, 1986. 558 с.
6. Howell B.P., Bally G.J. A Free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of elastic-plastic solids. J. of Comput. Phys. 2002. Vol. 175. P. 128...167.
7. Verney D. Evaluation de la limite elastique du cuivre et de l'uranium par des experiences d'implosion «lente». Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures. Symposium H.D.P. New York: Gordon and Breach, 1968. P. 293.
8. Григорьев В.Г., Дунин С.З., Сурков В.В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1981. № 1. СС. 199...201.
9. Голубев В.К. О расширении пор в пластических металлах при отколах // Прикл. механ. и техн. физ. 1983. № 6. СС. 159...165.
10. Киселев А.Б., Юмашев М.В. Численное исследование ударного сжатия микропоры в термоупруговязкопластическом материале // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 1. СС. 78...83.
11. Кобылкин И.Ф., Селиванов В.В., Соловьев В.С., Сысоев Н.Н. Ударные и детонационные волны. Методы исследования. 2-е изд. М.: Физматлит, 2004. 256 с.
12. Прочность, разрушение и диссипативные потери при интенсивных ударно-волновых нагрузках: Сб. научных статей / Под. ред. А.А. Садовой, С.В. Михайлова. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009. 420 с.
13. Даниленко В.В. Взрыв: физика, техника, технологии. М.: Энергоатомиздат, 2010. 784 с.
- prochessa nestachionarnogo raschireniy tolstostennykh sfericheskikh i cylindricheskikh viazkoplasticheskikh obolochek. Vestnik Mosk. Univ. Ser. 1. Matem. Mehan. 2012. № 6. PP. 20...25.
3. [Perzyna P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. Moscow: Mir, 1968. 176 p.]. Perzyna P. Osnovnyye voprosy viazkoplastichnosti. M.: Mir, 1968. 176 p.
4. [Eglit M.E. Lectures on Basic of Mechanics of Continuous Medium. Moscow: Moscow Univ. Publ., 2008. 318 p.]. Egmit M.E. Lecchii po osnovam mexaniki splochnoi sredy. M.: Izdat. Mosk. Univ., 2008. 318 s.
5. [Dubrovskiy I.M., Egorov B.V., Ryabochapka K.P. Handbook on Physics. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 558 p.]. Dubrovskii I.M., Egorov B.V., Ryabochapka K.P. Spravochnik po fizike. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 558 p.
6. [Howell B.P., Bally G.J. A Free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of elastic-plastic solids. J. of Comput. Phys. 2002. Vol. 175. PP. 128...167].
7. [Verney D. Evaluation of elastic limit for copper and uranium with the help of experiments of «slow» compression. Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures. Symposium H.D.P. New York: Gordon and Breach, 1968. P. 293].
8. [Grigoriev V.G., Dunin S.Z., Surkov V.V. Slam of spherical pore in viscoplastic material // News of AS of USSR. Mech. of Solids. 1981. No. 1. PP. 199...201]. Grigoriev V.G., Dunin S.Z., Surkov V.V. Zahlopyvanie sfericheskoi pory v viazkoplasticheskom material // Izv. AN SSSR. Mex. tverdogo tela. 1981. № 1. PP. 199...201.
9. [Golubev V.K. About expansion of pores in plastic metals under spallations // Appl. Mech. Techn. Phys. 1983. No. 6. PP. 159...165]. Golubev V.K. O raschirenii por v plasticheskikh metallax pri otkolax. Prikl. mex. i texn. fiz. 1983. № 6. PP. 159...165.
10. [Kiselev A.B., Yumashev M.V. Numerical investigation impact expression of micro pore in thermoelastoviscoplastic material. Moscow Univ. Mech. Bulletin. 1992. № 1. PP. 78...83]. Kiselev A.B. Yumashev M.V. Chislennoe issledovanie udarnogo sgiatii micropory v termouprugoviazkoplasticheskom materiale // Vestn. Mosk. Univ. Matem. Mexan. 1992. № 1. PP. 78...83.
11. Kobylkin I.F., Selivanov V.V. Soloviev V.S., Sysoev N.N. Shock and Detonation Waves. Methods of Investigations. 2<sup>nd</sup> publ. Moscow: 2004. 256 p.]. Kobylkin I.F., Selivanov V.V., Soloviev V.S., Sysoev N.N. Udarnye i detonacionnyye volny. Metody issledovaniy. 2-oe izd. M.: Fizmatlit, 2004. 256 p.
12. [Strength, Destruction and Dissipative Losses under Intensive Impact and Wave Loading: Coll. of scientific papers. Adds. by A.A. Sadovoi, S.V. Mikchailov. Sarov: Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics, 2009. 420 p.]. Prochnost, razruchenie i dissipativnyye poteri pri intensivnykh udarno-volnovykh nagruzkax: Sb. nauchnykh statei. Pod red. A.A. Sadovogo, S.V. Michailova. Sarov: FGUP RFYC-VNIIEF, 2009. 420 p.
13. Danilenko V.V. Explosion: Physics, Engineering, Technology. Moscow: Energoatomizdat, 2010. 784 p.]. Danilenko V.V. Vzryv: fizika, tehnika, tehnologii. M.: Energoatomizdat, 2010. 784 p.

### References

1. Kiselev A.B. Analytical solutions for problems of adiabatic compression of thick-walled spherical and cylindrical shells from incompressible viscoplastic material. J. of Appl. Math. and Mech. 2012. Vol. 76. №. 4. PP. 675...679]. Kiselev A.B. Analiticheskie resheniya zadach ob adiabaticheskom sgiatii tolstostennykh sfericheskikh i cylindricheskikh obolochek iz nesgimaemogo viazkoplasticheskogo materiala. Prikl. Matem. i Mech. 2012. T. 76, vyp. 4. PP. 675...679.
2. [Kiselev A.B. To investigation of process of no stationary extension of thick-walled spherical and cylindrical viscoplastic shells. Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2012. №. 6. PP. 20...25]. Kiselev A.B. K issledovaniyu

### Сведения об авторе

Киселев Алексей Борисович  
 Доктор физ.-мат. наук, профессор,  
 Механико-математический факультет Московского  
 государственного университета имени М.В. Ломоносова  
 119992, Москва Российская Федерация  
 Ленинские горы, 1, Главное здание МГУ  
 E-mail: akis2006@yandex.ru

### Information about author

Kiselev Alexey B.  
 Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor  
 Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow  
 M.V. Lomonosov State University  
 119992, Moscow, Russian Federation,  
 Leninskie Gory, 1, Main Building of MSU  
 E-mail: akis2006@yandex.ru