МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

МИХОВИЧ АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

ФУНКТОР СХЕМАТИЗАЦИИ В РАЗМЕРНОСТИ ДВА И АСФЕРИЧНОСТЬ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научные руководители: **Мищенко Александр Сергеевич**
доктор физ-мат. наук, профессор
Мануйлов Владимир Маркович
доктор физ-мат. наук, доцент

Официальные оппоненты: **Янчевский Вячеслав Иванович**
доктор физико-математических наук
академик НАН Беларуси,
заведующий отделом алгебры
института математики НАН Беларуси
Каледин Дмитрий Борисович
доктор физ-мат. наук, профессор РАН,
в.н.с. отдела алгебраической геометрии
МИАН им. В.А. Стеклова
Романовский Николай Семенович
доктор физ-мат. наук, профессор
г.н.с института математики
им. С.Л. Соболева РАН, Новосибирск

Защита диссертации состоится "24" мая 2019 года в 15.00 на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14.08. E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте ИАС "ИСТИНА": https://www.istina.msu.ru/dissertations/182730881

Автореферат разослан "24" апреля 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.17
член корреспондент РАН А.И. Шафаревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задача изучения подкомплексов асферических двумерных CW–комплексов была впервые поставлена Д.Г.К. Уайтхедом[1] в 1941 году в связи с вопросом об асферичности дополнения к узлу в трехмерной сфере. Несмотря на усилия нескольких поколений математиков, данный вопрос остается открытым и по сей день, обзор имеющихся результатов содержится в статье В. Боглей[2]. Одним из первых примеров асферических 2–комплексов являются CW–комплексы, построенные по копредставлениям дискретных групп с одним соотношением, у которых соотношение r не является степенью ($r \neq s^n, n > 1$). Ключом к пониманию феномена асферичности является G–модульная структура модуля соотношений копредставления группы. Несмотря на простоту структуры модуля соотношений копредставлений групп с одним соотношений (ввиду теоремы Линдона "о тождествах" строение таких модулей соотношений полностью описано), нельзя сказать, что глубинная природа данного феномена понятна до конца. По аналогии с дискретными копредставлениями в 1962 году Ж.-П. Серр[3] на семинаре Бурбаки сформулировал Вопрос (10.2) о структуре модуля соотношений про–p–групп с одним соотношением, который мы рассматриваем с позиции концепции проунипотентных гомотопических типов в данной работе.

Возвращаясь к вопросу Уайтхеда, напомним, что В. Боглей и М.Дайер[4] получили теоретико-групповую редукцию, позволяющую вместо двумерных комплексов и их подкомплексов рассматривать асферические копредставления и подкопредставления дискретных групп. Обзор В. Боглей[5] содержит библиографию, в которой описываются раз-

[1]Whitehead J. H. C. On Adding Relations to Homotopy Groups. Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 42, No. 2 (Apr. 1941). pp. 409-428

[2]Bogley W. A. Whitehead's asphericity question. In: Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory. C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski editors. London Math. Soc. Lecture Note Series 197. Cambridge University Press. 1993. 309–334.

[3]Серр Ж.-П. Структура некоторых про–p–групп. Собрание сочинений. Т.3. М:. МЦНМО. 2007.

[4]Bogley W. A., Dyer M. N. A group-theoretic reduction of J. H. C. Whitehead's asphericity question. in: Groups-Korea 94. Walter de Gruyter. 1995. 15–24.

[5]там же

личные классы асферических копредставлений, а также достаточные условия, обеспечивающие асферичность их подкопредставлений. Чуть более общие по сравнению с асферическими классы дискретных, а также про–p копредставлений, рассматривались в работах И. Чизвелла, Д. Коллинза, Й. Хьюбшманна [6] и О.В. Мельникова[7], где авторы изучали вопросы о строении комбинаторно-асферических дискретных копредставлений и, соответственно, "асферических" про–p–копредставлений. Несмотря на множество структурных результатов, именно проблема доказательства принадлежности ряда ключевых классов копредставлений к "асферическим" представляется наиболее сложной (например подкопредставлений асферических копредставлений в дискретном случае и про–p–копредставлений про–p–групп с одним соотношением) .

Определенный в диссертации класс квазирациональных копредставлений (QR–копредставлений) не только включает в себя асферические копредставления и их подкопредставления в дискретном случае, но и про–p–копредставления про–p–групп с одним соотношением в про–p–случае. Мы показываем, что QR–копредставления удовлетворяют ожиданиям, высказанным О.В. Мельниковым в виде предположения, о существовании хорошего класса копредставлений ("оболочки"), содержащего асферические копредставления. Работа с копредставлениями в рамках данного класса позволяет избежать указанных выше недостатков и унифицированно с помощью техники групповых схем исследовать их структуру.

Существенный сегмент работы состоит в разработке гомотопического арсенала для изучения QR–копредставлений. Наш подход лежит в русле анонсированной Гротендиком[8] концепции схемных гомотопических типов (идея которой состоит в замене симплициальных групп на симплициальные аффинные групповые схемы), различные варианты которой реализованы в работах Б. Тоэна[9], Д. Придхэма[10,11] и Л. Кацар-

[6]Chiswell I., Collins D.J., Huebschmann J. Aspherical group presentations. Math.Z. 178. 1981. 1–36.

[7]Мельников О. В. Асферические про–p–группы. Мат.сборник. Том 193. 11. 2002.

[8]Grothendieck A. Pursuing stacks. 1983. https://ncatlab.org/nlab/show/Pursuing+Stacks

[9]Toën B. Affine stacks (Champs affines). https://arxiv.org/abs/ math/0012219

[10]Pridham J. P. Pro-algebraic homotopy types. Proc. London Math. Soc. 97(2). 2008. 273–338.

[11]Pridham J. P. Galois actions on homotopy groups. Geom. Topol. 15:1. 2011. 501-607.

кова, Т. Пантева, Б. Тоэна[12]. В нашем частном случае копредставлений групп мы используем покомпонентное проунипотентное пополнение свободной 2–редуцированной симплициальной группы . Общая же конструкция схемного проунипотентного гомотопического типа пары (X, k) (где X - связное симплициальное множество, k - поле) – это симплициальная проунипотентная группа $(GX)^{\wedge}_{w}$, где G – это функтор Кана, а $(GX)^{\wedge}_{w}$ – покомпонентное (непрерывное) проунипотентное пополнение свободной (в нашем случае 2–редуцированной) симплициальной группы GX. Данная концепция позволяет не только по-новому смотреть на старые проблемы 2–мерной комбинаторной теории гомотопий, но и с помощью конструкции непрерывного проунипотентного пополнения привлекать результаты о проунипотентных группах над полем характеристики ноль для исследования копредставлений про–p–групп. Для целостности картины напомним, что применение функтора Кана к связному симплициальному множеству, вырожденному в размерностях больших двух, приводит к свободной симплициальной группе, вырожденной в размерностях, больших единицы (функтор Кана G сдвигает размерность гомотопических групп $\pi_{n-1}(GX) \cong \pi_n(X)$). Теорема Кана о существовании CW–базиса в свободной симплициальной группе позволяет в полученной вырожденной симплициальной группе выбрать CW–базис $X \cup Y$ вида:

$$\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} F(X \cup Y) \; \substack{\xleftarrow{s_0}\\ \xrightarrow{d_0}\\ \xrightarrow{d_1}} \; F(X)\,, \tag{1}$$

где d_0, d_1, s_0 на $x \in X, y \in Y, r_y \in F(X)$ определены по формулам: $d_1(x) = x, d_1(y) = r_y$, $d_0(x) = x, d_0(y) = 1$, $s_0(x) = x$. Соответствующая 2–редуцированная симплициальная группа

$$F(X \cup Y) \; \substack{\xleftarrow{s_0}\\ \xrightarrow{d_0}\\ \xrightarrow{d_1}} \; F(X) \tag{2}$$

является стандартным объектом изучения в комбинаторной теории

[12]Katzarkov L. Pantev T. Toën B. Algebraic and topological aspects of the schematization functor. Compositio Math. 145. 2009. 633–686.

групп. Действительно, полагая $R = d_1(Kerd_0)$, получаем хорошо знакомое копредставление (4) группы $F(X)/R$ (ниже по тексту). Соответствующий редуцированный схемный проунипотентный гомотопический 2–тип теперь можно построить с помощью покомпонентного проунипотентного пополнения

$$F(X \cup Y)^{\wedge}_{w} \underset{\underset{d_1}{\longrightarrow}}{\overset{\overset{s_0}{\longleftarrow}}{\xrightarrow{d_0}}} F(X)^{\wedge}_{w} \tag{3}$$

Далее мы рассматриваем только копредставления конечного типа, то есть $|X| < \infty, |Y| < \infty$. В этом случае непрерывное проунипотентное пополнение $F(X)^{\wedge}_{w}$ совпадает с так называемой свободной проунипотентной группой $F_u(X)$, детально описанной например у А. Везанни[13]. Тогда $R_u = d_1(ker(d_0))$ – это нормальное замыкание Зарисского определяющих соотношений для проунипотентного копредставления проунипотентной группы $G_u = F_u(X)/R_u$.

Симплициальное тождество $d_0 s_0 = id_{F_u(X)}$ (сохраняя обозначения) влечет, что, как и в дискретном случае, для соответствующего проунипотентного копредставления имеет место разложение в полупрямое произведение $F_u(X \cup Y) \cong Kerd_0 \leftthreetimes s_0 F_u(X)$ и можно собрать необходимую гомотопическую информацию, изучая пару $Kerd_0 \xrightarrow{d_1} F_u(X)$ с действием $F_u(X)$ через s_0 сопряжением на $Kerd_0$. Тройка $(Kerd_0, F_u(X), d_1)$ это частный пример проунипотентного предскрещенного модуля. По аналогии с теорией, развитой для дискретных копредставлений Р. Брауном, Й. Хьюбшманном[14] и Т. Портером [15] в про-$\mathcal{C}$-случае, в диссертации определяется категория проунипотентных скрещенных модулей.

Скрещенный модуль копредставления играет центральную роль двумерной теории гомотопий. Одно из его эквивалентных определений в

---

[13]Vezzani A. The pro-unipotent completion. http://users.mat.unimi.it/users/vezzani/Files/Research/prounipotent.pdf

[14]Brown R. Huebschmann J.Identities among relations. Low-dimensional topology, London Math. Soc. Lecture Notes Series. 48. 1982. 153–202.

[15]Porter T. Profinite Algebraic Homotopy (2009). http://ncatlab.org/timporter/files/ProfAlgHomotopy.pdf

обозначениях (1), (2) – это тройка

$$(\frac{Kerd_0}{[Kerd_0, Kerd_1]}, F(X), \overline{d}_1) = (C, F, \overline{d}_1)$$

с действием $F(X)$ на $\frac{Kerd_0}{[Kerd_0,Kerd_1]}$, которое получается из действия $F(X)$ сопряжением на $Kerd_0$. Итак, это диаграмма следующего вида

$$\frac{Kerd_0}{[Kerd_0, Kerd_1]} \xrightarrow{\overline{d}_1} F(X).$$

Хорошо известно, что $Ker\overline{d}_1 \cong \pi_2$, где π_2 – это вторая гомотопическая группа копредставления в классическом смысле. В диссертации введены и изучены проунипотентные аналоги (пред)скрещенных модулей копредставлений, доказаны необходимые для приложений их свойства.

Модулем соотношений симплициального копредставления (1) (которое, как мы уже отмечали, равносильно (2), (4)) называется абелева группа $R/[R, R]$ с G–действием, индуцированным действием свободной группы $F = F(X)$ сопряжением. Важность этого объекта обусловлена, в частности, следующим наблюдением, поскольку $R = im(d_1)$ - свободная группа (как подгруппа свободной), то d_1 расщепляется, а так как π_2 центральна в C, то, как хорошо объяснено в монографии Т. Портера[16], точна последовательность абелианизации

$$0 \to \pi_2 \to \overline{C} \to \overline{R} \to 0,$$

где $\overline{C}$ и $\overline{R}$ обозначены абелианизации C и R соответственно. Более того, имеется изоморфизм $\mathbb{Z}G$–модулей $\overline{C} \cong \mathbb{Z}G^{|Y|}$, а следовательно изучение π_2 сводится к изучению модульной структуры $\overline{R}$.

Для того, чтобы методы "схематизации" стали эффективными, необходимо ограничить класс рассматриваемых копредставлений. Таким классом являются введенные в диссертации **квазирациональные копредставления**. Квазирациональные копредставления – это те копредставления, у которых отсутствует p–кручение в коинвариантах моду-

[16]Porter T. Crossed Menagerie (2011). https://ncatlab.org/timporter/files/menagerie10.pdf

ля соотношений по действию открытых нормальных подгрупп индекса равного некоторой степени простого числа p. Это условие используется для установления связи между модулем соотношений исходного (про–p) копредставления с соответствующим проунипотентным модулем соотношений. Такая связь в диссертации реализована Теоремой 2, которая является важным техническим результатом работы. Полученная в Теореме 2 диаграмма абелевых проунипотентных групп позволяет связать теорию квазирациональных копредставлений с теорией проунипотентных групп в характеристике ноль. Если же имеется вложение про–p–группы с одним соотношением в свое непрерывное проунипотентное пополнение $G \hookrightarrow G_u^{\wedge}(\mathbb{Q}_p)$, то мы показываем в Теореме 4, что $cd(G) = 2$ и оказываемся в состоянии определить ряд достаточных условий на фильтрации, чтобы обеспечить такое вложение. Это устанавливает связь нашей работы с уже известными результататми, например Д.Лабюта[17], Н.С. Романовского[18], В. Цветкова[19] и Д. Гильденхьюза, С.Иванова, О. Харлампович[20] и другими.

Часть работы занимает модификация результатов Люботского и Мэджида о когомологиях и копредставлениях проунипотентных групп на случай произвольного поля характеристики ноль. В частности, в Теореме 3 впервые получено описание модулей соотношений проунипотентных групп с одним соотношением в случае произвольного поля, которое вложимо в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Цель работы.

Цель настоящей работы состоит в изучении класса квазирациональных копредставлений с помощью техники проунипотентных пополнений, теории представлений и гомологической алгебры.

Положения выносимые на защиту

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

[17] Labute J. Algèbres de Lie et pro–p–groupes définis par une seule relation. Inventiones mathematicae. Volume 4. Issue 2. 1967. 142–158.

[18] Romanovskii N. On pro–p–groups with a single defining relator. Israel Journal of Mathematics. Volume 78. Issue 1.1992. 65–73.

[19] Цветков В., М. О про–p–группах с одним соотношением. Мат.заметки. 37:4. 1985. 491–496.

[20] Gildenhuys D. Ivanov S. Kharlampovich O. On a family of one-relator pro–p–groups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. 124. 1994. 1199–1207.

- В классе квазирациональных копредставлений пермутационность модуля соотношений обобщенно эквивалентна пермутационности его фактора по модулю простого числа. Про–p–группы с одним соотношением и подкопредставления дискретных асферических копредставлений принадлежат классу квазирациональных копредставлений. Квазирациональность допускает гомологическое описание, таким образом это свойство самой группы, а не конкретного (про–p) копредставления.

- Для модулей соотношений проунипотентных групп с одним соотношением над полями нулевой характеристики имеет место аналог теоремы Линдона "о тождествах".

- Если про–p–группа с одним соотношением вкладывается в свое непрерывное проунипотентное пополнение, то ее когомологическая размерность равна двум.

Основные методы исследования

В работе применяются методы гомотопической и гомологической алгебры (свободные симплициальные резольвенты, скрещенные модули, лемма Брауна-Лодэя, проконечная теория гомотопий, когомологии и гомологии групп), алгебраической геометрии (коммутативные алгебры Хопфа, аффинные групповые схемы, проунипотентные группы, когомологии аффинных групп), теории проконечных групп (копредставления и когомологии про–p–групп), теория представлений (комодули над алгебрами Хопфа, топологические модули над полными линейнокомпактными алгебрами Хопфа, рациональные и модулярные представления конечных p–групп, двойственность (между дискретными и линейнокомпактными пространствами).

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к двумерной теории гомотопий и могут применяться для изучения копредставлений дикретных групп и про–p–копредставлений про–p–групп, к исследованию феномена асферичности, построению новых инвариантов, имеющих приложение в некоммутативной геометрии.

Аппробация работы

- A. Mikhovich “Quasirational relation modules and p-adic Malcev completions”. На международной конференции “2014 International Conference on Topology and its Applications” (July 3-7, 2014, Nafpaktos, Greece).

- A. Mikhovich “Pro-algebraic crossed modules of quasirational presentations”. На международной конференции “Opening Perspectives in Algebra, Representations and Topology (OP-ART)”, May 25-29, 2015, Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Spain.

- Михович А.М. “Функтор схематизации и квазирациональность” на семинаре “Некоммутативная геометрия и топология” механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. А.С. Мищенко (2016 год), 29.09.2016г., 06.10.2016г.

- A. Mikhovich “Schematization, QR-presentations and Conjuring(s)” на международной конференции “Knots in Hellas 2016. International Conference on Knots, Low-Dimensional Topology and Applications”, July 17-23, 2016, International Olympic Academy, Ancient Olympia, Greece.

- Михович А.М. “Схематизация копредставлений и полиномиальные тождества” на семинаре “Кольца, модули и матрицы” кафедры алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 21.11.2016 г.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, включающего в себя 50 наименований. Общий объем диссертации – 70 страниц.

Публикации

По теме диссертации опубликовано шесть печатных работ. Из которых одна в журнале из списка ВАК, две индексированы Scopus и/или

Web of Science, еще две приняты в печать в изданиях из базы данных Scopus и Web of Science.

Краткое содержание работы

Во введении дается литературный обзор, обосновывается актуальность работы, описывается ее структура и дается краткое содержание диссертации. Приводятся основные определения и результаты, выносимые на защиту.

В первой главе вводится класс квазирациональных копредставлений (параграф 1.1), доказывается, что квазирациональные копредставления удовлетворяют ожиданиям О.В. Мельникова (параграф 1.2). Во второй главе определяются и затем доказываются основные свойства проунипотентных (пред)скрещенных модулей (параграф 2.1), а также (параграф 2.2), где доказывается технически важная Теорема 2 и результаты о про–p–группах с одним соотношением. Раздел 3 диссертации посвящен проунипотентным группам над полями нулевой характеристики. Так, в разделе (3.1) доказываются необходимые результаты о когомологиях проунипотентных групп, раздел (3.2) связан с копредставлениям проунипотентных групп в нулевой характеристике, "теорема о тождествах для про–p–групп" доказывается в последнем - разделе (3.3) работы.

Копредставление конечного типа дискретной группы G - это точная последовательность

$$1 \to R \to F \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{4}$$

в которой $F = F(X)$ есть свободная группа с конечным множеством образующих X, а R - нормальная подгруппа в F, порожденная конечным числом определяющих соотношений $r \in R$. Про–p–группой называется группа, изоморфная проективному пределу конечных p–групп. Это топологическая группа (с топологией проективного предела), которая является компактной вполне несвязной группой. Для таких групп имеется представленная в монографиях Х. Коха[21] и Л. Рибеса, П. Залесского[22] теория копредставлений во многом аналогичная комбинатор-

[21]Кох Х. Теория Галуа p–расширений. М. Мир. 1973.

[22]L. Ribes P. Zalesskii Profinite Groups. A Series of Modern Surveys in Math. Springer. vol. 40. 2000.

ной теории дискретных групп. Пусть X - проконечное топологическое пространство, тогда в категории про–p–групп имеется свободная про–p–группа $(F(X), i : X \hookrightarrow F(X))$, обладающая свойствами свободного объекта. А именно, для любого непрерывного гомоморфизма $\phi : X \to G$ в про–p–группу G такого, что образ X порождает G, существует единственный непрерывный гомоморфизм про–p–групп $\widetilde{\phi} : F(X) \to G$, делающий соответствующую диаграмму коммутативной. Если X – конечное множество, то свободная про–p–группа может быть построена конструктивно, как $F(X) = \varprojlim_{U \triangleleft \Phi(X)} \Phi(X)/U$, где $\mid \Phi(X)/U \mid = p^n$ – это про–p–пополнение дискретной свободной группы $\Phi(X)$ (порожденной образующими из X) в про–p–топологии на $\Phi(X)$, в которой базис системы окрестностей единицы составляют нормальные подгруппы конечного индекса равного некоторой степени простого числа p. По аналогии с копредставлением конечного типа дискретной группы, будем говорить, что про–p–группа G задана про–p–копредставлением конечного типа, если группа G включена в точную последовательность (4), в которой F - свободная про–p–группа с конечным числом образующих (то есть X - конечное множество), а R - замкнутая нормальная подгруппа, топологически нормально порожденная конечным числом элементов в F. При этом в теории про–p–групп принято рассматривать про–p–копредставления, у которых число образующих в F совпадает с числом образующих в G.

Пусть $C = \varprojlim C_\alpha$ - проконечное кольцо (C_α - конечные кольца), тогда обозначим через CG - пополненную групповую алгебру про–p–группы G. Под пополненной групповой алгеброй мы понимаем топологическую алгебру $CG = \varprojlim CG_\mu$, где $G = \varprojlim G_\mu$ - разложение про–p–группы G в проективный предел конечных p–групп G_μ.

Для дискретных групп, p будет пробегать все простые числа, для про–p–групп p фиксировано. Пусть G - (про–p)группа с (про–p)копредставлением конечного типа (4), $\overline{R} = R/[R, R]$ соответствующий G-*модуль соотношений*, где $[R, R]$ – это коммутант, а действие G индуцировано сопряжением F на R. Для каждого простого числа $p \geq 2$ обозначим через Δ_p - аугментационный идеал кольца $\mathbb{F}_pG$, а через $\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}$ его p-фильтрацию Цассенхауза в F с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_p$, которая определена по правилу $\mathcal{M}_n = \{f \in F \mid f - 1 \in \Delta_p^n\}$. В про–$p$–случае под Δ^n мы понимаем замыкание модуля порожденного n–ми степенями элементов из $\Delta = \Delta_p$, а в дискретном случае - это n–ая степень идеала Δ_p. Свойства этой фильтрации в про–p–случае изложены в монографии Х. Коха[23], в дискретном случае свойства фильтрации Цассенхауза аналогичны, разница состоит в использовании обычного группового кольца вместо пополненного.

Ключевое понятие, введенное в диссертации, – это понятие квазирационального копредставления. Пусть задано некоторое (про–p) копредставление конечного типа (4).

Определение 1. *[2] Копредставление* (4) *будем называть* ***квазирациональным****, если для каждого $n > 0$ и для каждого простого $p \geq 2$ $F/R\mathcal{M}_n$–модуль $R/[R, R\mathcal{M}_n]$ не имеет p–кручения (p фиксировано для про–p–групп и пробегает все простые числа $p \geq 2$ и соответствующие p–фильтрации Цассенхауза в дискретном случае). Модули соотношений таких копредставлений будем называть* ***квазирациональными модулями соотношений****.*

В параграфе 1.1 диссертации показано, что данное определение эквивалентно отсутствию кручения в абелевой (про–p)группе $R/[R, F]$, что данное свойство не зависит от выбора копредставления группы, а также, что про–p–копредставления про–p–групп с одним соотношением являются квазирациональными. Также приводится доказательство квазирациональности асферических дискретных копредставлений и их подкопредставлений.

Свободным $\mathbb{F}_p$–модулем, где $\mathbb{F}_p$ - поле из p элементов, над пунктированным проконечным пространством (T, t_0) называется проконечный $\mathbb{F}_p$–модуль $\mathbb{F}_p(T, t_0)$ такой, что существует вложение $\omega : T \to \mathbb{F}_p(T, t_0), \omega(t_0) = 0$, обладающее следующим универсальным свойством:

(*) для любого непрерывного вложения $\gamma : T \to B$ такого, что $\gamma(t_0) = 0$, где B - проконечный $\mathbb{F}_p$–модуль, существует единственный

[23]там же

гомоморфизм проконечных $\mathbb{F}_p$–модулей $\alpha : \mathbb{F}_p(T, t_0) \to B$, удовлетворяющий равенству $\gamma = \alpha\omega$.

В дальнейшем мы работаем со свободными $\mathbb{F}_p$–модулями $\mathbb{F}_p(S)$ над непунктированными проконечными пространствами S, которые возникают как проективные пределы конечномерных $\mathbb{F}_p(S_\alpha)$, но данная конструкция является частным случаем предыдущего определения, поскольку достаточно взять пунктированное пространство $T = S \cup \{t_0\}$, где точка t_0 изолирована в пространстве T.

Пусть теперь G - про–p–группа, тогда будем говорить, что (T, t_0) это G–пространство, если G действует непрерывно на проконечном пространстве (T, t_0) гомеоморфизмами, оставляющими на месте отмеченную точку t_0. Нам потребуется понятие введенное О. Мельниковым[24]

Определение 2. *Модуль $\mathbb{F}_p(T, t_0)$, где (T, t_0) – какое-либо G–пространство, называется пермутационным G–модулем, если действие каждого элемента $g \in G$ является автоморфизмом этого модуля, продолжающим по универсальному свойству (*) непрерывное отображение $t \mapsto g \cdot t$ из T в $T \subset \mathbb{F}_p(T, t_0)$.*

Копредставления дискретных групп с одним соотношением ввиду теоремы Линдона “о тождествах” - базовый пример CA–асферческих копредставлений. Параллельно работе И. Чизвелла, Д. Коллинза, Й.Хьюбшманна[25] О.В.Мельников[26] ввел в рассмотрение и изучил с прицелом на про–p–группы с одним соотношением копредставления про–p–групп, у которых $\mathbb{F}_p$–модуль соотношений является пермутационным.

Определение 3. *$\mathbb{F}_pG$–модуль соотношений $\overline{R}/p\overline{R}$ копредставления (4) называется $\mathbb{F}_p$–пермутационным, если имеется изоморфизм пунктированных проконечных G–модулей $\overline{R}/p\overline{R} = R/R^p[R, R] \cong \mathbb{F}_p(T, t_0)$, где (T, t_0) - некоторое проконечное G–пространство с отмеченной точкой.*

[24] там же
[25] там же
[26] там же

В полной аналогии с понятием $\mathbb{F}_p$-пермутационного модуля соотношений $\overline{R}/p\overline{R}$ введем понятие $\mathbb{Z}_p$–пермутационного модуля соотношений $\overline{R}$.

Определение 4. *$\mathbb{Z}_pG$–модуль соотношений $\overline{R}$ копредставления* (4) *называется $\mathbb{Z}_p$–пермутационным, если имеется изоморфизм пунктированных проконечных G–модулей $\overline{R} = R/[R,R] \cong \mathbb{Z}_p(T, t_0)$, где (T, t_0)-некоторое проконечное G–пространство с отмеченной точкой.*

Пусть G - дискретная группа, обозначим через $G_p^{\wedge}$ ее про–p–пополнение, которое по определению задается, как $G_p^{\wedge} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$, где $\mathcal{N}$ – это система нормальных делителей конечного индекса равного степени p, то есть $\mathcal{N} = \{N \trianglelefteq G, \mid G/N \mid = p^n, n \in \mathbb{N}\}$. Если G – про–p–группа, то считаем, что $G_p^{\wedge} = G$. Каждому (про–p) модулю соотношений, возникающему из (4), поставим в соответствие две проективные системы:

$$\mathcal{T}_n = ((\frac{R}{[R, R\mathcal{M}_n]})_p^{\wedge}, \phi_n^{n+1}), \mathcal{T}_n^p = (\frac{R}{R^p[R, R\mathcal{M}_n]}, \widetilde{\phi}_n^{n+1}),$$

где $n \in \mathbb{N}$, с $G_p^{\wedge}$–модульными гомоморфизмами

$$\phi_n^{n+1} : (R/[R, R\mathcal{M}_{n+1}])_p^{\wedge} \twoheadrightarrow (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^{\wedge},$$

$$\widetilde{\phi}_n^{n+1} : R/R^p[R, R\mathcal{M}_{n+1}] \twoheadrightarrow R/R^p[R, R\mathcal{M}_n],$$

индуцированными вложениями $[R, R\mathcal{M}_{n+1}] \subseteq [R, R\mathcal{M}_n]$.

Пусть ζ - примитивный корень из единицы порядка, равного степени p и H - некоторая подгруппа в конечной p–группе G. Предположим, что H действует слева на $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ посредством гомоморфизма в группу корней из единицы $\xi : H \to \langle\zeta\rangle$, мы можем продолжить это действие по линейности до левого действия $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$ на $\mathbb{Z}_p[\zeta]$. Разумеется, что H действует справа обычным умножением на G, а это действие можно продолжить по линейности до действия $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$ на $\mathbb{Z}_p[\zeta]G$. *Главным обобщенным пермутационным G–модулем*

$$\mathbb{Z}_p[\zeta] \uparrow_H^G := \mathbb{Z}_p[\zeta]G \otimes_{\mathbb{Z}_p[\zeta]H} \mathbb{Z}_p[\zeta]$$

называется левый $\mathbb{Z}_p[\zeta]G$–модуль, индуцированный с $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$–модуля $\mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Обозначим $\pi = 1-\zeta$, тогда π порождает (π) - простой идеал в $\mathbb{Z}_p[\zeta]$, лежащий над $p\mathbb{Z}_p$ (то есть $(\pi)\cap\mathbb{Z}_p = (p) = p\mathbb{Z}_p$). Целое расширение $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ над $\mathbb{Z}_p$ вполне разветвлено с индексом ветвления $p-1$, а поэтому вложение $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta]$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}_p[\zeta]/\pi\mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Определение 5. *Пусть G - конечная p–группа, тогда будем говорить, что M - обобщенный пермутационный G–модуль, если:*

(i) M - свободный конечнопорожденный $\mathbb{Z}_p[\zeta]$–модуль;

(ii) $M \cong \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_p[\zeta]\uparrow_{H_i}^G$, то есть M изоморфен прямой сумме главных обобщенных пермутационных модулей.

Определение 6. *Пусть G - про–p–группа и фиксирован некоторый базис системы окрестностей единицы $\mathfrak{U}$ в G, состоящий из открытых нормальных делителей конечного индекса $U \lhd G$. Предположим, что задана $M = \{M_U\}_{U\in\mathfrak{U}}$ - некоторая проективная система, состоящая из $\mathbb{Z}_p$–проективных $\mathbb{Z}_p[G/U]$–модулей конечной $\mathbb{Z}_p$–размерности. Будем говорить, что M - это обобщенный пермутационный про–G–модуль, если для каждого $U \in \mathfrak{U}$ существует гомоморфизм $\xi_U : G/U \to \langle\zeta\rangle$, где ζ - примитивный корень p–й степени из единицы в $\mathbb{Z}_p$, что G/U–модуль M_U является обобщенным пермутационным G/U–модулем.*

В случае про–p–копредставлений (4) M_U будет возникать, как модуль коинвариантов $\overline{R}_{\mathcal{M}_n} = R/[R, R\mathcal{M}_n]$ модуля соотношений по действию $\mathcal{M}_n$. Если рассматриваемое копредставление дискретно, то M_U появятся, как $\overline{R}_{\mathcal{M}_n} = (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^{\wedge}$. Использование p–адического пополнения в дискретном случае позволяет исключить в M_U кручение взаимнопростое с p, а тогда квазирациональность влечет, что $\overline{R}_{\mathcal{M}_n} = (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^{\wedge}$ являются $\mathbb{Z}_p$–проективными $\mathbb{Z}_p[G/\mathcal{M}_n]$–модулями конечной $\mathbb{Z}_p$–размерности. Если соответствующие проективные системы $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n^p$ состоят, соответственно, из обобщенных пермутационных, пермутационных модулей, то мы будем говорить, что $\overline{R} = R/[R, R]$ это обобщенный пермутационный про–$\mathbb{Z}_p G_p^{\wedge}$–модуль, а $\overline{R}/p\overline{R} = R/R^p[R, R]$

это пермутационный про–$\mathbb{F}_pG_p^\wedge$–модуль. Свойства пермутационности и обобщенной пермутационности модуля соотношений про–p копредставления конечного типа (соответствующих проективных систем фактормодулей коинвариантов в случае дискретных копредставлений) не зависят от выбора базиса окрестностей единицы для про–p–топологии свободной (про–p) группы, состоящего из нормальных делителей индекса, равного степени p. Фильтрации Цассенхауза - лишь удобный выбор.

Обобщенный пермутационный модуль нельзя определить, как просто $\mathbb{F}_p$–пермутационный, поскольку из пермутационности модуля $R/R^p[R, R\mathcal{M}_n]$, вообще говоря, не следует отсутствие кручения в факторах коинвариантов $R/[R, R\mathcal{M}_n]$, требуемое в определении обобщенной пермутационности. Более того, конечная p–группа G может действовать на абелевой группе $M = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ при $k \geq 2$ нетривиально, поскольку например при $p > 2$ имеем $\mid Aut(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) \mid = (p-1)p^{k-1}$. Тогда M - главный (то есть порожденный, как модуль, одним элементом) неразложимый модуль, поскольку он изоморфен циклической группе, но он не только не $\mathbb{Z}_p$–пермутационный модуль, но и не может иметь пермутационной системы образующих, как абелевой группы, в то время как $M/pM = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ уже является тривиальным пермутационным $\mathbb{F}_pG$–модулем.

Изощренность ситуации состоит в том, что для модулей из проективной системы $\mathcal{T}_n$ введенное Определение 6 является избыточным. На самом деле, при $p > 2$ обобщенная пермутационность совпадает с обычной $\mathbb{Z}_p$–пермутационностью, а при $p = 2$ возникает лишь действие на $\mathbb{Z}_2$ "изменением ориентации", то есть с помощью автоморфизма аддитивной группы целых 2–адических чисел, переводящего ± 1 в ∓ 1. Действительно, в $\mathbb{Z}_p$ при $p > 2$ нет корней p–й степени из единицы, поскольку отображение $log(1+z) : 1+p\mathbb{Z}_p = U^{(1)} \to \mathfrak{p}^1 = p\mathbb{Z}_p$ устанавливает гомеоморфизм между мультипликативной группой главных единиц и аддитивной группой максимального идеала кольца $\mathbb{Z}_p$. Но поскольку в $p\mathbb{Z}_p$ нет кручения, то и нет корней из единицы в мультипликативной группе кольца $\mathbb{Z}_p$. При $p = 2$ имеется единственный - квадратный корень из единицы (равный -1). На самом деле, -1 является квадратным корнем из единицы в $\mathbb{Z}_2$. Остается проверить, что других корней из единицы в $\mathbb{Z}_2$ нет.

В этом случае имеем изоморфизм $1+2\mathbb{Z}_2 \cong (1+4\mathbb{Z}_2)\times\{\pm 1\}$ (логарифм сходится на $1+4\mathbb{Z}_2$ и задает гомеоморфизм $log(1+z): 1+4\mathbb{Z}_2 \to 4\mathbb{Z}_2$), а поэтому других корней из единицы нет.

Теорема 1. *Пусть (4) - QR–(про–p) копредставление, тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) $\mathcal{T}_n$ - обобщенный пермутационный про–$G_p^\wedge$–модуль;

б) $\mathcal{T}_n^p$ - пермутационный про–$G_p^\wedge$–модуль.

Следствие 1. *Класс квазирациональных про–p–копредставлений обладает следующими свойствами:*

1) асферические про–p–копредставления и копредставления про–p–групп с одним соотношением являются квазирациональными;

2) модуль соотношений $\overline{R} = R/[R,R]$ квазирационального копредставления является обобщенно пермутационным тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_p$–пермутационным является его $mod(p)$ фактор $R/R^p[R,R]$.

Не составляет трудности сформулировать и доказать аналог Следствия 1 для дискретных QR–копредставлений в терминах про-объектов. В этом случае условие 1) Следствия привлекательно конструировать используя CA–асферические копредставления и их подкопредставления.

В самом начале статьи О.В. Мельников[27] отмечает, что существует теория $\mathbb{Z}_p$–пермутационных модулей соотношений полностью параллельная теории асферических про–p–копредставлений (то есть когда модули соотношений являются $\mathbb{F}_p$–пермутационными). Также в личных беседах с автором еще в 1997 году он неоднократно высказывал неудовлетворенность отсутствием способов выявления асферичности копредставления в ряде ключевых ситуаций (например не получается выяснить всякая ли про–p–группа с одним соотношением является асферической). Мельников предполагал существование некоторого класса про–p–копредставлений (с содержательным аппаратом изучения и возможностью достаточно просто проверить принадлежность к этому классу) со следующими свойствами:

[27] там же

1) данный гипотетический класс содержит одновременно асферические про–p–копредставления и копредставления про–p–групп с одним соотношением;

2) в рамках данного гипотетического класса копредставлений возможна унификация концепций $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{F}_p$–пермутационности.

В диссертации и в работах автора [2]–[5] показана возможность исследования квазирациональных копредставлений с помощью перехода к p–адическим Мальцевским пополнениям (“схематизация”). Таким образом, Следствие 1 подтверждает правильность предположения, высказанного О.В. Мельниковым.

В параграфе 1.3 для формулировки Теоремы 2 необходимо следующее определение.

Группа $\mathbb{Q}_p$–точек любой аффинной групповой схемы G над $\mathbb{Q}_p$ имеет p–адическую топологию. На самом деле, П. Делинь и Дж.Милн [28] замечают, что G может быть представлена в виде проективного предела $G = \varprojlim G_\alpha$ сюръективной проективной системы линейных алгебраических групп. Каждая $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ имеет каноническую p–адическую топологию, индуцированную вложением $G_\alpha \hookrightarrow GL_n$. Определим топологию на $G(\mathbb{Q}_p)$ как топологию проективного предела $G(\mathbb{Q}_p) = \varprojlim G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Теперь мы можем сформулировать определение из работы Р. Хейна и М. Мацумото[29].

Определение 7. *Зафиксируем группу G с про–p–топологией. Определим непрерывное проунипотентное пополнение G как универсальную диаграмму, где ρ это непрерывный плотный по Зарисскому гомоморфизм G в группу $\mathbb{Q}_p$–точек проунипотентной аффинной группы $G^\wedge_w$*

$$\begin{tikzcd}
 & G^\wedge_w(\mathbb{Q}_p) \arrow[dd, "\tau"] \\
G \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\chi"'] & \\
 & H(\mathbb{Q}_p)
\end{tikzcd}$$

[28] Делинь П., Милн Дж. Категории Таннаки. Ходжевы циклы и мотивы. М. Мир. 1985, 94–201.

[29] Hain R. Matsumoto M. Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Compos. Math. 139(2). 2003. 119–167.

Мы требуем, чтобы для каждого непрерывного и плотного по Зарисскому гомоморфизма χ в группу рациональных точек проунипотентной группы H существовал единственный гомоморфизм проунипотентных групп τ, делающий диаграмму коммутативной.

Будем говорить, что задано конечное копредставление некоторой проунипотентной группы G_u, если G_u включена в следующую диаграмму свободных проунипотентных групп

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F_u(X \cup Y) \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & F_u(X) \arrow[l, shift right=5, "s_0"'] \arrow[r] & G_u \end{tikzcd} \tag{5}$$

в которой на рациональных точках выполнены тождества аналогичные дискретному и про-p-случаям (1) , а также $G_u \cong F_u(X)/d_1(Kerd_0)$, где $F_u(Z)$ - свободная проунипотентная группа на конечном множестве Z.

Обозначим алгебру Хопфа, представляющую G_u, через $\mathcal{O}(G_u)$, а двойственную ей полную линейнокомпактную алгебру Хопфа через $\mathcal{O}(G_u)^*$, тогда одним из ключевых результатов работы является следующая

Теорема 2. *Пусть задано конечное QR про–р–копредставление* (4), *тогда имеет место коммутативная диаграмма абелевых проунипотентных групп, в которой на $\mathbb{Q}_p$–точках верхняя строка гомоморфизм топологических G–модулей, нижняя - гомоморфизм $\mathcal{O}(G_u)^*$–модулей, а вертикальные стрелки - G–гомоморфизмы на плотных по Зарисскому подгруппах $\frac{kerd_0}{[kerd_0, kerd_1 kerd_0]}$ и $\overline{R}$ в $\overline{C_w^\wedge}(\mathbb{Q}_p)$ и $\overline{R_w^\wedge}(\mathbb{Q}_p)$ соответственно.*

$$\begin{tikzcd} \overline{C_w^\wedge} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\kappa"'] & \overline{R_w^\wedge} \arrow[d, "\tau"] \\ \overline{C_u} \arrow[r, "\mu"] & \overline{R_u} \end{tikzcd}$$

мы обозначили $\overline{C_w^\wedge}, \overline{C_u}, \overline{R_w^\wedge}, \overline{R_u}$ абелианизации соответствующих проунипотентных групп, $\overline{C_u}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{O}(G_u)^{*|Y|}$.

В параграфах 3.1, 3.2 диссертации мы приводим очень сжатое построение теории когомологий аффинных групп (и в частности проунипотентных групп), интерпретируя, когомологии как синтез взаимности

Фробениуса, тензорной индукции и теории инвариантов, а также основные концепции теории копредставлений проунипотентных групп. Доказательства рассуждений из [30,31] сохраняются, но мы приводим обобщенные доказательствами ключевых результатов, формулируя остальные результаты в необходимой общности.

В параграфе 3.2 доказывается, что проунипотентная группа с одним соотношением имеет когомологическую размерность равную 2. В разделе (3.3) доказаны две Теоремы. Одна, это Теорема, описывающая модули соотношений проунипотентных групп с одним соотношением, возникающих из копредставлений про–p–групп с одним соотношением, предъявляя осмысленный ответ на вопрос Ж.-П.Серра[32] об аналоге теоремы Линдона.

Теорема 3 (“о тождествах для про–p–групп”)**.** *Пусть G - про–p–группа с одним соотношением, заданная конечным правильным ($H^1(G,\mathbb{F}_p) = H^1(F,\mathbb{F}_p)$) копредставлением* (4) *в категории про–p–групп. Тогда имеет место изоморфизм топологических $\mathcal{O}(G_u)^*$–модулей $\overline{R_u}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{O}(G_u)^*$, где G_u - проунипотентная группа, которая получается замыканием Зарисского в $F_u(\mathbb{Q}_p)$ исходного про–p–копредставления, которую мы также всегда отождествляем с непрерывным $\mathbb{Q}_p$–проунипотентным пополнением G.*

Вторая теорема, предоставляет достаточное условие равенства 2 когомологической размерности про–p–группы с одним соотношением, дающее положительный ответ на вариацию вопроса Ж.-П. Серра[33]

Теорема 4. *Пусть G - конечнопорожденная про–p–группа с одним соотношением. Если естественный гомоморфизм $G \to G_u(\mathbb{Q}_p)$ про–p–группы G в $\mathbb{Q}_p$–точки своего непрерывного проунипотентного пополнения является мономорфизмом, то $cd(G) = 2$;*

---

[30] Lubotzky A. Magid A. Cohomology of unipotent and prounipotent groups. J.Algebra 74. 1982. 76–95.

[31] Lubotzky A. Magid A. Cohomology, Poincare series, and group algebras of prounipotent groups. Amer.J.Math. 107. 1985. 531–553.

[32] там же

[33] Серр Ж.-П. Структура некоторых про–p–групп. Собрание сочинений. Т.3. М:. МЦНМО. 2007 стр. 121, Позднейшие замечания, пункт 6.

В диссертации вводится понятие **проунипотентного действия**, которое состоит из про-p групп G_1 (обычно G_1 конечно-порождена) и G_2, мы требуем существование цепочки $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ - G_1–инвариантных нормальных подгрупп в G_2 с абелевыми градуированными факторами, такими, что $\cap N_i = 1$, N_i/N_{i+1} не имеют кручения, конечно порождены и индуцированное действие G_1 должно быть тривиальным на градуированных факторах N_i/N_{i+1}.

Мы будем говорить, что конечно-порожденная про–p–группа G является p–**регулярной**, если действие сопряжением G на самой себе является проунипотентным.

Следующее Предложение 1 дополняет ранее упомянутые теоретико-групповые результаты, где использовалось отсутствие делителей нуля в градуированных алгебрах, соответствующих фильтрациям определенного типа. Если конечно-порожденная про–p–группа G наделена центральной фильтрацией G_i с градуированными факторами без кручения, то G/G_i это нильпотентные про–p–группы без кручения, а следовательно G является p–регулярной.

Предложение 1. *Предположим, что про–p–группа G с одним определяющим соотношением является p–регулярной, то $cd(G) = 2$.*

Заключение

В диссертации введены и исследованы квазирациональные копредставления (про–p) групп, связанные с гипотезой Дж. Уайтхеда в 2–мерной теории гомотопий и вопросами Ж.-П. Серра о про–p–группах с одним соотношением, иначе говоря, из 2–мерной p–адической теории гомотопий. Получены следующие результаты:

- Доказано, что этот класс копредставлений соответствует ожиданиям О.В. Мельникова, высказанным в виде гипотезы.

- Описаны модули соотношений проунипотентных групп с одним соотношением над полями нулевой характеристики.

- Показано, что если про–p–группа с одним соотношением вкладывается в свое непрерывное проунипотентное пополнение, то ее когомологическая размерность равна двум, что дает положительный ответ на вопрос Ж.-П.Серра в немного уточненной форме.

Про–p–группы с одним соотношением $r \in R \subseteq F^p[F,F]$ вероятно содержат примеры нетривиальных делителей нуля в полных групповых кольцах про–p–групп без кручения [5, 1.5]. На самом деле, предположим, что существует $G_r = F/(r)_F$ про–p–группа с одним соотношением, которая не имеет кручения, но ее когомологическая размерность больше двух. Тогда $\overline{\frac{\partial r}{\partial x_i}} \in \mathbb{Z}_p G$ образы производных Фокса $\frac{\partial r}{\partial x_i} \in \mathbb{Z}_p F$ при гомоморфизме полных групповых колец $\mathbb{Z}_p F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p G$ являются делителями 0 в полной групповой алгебре $\mathbb{Z}_p G$. На самом деле, имеется точная последовательность $\mathbb{Z}_p G$–модулей $0 \to \pi_2 \to \mathbb{Z}_p G \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_p G^{|X|} \to IG \to 0$ Кроуэлла-Линдона, где IG это аугментационный идеал в $\mathbb{Z}_p G$ и $\pi_2 = ker\psi$, а ψ задан по правилу $\psi(\alpha) = (\alpha\overline{\frac{\partial r}{\partial x_1}}, .., \alpha\overline{\frac{\partial r}{\partial x_i}}, ..), i = 1.. \mid X \mid = dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p)$. Когомологическая размерность про–p–группы G равна 2 тогда и только тогда, когда $\pi_2 = 0$. Таким образом, предположение о том, что $cd(G) > 2$ для про–p–группы с одним соотношением эквивалентно тому, что для всех i образы производных Фокса $\overline{\frac{\partial r}{\partial x_i}} \in \mathbb{Z}_p G$ являются правыми делителями нуля нетривиальных элементов $\mathbb{Z}_p G$.

Теперь мы можем рассмотреть образы свободных дискретных подгрупп $\Phi \subset F$ в F относительно гомоморфизма π из (4). Ожидается, что обычные групповые кольца $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$ таких дискретных подгрупп $\Gamma \subset G$ также могут иметь делители 0, предположительно реализовывая контрпримеры к гипотезам Атьи, Новикова, Боста и т.д.

Квазирациональность провоцирует изучение представлений конечных p–групп над полем $\mathbb{Q}_p$. При этом, в отличие от классической теоремы Сигала [34] для рациональных представлений, над полем $\mathbb{Q}_2$ не для всех конечных 2–групп естественный гомоморфизм из кольца Бернсайда в кольцо виртуальных $\mathbb{Q}_2$–представлений является эпиморфизмом [35], а поэтому необходима теория колец Бернсайда для про–p–групп и изучение коядер соответствующих естественных гомоморфизмов в кольца виртуальных $\mathbb{Q}_p$–представлений (особенно важен случай $p = 2$).

[34] Т. том Дик, Группы преобразований и теория представлений, ИО НФМИ, 2000

[35] A. Mikhovich, Complete group rings as Hecke algebras, Topology and its Applications (to appear)

Благодарность Автор выражает глубокую признательность научным руководителям: профессору Александру Сергеевичу Мищенко и профессору Владимиру Марковичу Мануйлову за внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Также автор благодарен своим учителям: профессору Мельникову Олегу Владимировичу за перспективные постановки задач в комбинаторной теории про–p–групп, и профессору, академику НАН Беларуси Янчевскому Вячеславу Ивановичу за арсенал алгебраической геометрии.

Работы автора на тему диссертации

[1] Михович А.М. Гомотопии проконечных групп. arXiv:1205.4365. 1–41.

[2] Mikhovich A. Quasirational relation modules and p–adic Malcev completions. Topol. Appl. Volume 201. 86–91. (2016). http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.028

[3] Mikhovich A. Proalgebraic crossed modules of quasirational presentations. In: Herbera D., Pitsch W., Zarzuela S. (eds) Extended Abstracts Spring 2015. Trends in Mathematics, vol 5. 109–114. Birkhäuser. Cham. (2016). http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-45441-2_19

[4] Mikhovich A. Quasirationality and prounipotent crossed modules. Journal of Knot Theory and its Ramifications. (in press) arXiv:1701.04793

[5] Mikhovich A. Identity theorem for pro–p–groups. Chapter 18 in: Knots, Low-dimensional Topology and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (PROMS); C. Adams et all, Eds. (2019). http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-16031-9_18

[6] Михович А.М. Квазирациональность и асферические (про–p) копредставления. Мат. Заметки, 105:4, 553–563. (2019). http://dx.doi.org/10.4213/mzm11941