Метод замены переменной для стохастических уравнений типа Шредингера

В следующей теореме получено представление решения стохастического уравнения теплопроводности.

Теорема 1. *Пусть $C_0(t_1,t_2)$ - пространство непрерывных функций, обращающихся в ноль в точке t_1, со стандартной мерой Винера w_{t_1,t_2}. Тогда функция $\Psi_\omega(\cdot)(\cdot)$, определяемая равенством*

$$\Psi_\omega(t)(q)=\int_{C_0(0,t)} e^{b\int_0^t V(\tau,q+\xi(\tau))d\tau+c\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)}\varphi_0(q+\xi(t))w_{0,t}(d\xi),$$

является решением задачи Коши

$$d\Psi_\omega(t)(\cdot)=a(\Psi_\omega(t))''(\cdot)+bV(t,\cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot)+cR(\cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot)dB_\omega(t),\Psi_\omega(0)(\cdot)=\varphi_0(q),$$

причём a,b,c - положительные числовые параметры и $\forall q\in Q$ $R(q)>0$, функции $R(\cdot)$, $V(t,\cdot)$, φ_0 - вещественные и непрерывные, Q - конфигурационное пространство, на котором определена $\Psi_\omega(\cdot)(\cdot)$.

Метод замены переменной состоит в том, что функции, входящие в представление решения уравнения теплопроводности, аналитически продолжаются, после чего к полученному интегралу применяется формула замены переменной. Полученный интеграл по счетно-аддитивной мере будет давать представление решения стохастического уравнения Шредингера. Это следует из теоремы 1 в силу единственности аналитического продолжения.

Для вывода представления решения стохастического уравнения Шредингера используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\psi:[0,\infty)\to L_2(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения*

$$\psi(t)-\psi(0)=\int_0^t((\psi(\tau))''-iV\psi(\tau))d\tau,$$

причем для каждого $t\geqslant 0$ функция $x\mapsto\psi(t)(x)$ допускает аналитическое продолжение на область $\{z\in\mathbb{C}:z=\rho e^{-i\alpha},\alpha\in[0,\frac{\pi}{4}),\ \rho>0\}$, и продолжение по непрерывности на ее замыкание. Пусть функция $\varphi:[0,\infty)\to L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ — комплексификация пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) определяется так:

$$\varphi(t)(x)=\psi(t)(\sqrt{-i}x)\quad(\sqrt{-i}=e^{-i\frac{\pi}{4}})$$

Тогда функция φ является решением уравнения

$$i\varphi(t)-i\varphi(0)=\int_0^t(-(\varphi(\tau))''+V\varphi(\tau))d\tau,$$

Для решения уравнения Шрёдингера справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Ψ - решение следующей задачи Коши*

$$d\Psi_\omega(t)(q)=\left(i\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2}+\left(iV(q)-\frac{\lambda}{4}q^2\right)\right)\times$$
$$\times\Psi_\omega(t)(q)+\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t),\Psi\omega(0,\cdot)=\varphi_0(\cdot).\quad(1)$$

Тогда

$$\Psi(t,q_1)=\int\exp\left\{\int_0^t iV(q_1+\frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau+\int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1+\frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2d\tau\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1+\frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0(q_1+\frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))wf^{-1}(d\xi_1)\quad(2)$$

(в обозначениях (3)).

Метод замены переменной можно распространить на двумерный и бесконечномерный случай. Для краткости объясним это на примере детерминированных уравнений.

В двумерном случае рассмотрим уравнение типа Шредингера относительно функции ψ, определенной на отрезке $[0,T]$, и принимающей значения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

$$i\psi'(t)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi(t)-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\psi(t)+V(x_1,x_2)\psi(t)\quad(1)$$

Для решения этого уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности относительно функции φ, определенном на отрезке $[0,T]$, и принимающей значения в том же пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

$$\varphi'(t)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(t)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi(t)-iV(\frac{1}{\sqrt{i}}x_1,\sqrt{i}x_2)\varphi(t)\quad(2)$$

Пусть φ – решение уравнения (2), пусть $\psi(t)(x_1,x_2)=\varphi(t)(\sqrt{i}x_1,\frac{1}{\sqrt{i}}x_2)$. Тогда функция ψ является решением уравнения (1).

В бесконечномерном случае рассмотрим бесконечномерное уравнение Шредингера относительно функции ψ, определенной на отрезке $[0,T]$, принимающей значения в пространстве функций на гильбертовом пространстве H, квадратично интегрируемых по какой-либо гладкой мере ν, например, гауссовской.

Оно имеет следующий вид

$$i\psi'(t)=\mathrm{tr}(A(\psi(t))'')+(\psi(t))'h\quad(3)$$

где A – ядерный оператор на гильбертовом пространстве H, а $h\in H$, член с первой производной появляется, чтобы сделать оператор в правой части уравнения самосопряженным в пространстве $L_2(H,\nu)$. Для решения этого уравнения, как и выше, полезно рассмотреть аналогичное уравнение теплопроводности.

$$\varphi'(t)=\mathrm{tr}(A(\varphi(t))'')+\frac{1}{\sqrt{i}}(\varphi(t))'h\quad(4)$$

Пусть φ – решение уравнения (4), пусть $\psi(t)(x)=\varphi(t)(\sqrt{i}x)$. Тогда функция ψ является решением уравнения (3).