

УДК 534.145

© 1998 г. С.В. САЗОНОВ

К ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

На основе закона сохранения квадрата длины вектора Блоха проведен феноменологический учет коллективной релаксации параметра порядка в окрестности сверхизлучательного фазового перехода в системе "двухуровневые атомы + электромагнитное поле". Найдены явные зависимости времени релаксации, частоты мягкой моды и характерной скорости движения доменов от микроскопических параметров системы. Показано, что мягкая мода вблизи перехода практически всегда переторможена, а потому учет релаксации принципиально важен. Исследована динамика образования поляризационной доменной стенки в несимметричной фазе.

В работах [1, 2] было показано, что в равновесной системе "двухуровневые атомы + электромагнитное поле", описываемой моделью Дике, при температуре T ниже некоторой критической T_c возможен фазовый переход, заключающийся в бозеконденсации фотонной моды с числом заполнения, пропорциональным количеству атомов N . При этом роль двухуровневых атомов могут играть как реальные атомы, так и некие эффективные двухуровневые системы (например, межзонные переходы в полупроводниках [3]). В [4–6], а также в [3] показано, что частота фотонного бозеконденсата равна нулю. Это соответствует появлению при $T < T_c$ статической спонтанной поляризации. При приближении к температуре перехода собственная колебательная мода поляризации смягчается и при $T = T_c$ ее частота обращается в нуль. В [7] также предпринята попытка построения динамической теории сверхизлучательного фазового перехода.

В [3–7] никоим образом не учитывалась релаксация в окрестности перехода, что является общим недостатком отмеченных работ. Хорошо известно, что вблизи фазового перехода динамика параметра порядка является колебательно-релаксационной [8]. Данное обстоятельство формальным образом выражается уравнением типа Ландау–Халатникова [9]. При этом мягкая мода, как правило, переторможена [10]. В этой связи возникает задача корректного учета релаксации в окрестности сверхизлучательного фазового перехода. Данная корректность предполагает наличие эффекта смягчения собственной колебательной моды и при учете релаксации. Кроме того, в случае чисто релаксационной динамики должен иметь место эффект критического замедления: стремление к бесконечности времени релаксации при $T \rightarrow T_c$ [11].

В настоящей работе предлагается подход к учету релаксации в окрестности сверхизлучательного фазового перехода, позволяющий удовлетворить указанным выше условиям.

Гамильтониан системы атомов, взаимодействующих с полем излучения, запишем в виде [4, 12]

$$\hat{H} = \int \mathcal{H} d^3 \vec{r}, \quad (1)$$

где плотность гамильтониана

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_3(\vec{r}) - \hat{P}(\vec{r})\hat{D}(\vec{r}) + \frac{\hat{D}^2(\vec{r}) + \hat{B}^2(\vec{r})}{8\pi} + 2\pi(1-\beta)\hat{P}^2(\vec{r}). \quad (2)$$

Здесь $\hat{\sigma}_3(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \hat{S}_3(\vec{r}_i)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ – оператор плотности инверсии населенностей атомов, $\hat{P}(\vec{r}) = \vec{d} \sum_{i=1}^N \hat{S}_1(\vec{r}_i)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ – оператор поляризации среды, $\vec{d}$ – матричный элемент дипольного момента перехода в двухуровневом атоме, $\hat{S}_p(\vec{r}_i)$ ($p = 1, 2, 3$) – псевдоспиновые операторы i -го атома, удовлетворяющие паулевским коммутационным соотношениям, $\hat{D}$ и $\hat{B}$ – операторы электрической индукции и магнитного поля соответственно, ω_0 – частота атомного квантового перехода, $\hbar$ – постоянная Планка, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ – дельта-функция Дирака. безразмерный параметр β определяет величину "действующего" $\hat{E}_a$ локального поля [12]. При $\beta = 1/3$ действующее поле равно лоренцевскому полю: $\hat{E}_a = \hat{E} + 4\pi\hat{P}/3$, где $\hat{E}$ – напряженность внешнего электрического поля. Модель Дике соответствует случаю $\beta = 1$. При этом $\hat{E}_a = \hat{D}$.

В [13, 14] было показано, что в низкочастотном приближении механизмы нелинейности, с одной стороны, дисперсии и диссипации – с другой, могут быть учтены аддитивным образом. Ниже примем именно низкочастотное приближение, выражающееся в нашем случае неравенством

$$\omega < \min(\tilde{\omega}_c, \tau^{-1}). \quad (3)$$

Здесь ω – характерная частота динамического процесса, $\tilde{\omega}_c$ – частота мягкой колебательной моды, τ – время коллективной релаксации параметра порядка (поляризации).

Пространственную дисперсию учтем минимальным образом. Следуя [15, 16], запишем

$$\hat{S}_1(\vec{r}_i) = \hat{S}_1(\vec{r} + \vec{a}_i) = \hat{S}_1(\vec{r}) + (\vec{a}_i \nabla) \hat{S}_1(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{a}_i \nabla)^2 \hat{S}_1(\vec{r}) + \dots \quad (4)$$

где $\vec{a}_i$ – вектор, соединяющий точку наблюдения с i -м атомом. Тогда после перехода к квазинепрерывному приближению [16] найдем

$$\hat{P} = \vec{d}n \left(\hat{S}_1 + \frac{1}{2} a_m^2 \frac{\partial^2 \hat{S}_1}{\partial x_m^2} \right), \quad (5)$$

где n – концентрация двухуровневых атомов, a_m ($m = x, y, z$) – постоянные кристаллической решетки вдоль ее главных осей (предполагается, что двухуровневые атомы, взаимодействующие с полем излучения, расположены в узлах решетки). В (5) и всюду ниже по повторяющемуся индексу m подразумевается суммирование.

Подставляя (5) в (2) и отбрасывая члены вида $(\partial^2 \hat{S}_1 / \partial x_m^2)(\partial^2 \hat{S}_1 / \partial x_l^2)$ по причине их малости, получим

$$\hat{\mathcal{H}} = n \left\{ \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{S}_3 - \frac{\hbar J}{2} \hat{S}_1^2 - \hbar \hat{\Omega} \hat{S}_1 + \frac{\hbar}{2} a_m^2 \left[J \left(\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x_m} \right)^2 + \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_m} \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x_m} \right] \right\}, \quad (6)$$

где $\hat{\Omega} = \vec{d}\hat{E} / \hbar$, $J = 4\pi\beta d^2 n / \hbar$.

При получении (6) использовались замены вида

$$\hat{S}_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_m^2} \rightarrow - \left(\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x_m} \right)^2, \quad \hat{\Omega} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_m^2} \rightarrow - \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_m} \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x_m}, \quad (7)$$

эквивалентные процедуре взятия интеграла (1) по частям [17]. Кроме того, в (6) не учтена пространственная дисперсия по оператору инверсии $\hat{S}_3$. Данной дисперсией можно пренебречь, так как оператор $\hat{S}_3$ соответствует энергетической характеристике и ее динамика обусловлена нелинейными эффектами. Выше уже отмечалось, что в приближении (3) эффекты нелинейности и дисперсии учитываются аддитивным образом. Этим обстоятельством и объясняется отсутствие в (6) пространственных производных оператора инверсии.

Зная $\hat{H}$ (см. (1), (6)) и используя коммутационные соотношения для паулевских операторов, в гейзенберговом представлении легко получить для последних соответствующие динамические уравнения. Можно, однако, поступить и иначе, а именно, от квантовой плотности гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}$ перейти к классической $\mathcal{H}$, заменив в $\hat{\mathcal{H}}$ все операторы на соответствующие c -числовые функции:

$$\hat{\Omega} \rightarrow \Omega, \quad \hat{S}_\rho \rightarrow S_\rho \quad (\rho = 1, 2, 3) \quad (8)$$

и записав для вектора Блоха $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ уравнение вида [18]:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = [\vec{S} \times \vec{\Omega}^{ef}], \quad (9)$$

где эффективное поле

$$\vec{\Omega}^{ef} = - \frac{2}{n\hbar} \frac{\delta H}{\delta \vec{S}}. \quad (10)$$

Классическая энергия H определяется здесь соотношениями (1), (6) с точностью до замен (8).

Векторная система (9), (10) полностью эквивалентна системе операторных уравнений для псевдоспиновых компонент $\hat{S}_\rho$ ($\rho = 1, 2, 3$) [18]. Автоматическая замена паулевских и полевых операторов на c -числовые функции соответствует пренебрежению квантовыми корреляциями в системе "двухуровневые атомы + электромагнитное поле". В (9), (10) не содержится релаксация, которая, как было сказано выше, играет принципиальную роль в окрестности фазового перехода. Остается, таким образом, дополнить (9), (10) членами, описывающими релаксацию. Вначале заметим, что (9) обладает хорошо известным интегралом движения

$$\vec{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_{30}^2, \quad (11)$$

где S_{30} – термодинамически равновесное значение S_3 при $T > T_c$.

Фазовый переход и динамика параметра порядка в его окрестности суть коллективные явления. На это обстоятельство указывает, в частности, эффект смягчения собственной колебательной моды вблизи T_c . Отсюда можно предположить, что релаксация в окрестности перехода имеет коллективный (когерентный) характер и поэтому не нарушает закон сохранения (11), как это имеет место и в теории ферромагнетизма [19]. Следуя и дальше отмеченной аналогии, перепишем (8) с учетом релаксации в виде

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = [\vec{S} \times \vec{\Omega}^{ef}] + \vec{R}, \quad (12)$$

где релаксационный член

$$\vec{R} = -\lambda[\vec{S} \times [\vec{S} \times \vec{\Omega}^{ef}]] = -\lambda[(\vec{S} \cdot \vec{\Omega}^{ef})\vec{S} - S_{30}^2 \vec{\Omega}^{ef}], \quad (13)$$

λ – феноменологический параметр, подлежащий определению.

Принимая во внимание замечание о возможности аддитивного учета нелинейности, с одной стороны, дисперсии и диссипации – с другой, в приближении (3) линеаризуем (13) по S_1 , S_2 и Ω . Введем эффективную статическую восприимчивость χ^{ef} , определяемую соотношением

$$\vec{S}_0 = \chi^{ef} \vec{\Omega}_0^{ef}, \quad (14)$$

где $\vec{S}_0$ и $\vec{\Omega}_0^{ef}$ – соответствующие равновесные значения $\vec{S}$ и $\vec{\Omega}^{ef}$. Из (9), (10) при $\partial \vec{S} / \partial t = 0$ следует, что

$$\chi^{ef} = -S_{30} / \omega_0 = -\frac{1}{\omega_0} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}, \quad (15)$$

где k – постоянная Больцмана. Здесь использовано выражение для термодинамически равновесного значения S_3 [12].

Тогда после линеаризации $\vec{R}$ из (12) находим векторное уравнение

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = [\vec{S} \times \vec{\Omega}^{ef}] - \gamma(\vec{S} - \chi^{ef} \vec{\Omega}^{ef}), \quad (16)$$

похожее на соответствующее динамическое уравнение для магнетиков [20]. Здесь

$$\gamma = -\lambda \omega_0 S_{30} \approx \lambda \omega_0^2 / 2J. \quad (17)$$

Компоненты вектора эффективного поля $\vec{\Omega}^{ef}$, согласно (10), (1), (6) и (8), имеют вид

$$\Omega_1^{ef} = 2(\Omega + JS_1) + a_m^2 \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} (2JS_1 + \Omega), \quad (18)$$

$$\Omega_2^{ef} = 0, \quad \Omega_3^{ef} = -\omega_0.$$

Подчеркнем, что релаксация, выражаемая параметрами λ и γ соответственно в (13) и (16), имеет сугубо коллективную природу и тем самым отличается от некогерентной продольно-поперечной релаксации, определяемой временами T_1 и T_2 [21]. Всюду в настоящей работе мы пренебрегаем некогерентной релаксацией.

В низкочастотном слабонелинейном приближении (3) [18] из (16), (18) находим для параметра порядка S_1 :

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \tilde{\gamma} \frac{\partial S_1}{\partial t} - \nu_m^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_m^2} + \tilde{\omega}_c^2 S_1 + \kappa \frac{J^2}{2} S_1^3 = \tilde{\omega}_c^2 \chi_0 \Omega, \quad (19)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \kappa \gamma, \quad \tilde{\omega}_c = \kappa \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2J}{\omega_0} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}}, \quad (20)$$

$$\nu_m = \sqrt{\kappa} a_m \omega_0, \quad \kappa = 1 + (\gamma / \omega_0)^2.$$

Статическая восприимчивость системы χ_0 , нормированная на размерность

обратной частоты, определяется соотношением

$$\chi_0 = \frac{1}{J} \left(1 - \frac{2J}{\omega_0} \operatorname{th} \frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right). \quad (21)$$

С другой стороны, согласно уравнению Ландау–Халатникова [9], можно записать

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \tilde{\gamma} \frac{\partial S_1}{\partial t} = -v \frac{\delta F}{\delta S_1}, \quad (22)$$

где v – коэффициент, подлежащий определению, а F – свободная энергия системы "двухуровневые атомы + электромагнитное поле", которая вблизи T_c с использованием приближения молекулярного поля (ПМП) представляется в виде [10], [18]

$$F = F_0 + \int n \left\{ \frac{\hbar J}{2} \left(1 - q \operatorname{th} \frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) S_1^2 + \frac{\hbar J^3}{8\omega_0^2} (1 - \eta) S_1^4 - \hbar\Omega S_1 \right\} d^3\vec{r}, \quad (23)$$

где F_0 – часть свободной энергии, не зависящая от S_1 ,

$$q = \frac{2J}{\omega_0} = \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_0}{2kT_c}, \quad (24)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \ln \left(\frac{q+1}{q-1} \right). \quad (25)$$

Как следует из (24) и (7), условие фазового перехода имеет вид

$$q = \frac{8\pi\beta d^2 n}{\hbar\omega_0} > 1, \quad (26)$$

что в точности совпадает с выводом работ [4, 12]. Кроме того, из (24) и (21) видно, что статическая восприимчивость χ_0 имеет полюс при $T = T_c$, как того требуют общетеоретические положения.

В ПМП не может быть учтена пространственная дисперсия, обусловленная структурой кристалла. Поэтому (23) не содержит соответствующих членов и в уравнении движения (22) в отличие от (19) выпадают слагаемые типа $a_m^2 \partial^2 S_1 / \partial x_m^2$. Однако в низкочастотном длинноволновом приближении, как отмечалось выше, эти слагаемые могут быть учтены аддитивным образом, простым их добавлением в (22).

Подставляя (23) в (22) и приравнявая друг другу правые части (22) и (19) в пренебрежении пространственной дисперсией, с учетом (20) и (17) найдем

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \omega_0, \quad \lambda = q \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}, \\ v &= \frac{\omega_0^2}{4\hbar J(1-\eta)n}, \quad \kappa = (1-\eta)^{-1}, \\ v_m &= \frac{\omega_0 a_m}{\sqrt{1-\eta}}, \quad \tilde{\omega}_c = \frac{\omega_0}{1-\eta} \sqrt{1 - q \operatorname{th} \frac{\hbar\omega_0}{2kT}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что релаксация ($\eta \neq 0$) перенормирует частоту мягкой моды $\tilde{\omega}_c$ в сторону ее увеличения. Однако при $T = T_c$ данная частота строго обращается в нуль. Благодаря релаксации увеличиваются также и компоненты характерной скорости движения доменов v_m ($m = x, y, z$).

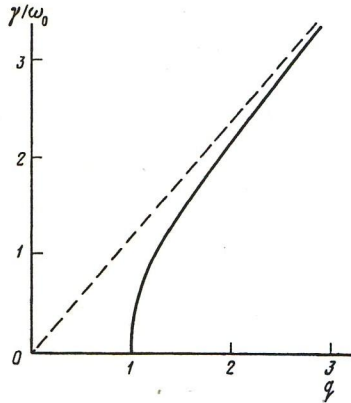


Рис. 1

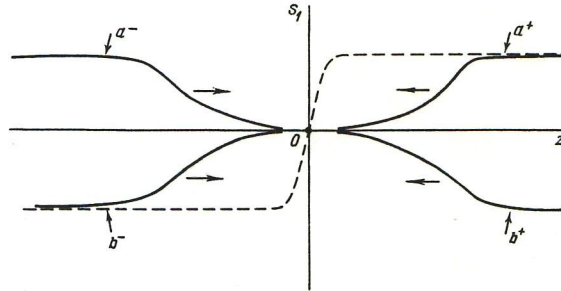


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость безразмерного релаксационного параметра γ/ω_0 от $q = 8\pi\beta d^2 n / \hbar \omega_0$, построенная на основе (25)–(27). Штриховая прямая соответствует пределу $q \rightarrow \infty$ и определяется уравнением (28)

Рис. 2. Четыре автоволновых решения типа "бегущий фронт" уравнения (29), описывающие режим перехода параметра порядка S_1 к своим устойчивым значениям $\pm S_{10}$ в несимметричной фазе ($T < T_c$). Горизонтальными стрелками указаны направления движения автоволн. Штриховая кривая – доменная стенка (32), образованная неупругим встречным столкновением автоволн a^+ и b^-

Из (16) видно, что величина γ определяет обратное время релаксации компонент вектора Блоха, в том числе и параметра порядка S_1 . На рис. 1 представлена зависимость γ от концентрации двухуровневых атомов n , построенная на основе соотношений (25)–(27). Данная зависимость отражает коллективный характер релаксации, что является общим свойством сверхизлучательных процессов.

Как следует из (19), (20), (27), условие незаторможенности мягкой моды $\tilde{\gamma} < 2\tilde{\omega}_c$ может быть записано в виде $\sqrt{\eta/(1-\eta)} < 2\omega_0 \sqrt{1 - q \operatorname{th}(\hbar\omega_0/2kT)}$. Анализ показывает, что данное выполняется лишь в узком интервале значений параметра q : $1 < q < 1.1$. Отсюда приходим к выводу о том, что в окрестности сверхизлучательного фазового перехода мягкая колебательная мода практически всегда переторможена. При $q \gg 1$ динамика в окрестности перехода становится чисто релаксационной. В этом пределе из (7), (25), (27) получаем

$$\gamma = 15,4\beta \frac{d^2 n}{\hbar}, \quad v_m = \gamma a_m. \quad (28)$$

Общее исследование низкочастотной динамики атомной поляризации в окрестности сверхизлучательного фазового перехода может быть проведено на основе уравнения (19), коэффициенты которого определены соотношениями (20), (27). Однако соответствующий анализ является достаточно громоздким. Случай же $q \gg 1$ представляется более простым и физически наглядным. По этой причине ниже мы ограничимся рассмотрением именно этого случая.

В пределе $q \rightarrow \infty$ уравнение (19) при $\Omega = 0$ принимает вид уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова [22]:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \gamma \frac{T_c - T}{T_c} S_1 - \frac{\gamma}{3} S_1^3 + D_m \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_m^2}, \quad (29)$$

где коэффициент диффузии $D_m = \gamma a_m^2$ ($m = x, y, z$).

В пространственно-одномерном случае ($D_m \partial^2 / \partial x_m^2 \rightarrow D_z \partial^2 / \partial z^2$, $D_z = \gamma a_z^2$) уравне-

ние (29) имеет автоволновые решения вида

$$S_1^{(a,b)} = \frac{1}{2} S_{10}^{(a,b)} \left(1 \pm \operatorname{th} \frac{z \pm v t}{2\Delta} \right), \quad (30)$$

где

$$S_{10}^{(a,b)} = \pm \sqrt{3 \frac{T_c - T}{T_c}}, \quad v = 3\gamma a_z \sqrt{\frac{T_c - T}{2T_c}}, \quad \Delta = a_z \sqrt{\frac{2T_c}{T_c - T}}. \quad (31)$$

Решения (30), (31) содержат в себе четыре вида автоволн электрической поляризации, изображенных на рис. 2. Заметим, что существование всех этих автоволн возможно только в несимметричной фазе ($T < T_c$). Они описывают распространение режима перехода неустойчивой фазы с $S = 0$ в устойчивую с $S_1 = S_{10}$ ($S_1 = -S_{10}$). Столкновение волн a^+ и a^- (или b^+ и b^- друг с другом происходит неупруго и приводит к образованию однородной монокристаллической среды с $S_1 = \pm S_{10}$. При столкновении же автоволн a^+ и b^- (или a^- и b^+) образуется статическая доменная стенка вида

$$S_1 = S_{10}^{(a,b)} \operatorname{th}(z / \Delta), \quad (32)$$

являющаяся статическим решением уравнения (29). Из сравнения (32), (30) видно, что ширина статической доменной стенки в 4 раза меньше исходной ширины встречных автоволн, из которых образуется данная стенка. Объясняется это тем, что при встречном столкновении автоволн противоположных полярностей происходит естественное укрупнение волновых фронтов. Из-за неупругости столкновения восстановления исходной формы автоволн не происходит, а образуется их связанное состояние в виде доменной стенки (32).

Замедление движения автоволн, а также уменьшение их амплитуд, увеличение пространственной ширины при $T \rightarrow T_c$ (см. (31)) есть результат эффекта критического замедления. Соответствующее время прохождения фронта автоволны (время релаксации к устойчивому состоянию)

$$\tau_R = \frac{\Delta}{v} = 0,54 \frac{\hbar}{k(T_c - T)}. \quad (33)$$

Видно, что при $\hbar = 0$ время $\tau_R = 0$. Отсюда приходим к выводу, что динамика в окрестности сверхизлучательного фазового перехода суть квантовое явление. Именно в окрестности перехода велики флуктуации, в том числе квантовые. Так как τ_R определяет время коллективной релаксации, то конечность данного времени можно рассматривать как результат когерентизации квантовых флуктуаций в окрестности фазового перехода.

Таким образом, в настоящей работе найдены явные зависимости релаксационных параметров, частоты мягкой моды, а также характерной скорости движения доменов в окрестности сверхизлучательного фазового перехода от микроскопических характеристик среды. Проанализированы простейшие случаи динамики распространения режима спонтанного нарушения симметрии в несимметричной фазе. Случай $T > T_c$, когда формирование доменов невозможно, достаточно подробно исследован в [18] для общего класса переходов типа порядок–беспорядок.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект: 96-02-16228а).