

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА

А. А. Лобода

orion1312@yandex.ru

УДК 517.955.4

Для получения представлений решений используются аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля, аналитическое продолжение по аргументу и рандомизированная теорема Чернова, а также некоторые обобщения метода замены переменной.

Ключевые слова: Стохастическое уравнение Шрёдингера-Белавкина, стохастическое уравнение теплопроводности, аналитическое продолжение, формулы Фейнмана-Каца, интеграл Фейнмана

The methods for obtaining representations of solutions of Schrodinger's stochastic equations

To obtain representations of solutions, we use the analytic continuation with respect to the parameter and the Parseval's equality, analytical continuation of the argument and the randomized Chernov's theorem, and also some generalizations of the variable replacement method.

Keywords: Stochastic Schrodinger-Belavkin equation, stochastic heat conduction equation, analytic continuation, Feynman-Katz's formulas, Feynman's integral

Методы исследования детерминированных задач обобщаются на стохастический случай. В работе [1] доказана рандомизированная версия теоремы Чернова, позволяющая получить представление решения стохастического уравнения Шрёдингера рандомизированным интегралом Фейнмана путем построения фейнмановских аппроксимаций решения (формулы Фейнмана). Подробнее об этом методе см. [2].

В докладе применяется также аналитическое продолжение меры по параметру и равенство Парсеваля. Рассматривается задача Коши для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера (уравнение теплопроводности):

$$\begin{aligned} d\Psi(t)(q) = & \left(\alpha \frac{d^2 \Psi(t)(q)}{dq^2} + \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4} |q|^2 \right) \right) \times \\ & \times \Psi(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \Psi(t)(q) dw(t), \Psi(0, \cdot) = \varphi_0(\cdot), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi_0(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^1)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$.

Решение этой задачи Коши записывается в виде функционального интеграла (формула Фейнмана-Каца):

$$\begin{aligned} \Psi(t, \omega)(q) = & \int_{C(0,t)} \exp \left\{ \int_0^t \alpha V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dw(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0t}^\alpha(d\xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Лобода Артём Александрович, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Artyom Lododa (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Формула доказывается с помощью формулы Ито, а сложность по сравнению с детерминированным случаем возникает из-за зависимости от времени белого шума (подробнее см. [3]). Затем используется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть μ - это произведение меры Винера на $C(0, 1)$ и функции ψ на $C(0, 1)$, определяемой равенством $\psi(\xi) = e^{-\int_0^1 \lambda(\xi(t))^2 dt}$, $\lambda > 0$. Тогда преобразование Фурье $F\mu$ меры μ определяется равенством $F\mu(\eta) = e^{-\int_0^1 \int_0^1 b(t,s)\eta(dt)\eta(ds)}$, где b - функция, зависящая от λ .

Лемма требуется для вывода аналога представления Маслова-Чеботарева для задачи Коши (1). Далее применяется аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля. Справедлива теорема.

Теорема 1. Для решения $\Psi(t, \omega)(q)$ задачи Коши при $\alpha = i$ справедливо равенство

$$\Psi(t, \omega)(q) = \int \exp \left\{ \int_0^t iV(q + \xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau))dw(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(\tau))F(d\xi),$$

где символ $\int \dots F(d\xi)$ - это интеграл Фейнмана, определяемый как предел конечнократных интегралов (см. [4] и имеющиеся там ссылки).

Здесь V и φ_0 - преобразования Фурье счётно-аддитивных борелевских мер ν_1 и ν_2 на $\mathbb{R}^1$, $\lambda > 0$. Равенство Парсеваля используется для построения последовательности конечнократных интегралов, сходящейся к интегралу из теоремы 1.

Ещё один вариант аналитического продолжения впервые был предложен в работе [5]. Здесь речь идёт об аналитическом продолжении по аргументу (метод замены переменных). В докладе рассматривается представление решения задачи Коши (1) с помощью формулы Фейнмана-Каца (2). Если все функции, входящие в (1), допускают аналитическое продолжение в подходящую область, получается другое представление решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\psi : [0, \infty) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ - решение уравнения $\psi(t) - \psi(0) = \int_0^t ((\psi(\tau))'' - iV\psi(\tau))d\tau$, и для каждого $t \geq 0$ функция $x \mapsto \psi(t)(x)$ допускает аналитическое продолжение на область $\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\alpha}, \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}), \rho > 0\}$, и продолжение по непрерывности на ее замыкание. Пусть функция $\varphi : [0, \infty) \rightarrow L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ - комплексификация пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) определяется так: $\varphi(t)(x) = \psi(t)(\sqrt{-i}x)$ ($\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$). Тогда функция φ - это решение уравнения $i\varphi(t) - i\varphi(0) = \int_0^t (-(\varphi(\tau))'' + V\varphi(\tau))d\tau$.

Справедлива теорема (подробнее см. [6]).

Теорема 2. Пусть Ψ - решение следующей задачи Коши

$$d\Psi_{\omega}(t)(q) = \left(i \frac{d^2 \Psi_{\omega}(t)(q)}{dq^2} + \left(iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \right) \times \\ \times \Psi_{\omega}(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \Psi_{\omega}(t)(q) dB_{\omega}(t), \Psi_{\omega}(0, \cdot) = \varphi_0(\cdot).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(t, q_1) = & \int \exp \left\{ \int_0^t iV(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))w f^{-1}(d\xi_1). \end{aligned}$$

Здесь интеграл берётся по счётно-аддитивной мере, в отличие от представления решения из теоремы 1. Связь между двумя интегралами в докладе не рассматривается.

Метод замены переменной допускает некоторые обобщения. Рассмотрим стохастическое уравнение Шредингера, где функции f определена на $(0, +\infty)$ и принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ (это уравнение описывает квантовую динамику при непрерывном измерении координаты q_1).

$$if'(t) = (-\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})f(t) + dW(t)\alpha q_1 f(t) \quad (3)$$

Пусть f – решение уравнения (3). Пусть функция g принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и определяется равенством $g(t)(q_1, q_2) = f(t)(\frac{q_1}{\sqrt{i}}, \sqrt{i}q_2)$. Тогда g – это решение уравнения теплопроводности

$$g'(t) = (+\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})g(t) - idW(t)\alpha q_1 g(t) \quad (4).$$

Если g – решение уравнения (4), то функция f , определенная равенством $f(t)(q_1, q_2) = g(t)(\sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$, будет решением уравнения (3).

Решение уравнения (4) можно представить формулой Фейнмана-Каца

$$g(t)(q_1, q_2) = \int_{C_{q_1, q_2}(0, t)} e^{\int_0^t -idW(\tau)\alpha\xi(\tau)d\tau} \omega(d\xi),$$

где $C_{q_1, q_2}(0, t)$ – пространство определенных на $[0, t]$ непрерывных функций, со значениями в $\mathbb{R}^2$, равных в нуле (q_1, q_2) . Тогда функция f , определенная выше, – это решение уравнения (3).

Литература

1. O. O. Obrezkov, O.G. Smolyanov, A. Truman. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. // Doklady Mathematics, 2005. V. 71, N 1, P. 105-110.
2. J. Gough, O.O. Obrezkov, O.G. Smolyanov. SRandomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations.// Izvestiya: Mathematics, 2005. V.69, N 6, P. 1081-1098.
3. Лобода А. А. Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шредингера.//Дифференциальные уравнения, 2018. V. 54, N 4, P. 561–564.
4. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — Второе издание М.: УРСС, 2015.
5. Doss H. ur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques.//Communications in Mathematical Physics, 1980. V. 73, P. 247-264.
6. Лобода А. А. Метод Досса для стохастического уравнения Шредингера — Белявкина.//Математические заметки, 2019. V. 106, N 2, в печати.