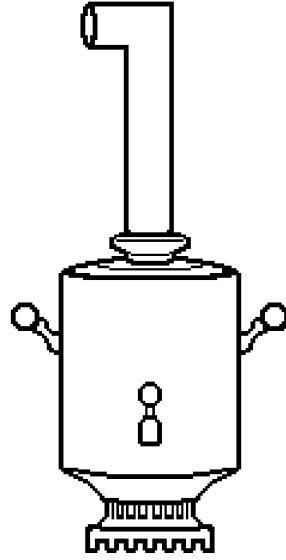


Летняя конференция  
мэрия и ОРОБОЕ



ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР ТУРНИРА ГОРОДОВ

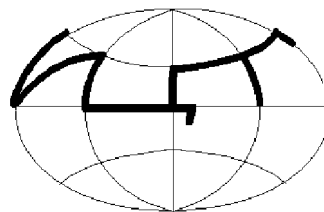
**ВОСЬМАЯ  
ЛЕТНЯЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ТУРНИРА  
ГОРОДОВ**

Задачи

Решения

Участники

Результаты



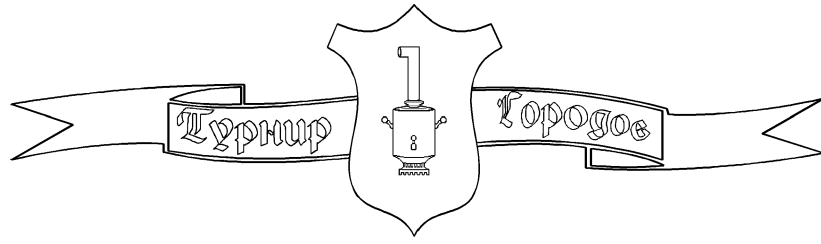
Москва 1997

В сборнике  
рассказано о традиционной летней  
конференции  
международного математического  
Турнира Городов. Приводятся  
задачи, предложенные  
участникам, с решениями и  
комментариями.

© Информационный Центр Турнира Городов, 1997.

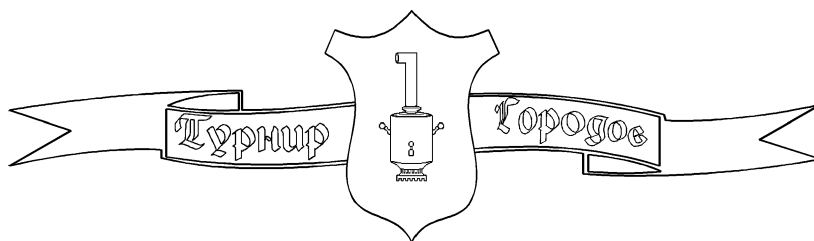
---

Издательство ИЦТГ, Москва 1997г.  
Ответственный за выпуск Вялый М.Н.  
Объем 8 п.л. Тираж экз.



## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Участники</b>	<b>17</b>
<b>Условия задач</b>	<b>24</b>
Задача 1. Внешний бильярд вокруг многоугольника . . . . .	24
Задача 2. Диофантовы уравнения для многочленов .	29
Задача 3. Сортировка железнодорожных составов .	31
Задача 4. Классификация гибких кривых и инварианты узлов . . . . .	39
Задача 5. Полимино . . . . .	48
Задача 6. Двойные сети . . . . .	51
<b>Результаты участников</b>	<b>55</b>
<b>Решения задач и комментарии</b>	<b>71</b>
Задача 2. . . . .	71
Задача 3. . . . .	76
Задача 4. . . . .	100
Задача 6. . . . .	107



## Введение

### О конференциях Турнира Городов

«Конференции» Турнира Городов не похожи на научные конференции в обычном смысле слова. Здесь нет «пленарных докладов», «работы по секциям», официальной программы. Это, скорее, неформальные встречи, на которые приглашаются школьники — победители международного математического Турнира Городов — и сопровождающие их учителя.

Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы. Даже рассказ условий такого типа задач превращается в целую лекцию. Поэтому *презентация* задач занимает по крайней мере день работы конференции.

Решение таких задач требует больших затрат времени и значительных интеллектуальных усилий. Поэтому организационно процесс решения проходит в свободной форме: дается много времени (несколько дней), решения могут быть как индивидуальными, так и коллективными, т.е. допускается решение от любой группы объединившихся людей. Это не обязательно совпадает с «командой», приехавшей из одного города. Жюри назначает сроки сдачи письменных решений, по традиции их два, и для них прижились названия «предварительный финиш» и «окончательный финиш». Сданные решения проверяются, оценивается степень продвижения участников в решении той или иной задачи. Затем проводится разбор решенных задач. Некоторые пункты после первого срока сдачи снимаются с конкурса. Иногда после промежуточного разбора до-

бавляются новые задачи. Критерии успеха также отличаются от традиционных: успешность выступления оценивается по *наибольшему* продвижению в одной из задач. Т.е. фактически проводится одновременно несколько конкурсов (по каждой из задач в отдельности). В реальности многие участники не могут остановиться на какой-то единственной задаче и решают сразу несколько задач.

Вообще все участники — как школьники, так и учителя — получают возможность активного отдыха, интенсивной творческой работы и интересного общения.

Коротко о предыдущих конференциях. Все конференции проходили в начале августа.

1-я конференция состоялась в 1989 г. в Нью, Эстония.

2-я — в 1990 г. в Вийтне, Эстония.

3-я — в 1991 г. в Челябинске.

4-я — в 1992 г. в Миассе под Челябинском.<sup>1)</sup>

5-я — в 1993 г. в Белорецкой Компьютерной Школе города Белорецка.<sup>2)</sup>

6-я — в 1994 г. в Белорецкой Компьютерной Школе города Белорецка.<sup>3)</sup>

7-я — в 1995 г. в г. Новый Сад, Югославия.<sup>4)</sup>

---

<sup>1)</sup>Об этой конференции подробно рассказано в специальном издании ИЦТГ «Четвертая конференция Турнира Городов: участники, задачи, решения, комментарии».

<sup>2)</sup>Аналогично.

<sup>3)</sup>Аналогично.

<sup>4)</sup>Аналогично.

## Работа Восьмой конференции

Организаторами восьмой конференции выступили Информационный Центр Турнира Городов (председатель Николай Николаевич Константинов) и Угличский учебно-научный комплекс информационных технологий (директор – Владимир Михайлович Аверьев).

Принять в ней участие приглашались школьники, показавшие лучшие результаты в 17<sup>м</sup> Турнире Городов по математике, а также учителя из городов, наиболее успешно выступивших в Турнире. Всего в 17<sup>м</sup> турнире приняли участие школьники 90 городов из 22 стран. На конференцию в Углич приехали 50 школьников и 8 учителей, представляющих 21 город из 6 стран: России, Украины, Сербии, Израиля, Германии и Словении, а также 11 членов жюри.

В жюри конференции вошли:

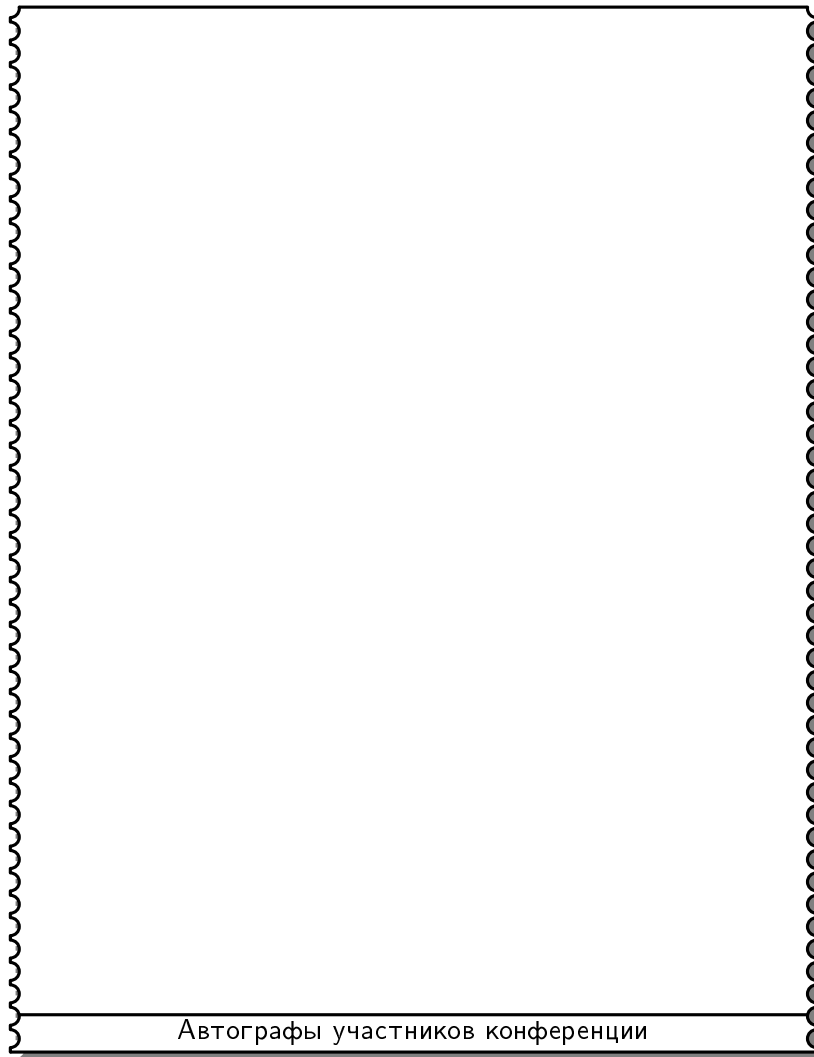
- 1: Бугаенко Вадим Олегович;
- 2: Вялый Михаил Николаевич;
- 3: Дориченко Сергей Александрович;
- 4: Канель-Белов Алексей Яковлевич;
- 5: Константинов Николай Николаевич;
- 6: Кохась Константин Петрович;
- 7: Крижановский Олег Феликсович;
- 8: Кулаков Александр Георгиевич;
- 9: Сосинский Алексей Брониславович;
- 10: Шаповалов Александр Владимирович;
- 11: Фарис Уильям.

Возглавлял жюри Н.Н. Константинов, председатель оргкомитета международного математического турнира городов.

Конференция проходила на базе учебно-научного комплекса информационных технологий (г. Углич, ул. Северная, д. 4, директор – Владимир Михайлович Аверьев). Школьники жили в общежитии Угличского Механико-технологического техникума молочной промышленности (ул. Северная, д. 3). Питание было организовано на базе местного предприятия общественного питания.

Автографы участников конференции





Автографы участников конференции

Работа конференции фактически началась уже в день заезда 31 июля. Школьникам были предложены шесть задач. Каждая из этих задач в отличие от тех, что обычно даются на олимпиадах, состояла из множества пунктов. Фактически это циклы задач, связанных единой темой. Каждый из них представляет собой небольшое математическое исследование. Первые пункты, как правило, сравнительно простые, и служат для того, чтобы освоиться в предложенной теме. Однако, каждая задача содержит очень сложные пункты, иногда их решения неизвестны даже жюри. Участникам конференции было предложено выбрать себе один из циклов и постараться продвинуться в решении его задач как можно глубже. Это и составляло основное содержание работы школьников на конференции. Циклы были подобраны на различные темы, чтобы каждый школьник мог выбрать себе исследование соответственно своим математическим вкусам. Для сдачи работ был назначен срок — 22 часа 7 августа. При этом разрешалось сдавать решенные пункты и раньше — в этом случае жюри обязалось проверить работы и возвратить их авторам. Если задача решена неверно, есть возможность исправить решение.

По каждой задаче, предложенной на конференции, были один или два члена жюри, которые ее вели. Они представляли условие, школьники в любой момент могли задавать им возникающие по условиям вопросы. Также эта микробригада проверяла работы, проводила рассказ решений и формировала предложения по награждению школьников, продвинувшихся в решении задачи. Ниже перечислены названия задач с указанием авторов задач и членов жюри, представлявших эту задачу на конференции.

Внешний бильярд (предложена А. Я. Канелем, представляли А. Я. Канель и В. О. Бугаенко)

Диофантовы уравнения для многочленов  
(предложена В. В. Прасоловым, представлял С. А. Дориченко)

Сортировка железнодорожных составов (предложена и представлялась А. Г. Кулаковым)

Классификация гибких кривых (предложена А. Б. Сосинским по мотивам задачи С. В. Матвеева, представляли М. Н. Вялый и А. Б. Сосинский)

Полимино (предложена О. Ф. Крижановским, представляли О. Ф. Крижановский и К. П. Кохась)

Двойные сети (предложена и представлялась А. В. Шаповаловым)

Открытие конференции состоялось 1 августа в 10 часов. На нем присутствовали представители администрации и департамента образования г. Углича. После открытия состоялось представление задач. Хотя все условия были заранее размножены и розданы участникам (каждый мог получить условия на русском или английском языке по выбору), каждую задачу представлял один из членов жюри. Это представление было чем-то вроде комментария к условиям, хотя порой оно превращалось в часовой доклад.

2 августа школьники решали задачи, а преподаватели собрались на семинар по обмену опытом. Каждый рассказывал о том, как происходит работа по математическому образованию у них в



городе, и как там проходит Турнир Городов. За время конференции прошло три заседания учительского семинара.

3 августа в 22 часа был объявлен так называемый «промежуточный финиш». Школьники должны были сдать все сделанные к этому моменту задачи. После промежуточного финиша простые пункты задач снимаются с конкурса. Ночь после сдачи работ является очень напряженной для жюри.

4 августа происходил разбор задач, которые снимаются с конкурса, представление вновь предлагаемых пунктов и подведение итогов предварительного финиша.

5 августа была устроена экскурсия по городу. Участники конференции гуляли по Угличскому кремлю, посетили Спасо-Преображенский собор, узнали подробности единственного значимого политического события в истории города Углича — убийства царевича Дмитрия в 1591 году. Также была экскурсия в музей часов, вызвавшая некоторое разочарование. Портреты передовиков труда



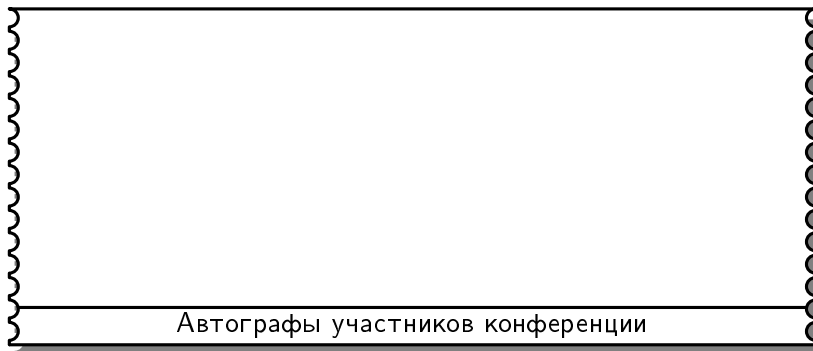
местного завода «Чайка» вызывали воспоминания о недавно прошедших временах.

Почти каждый вечер во дворе общежития разводился самовар — огромный трехведерный участник всех (кроме седьмой, когда таможня не пропустила его через границу, утверждая, что это национальное достояние) конференций турнира городов. На первых таких посиделках «русскоязычные» и остальные участники кучковались по отдельности. К концу же стало заметно, что языковой барьер преодолевается. Самовар стал настолько значимым участником конференции, что было решено поместить его изображение на диплом конференции. К сожалению, технические проблемы не позволили реализовать эту идею<sup>5)</sup>. Наверное, это удастся в следующем году.

Школьники не заикливались только на решении задач. Порой они собирались в одной из комнат общежития и большой компанией играли в «мафию». Игра затягивалась на долгие часы. Это очень не нравилось жюри. По мере своих возможностей взрослые участники конференции пытались пресекать это занятие. Это облегчалось тем, что сами школьники были сильно увлечены предложенными им задачами и воспринимали игру лишь как короткое отвлечение. Труднее всего было тем, кто жил в той самой комнате, где шла игра. Им не хватало смелости выгнать из своей комнаты всю компанию, и, если они хотели продолжать решать задачи, это

---

<sup>5)</sup> Внимательный читатель мог уже заметить, что самовар в накладе не остался.



было делать негде. Поэтому жюри выделило одну из пустующих комнат для таких излишне «гостеприимных» хозяев.

После обеда 6 августа был устроен пикник за городом. Нашли место в лесу в четырех километрах от города вверх по Волге. Самовар тащили по очереди. Был чай, были бутерброды с колбасой, поджаренной на костре. Играли в футбол, а самые отчаянные переплывали Волгу.

7 августа — самый напряженный день для школьников. Задачи нужно не только решить, но и аккуратно записать. Некоторые члены жюри разрешают сдавать свои задачи устно. И это обходится им достаточно дорого — в течении двух дней от школьников нет отбоя. Для остальных же членов жюри этот день самый спокойный. Проводится последнее заседание семинара учителей. На нем обсуждаются перспективы и взаимоотношение различных математических олимпиад, проходящих в последние годы в большом количестве. В частности, сформулировано отношение к Соросов-

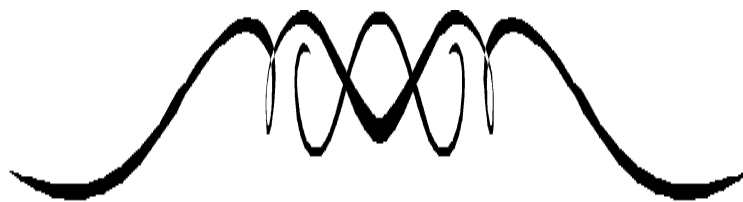
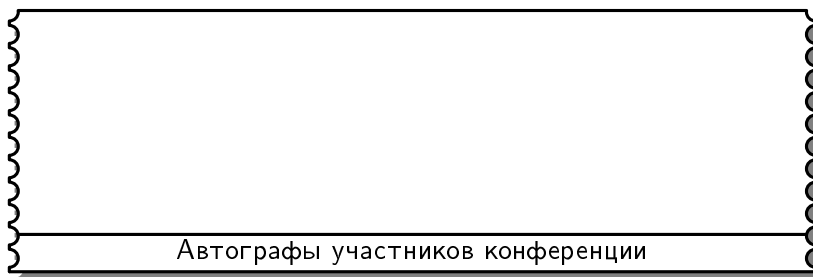


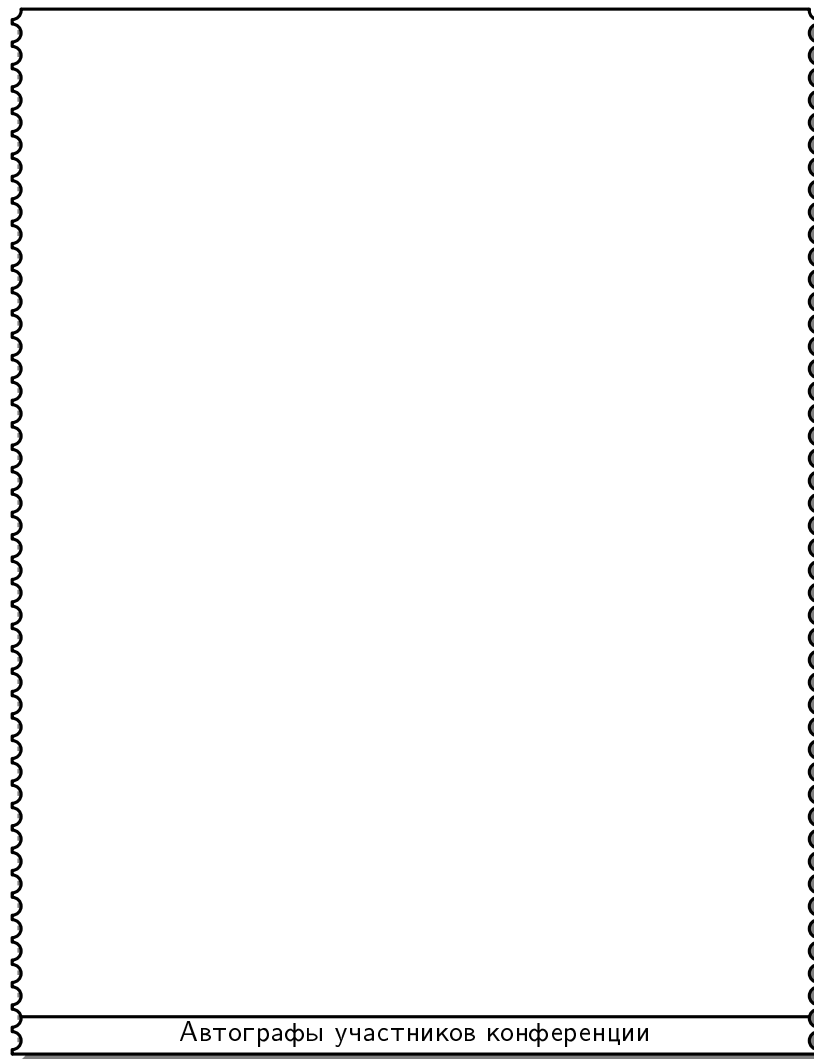
ской олимпиаде, прошедшей уже по два раза в России и в Украине.

8 августа от завтрака до ужина с небольшими перерывами идет разбор решений задач конференции. Рассказ некоторых решений занимает более двух часов, поэтому времени все равно не хватает. Некоторые задачи приходится разбирать одновременно.

Наконец, в 20 часов — закрытие конференции. Участники получают награды. Здесь нет традиционных первых, вторых, третьих мест, похвальных отзывов и т.п. В дипломах указано, какое достижение школьника является, с точки зрения жюри, самым существенным. Вот пример формулировки из диплома: «за доказательство аналога Великой теоремы Ферма для многочленов». Жюри сдержало свое обещание и отмечало лишь наивысшее достижение по какой либо одной задаче (то есть тем, кто решал несколько задач, засчитывалась при присуждении наград лишь та задача, в которой достигнуты наиболее существенные результаты). И конечно, традиционными призами были математические книги. Иногда книги дарились с учетом интересов школьника, проявленных при выборе задачи. А также дарились местные сувениры. Все получили в подарок карту города Углича. Лучше бы, конечно, было получить ее в первый день. Однако же, это можно воспринимать как намек на то, что этот приезд сюда не последний.

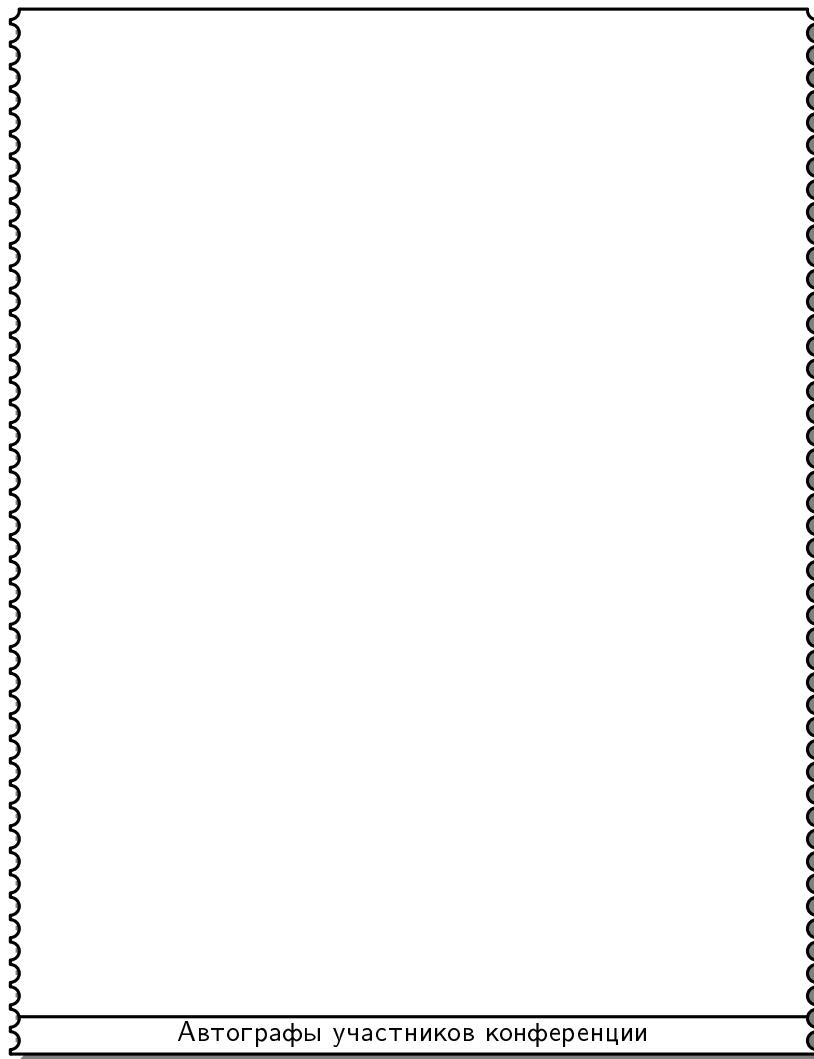
9 августа разъезд. В 5:30 завтрак, в 6 часов автобус отвозит всех на вокзал. В 7:10 поезд увозит участников в Москву.



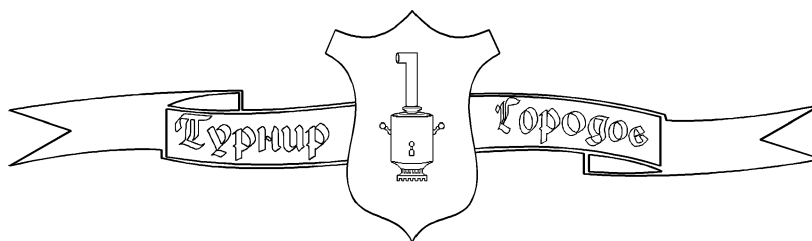


Автографы участников конференции





Автографы участников конференции



## Участники

Здесь приводится список «команд», принявших участие в VIII конференции. Слово «команда», как и «конференция», надо понимать неформально: это просто группа людей, приехавших из одной местности; никакого «командного первенства» не проводится.

### *Белорецк*

Руководитель: Семенов Сергей Вячеславович

Участники:

Губин Ярослав

Овечкин Антон

### *Гамбург*

Руководитель: Eileen Susanne Börner

Участники:

Jan Christoph Kinne

Philipp Joachim Sprüssel

Jan Henrik Sylvester

### *Жуковский*

Руководитель: Васина Татьяна Дмитриевна

Участники:

Ширяев Евгений

Иванов Илья

*Иваново*

Руководитель: Шаповалов Александр Васильевич

Участники:

Филатов Евгений      Шаповалов Данил

*Израиль*

Руководитель: Розенберг Михаил

Участники:

Бегельфор Евгений      Новиков Сергей  
Перцель Семен      Симкин Миша

*Калуга*

Участники:

Инюхин Александр      Сорокин Алексей

*Киров*

Участники:

Варавва Мария      Русанов Валерий  
Спиридонов Антон

*Москва*

Руководители:      Вадим Олегович Бугаенко,  
Сергей Александрович Дориченко

Участники:

Вашевник Андрей      Кисунько Вениамин  
Карпенков Олег      Клепцын Виктор  
Мищенко Андрей      Анно Ирина  
Смирнов Александр

Автографы участников конференции

*Набережные Челны*

Участник:

Головин Евгений

*Первоуральск*

Руководитель: Павлов Юрий Александрович

Участник:

Петров Александр

*Рязань*

Участник:

Малистов Алексей

*Санкт-Петербург*

Руководитель: Константин Петрович Кохась

Участники:

Ванюшина Ольга

Уздин Сергей

*Словения*

Руководитель: Roman Modic

Участники:

Igor Klep

Matija Mazi

Andrej Vodopivec

Автографы участников конференции

*Тверь*

Руководитель: Гулевич Сергей Анатольевич

Участники:

Бодяков Павел                      Гричик Михаил  
Хохлов Александр

*Харьков*

Руководитель: Крижановский Олег Феликсович

Участники:

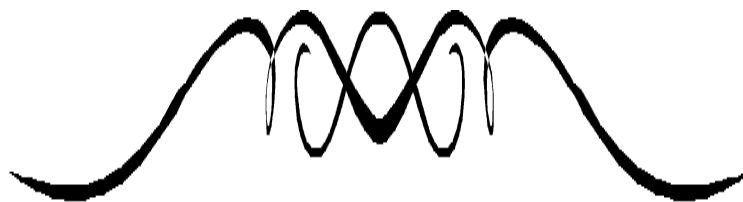
Бойко Константин                      Гиря Павел  
Болтенков Андрей                      Караваев Алексей  
Дехтярь Андрей                      Орищенко Алексей  
Работягов Андрей                      Щербина Алексей

*Югославия*

Руководитель: Ратко Тошич

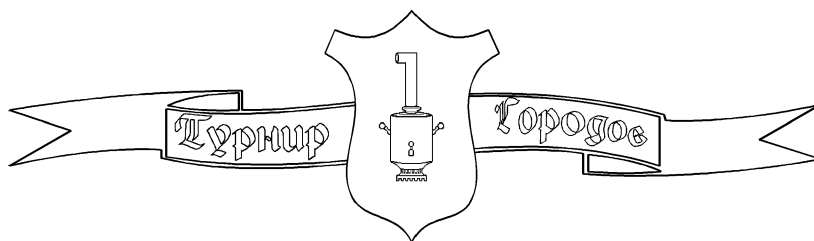
Участники:

Розгич Виктор                      Борислав Антич  
Владимир Мандич                      Небојша Мудрински  
Хајду Андреа



Автографы участников конференции





## Условия задач

### Задача 1. Внешний бильярд вокруг многоугольника

Предложена А.Я. Канелем, представляли А.Я. Канель и В.О. Бугаенко. Помимо предложенных автором вопросов, участникам конференции разрешили формулировать самостоятельно задачи на эту тему, если они покажутся им интересными, и сдавать их решения.

Пусть  $M$  — замкнутая выпуклая фигура на плоскости. Прямая называется *опорной* к фигуре  $M$ , если она содержит точки фигуры и вся фигура лежит целиком в одной из двух (замкнутых) полуплоскостей, определяемых прямой.

Если опорная прямая пересекается с  $M$  по единственной точке, то она называется *касательной*, а эта точка — точкой касания.

Очевидно, что если граница выпуклой фигуры не содержит отрезков прямых, то любая опорная прямая является касательной.

1. Докажите, что из любой точки, лежащей вне выпуклой фигуры, можно провести ровно две опорные прямые. Естественно одну из них назвать правой, а другую — левой. Постарайтесь дать строгое определение.

Пусть нам дана выпуклая фигура  $M$  и точка  $x$  вне ее. Предположим, что правая опорная прямая, проведенная из  $x$  к  $M$ , является касательной. Тогда определим точку  $r(x)$  как симметричную точке  $x$  относительно точки касания правой опорной прямой и  $M$ . Определим рекуррентно последовательность точек: начальная точка  $x_0 = x$ , при  $n \geq 1$  полагаем  $x_{n+1} = r(x_n)$ , если определена точка  $r(x_n)$ , в противном случае последовательность обрывается на  $n$ -том шаге.

Точка  $x$  называется *точкой общего положения* относительно фигуры  $M$ , если определенная выше последовательность точек с начальной точкой  $x$  бесконечна (иными словами, из каждой вновь получаемой точки мы можем провести правую касательную к фигуре).

Точка  $x$  называется *точкой периода  $n$*  относительно фигуры  $M$ , если  $x_n = x_0$  и  $x_k \neq x_0$  для всех  $0 < k < n$ .

Мы будем рассматривать следующие задачи для различных фигур.

**Задача А.** Для данного  $n$  найти все точки периода  $n$ .

**Задача В.** Выяснить, при каких  $n$  существуют точки периода  $n$ .

**Задача С.** Найти множество точек общего положения.

**2.** Решите задачи А, В и С, если  $M$  — квадрат. В задаче А рассмотрите отдельно случаи  $n = 4, 8$ .

**3.** Решите задачи А, В и С, если  $M$  — правильный треугольник. В задаче А рассмотрите отдельно случаи  $n = 6, 9, 6k + 3, 6k$ .

**4.** Решите задачи А, В и С, если  $M$  — правильный шестиугольник.

**5.** а) Решите задачи А, В и С, если  $M$  — восьмиугольник с вершинами  $(\pm 1, \pm 3)$  и  $(\pm 3, \pm 1)$  (берутся все возможные комбинации знаков).

б) То же самое для шестнадцатигульника с вершинами  $(\pm 1, \pm 9)$ ,  $(\pm 9, \pm 1)$ ,  $(\pm 5, \pm 7)$  и  $(\pm 7, \pm 5)$  (берутся все возможные комбинации знаков).

В задачах 6–8 фигура  $M$  — произвольный выпуклый многоугольник.

**6.** а) Докажите, что для каждой точки  $x$  четного периода существует окрестность  $U_x$ , целиком состоящая из точек того же периода.

б) Докажите, что для каждой точки  $x$  нечетного периода существует окрестность  $U_x$ , целиком состоящая (кроме самой точки  $x$ ) из точек вдвое большего периода.

**7.** а) Докажите, что (максимальная) окрестность  $U_x$  из задачи 5 а) суть многоугольник, стороны которого параллельны сторонам  $M$ .

б) Докажите, что (максимальная) окрестность  $U_x$  из задачи 5 б) является центрально симметричным многоугольником.

**8.** а) Докажите, что для любого  $k$  множество точек периода  $2k + 1$  конечно.

б) Докажите, что для любого  $k$  множество точек периода  $2k$  представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся выпуклых открытых многоугольников.

в) Пусть для некоторого  $k$  множество точек периода  $2k$  представлено в виде объединения нечетного числа непересекающихся выпуклых открытых многоугольников. Докажите, что все эти многоугольники центрально симметричны. Количество таких многоугольников может равняться  $k$  или  $k/2$ .

**9.** Решите задачи А и В, если  $M$ :

а) окружность;

б) эллипс;

в) фигура, граница которой — отрезки единичной длины и четверти окружностей единичного радиуса.

**10.** Пусть  $M$  — правильный пятиугольник.

Решите задачу А для а)  $n = 5$ ; б)  $n = 10$ ; в)  $n = 15$ ;  
г)  $n = 30$ .

д) Исследуйте поведение последовательности для различных начальных точек с помощью компьютера.

е) Обнаружьте самоподобные структуры из точек все возрастающего периода рядом с  $M$ .

ж) Докажите, что существует непериодическая точка (точка бесконечного периода).

**11.** Пусть  $M$  — произвольная выпуклая фигура с гладкой границей.

а) Докажите, что для любого целого  $n \geq 3$  существует точка периода  $n$ .

б) Множество точек данного периода  $n$  ограничено.

**12.** Пусть  $M$  — правильный пятиугольник. Продлим его стороны до пересечения, чтобы получилась звезда. Она состоит из исходного пятиугольника и пяти *лучей* — равнобедренных треугольников.

а) Найдите образы лучей при преобразовании  $r$  и  $r^2$ ;

б) найдите множество, инвариантное относительно преобразования  $r$ , содержащее лучи;

в) найдите последовательность инвариантных областей, покрывающих всю плоскость, таких, что каждая следующая содержит предыдущую;

г) докажите, что для любой исходной точки  $x$  последовательность точек  $x_n$  ограничена;

д) решите задачу А для произвольного  $n$ .

**13.**  $M$  — произвольный выпуклый многоугольник. С каждой точкой  $x$  общего положения связана последовательность  $A_i$  вершин многоугольника, такая что  $A_i$  является точкой касания правой касательной из точки  $x_i$  к  $M$ . Докажите, что последовательность  $A_i$  периодична тогда и только тогда, когда точка  $x$  периодична.

**14.**  $M$  — выпуклый многоугольник, все вершины которого имеют рациональные координаты.

а) Докажите, что последовательность точек  $x_n$  ограничена;

б) докажите, что последовательность точек  $x_n$  периодична.

**15.**  $M$  — правильный  $n$ -угольник. Докажите, что последовательность точек  $x_n$  ограничена.

**16.** Исследуйте случай, когда  $M$  — правильный восьмиугольник (решите задачи А и В, докажите существование непериодической точки).

**17.** Докажите, что последовательность вершин  $A_i$  (см. задачу 12) однозначно определяет точку  $x$  тогда и только тогда, когда точка  $x$  непериодична, для следующих фигур  $M$ :

а) правильного пятиугольника;

б) правильного  $n$ -угольника.

## Задача 2. Диофантовы уравнения для многочленов

Эта задача предложена В. В. Прасоловым, представлял ее на конференции С. А. Дориченко.

Для решения этой задачи необходимы хотя бы минимальные сведения о многочленах и комплексных числах. В частности, нужно знать определение взаимно простых многочленов и ОСНОВНУЮ ТЕОРЕМУ АЛГЕБРЫ: *всякий многочлен имеет столько комплексных корней (с учетом кратности), какова его степень.*

Для всякого многочлена  $f$  обозначим через  $n_0(f)$  количество различных корней этого многочлена.

1. Пусть  $a(x)$ ,  $b(x)$  и  $c(x)$  — попарно взаимно простые многочлены, связанные соотношением  $a + b + c = 0$ . Тогда степень каждого из этих многочленов не превосходит  $n_0(abc) - 1$ .

2. Пусть  $f$  и  $g$  — взаимно простые многочлены ненулевой степени. Тогда

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg f + 1.$$

3. Является ли неравенство в предыдущей задаче точным (может ли оно для некоторых многочленов обращаться в равенство)?

4. Пусть  $f$ ,  $g$  и  $h$  — взаимно простые многочлены, причем хотя бы один из них — не константа. Тогда равенство

$$f^n + g^n = h^n$$

не может выполняться при  $n \geq 3$ .

Рассмотрим диофантовы уравнения более общего вида  $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ . Такое уравнение имеет очевидное решение, если одно из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  равно 1. Заметим также, что для многочленов с комплексными коэффициентами показатели равноправны. Поэтому будем считать, что  $2 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ .

**5.** Уравнение

$$f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$$

может иметь взаимно простые решения лишь для случая следующих наборов  $(\alpha, \beta, \gamma)$ :  $(2, 2, \gamma)$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  и  $(2, 3, 5)$ .

**6.** Найдите в каждом из приведенных в предыдущей задаче случаев взаимно простые решения.

### Задача 3. Сортировка железнодорожных составов

Предложена и представлялась А.Г. Кулаковым.

В этой задаче речь пойдет о системе сортировок, которая возникла из очень жизненной ситуации — сортировки железнодорожных составов.

Представьте себе устройство, состоящее из нескольких стеков (тупиков), соединенных, как на рисунке 1.

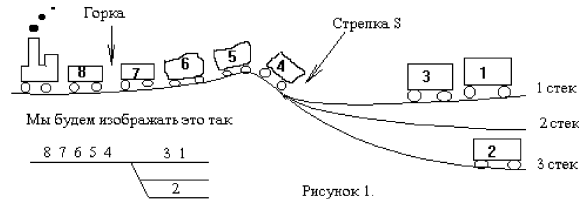


Рисунок 1.

Один из стеков выделен, и мы будем называть его *горкой*. В начале сортировки на горке стоит железнодорожный состав — пронумерованные вагоны в перепутанном порядке. Не ограничивая общности можно считать, что номера вагонов образуют *перестановку*, т.е. последовательность чисел  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , в которую каждое число от 1 до  $n$  входит ровно один раз. Множество всех перестановок  $n$  чисел обозначается  $S_n$ .

В конце сортировки вагоны должны стоять в порядке  $1, 2, 3, \dots, n$ . Через стрелку  $S$  вагоны переходят с горки в стеки и из стеков на горку.

В дальнейшем мы будем считать, что число вагонов равно  $n$ , а число стеков, не считая горки, равно  $k$ , причем все стеки «очень большие», т.е. могут вместить сколько угодно вагонов, хоть весь состав.

Опишем теперь как происходит сортировка.



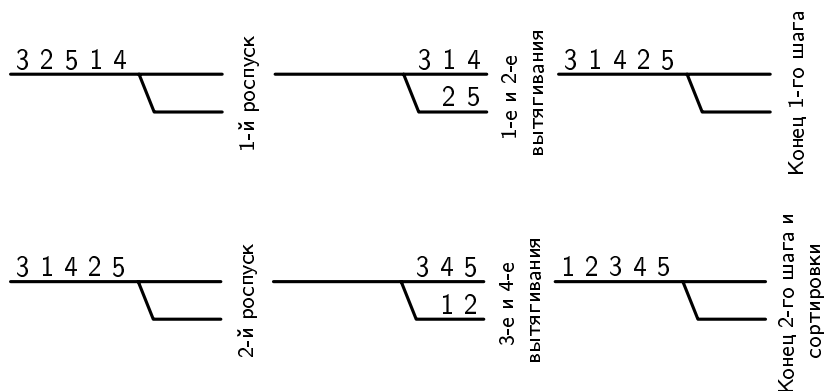
Она состоит из двух этапов.

Первый этап называется *ропуском* (состав распускают с горки). Крайний правый вагон на горке отцепляют (железнодорожники называют его *отцепом*), и он переходит в один из стеков; затем эта операция повторяется до тех пор, пока все вагоны не распределятся по стекам.

Второй этап состоит из нескольких (может быть одной) повторяющихся операций. Каждая такая операция называется *вытягиванием*. Все вагоны из некоторого стека как единое целое, не меняя порядка, перемещают на горку.

На рисунке 2 приведен пример.

Рисунок 2



Роспуск и все следующие за ним вытягивания до следующего роспуска состава назовем *шагом сортировки*.

1. Докажите, что каждый состав можно отсортировать за  $n - 1$  шаг.

2. Отсортируйте состав, идущий в порядке 5, 7, 1, 3, 2, 6, 4 на горке с двумя стеками ( $k = 2$ )

- за наименьшее число шагов;
- за наименьшее число вытягиваний.

3. Отсортируйте тот же состав на горке с тремя стеками ( $k = 3$ )

- а) за наименьшее число шагов;
- б) за наименьшее число вытягиваний.

4. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с двумя стеками ( $k = 2$ )

- а) за наименьшее число шагов;
- б) за наименьшее число вытягиваний.

5. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с тремя стеками ( $k = 3$ )

- а) за наименьшее число шагов;
- б) за наименьшее число вытягиваний.

6. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке

15, 4, 12, 7, 11, 9, 8, 10, 13, 5, 1, 6, 3, 2, 14,

на горке с двумя стеками ( $k = 2$ )

- а) за наименьшее число шагов;
- б) за наименьшее число вытягиваний.

7. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке

4, 12, 7, 11, 9, 8, 10, 13, 5, 1, 6, 3, 2, 14,

на горке с тремя стеками ( $k = 3$ )

- а) за наименьшее число шагов;
- б) за наименьшее число вытягиваний.

8. а) Придумайте алгоритм сортировки, который каждый состав сортирует за число шагов, не превосходящее  $c_1 \ln n + c_2$ , где константы не зависят от  $n$ , но могут зависеть от  $k$ .

б) Докажите, что ваш алгоритм правильно сортирует любой состав.

в) В жизни все немного сложнее. У вагонов состава несколько получателей, каждый получатель может иметь в составе не один, а несколько вагонов, находящихся в разных местах состава. Обычно каждому получателю не важно, в каком порядке к нему попадают вагоны. Придумайте алгоритм сортировки, который каждый состав сортирует за число шагов, не

превосходящее  $c_1 \ln n + c_2$ , где уже  $n$  равно числу «получателей», константы не зависят от  $n$ , но могут зависеть от  $k$ .

**9.** Придумайте полуинвариант, т.е. такую функцию  $f(\sigma)$ , что  $f(e) = 1$ ,  $f(\sigma) \leq n$ , где  $e$  — тождественная перестановка, и любую перестановку нельзя отсортировать меньше, чем за  $\log_k f(\sigma)$  шагов.

Если ваш алгоритм каждый состав сортирует за число шагов, не превосходящее  $c_1 \ln n + c_2$ , где константы не зависят от  $n$ , но, могут зависеть от  $k$ , то в процессе его выполнения совершается не более  $c_1 k \ln n + c_2$  вытягиваний. Обозначим коэффициент перед логарифмом через  $a(k)$ , т.е. будем искать алгоритмы сортировки, в которых для числа вытягиваний выполнено неравенство  $m \leq a(k) \ln n + c_2$ .

**10.** Придумайте алгоритмы сортировки, у которых  
 а) коэффициент  $a(2)$  принимает как можно меньшее значение;  
 б) коэффициент  $a(3)$  принимает как можно меньшее значение;  
 в)  $a(k)$  не зависит от  $k$ , т.е. является константой и как можно меньшей.

**11.** Придумайте алгоритм сортировки, который каждую перестановку сортирует за наименьшее число вытягиваний, возможное для данной перестановки.

**12.\*** Придумайте алгоритм сортировки, который каждую перестановку сортирует за наименьшее число

а) шагов,

б) вытягиваний,

возможное для данной перестановки, если в каждом стеке помещается ограниченное число вагонов  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

**13.\*** Оцените, каков для алгоритма из предыдущей задачи порядок числа вагонов  $W$ , прошедших через стрелку  $S$ ?

**14.\*\*** Пусть теперь разрешается распускать не весь состав и вытягивать из стеков не обязательно всю группу вагонов.

Придумайте алгоритм сортировки, в котором каждая перестановка сортируется за наименьшее число  $W$  вагонов, прошедших через стрелку  $S$ , возможное для данной перестановки.

### Задачи, добавленные после «промежуточного финиша»

**15.** Пусть в составе  $(i + 1)$ -ый вагон расположен правее  $i$ -ого. Докажите, что тогда для любого алгоритма, сортирующего состав, существует алгоритм «не хуже первого» (это означает, что новый алгоритм делает не больше шагов и не больше вытягиваний), который при сортировке все время отправляет  $i$ -ый и  $(i + 1)$ -ый вагоны в один стек.

Теперь сформулируем алгоритм поразрядной сортировки, который в той или иной форме встретился в решениях пунктов а) задач 2–7. Мы сформулируем его для сортировочной горки с двумя стеками, но он естественно обобщается на произвольное  $k$ .

#### Алгоритм ПОРАЗРЯДНАЯ СОРТИРОВКА

- 1° Напишем номера наших вагонов в двоичной системе счисления начиная с 0. Нумерация разрядов: от младшего, нулевого разряда единиц к старшему.
- 2° Дадим стекам номера 0 и 1.
- 3° Сортировка начинается с нулевого шага.  $l$ -ый шаг сортировки состоит в следующем: при роспуске состава вагоны, номера которых в  $l$ -ом разряде имеют цифру 0, отправляются в 0-ой стек, а номера которых в  $l$ -ом разряде имеют цифру 1, отправляются в 1-ый стек. После роспуска вытягиваются сначала вагоны из 0-ого стека, а затем из 1-ого. На этом  $l$ -ый шаг сортировки заканчивается.

**16.** Докажите, что алгоритм поразрядной сортировки сортирует любой состав за не более, чем  $\lceil \log_k n \rceil$  шагов. (Напомним, что  $\lceil x \rceil$  — это округление  $x$  до целого числа с избытком.)

При решении задачи 9 в некоторых работах к промежуточному финишу встретилась следующая пара инвариантов.

**Определение 1.** Назовем множество элементов перестановки  $\sigma$

$$\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \sigma_{k_3}, \dots, \sigma_{k_s}$$

*обратной цепью* если  $\sigma_{k_i} > \sigma_{k_{i+1}}$ ,  $k_i < k_{i+1}$ . Обратная цепь, состоящая из наибольшего числа элементов, называется *максимальной*. Ее длину обозначим  $f(\sigma)$ .

**17.** Докажите, что длина максимальной обратной цепи перестановки  $f(\sigma)$  за один шаг может уменьшиться не более чем в  $k$  раз.

Это доказывает, что оценка, полученная в задаче 16 не улучшаема, т.к. наибольшей максимальной обратной цепью обладает перестановка  $n, n-1, \dots, 2, 1$  и ее длина равна  $n$ .

**Определение 2.** Для перестановки  $\sigma$  назовем элемент  $i$  *точкой возврата*, если элемент  $i+1$  стоит в перестановке левее  $i$ . Множество точек возврата обозначим  $V(\sigma)$ , число элементов в  $V(\sigma)$  обозначим  $v(\sigma)$ , число различных номеров в перестановке после перенумерации<sup>1)</sup> обозначим через  $l(\sigma)$ .

**18.** Докажите, что  $v(\sigma)$  за один шаг может уменьшиться не более чем в  $k$  раз.

**19.** Докажите, что для любой перестановки  $\sigma$  выполнено  $f(\sigma) \leq v(\sigma) + 1$  и что есть перестановки, для которых неравенство строгое.

---

<sup>1)</sup>Операция перенумерации определена в решениях предыдущих задач и обсуждалась на промежуточном финише, см. с. 80.

**Определение 3.** Эйлером были введены следующие понятия:  $D(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$  называется *множеством спуска*, число  $|D(\sigma)|$  спусков перестановки  $\sigma$  обозначается  $d(\sigma)$ , а многочлен

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in S_n} x^{1+d(\sigma)}$$

называется многочленом Эйлера. Коэффициент при  $x^k$  в выражении  $A_n(x)$  обозначается  $A(n, k)$  и называется *числом Эйлера* (не путать с другими многочленами и числами Эйлера, у Эйлера такого добра много). Следовательно,

$$A(n, k) = \text{card}\{\sigma \in S_n \mid d(\sigma) = k - 1\},$$

где  $\text{card } X$ , как и уже использованное выше обозначение  $|X|$ , есть количество элементов в множестве  $X$ .

- 20.** а) Докажите, что  $l(\sigma) = v(\sigma) + 1$ .  
 б) Докажите, что  $v(\sigma) = d(\sigma^{-1})$ , где  $\sigma^{-1}$  — обратная перестановка. (Перестановку  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  можно рассматривать как функцию, которая сопоставляет числу  $k$  в интервале от 1 до  $n$  число  $\sigma_k$ , стоящее на  $k$ -ом месте в последовательности, задающей перестановку. Поэтому можно говорить о композиции перестановок. По определению, *обратная перестановка* в композиции с данной дает единичную перестановку  $1, 2, 3, \dots, n$ .)  
 в) Приведите первые 5 многочленов Эйлера.  
 г)\* Найдите многочлен Эйлера для любого  $n$ .

**21.** Отсортируйте состав из 13 вагонов, идущих в обратном порядке, на горке с двумя стеками ( $k = 2$ ) за 6 вытягиваний.

**22.** Какое наибольшее число вагонов, идущих в обратном порядке, на горке с двумя стеками ( $k = 2$ ) вы можете отсортировать

- а) за 7 вытягиваний;  
 б) за 8 вытягиваний?

**23.** Отсортируйте состав из 13 вагонов, идущих в обратном порядке, на горке с тремя стеками ( $k = 3$ ) за 5 вытягиваний.

**24.** Какое наибольшее число вагонов, идущих в обратном порядке, на горке с тремя стеками ( $k = 3$ ) вы можете отсортировать

а) за 6 вытягиваний;

б) за 7 вытягиваний?

**25.** Отсортируйте состав из 14 вагонов, идущих в обратном порядке, на горке с тремя стеками ( $k = 3$ ), два из которых неограничены, а в третий может вместиться только 2 вагона, сделав как можно меньше вытягиваний.

**26.** Составьте таблицу, где в  $k$ -ом столбце и в  $p$ -ой строке стоит максимальное число  $n$  вагонов в перестановке  $n, n - 1, \dots, 2, 1$ , которое можно отсортировать вашим алгоритмом на горке с  $k$  стеками за  $p$  вытягиваний.

Все определенные выше величины  $d(\sigma)$ ,  $v(\sigma)$ ,  $l(\sigma)$  являются функциями на множестве  $S_n$  всех перестановок.

**Определение 4.** Если на  $S_n$  задана функция  $f(\sigma)$ , то число

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$$

называется средним значением этой функции на  $S_n$ . Величина  $\langle f \rangle$ , конечно, зависит от  $n$ .

**27.** а) Вычислите  $\langle d \rangle$ ,  $\langle l \rangle$ ,  $\langle v \rangle$ .

б)\*\* Если  $A$  — ваш алгоритм сортировки, то обозначим через  $s_A(\sigma)$  — число вытягиваний в вашем алгоритме, необходимое для сортировки перестановки  $\sigma$ . Вычислите  $\langle s_A \rangle$ .

#### Задача 4. Классификация гибких кривых и инварианты узлов

Задачу о классификации (задачи 1–9) гибких кривых придумал С.В. Матвеев; для конференции задача была предложена А.Б. Сосинским. Поскольку участники успешно справились с этой задачей, было дано обширное продолжение. Задачи, составляющие продолжение, основаны на работах американского математика Луиса Кауффмана: построенный им полином  $\tilde{P}_L(a)$ , в сущности совпадает со знаменитым *полиномом Джонса*, за который новозеландский математик Воган Джонс получил в 1992 году премию Филдса.

#### Классификация гибких проволок на плоскости

Рассмотрим круглый обруч, сделанный из тонкой гибкой проволоки. Продеформируем его произвольным образом, а затем опустим его на плоскость (рис. 1). Получим на плоскости то, что мы будем называть *проволокой*. Точки такой







проволоки бывают двух типов: *неособые* и *точки самопересечения*, в которых одна часть проволоки проходит над другой (рис. 2).

Проволоку можно двигать по плоскости, не выводя ее в пространство, сгибать и разгибать ее части, пропускать одну часть под (или над) другой. При этом нельзя уничтожать образующиеся при этом петли, стягивая их в точку (считайте, что проволока ломкая и сломается при таком действии, рис. 3). На рис. 4 показаны допустимые способы изменения взаимного расположения частей: *наложение* и *протаскивание*. Их можно выполнять как в одну, так и в другую сторону. Две проволоки называются *эквивалентными*, если одну можно перевести в другую описанными выше преобразованиями.

Основная цель состоит в *классификации проволок*, т.е. нужно составить список *стандартных* проволок, такой, что любая проволока эквивалентна ровно одной из списка.

1. Какие из проволок на рис. 5 эквивалентны?
2. Составьте полный список проволок, т.е. такой список  $h_1, h_2, \dots$ , что любая проволока эквивалентна по крайней мере одной из этого списка.

После того как задача 2 решена, для решения задачи классификации проволок остается найти такой полный список  $h_1, h_2, \dots$ , все элементы которого попарно не эквивалентны ( $i \neq j \Rightarrow h_i \not\sim h_j$ ).

3. Докажите, что проволоки  и  не эквивалентны.

Пусть  $x$  — точка на проволоке  $h$ . Выберем на  $h$  направление обхода. Обозначим через  $\tau(x)$  единичный касательный вектор к проволоке в этой точке. Начиная с некоторой точки  $x_0 \in h$ , пройдем вдоль проволоки и посмотрим, как будет меняться вектор  $\tau(x)$ , начало которого мы перенесем в некоторую фиксированную точку  $O$  на плоскости. Ясно, что этот

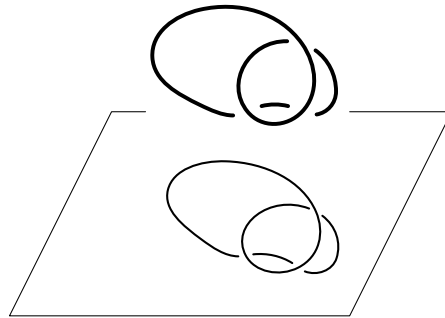


Рис. 1. Гибкая проволока



Рис. 2. Неособые точки и точки самопересечения

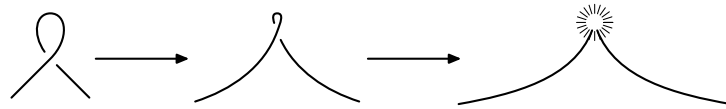


Рис. 3. Запрещенное действие

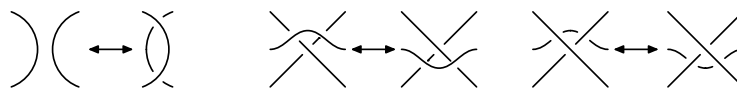


Рис. 4. Наложение и протаскивание

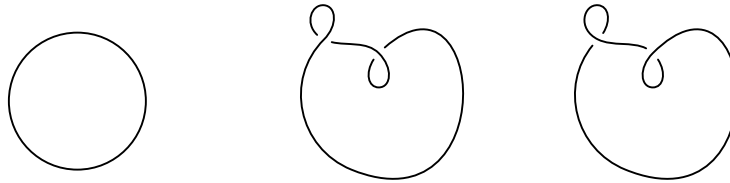


Рис. 5. Эквивалентны ли эти проволоки?

вектор будет поворачиваться (по часовой стрелке или против) и совершит некоторое количество  $r(h)$  полных оборотов вокруг  $O$ . Если взять противоположное направление обхода, направление вращения изменится на противоположное, но количество полных оборотов будет, разумеется, тем же. Ясно также, что  $r(h)$  не зависит от выбора точки  $O$ . Величину  $r(h)$  назовем *числом вращения* проволоки  $h$  (она также иногда называется *индексом Уитни* или *числом Гаусса* кривой  $h$ ). В случае, когда  $h$  ориентирована (фиксировано направление обхода), число  $r(h)$  снабжается знаком  $+$  или  $-$  в зависимости от направления оборотов.

4. Докажите, что эквивалентные проволоки имеют одинаковое число вращения.

Обычно нетрудно посчитать число вращения прямо из определения. Однако  $r(h)$  оказывается связанным с числом касательных к проволоке  $h$  в данном направлении, и это позволяет решить следующую задачу.

5. Придумайте простой способ вычисления  $r(h)$ .

6. Найдите две неэквивалентные проволоки с одинаковым числом вращения, попробуйте доказать их неэквивалентность.

Рассмотрим проволоку  $h$ . Заменяем ее узкой плоской лентой  $\rho(h)$ , расположенной так же, как и проволока. Разрежем

ленту в некотором месте и, слегка приподняв ее над плоскостью, растянем за концы разреза (рис. 6). Лента окажется закрученной на какое-то число оборотов  $t(h)$  (мы будем считать это число положительным, если закрутка соответствует правому винту, в противном случае будем считать это число отрицательным). Назовем полученную величину *числом скручивания* проволоки  $h$ .

7. Попробуйте объяснить (а возможно и доказать), почему эквивалентные проволоки имеют одинаковые числа скручивания.

Окончательно классификация проволок будет завершена, если вы решите еще и следующую задачу.

8. Две плоские проволоки эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число вращения и одинаковое число скручивания.

Теперь предположим, что можно не только изгибать проволоку, но и растягивать и сжимать. Поместим ее на сферу и получим сферическую проволоку.

9. Решите задачу классификации для сферических проволок.

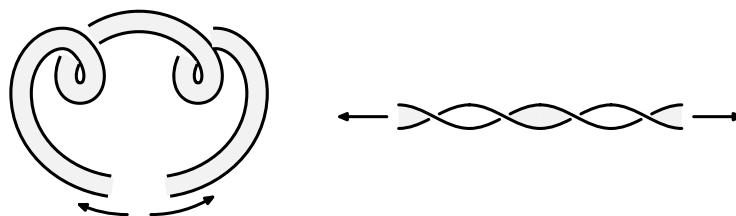


Рис. 6. Число скручивания

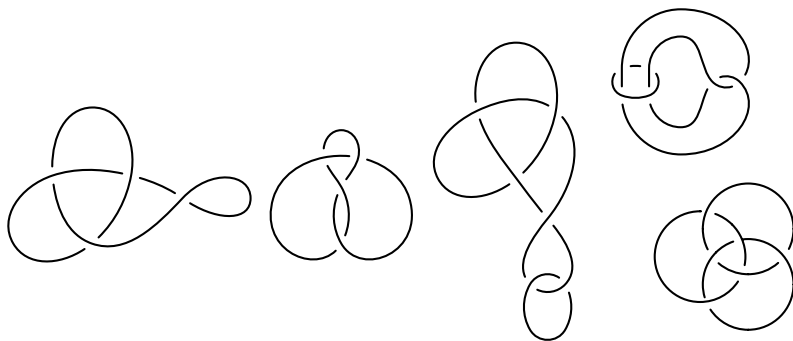


Рис. 7. Узлы

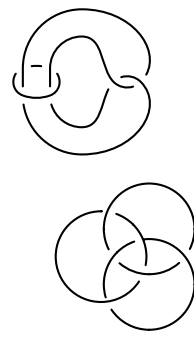




Рис. 8. Зацепления

### Заузленные гибкие проволоки на плоскости

По-прежнему рассматриваются гибкие проволоки, лежащие на плоскости, но теперь мы не требуем, чтобы исходный обруч имел форму окружности: он может быть заузленным (как на рис. 7). Как и прежде, мы опускаем его на плоскость, по которой плоский узел может скользить, совершая операции наложения и протаскивания; устранение маленьких петель по-прежнему запрещено. Эквивалентность определяется как и ранее. Наша цель — найти *инварианты* для таких проволочных узлов, притом в двух случаях: когда они ориентированы, и когда нет.

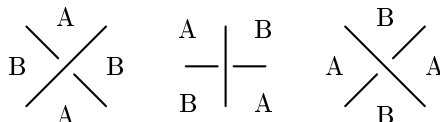
**10.** (Ориентированный случай.) Назовем точку самопересечения *положительной* (*отрицательной*), если она имеет вид  (

(а) пользуясь этими понятиями, придумайте инвариант  $w(H)$  ориентированных плоских узлов  $H$  (доказав его инвариантность);

(б) укажите, что происходит с  $w(H)$  при запрещенной операции.

В неориентированном случае все точки самопересечения

одинаковы, но они определяют два разных угла, называемых *A-углами* и *B-углами*:



**11.** (Неориентированный случай.) Дайте строгое определение *A-угла* и *B-угла*.

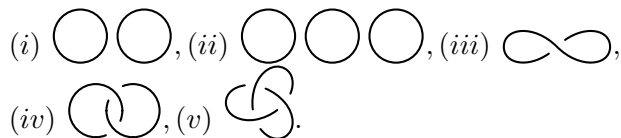
Далее, кроме заузленных (или незаузленных) проволок, состоящих из одного куска, мы будем рассматривать *зацепления*, состоящие из нескольких таких проволок, которые к тому же могут заузливаться между собой (рис. 8).

Каждому неориентированному зацеплению (в частности, узлу)  $L$  мы сопоставим многочлен  $P_L(a, b, c)$ , удовлетворяющий трем условиям:

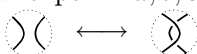
$$(1) P_{\times} = aP_{\smile} + bP_{\succ}; \quad (2) P_{L \circ} = cP_L; \quad (3) P_{\bigcirc} = 1.$$

Здесь запись  $P_{\times}$ ,  $P_{\smile}$ ,  $P_{\succ}$  означает, что рассматриваются многочлены от трех разных зацеплений, совпадающих всюду, кроме небольшого кружочка, в котором у первого происходит самопересечение  $\times$ , у второго — самопересечение заменено на проход по *B-углу*  $\smile$ , у третьего — по *A-углу*  $\succ$ , далее,  $\bigcirc$  обозначает простейший (круглый) узел, а  $L \bigcirc$  — зацепление (или узел)  $L$ , к которому добавили  $\bigcirc$  так, что новых зацеплений не произошло.

**12.** Найдите  $P_L$  для следующих  $L$ :



**13.** Покажите, что многочлен  $P_L$ , удовлетворяющий условиям (1), (2), (3), если он существует, определен однозначно зацеплением  $L$ .



**14.** (а) Найдите соотношения между параметрами  $a, b, c$ , при которых  $P_L$  не меняется при наложении . Для этих значений параметров проверьте, меняется ли  $P_L$  при (б) протаскивании; (в) устранении петелек.

Отныне мы рассматриваем ориентированный случай и *разрешаем устранение (рождение) петелек* (в сущности, это значит, что мы рассматриваем задачу эквивалентности в пространстве).

**15.** Пользуясь задачей 14 (особенно пунктом (а)), найдите инвариантный многочлен  $\tilde{P}_L(a)$  плоских узлов и зацеплений.

**16.** Вычислите  $\tilde{P}_L(a)$  для пяти случаев задачи 12.

**17.** Сравните результаты задач 10б и 14в: чем схожи и чем различаются  $w(H)$  и  $P(H)$ ?

**18.** Найдите инвариант эквивалентности ориентированных узлов в пространстве и с его помощью докажете, что узел  нельзя распутать (превратить в ).

Полное решение задачи 18 должно включать доказательство *существования* вашего инварианта, для этого, например, достаточно определить его (т.е. предложить алгоритм для его вычисления) и показать инвариантность относительно трех преобразований



### Дополнительные задачи о заузленных проволоках

Если вы нашли требуемый инвариант  $K_L(a)$  (это комбинация положительных и отрицательных степеней  $a$  с целыми

коэффициентами, полученная модификацией  $\tilde{P}_L(a)$  из задачи 15, инвариантная относительно запрещенного ранее преобразования  $\curvearrowright \leftrightarrow \curvearrowleft$ , то попробуйте решить следующие задачи.

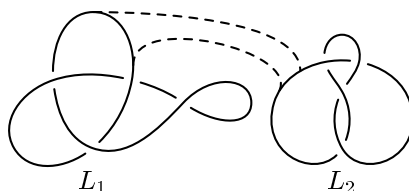
**19.** Проверьте, что  $K_L(a)$  удовлетворяет следующим свойствам

$$(I) \quad a^4 K_{\text{⊗}} - a^{-4} K_{\text{⊗}} = (a^{-2} - a^2) K_{\text{⊗}};$$

$$(II) \quad K_{\text{○}} = 1;$$

**20.** Пусть  $L$  — незацепленное объединение двух зацеплений  $L_1$  и  $L_2$ . Докажите, что  $K_L = (-a^2 - a^{-2})K_{L_1} \cdot K_{L_2}$ .

**21.** Пусть  $L = L_1 \# L_2$  — «связная сумма»  $L_1$  и  $L_2$ , т.е. зацепление, полученное способом, указанным на картинке. Докажите, что  $K_L = K_{L_1} \cdot K_{L_2}$ .



**22.** Как изменяется  $K_L$  при изменении ориентации  $L$  на противоположную?

**23.** Найдите два неэквивалентных зацепления  $L$  и  $L'$ , для которых  $K_L = K_{L'}$ .



## Задача 5. Полимино

Предложена О. Ф. Крижановским, представляли  
О. Ф. Крижановский и К. П. Кохась.

Все встречающиеся в дальнейшем переменные — натуральные числа, фигуры — клетчатые, состоящие из единичных квадратиков, указываются с точностью до поворотов и симметрий (кроме некоторых очевидных ситуаций). Если предлагается рассматривать фигуры с добавленными или вырезанными клетками и указано только количество добавляемых или вырезаемых клеток, то необходимо рассмотреть все имеющиеся возможности добавления и удаления.

Основная цель в этой серии задач — понять, когда фигуру можно разбить на части предписанного вида. Части не могут перекрываться, но могут иметь общие участки границы.

**Серия А. Домино.**  $(\square\square)$

**А1.** Исследовать, при каких  $M$  и  $N$  прямоугольник  $M \times N$  можно разбить на прямоугольники  $2 \times 1$  (Краткое обозначение условия:  $M \times N$  на  $2 \times 1$ ).

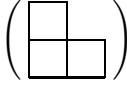
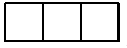
**А2.** Исследовать, при каких  $M$  и  $N$  прямоугольник  $M \times N$  с одной вырезанной клеткой можно разбить на прямоугольники  $2 \times 1$  ( $M \times N - 1$  на  $2 \times 1$ ).

**А3.** Исследовать, при каких  $M$  и  $N$  прямоугольник  $M \times N$  с одной добавленной клеткой можно разбить на прямоугольники  $2 \times 1$  ( $M \times N + 1$  на  $2 \times 1$ ).

**А4.**  $M \times N - 2$  на  $2 \times 1$ .

**А5.**  $M \times N + 2$  на  $2 \times 1$ .

**А6.**  $M \times N - 3$  на  $2 \times 1$ .

**Серия В. Угловые тримино** ( $2 \times 2 - 1$ ).  Угловые и прямые  тримино.

**В1.**  $M \times N$  на  $2 \times 2 - 1$ .

**В2.**  $M \times N - 1$  на  $2 \times 2 - 1$ .

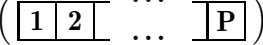
**В3.**  $M \times N + 1$  на  $2 \times 2 - 1$ .

**В4.**  $2M \times 2M$  без углового квадрата  $M \times M$  на  $2 \times 2 - 1$ .

**В5.**  $M \times N$  на одно  $2 \times 2 - 1$  и остальные  $3 \times 1$ .

**В6.**  $M \times N$  на три  $2 \times 2 - 1$  и остальные  $3 \times 1$ .

**В7.** Верно ли, что существует такое целое число  $C$ , что из любого количества уголков  $2 \times 2 - 1$  (отличного от 1 и 3) и любого количества, не меньшего  $C$ , тримино  $3 \times 1$ , можно составить прямоугольник?

**Серия С. Прямые  $P$ -мино** ( $P \times 1, P > 2$ ). 

**С1.**  $M \times N$  на  $P \times 1$ .

**С2.**  $M \times N - 1$  на  $P \times 1$ .

**С3.**  $M \times N + 1$  на  $P \times 1$ .

**С4.**  $M \times N - 2$  на  $P \times 1$ .

**С5.**  $M \times N + 2$  на  $P \times 1$ .

**С6.**  $M \times N \pm 1$  на  $P \times 1$  (одна клетка вырезана и одна добавлена).

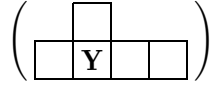
**С7.**  $M \times N - C \times D$  на  $P \times 1$ .

**Серия D. Прямоугольники  $A \times B$**  ( $A, B > 1$ ).

**D1.**  $M \times N$  на  $A \times B$ .

**D2.**  $M \times N - 1$  на  $A \times B$ .

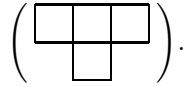
Серия Е. L- и T-тетрамино  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{L} & \square \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{T} & \square \\ \hline \end{array} \right)$  и Y-пентамино.



**Е1.**  $M \times N$  на L-тетрамино.

**Е2.**  $M \times N$  на T-тетрамино.

**Е3.** Пусть прямоугольник  $M \times N$  разбит на несколько T-тетрамино. Докажите, что количество «вверх смотрящих» тетрамино  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$  равно количеству «вниз смотрящих»



**Е4.**  $M \times N$  на Y-пентамино.

## Задача 6. Двойные сети

Предложена и представлялась А. В. Шаповаловым.

### Определения

Систему из конечного числа точек (вершин) и попарно непересекающихся отрезков (ребер) с концами в этих точках назовем *двойной сетью (ДС)*, если

- а) между любыми двумя вершинами есть путь по ребрам, и
- б) если кратчайший путь между двумя вершинами не лежит на одной прямой, то найдется два кратчайших пути одинаковой длины без общих внутренних точек (длина пути — это сумма длин ребер).

Кратчайшие пути, соединяющие вершины и лежащие на одной прямой, будем называть *прямолинейными*.

Примеры ДС: квадрат, квадрат с диагоналями и пятой вершиной в центре, куб, октаэдр.

Назовем вершину ДС *вырожденной*, если она связана с каждой из остальных прямолинейным путем. Назовем ДС *вырожденной*, если все ее вершины вырождены. Таким образом, в *невырожденной* ДС есть по крайней мере две вершины, не связанные прямолинейным путем.

Назовем ДС на плоскости *красивой*, если в ней нет вырожденных вершин, и для каждой пары вершин, не связанных прямолинейным путем, найдутся два кратчайших пути, ограничивающие параллелограмм.

Пусть  $k$  — наибольшее число вершин ДС, через которые можно првест прямую,  $n$  — общее число вершин в ДС. Тогда *нелинейностью* ДС назовем разность  $n - k$ .

**Задачи**

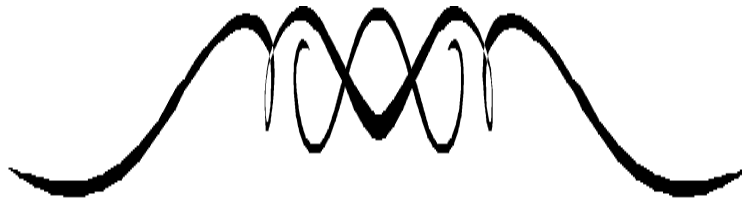
- 0.** а) Какие многоугольники являются двойными сетями?  
 б) Докажите, что ДС нелинейности 0 — вырожденная.  
 в) Для каждого  $n > 3$  приведите пример невырожденной ДС нелинейности 2 с  $n$  вершинами.
- 1.** а) Приведите пример красивой ДС с 7 вершинами.  
 б) Какая нелинейность может быть у вырожденной сети?  
 в) Найдите все ДС нелинейности 0 и 1.  
 г) Сколько вершин может быть у красивой сети?  
 д) Найдите все ДС нелинейности 2.
- 2.** На плоскости отмечены 5 точек — вершины правильного пятиугольника. Можно ли к ним добавить еще несколько вершин и построить несколько ребер так, чтобы получилась двойная сеть?
- 3.** а) Некоторая замкнутая ломаная проходит по ребрам и вершинам плоской ДС и ограничивает выпуклый многоугольник. Докажите, что если взять все ребра и вершины этой ДС, лежащие внутри и на границе этого многоугольника, то получится ДС.  
 б) Докажите, что внешние ребра невырожденной ДС ограничивают выпуклый многоугольник.  
 в) Назовем меньшую сеть, полученную описанным в пункте а) способом, *подсетью*. Найдите пример красивой ДС, которая не является подсетью большей красивой ДС.
- 4.** Найдите все плоские двойные сети  
 а) с 4; б) с 5; в) с 6 вершинами.
- 5.** а) Какое наибольшее число попарно не параллельных ребер может быть у красивой сети?  
 б) Найдите все красивые ДС.  
 в) Найдите все плоские сети.

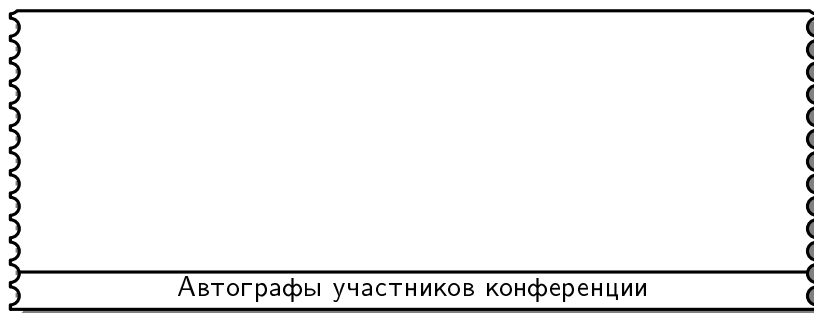
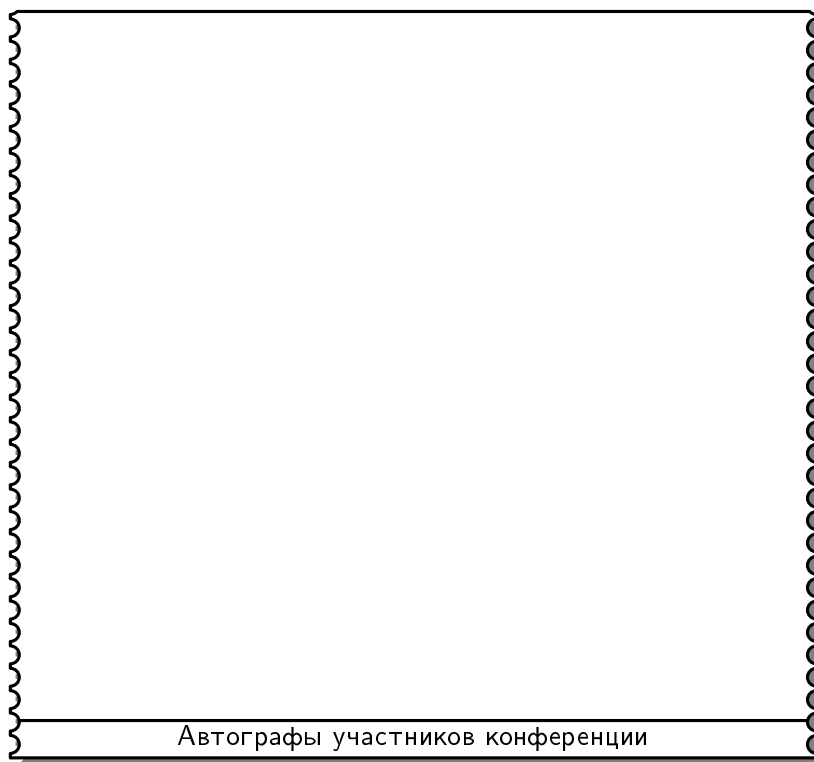
**Еще одно определение**

Возьмем любой кратчайший путь, соединяющий две вершины ДС  $u$  и  $v$ . Если на ребрах, входящих в этот путь, нарисовать стрелки в направлении от  $u$  к  $v$ , получим некоторую последовательность векторов.

Назовем двойную сеть *регулярной*, если она невырождена и для любого кратчайшего пути и любой перестановки сопоставленной ему последовательности векторов путь, соответствующий этой переставленной последовательности также идет по ребрам ДС.

6. а) Приведите пример красивой не регулярной ДС.  
б) Докажите, что плоская регулярная ДС красива.  
в) Найдите все регулярные ДС в пространстве.  
г) Какие еще бывают ДС в пространстве? Выделите интересные классы и опишите их.









## Сортировка железнодорожных составов

	1	2		3		4		5		6		7		8		9
		а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	в
А. Вашевник																
В. Клепцын	+	+	+	+	+	+	⊕!	+	+	+	⊕!	+	+	+	+	+2
Я. Губин																
А. Овечкин					⊕!											
А. Инюхин																
Е. Ширяев	+	+	±	+		-										
О. Карпенков	+	+	±	+		+		+		+		+		+	+	+2
В. Кисунько																
А. Смирнов	+	+	+	+		+		+		+		+		+	+	+2
С. Новиков	+	-	-	±		±	-	±	-	-	-	-	-			
Сербия <sup>1)</sup>	+	-	±	+		-	-	-		-	-	-				+2
А. Хохлов	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+2
Е. Филатов	+	+	±	+		+	-	+		+	-	+		+	+	+2

	10	11	15	16	17	18	19	20				21	22		23	24		25	27
								а	б	в	г		а	б		а	б		а
А. Вашевник																			
В. Клепцын	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	A <sub>(n,2)</sub>	+	+	+	+	+	+	+	+
В. Кисунько																			
А. Смирнов	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	A <sub>(n,2)</sub>	+	+	+	+	+	+	+	+
А. Хохлов	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2)	+	+	+	+	+	+	+	+

<sup>1)</sup>Представлена коллективная работа; фамилии авторов решений приводятся в главе **Участники** под тем же названием.

<sup>2)</sup>Реккурентные соотношения

**Классификация гибких кривых**

	1	2	3	4	5	6	7	7'	8	9
Е. Бегельфор	+	∓								
О. Ванюшина С. Уздин	+		$\begin{matrix} + \\ \text{mod } 7 \end{matrix}$	$\pm$	$\frac{\pm}{2}$	$\begin{matrix} + \\ \text{mod } 3 \end{matrix}$	-			
А. Вашеvник В. Клепцын	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
А. Дехтярь	+	∓	$\begin{matrix} + \\ \text{mod } 7 \end{matrix}$	-	∓	$\begin{matrix} + \\ \text{mod } 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \text{mod } 8 \end{matrix}$	-		
В. Кисунько А. Смирнов	+	∓	+	+	$\pm$	+	+	+	+	+
М. Mazi	+		+	+	+	+	+	+	+	+
А. Петров		+		$\frac{\pm}{2}$			$\frac{\pm}{2}$		+	$\frac{\pm}{2}$

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
О. Ванюшина С. Уздин	+	+	+	+	+	+	+	+	<sup>1)</sup>	-	-	$\frac{\pm}{2}$		
А. Вашеvник В. Клепцын	+	+	+	$\pm$	+	+	$\begin{matrix} + \\ \text{без ii)} \end{matrix}$	+	+	+	+	+	+	$\frac{\pm}{2}$
А. Дехтярь	+	+	+		-									
В. Кисунько А. Смирнов	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\frac{\pm}{2}$
М. Mazi	+	+	+	$\frac{\pm}{2}$	+	+	+	-						
А. Петров	+	+	$\begin{matrix} + \\ \text{без v)} \end{matrix}$	∓	+	+	$\begin{matrix} + \\ \text{без v)} \end{matrix}$	+	-	+	+	+	-	

<sup>1)</sup> Построен свой инвариант.



	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	D1	D2	E1	E2	E3	E4
Б. Антич В. Мандич Н. Мудрински В. Розгич А. Хайду	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+	±	+	+	+	-		∓!
П. Бодяков М. Гричик	+	+	+			+		+		+			
К. Бойко П. Гиря	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
А. Болтенков А. Щербина	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+	+	+	+	+			
О. Ванюшина С. Уздин	+									+			
М. Варрава В. Русанов А. Спиридонов	+	+	+			+		+		+			
А. Vodopivec	∓	∓								∓			
Я. Губин А. Овечкин	+	+	+			+		+		+			
J. Silvester J. Kinne Ph. Sprüssel	-	∓						+		∓			
И. Иванов А. Малистов	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+	+	+	+	+			
А. Инюхин А. Сорокин Е. Ширяев	+	+	+					+		+			
А. Караваев	+	+	+	+ / 2		+		+	+	+			
О. Карпенков	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+	+	+	+	+			
А. Орищенко А. Работягов	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+		+	+	+			
С. Перцель	+	+	+	+ / 2	+ / 2	+		+		+			
Е. Филатов Д. Шаповалов	+	+	+	∓	+ / 2	+	+ / 2	+	+	+	∓	∓	

## Двойные сети

	0		1				2	3			4			5			6			
	а	в	а	б	в	г		д	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в
И. Анно			+	+	.	+	.	+	+	.	±	∓			±	±		+	+	∓!
О. Ванюшина	+	+	+	∓	+	+														
С. Уздин																				
A. Vodopivec	+	+	+		.	±														
I. Kler																				
M. Mazi																				
Е. Головин	+	+	+	+	±	±		+	+	±	+				$\frac{±}{2}$	∓		+		
С. Новиков	∓	+	-	-		±	∓	+				∓	∓	∓	-					
А. Петров	±	+	+	-	∓	-	∓	-	-	∓	$\frac{±}{2}$	∓	∓	∓	.	.	∓	+	∓	∓

**Список дипломантов конференции...**

**Jan Christoph Kinne**, ученик 9 класса Sophie-Barat-Schule г. Hamburg, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полмино»* (совместно с P. Sprüssel, J. Sylvester).

**Igor Klep**, ученик 11 класса гимназии Ptuj г. Maribor, награжден дипломом конференции *за существенные результаты в задаче о диофантовых уравнениях для многочленов*.

**Matija Mazi**, ученик 9 класса гимназии Bezigrad г. Ljubljana, награжден дипломом конференции *за успешное исследование инвариантов плоских узлов*.

**Philipp Joachim Sprüssel**, ученик 9 класса гимназии Osdorf/Knabeweg г. Hamburg, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полмино»* (совместно с J. Kinne, J. Sylvester).

**Jan Henrik Sylvester**, ученик 9 класса Sophie-Barat-Schule г. Hamburg, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полмино»* (совместно с J. Kinne, P. Sprüssel).

**Andrej Vodopivec**, ученик 10 класса гимназии Celje г. Celje, награжден дипломом конференции *за участие в решении задач цикла «Полмино»*.

**Ирина Анно**, ученица 10 класса школы №57 г. Москвы, награждена дипломом конференции *за полную классификацию красивых двойных сетей и другие результаты*.

**Борислав Антић**, ученик 9 класса гимназије «Јован Јованович Змај» г. Нови Сад, награжден дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с В. Розгић, В. Мандић, Н. Мудрински, А. Хайду).

**Павел Бодяков**, ученик 11 класса школы №17 г. Твери, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»*

(совместно с М. Гричиком).

**Константин Бойко**, ученик 9 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за наиболее полное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с П. Гирей).

**Андрей Болтенков**, ученик 10 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с А. Щербиной).

**Ольга Ванюшина**, ученица 11 класса школы №239 (физико-математический лицей) г. Санкт-Петербурга, награждена дипломом конференции *за исследование множества непрерывных точек в задаче о внешнем бильярде*

(совместно с С. Уздыным).

**Мария Варава**, ученица 10 класса ФМЛ №35 г. Кирова, награждена дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»*

(совместно с В. Русановым).

**Андрей Вашевник**, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции *за построение и полное исследование оптимального алгоритма сортировки с нестандартной целевой функцией*

(совместно с В. Клепцыным).

**Павел Гиря**, ученик 11 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за наиболее полное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с К. Бойко).

**Евгений Головин**, ученик 10 класса школы-гимназии №26 г. Набережные Челны, награжден дипломом конференции *за ключевые примеры и доказательства в задаче о двойных сетях*.

**Михаил Гричик**, ученик 11 класса школы №17 г. Твери, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»* (совместно с П. Бодяковым).

**Ярослав Губин**, ученик 10 класса Белорецкой Компьютерной Школы, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Овечкиным).

**Андрей Дехтярь**, ученик 10 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за активную работу и успехи в классификации плоских узлов*.

**Илья Иванов**, ученик 11 класса школы-гимназии №1 г. Жуковского, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Малистовым).

**Александр Инюхин**, ученик 10 класса школы №12 г. Калуги, награжден дипломом конференции *за исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Сорокиным, Е. Ширяевым).

**Алексей Караваев**, ученик 11 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»*.



**Олег Карпенков**, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»*.

**Вениамин Кисунько**, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции *за решение аналога Великой теоремы Ферма для многочленов* (совместно с А. Смирновым).

**Виктор Клепцын**, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции *за блестящие достижения в решении задач об инвариантах узлов* (совместно с А. Вашевником).

**Алексей Малистов**, ученик 11 класса лицея №52 г. Рязани, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с И. Ивановым).

**Владимир Мандић**, ученик 10 класса гимназије «Јован Јованович Змај» г. Нови Сад, награжден дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с В. Розгић, Б. Антић, Н. Мудрински, А. Хайду).

**Андрей Мищенко**, ученик 11 класса СУНЦ МГУ г. Москвы, награжден дипломом конференции *за доказательство критерия периодичности в задаче о внешнем биллиарде*.

**Небојша Мудрински**, ученик 10 класса гимназије «Јован Јованович Змај» г. Нови Сад, награжден дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с В. Розгић, Б. Антић, В. Мандић, А. Хайду).

**Сергей Новиков**, ученик 10 класса школы «Шевах-Мофет» г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции *за участие в решении задач о железнодорожных сортировках и двойных сетях*.

**Антон Овечкин**, ученик 10 класса Белорецкой Компьютерной Школы, награжден дипломом конференции *за исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с Я. Губиным).

**Алексей Орищенко**, ученик 11 класса экономического лицея №161 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Работяговым).

**Семен Перцель**, выпускник школы Хандасаим г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»*.

**Александр Петров**, ученик 11 класса средней школы №7 г. Первоуральска, награжден дипломом конференции *за впечатляющие достижения в решении задач об инвариантах узлов*.

**Андрей Работягов**, ученик 10 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Орищенко).

**Виктор Розгић**, ученик 11 класса Ваљевске гимназије г. Ваљево, награжден дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с Б. Антић, В. Мандић, Н. Мудрински, А. Хайду).

**Валерий Русанов**, ученик 10 класса ФМЛ №35 г. Кирова, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»* (совместно с М. Вараввой).

**Микаэль Симкин**, ученик 9 класса школы «Шевах-Мофет» г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции *за исследование в задаче о внешнем бильярде*.

**Александр Смирнов**, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции *за построение и полное исследование оптимального алгоритма сортировки с нестандартной целевой функцией* (совместно с В. Кисунько).

**Алексей Сорокин**, ученик 10 класса школы №19 г. Калуги, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»* (совместно с А. Инюхиным, Е. Ширяевым).

**Антон Спиридонов**, ученик 11 класса ФМЛ №35 г. Кирова, награжден дипломом конференции *за глубокое исследование внешнего бильярда вокруг  $n$ -угольника*.

**Сергей Уздин**, ученик 11 класса школы №239 (физико-математический лицей) г. Санкт-Петербурга, награжден дипломом конференции *за исследование множества непрерывных точек в задаче о внешнем бильярде* (совместно с О. Ванюшиной).

**Евгений Филатов**, ученик 9 класса лицея №22 г. Иваново, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»* (совместно с Д. Шаповаловым).

**Андреа Хайдю**, ученица 9 класса гимназии «Светозар Марковић» г. Суботица, награждена дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с В. Розгић, Б. Антић, В. Мандић, Н. Мудрински).

**Александр Хохлов**, ученик 11 класса школы №17 г. Твери, награжден дипломом конференции *за построение и полное исследование оптимального алгоритма сортировки с нестандартной целевой функцией.*

**Данил Шаповалов**, ученик 10 класса лицея №33 г. Иванова, награжден дипломом конференции *за содержательное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с Е. Филатовым).

**Евгений Ширяев**, ученик 10 класса средней городской школы №3 г. Жуковского, награжден дипломом конференции *за исследования по циклу задач «Полимино»*

(совместно с А. Инюхиным и А. Сорокиным).

**Алексей Щербина**, ученик 11 класса ФМЛ №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции *за существенное исследование по циклу задач «Полимино»*

(совместно с А. Болтенковым).

**... и тех, кто научил их математике**

Чтобы успешно заниматься математикой мало иметь способности — их еще нужно развивать. Поэтому гордость за успешное выступление на конференции наряду с самими участниками могут с полным основанием разделить те, кто научил их математике.

Среди участников конференции была распространена анкета, одним из вопросов которой был «Назовите тех, кто научил Вас математике». Мы приводим общий список названных в ответах на этот вопрос лиц. Приносим извинения тем, кто оказался пропущенным из-за выбранной нами формы этого вопроса, а также у тех, чьи фамилии или имена оказались записанными неправильно.

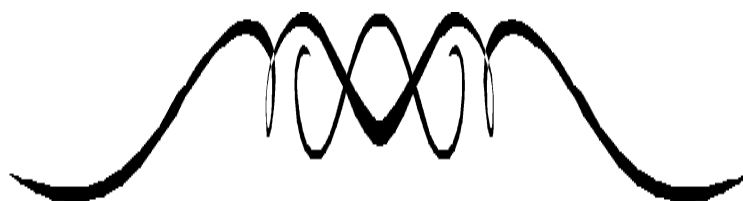
Вот список наставников наших победителей:

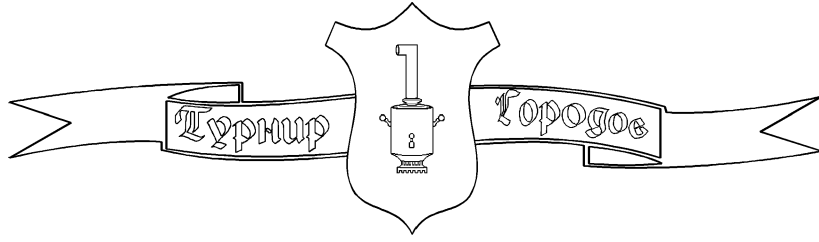
Eileen Susanne Börner,  
 Darka Hvastja,  
 Frau Hufschmidt,  
 Petkovic Zoltan,  
 Alojz Robnik,  
 Stane Šenveter,  
 Gernot Steinhauer,  
 Klaus Sielaff,  
 Milena Tomašević,  
 Алфутова Надежда Борисовна,  
 Альтшулер Лев Давыдович,  
 Белов (Канель) Алексей Яковлевич,  
 Берлов Сергей Львович,  
 Бронштейн Ефим Михайлович,  
 Васина Татьяна Дмитриевна,  
 Веснин Юрий Петрович,  
 Власенко Владимир Викторович,  
 Власов Евгений Викторович,

Влчек Мирослав,  
Гайсинский Виктор Петрович,  
Гнедина Ирина Сергеевна,  
Гольцман Евгения Александровна,  
Гордин Рафаил Калманович,  
Гричик Иван Николаевич,  
Гулевич Сергей Анатольевич,  
Гусев Алексей Юрьевич,  
Давидович Борис Михайлович,  
Дориченко Сергей Александрович,  
Емельянов Лев Александрович,  
Иваненко Ирина Николаевна,  
Изместьев Иван Вениаминович,  
Льубица Киселички,  
Колоколова Надежда Сергеевна,  
Копылов Игорь Анатольевич,  
Коченюк Антонина Ивановна,  
Крижановский Олег Феликсович,  
Кутенкова Татьяна Владимировна,  
Маркелов Сергей Валерьевич,  
Мищенко Сергей Петрович,  
Моисеев Сергей Алексеевич,  
Орлова Софья Петровна,  
Павлов Юрий Александрович,  
Паньковская Юлия Вадимовна,  
Попов Александр Андреевич,  
Пушкарь Петр Евгеньевич,  
Рогозина Лариса Викторовна,  
Розенберг Михаил Аркадьевич,  
Рубанов Игорь Соломонович,  
Семенов Сергей Вячеславович,  
Сергеев Петр,  
Сидорова Елена Вениаминовна,

Смуrow Михаил Васильевич,  
Сонкин Марк Григорьевич,  
Столин Аркадий Владимирович,  
Стрельченко Неля Наумовна,  
Боривоје Суботић,  
Токарев Сергей Иванович,  
Иванка Томић,  
Трачук Татьяна Борисовна,  
Увыкина Светлана Валерьевна,  
Федоров Роман Михайлович,  
Хазанкин Роман Григорьевич,  
Харик Елена Ефимовна,  
Хохлов Юрий Степанович,  
Црвенковић Синиша,  
Чалых Олег Александрович,  
Чеканов Юрий Витальевич,  
Шаповалов Александр Васильевич,  
Ширяева Ольга Владимировна,  
Шульман Анатолий Хананович,  
Юсупова Лариса Михайловна.

**Большое вам всем спасибо!**





## Решения задач и комментарии

### Задача 2.

1. Положим  $f = a/c$  и  $g = b/c$ . Тогда  $f$  и  $g$  — рациональные функции, связанные соотношением  $f + g + 1 = 0$ . Продифференцировав это равенство, получим  $f' = -g'$ . Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = -\frac{f'/f}{g'/g}.$$

Рациональные функции  $f$  и  $g$  имеют специальный вид  $\prod(x - \rho_i)^{r_i}$ ,  $r_i \in \mathbf{Z}$ . Для функции  $R(x) = \prod(x - \rho_i)^{r_i}$  выполняется равенство

$$\frac{R'}{R} = \sum \frac{r_i}{x - \rho_i}.$$

Пусть

$$a(x) = \prod(x - \alpha_i)^{a_i}, b(x) = \prod(x - \beta_j)^{b_j}, c(x) = \prod(x - \gamma_k)^{c_k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'/f &= \sum \frac{a_i}{x - \alpha_i} - \sum \frac{c_k}{x - \gamma_k} \\ g'/g &= \sum \frac{b_j}{x - \beta_j} - \sum \frac{c_k}{x - \gamma_k} \end{aligned}$$

Поэтому после умножения на многочлен

$$N_0 = \prod(x - \alpha_i)(x - \beta_j)(x - \gamma_k)$$



степени  $n_0(abc)$  рациональные функции  $f'/f$  и  $g'/g$  становятся многочленами степени не выше  $n_0(abc) - 1$ . Таким образом, из взаимной простоты многочленов  $a(x)$  и  $b(x)$  и из равенства

$$\frac{b}{a} = -\frac{N_0 f/f'}{N_0 g/g'}$$

следует, что степень каждого из многочленов  $a(x)$  и  $b(x)$  не превосходит  $n_0(abc) - 1$ . Для многочлена  $c(x)$  доказательство аналогично.

**2.** Если  $\deg f^3 \neq \deg g^2$ , то

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \deg f^3 = 3 \deg f \geq \frac{1}{2} \deg f + 1.$$

Поэтому можно считать, что  $\deg f^3 = \deg g^2 = 6k$ .

Рассмотрим многочлены  $F = f^3$ ,  $G = g^2$  и  $H = F - G = f^3 - g^2$ . Ясно, что  $\deg H \leq 6k$ . Из задачи 1 имеем

$$\begin{aligned} \max(\deg F, \deg G, \deg H) &\leq n_0(FGH) - 1 \leq \\ &\leq \deg f + \deg g + \deg H - 1, \end{aligned}$$

то есть

$$6k \leq 2k + 3k + \deg H - 1.$$

Таким образом,  $\deg H \geq k + 1 = \frac{1}{2} \deg f + 1$ .

**3.** Для многочленов

$$\begin{aligned} f(t) &= x^2 + 2, \\ g(t) &= x^3 + 3x \end{aligned}$$

неравенство задачи 2 (неравенство Дэвенпорта) обращается в равенство.

**4.** Согласно задаче 1, степень каждого из многочленов  $f^n$ ,  $g^n$  и  $h^n$  не превосходит

$$\deg f + \deg g + \deg h - 1.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$n(\deg f + \deg g + \deg h) \leq 3(\deg f + \deg g + \deg h - 1).$$

Следовательно,  $n < 3$ .

**5.** Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — степени многочленов  $f$ ,  $g$  и  $h$ . Тогда согласно задаче 1

$$\alpha a \leq a + b + c - 1, \quad (1)$$

$$\beta b \leq a + b + c - 1, \quad (2)$$

$$\gamma c \leq a + b + c - 1. \quad (3)$$

Следовательно, поскольку  $2 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ ,

$$\alpha(a + b + c) \leq \alpha a + \beta b + \gamma c \leq 3(a + b + c) - 3,$$

и значит,  $\alpha < 3$ . По условию  $\alpha \geq 2$ , поэтому  $\alpha = 2$ . При  $\alpha = 2$  неравенство (1) принимает вид

$$a \leq b + c - 1 \quad (4)$$

Сложив неравенства (2), (3) и (4), получим

$$\beta b + \gamma c \leq 3(b + c) + a - 3.$$

Учитывая, что  $\beta \leq \gamma$ , и еще раз применяя неравенство (4), получаем

$$\beta(b + c) \leq 4(b + c) - 4,$$

а значит,  $\beta \leq 4$ , то есть  $\beta = 2$  или  $3$ .

Остается доказать, что если  $\beta = 3$ , то  $\gamma \leq 5$ . При  $\beta = 3$  неравенство (2) принимает вид

$$2b \leq a + c - 1. \quad (5)$$

Сложив неравенства (4) и (5), получим

$$b \leq 2c - 2.$$

В таком случае из неравенства (4) следует, что

$$a \leq 3c - 3.$$

Из двух последних неравенств и неравенства (3) следует, что

$$\gamma c \leq 6c - 6,$$

поэтому  $\gamma \leq 5$ .

#### Замечания к задаче 6.

Пусть  $\alpha = \beta = \gamma = 2$ . Имеем тогда:  $f^2 = h^2 - g^2$ , откуда  $f^2 = (h - g)(h + g)$ . Если бы многочлены  $h - g$  и  $h + g$  имели общий множитель, то на него делились бы сумма и разность этих многочленов, откуда  $h$  и  $g$  также имели бы общий множитель, что противоречит условию — ведь мы ищем взаимно простые решения. Поэтому многочлены  $h - g$  и  $h + g$  взаимно просты. Но их произведение — квадрат многочлена  $f$ , а значит, из однозначности разложения многочленов на неприводимые множители, найдутся такие (взаимно простые) многочлены  $u$  и  $v$ , что  $h - g = u^2$ ,  $h + g = v^2$ . Имеем тогда:

$$f = uv, \quad h = (u^2 + v^2)/2, \quad g = (v^2 - u^2)/2. \quad (6)$$

Обратно, для любых двух взаимно простых многочленов  $u$  и  $v$  формулы (6) задают взаимно простые многочлены  $f$ ,  $g$  и  $h$ , удовлетворяющие уравнению  $f^2 + g^2 = h^2$ .

Аналогично, но более технично разбираются все случаи задачи 6, кроме последнего.

Многочлены, удовлетворяющие соотношению  $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ , тесно связаны с правильными многогранниками. Подробно эта связь описана в книге Ф. Клейна<sup>1)</sup>; там же указан способ построения этих многочленов. Мы приведем лишь конечный результат.

---

<sup>1)</sup>Ф.Клейн. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М: Наука. 1989.

Случай  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\gamma = n$  связан с вырожденным правильным многогранником — плоским  $n$ -угольником. Требуемое соотношение имеет вид

$$\left(\frac{x^n + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^n - 1}{2}\right)^2 = x^n.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 3$  связан с правильным тетраэдром. Соотношение имеет вид

$$12i\sqrt{3}(x^5 - x)^2 + (x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3 = (x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 4$  связан с кубом и правильным октаэдром. Соотношение имеет вид

$$(x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1)^2 + 108(x^5 - x)^4 = (x^8 + 14x^4 + 1)^3.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 5$  связан с додекаэдром и икосаэдром. Соотношение имеет вид  $T^2 + h^3 = 1728f^5$ , где

$$\begin{aligned} T &= x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10}), \\ H &= -(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10}, \\ f &= x(x^{10} + 11x^5 - 1). \end{aligned}$$

**Задача 3.**

*Вагоны шли привычной линией,  
Подрагивали и скрипели;  
Молчали желтые и синие;  
В зеленых плакали и пели.*

А. Блок

Нумерация рисунков и определений продолжает начатую в условиях этой задачи.

**Решение задачи 1.** Легче всего доказать это по индукции. *База индукции.*  $n = 1$  — один вагон уже отсортирован. *Шаг индукции.* Пусть любой состав из  $n$  вагонов можно отсортировать за  $n - 1$  шаг, тогда для любого состава из  $(n + 1)$ -го вагона на первом шаге отправим первый вагон в первый стек, а остальные во второй. Вытягивая вначале первый вагон, а затем все остальные, получаем неотсортированный состав из  $n$  вагонов, который можно отсортировать за  $n - 1$  шаг.

**Оптимальные конструкции для простых случаев****Решение задачи 2.**

- а) Наименьшее число шагов — 2 (4 вытягивания). См. рисунок 3.
- б) Наименьшее число вытягиваний 4.

**Решение задачи 3.**

- а) Наименьшее число шагов — 2 (4 вытягивания).
- б) Наименьшее число вытягиваний 3. См. рисунок 4.

**Решение задачи 4.**

- а) Наименьшее число шагов — 3 (6 вытягиваний). См. рисунок 5.
- б) Наименьшее число вытягиваний 5. См. рисунок 6.

Рисунок 3 (решение задачи 2а)

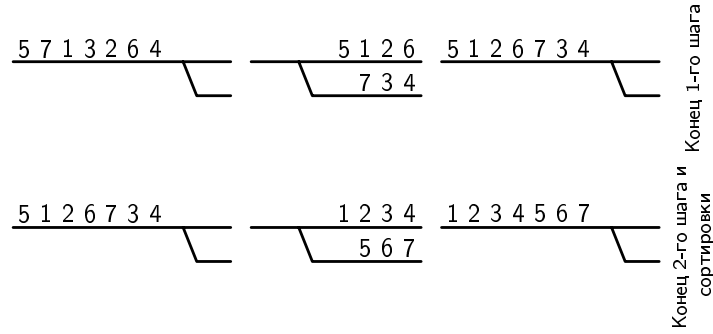


Рисунок 4 (решение задачи 3б)

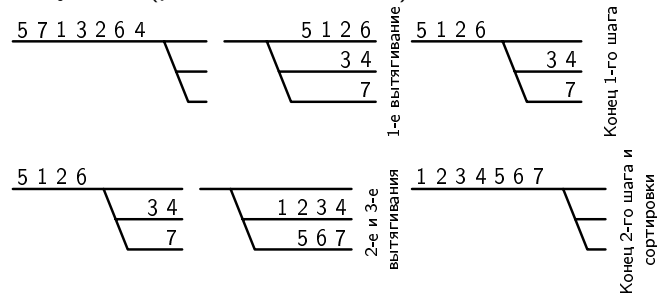


Рисунок 5 (решение задачи 4а)

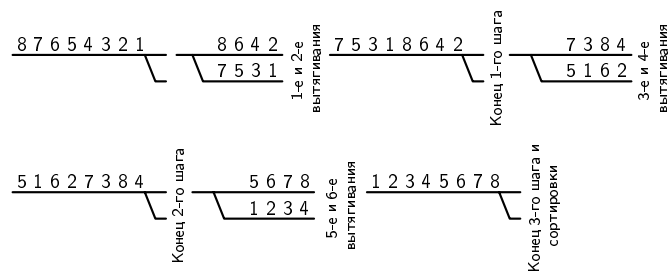


Рисунок 6 (решение задачи 4б)

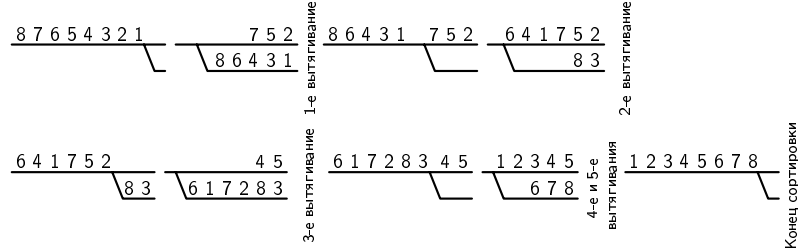


Рисунок 7 (решение задачи 5а)

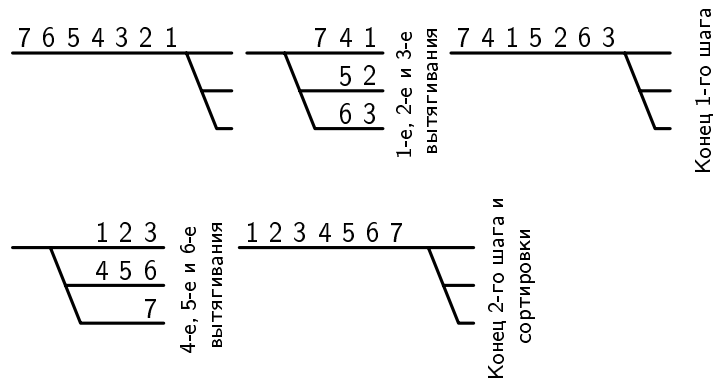
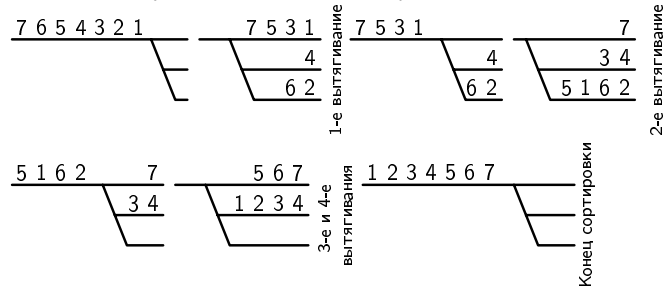


Рисунок 8 (решение задачи 5б)



**Решение задачи 5.**

- а) Наименьшее число шагов — 2. См. рисунок 7.  
б) Наименьшее число вытягиваний 4. См. рисунок 8.

**Основные утверждения**

Изложим решения остальных задач в виде последовательных утверждений, приводящих «шаг за шагом» к заполнению таблицы из задачи 2б, попутно получатся и решения некоторых других задач. Обозначения:  $k$  — число стеков,  $p$  — число вытягиваний.

Следующее утверждение очень важно для дальнейшего и совершенно очевидно.

**Лемма 1.** Если два вагона попадают в один стек, то порядок между ними не меняется.

Из леммы 1 следует уже менее очевидное утверждение.

**Лемма 2. (Задача 15.)** Пусть в составе  $(i + 1)$ -ый вагон расположен правее  $i$ -го. Тогда для любого алгоритма, сортирующего состав, существует алгоритм «не хуже первого» (это означает, что новый алгоритм делает не больше шагов и не больше вытягиваний), который при сортировке все время отправляет  $i$ -ый и  $(i + 1)$ -ый вагоны в один стек.

Действительно, изменим первый алгоритм: пусть во втором алгоритме все вагоны попадают в те же стеки, что и в первом, за исключением  $(i + 1)$ -го, а  $(i + 1)$ -ый вагон всегда распускается в тот же самый стек, что и  $i$ -ый вагон в первом алгоритме. Ясно, что число вагонов между  $i$ -ым и  $(i + 1)$ -ым вагонами не увеличивается. Пусть в самом начале между  $i$ -ым и  $(i + 1)$ -ым вагонами стоял вагон с номером  $j$ . Если бы в первом алгоритме  $j$ -ый вагон все время попадал в тот же стек, что и  $i$ -ый, то в конце мы получили бы неотсортированный состав. А так как состав в первом алгоритме отсортировывается, это означает, что в какой-то момент вагоны  $i$



и  $j$  попадают в разные стеки, и число вагонов между  $i$ -ым и  $(i+1)$ -ым уменьшается. А так как это верно для любого вагона, находящегося в начале между  $i$ -ым и  $(i+1)$ -ым вагонами, то в конце работы второго алгоритма они будут стоять рядом (т.е. в нужном порядке). Это завершает доказательство леммы 2.

Следовательно, если в составе  $(i+1)$ -ый вагон расположен правее  $i$ -го, то оба этих вагона каждый раз можно отправлять в один стек. А это, в свою очередь, означает, что эти вагоны можно не различать, и, следовательно, им можно дать одинаковые номера. Назовем каждую максимальную последовательность  $i, i+1, i+2, \dots, i+m$ , в которой каждый следующий элемент стоит в перестановке правее предыдущего *блоком*. Ясно, что элементам в блоке можно дать один и тот же номер. Назовем эту операцию *перенумерацией*. Кроме того, будем иногда перенумеровывать вагоны начиная не с 1, а с 0.

**Пример 1.** В составе из задачи 2 (5, 7, 1, 3, 2, 6, 4) четыре блока (1, 2; 3, 4; 5, 6 и 7), после перенумерации он будет выглядеть так: 2, 3, 0, 1, 0, 2, 1.

**Решения задач 6 и 7.** После перенумерации (здесь можно нумерацию начинать с 1) в нумерации состав из задачи 6 будет занумерован числами от 1 до 8, а из состав из задачи 7 — числами от 1 до 7. После этого можно воспользоваться любым из алгоритмов, решающих задачи 4 и 5, соответственно, т.е. отправлять вагоны с соответствующими номерами в соответствующие стеки.

Составы в пунктах а) задач 2–7 сортируются алгоритмом поразрядной сортировки.

**Утверждение 1. (Решение задачи 16.)**

Докажем, что алгоритм поразрядной сортировки действительно сортирует любой состав.

Вспомним, как мы сравниваем два числа  $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_0}$  и  $b = \overline{b_s b_{s-1} \dots b_0}$ . Мы всегда будем считать, что их записи выравнены по разрядам (в крайнем случае можно слева приписать нули). Сравнение  $a < b$  выполняется тогда и только тогда, когда  $a_s = b_s$ ,  $a_{s-1} = b_{s-1}, \dots, a_{l+1} = b_{l+1}$ , а  $a_l < b_l$ .

Посмотрим, что происходит с вагонами  $a$  и  $b$  при поразрядной сортировке. Первые  $(l-1)$  шагов вагоны как-то шатаются по стекам. Абсолютно не важно, как. На  $l$ -ом шаге вагон  $a$  попадает в стек с номером  $a_l$ , а вагон  $b$  попадает в стек с номером  $b_l$ . Т.к.  $a_l < b_l$ , то вагон  $a$  будет вытянут на этом шаге перед вагоном  $b$  и окажется левее  $b$ . Но во всех старших, чем  $l$ , разрядах у  $a$  и  $b$  стоят одинаковые цифры, поэтому во все последующие роспуски вагоны  $a$  и  $b$  будут попадать в одни и те же стеки. Следовательно, по лемме 1 их порядок не изменится. Следовательно, в конце сортировки вагон  $a$  будет находиться левее  $b$ . А так как это верно для любой пары вагонов, то весь состав будет упорядочен.

Поскольку необходимое для записи чисел от 1 до  $n$  количество разрядов в  $k$ -ичной системе счисления ограничено сверху  $\lceil \log_k n \rceil$ , число шагов в поразрядной сортировке состава из  $n$  блоков вагонов также ограничено сверху  $\lceil \log_k n \rceil$ . Оценка снизу следует из решения задачи 9 (которая сводится к решению любой из задач 17–18) и лемм 3 и 4.

**Лемма 3.** Пусть некоторый алгоритм сортирует состав из  $n$  вагонов, идущих в обратном порядке. Тогда этот алгоритм так же (т.е. за такое же число вытягиваний и шагов) сортирует состав, в котором после перенумерации  $n$  блоков. И наоборот. (Под словами «так же» понимается, что на каждом шаге вагоны с тем же самым номером отправляются в тот же самый стек и вытягиваются вагоны из тех же стеков в том же порядке.)

Очевидно, что нужно наблюдать за крайним правым вагоном из  $i$ -го блока и крайним левым вагоном из  $(i+1)$ -го.

Рассуждения такие же, как и в лемме 2.

Из леммы 3 мы получаем уже совершенно нетривиальное

**Следствие 1.** Общую задачу решает алгоритм, оптимально сортирующий состав, вагоны в котором расположены в обратном порядке.

Поэтому будем в дальнейшем предполагать что в начале любой сортировки вагоны нашего состава расположены в обратном порядке.

Введем еще одно обозначение:

**Определение 5.** Обозначим через  $W(p, k)$  максимальное число вагонов  $n$ , расположенных в обратном порядке  $n, n - 1, \dots, 2, 1$ , которые можно отсортировать за  $p$  вытягиваний на горке с  $k$  стеками.

Вот некоторые очевидные равенства для  $W(p, k)$ :

$$W(p, 1) = 1, W(1, k) = 1, W(0, k) = 1.$$

Первое равенство означает, что на одном стеке можно отсортировать только 1 вагон, второе и третье, что за одно вытягивание можно отсортировать только 1 вагон, и за 0 вытягиваний можно отсортировать тоже только 1 вагон.

**Лемма 4.**  $W(2, 2) = 2$ .

Меньшим числом не обойтись, а за 2 вытягивания ясно как сделать.

**Лемма 5.** Если  $p < k$ , то  $W(p, k) = W(p, p)$ .

Мы уже можем заполнить часть нашей таблицы (задача 26), как показано на рисунке 9.

Следующее утверждение является основанием для дальнейшей индукции.

**Теорема 1.**  $W(k + 1, k + 1) = 2W(k, k)$ .

Будем доказывать это утверждение по индукции.

		Число стеков ( $k$ )							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Число вытягиваний ( $p$ )	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2
	3	1							
	4	1							
	5	1							
	6	1							

Рисунок 9

*База индукции.* Для  $k = 1$  это верно.

$$2 = W(2, 2) = 2W(1, 1) = 2 \times 1.$$

*Шаг индукции.* Предположим, за  $k$  вытягиваний мы умеем сортировать на горке из  $k$  стеков состав из  $W(k, k)$  вагонов, идущих в обратном порядке. Назовем этот алгоритм  $(A(k))$ . Рассмотрим теперь на горке с  $(k + 1)$  стеком состав из  $2 \times W(k, k)$  вагонов. Напишем номера всех вагонов в двоичной системе начиная с нуля (напомним, что нулевой вагон самый правый). Опишем алгоритм  $(A(k + 1))$ , который сортирует эти  $2 \times W(k, k)$  вагонов.

*Алгоритм  $(A(k+1))$*

- 1° Все четные вагоны в первом роспуске помещаются в  $(k + 1)$ -ый стек.
- 2° У нечетных вагонов отбрасывается последний разряд (т.е. номер  $2m + 1$  переходит в номер  $m$ ), и они распускаются в стеки с первого по  $k$ -ый в соответствии с алгоритмом  $A(k)$ .
- 3° Вагоны из  $(k + 1)$ -го стека вытягиваются, у них отбрасывается последний разряд (т.е. номер  $2m$  переходит в номер  $m$ ), и они распускаются в стеки с первого по  $k$ -ый в соответствии с алгоритмом  $A(k)$ .
- 4° Далее вагоны сортируются в соответствии с алгоритмом  $A(k)$ .

Построенная серия алгоритмов  $A(k)$  доказывает неравенство  $W(k+1, k+1) \geq 2 \times W(k, k)$ . Докажем теперь обратное неравенство,  $W(k+1, k+1) \leq 2 \times W(k, k)$ .

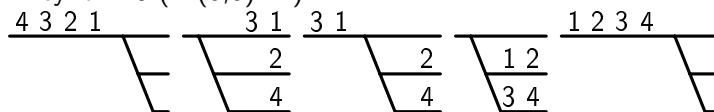
Действительно, пусть на горке стоит состав из  $n > 2 \times W(k, k)$  вагонов. Тогда после первого роспуска и первого вытягивания либо на горке состав из  $n_1 > W(k, k)$  вагонов, либо в оставшихся  $k$  стеках находится суммарно  $n_2 > W(k, k)$ . В каждом из этих случаев за оставшиеся  $k$  вытягиваний не удастся отсортировать эти вагоны.

Теорема 1 доказана.

**Следствие 2.**  $W(k, k) = 2^{k-1}$ .

**Пример 2.**  $W(3, 3) = 4$ . См. рис. 10 (сравнить с рис. 4).

Рисунок 10 ( $W(3,3)=4$ )



**Замечание 1.** Автор благодарит учеников БКШ г. Белорецка Губина Ярослава и Овечкина Антона за указание в этом месте на ошибку, которую автор упорно не замечал.

**Пример 3.**  $W(4, 4) = 8$ . См. рис. 11.

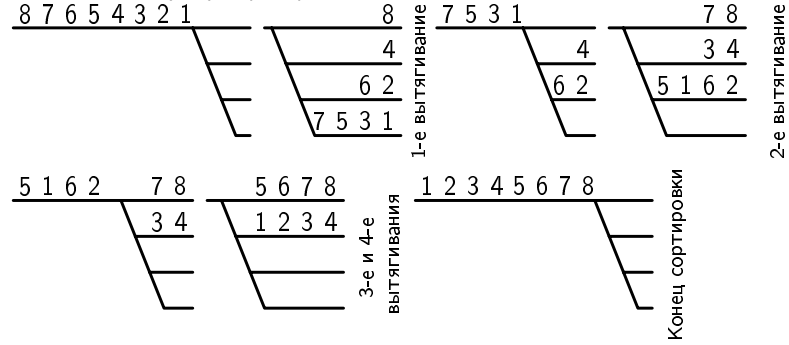
Мы уже можем заполнить большую часть нашей таблицы (задача 26), как показано на рисунке 12.

**Теорема 2.**  $k = 2$ . Пусть  $F(p)$  —  $p$ -ое число Фибоначчи, т.е.  $p$ -ое число из последовательности  $F(p)$ , удовлетворяющей рекуррентному соотношению  $F(p+1) = F(p) + F(p-1)$  и начальным данным  $F(0) = 1$ ,  $F(1) = 1$ . Тогда  $W(p, 2) = F(p)$ .

Будем доказывать это утверждение по индукции.

*База индукции.*  $W(1, 2) = 1 = F(1)$ ,  $W(2, 2) = 2 = F(2)$ . Можно еще проверить, что  $W(3, 2) = 3$ .

Рисунок 11 ( $W(4,4)=8$ )



		Число стеков ( $k$ )							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Число вытягиваний ( $p$ )	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2
	3	1		4	4	4	4	4	4
	4	1			8	8	8	8	8
	5	1				16	16	16	16
	6	1					32	32	32
	7	1						64	64

Рисунок 12

*Шаг индукции.* Пусть теперь при всех  $2 \leq l < p$  за  $l$  вытягиваний можно отсортировать состав из не более  $F(l)$  вагонов, идущих в обратном порядке. Докажем, что то же верно и для  $l = p$ .

Докажем, что  $W(p, 2) \leq F(p)$ , т.е. состав из большего числа вагонов отсортировать нельзя. Пусть это не так, т.е. имеется алгоритм, сортирующий состав из  $n$  вагонов, где  $n > F(p)$ . Обозначим число вагонов в стеках после первого роспуска по этому алгоритму  $n_1$  и  $n_2$  (можно считать, что  $n_1 \geq n_2$ ). Т.к.  $n > F(p)$ , а  $F(p) = F(p-1) + F(p-2)$ , то хотя бы одно из чисел  $n_i$  строго больше, чем соответствующее число  $F(p-i)$ , ( $i = 1, 2$ ).

а) Если  $n_1 > F(p-1)$ , то после первого же вытягивания у нас есть «состав» из  $n_1$  вагонов, идущих в обратном порядке, который по предположению индукции нельзя отсортировать за  $p-1$  вытягивание.

б) Если  $n_2 > F(p-2)$ , то после второго вытягивания у нас на горке окажется неотсортированный состав из не менее  $n_2$  вагонов, идущих в обратном порядке, который мы не можем по предположению индукции отсортировать за  $p-2$  вытягивания.

Это же рассуждение позволяет рекурсивно построить алгоритм, с помощью которого за  $p+1$  вытягивание можно отсортировать состав из  $F(p+1)$  вагонов, идущих в обратном порядке.

Пусть алгоритм  $(B(p))$  сортирует состав из  $F(p)$  вагонов, идущих в обратном порядке, причем после первого роспуска алгоритма  $(B(p))$  в первом стеке оказывается  $F(p-1)$  вагон, а во втором —  $F(p-2)$ . Покрасим вагоны в первом стеке в синий цвет, а во втором — в желтый, и вернем ситуацию назад во времени. У нас на горке стоит  $F(p)$  вагонов. Вставим после каждого синего вагона зеленый (т.е. зеленый вагон правее синего), и перенумеруем состав в убывающем порядке. Те-

перь у нас на горке стоит состав из  $F(p+1) = F(p) + F(p-1)$  вагонов.

*Алгоритм ( $B(p+1)$ )*

- 1° во время первого роспуска синие вагоны отправляются в первый стек, а желтые и зеленые во второй;
- 2° вагоны из второго стека вытягиваются (первое вытягивание);
- 3° зеленые вагоны распускаются в первый стек, а желтые во второй.  
Теперь в первом стеке все зеленые вагоны стоят левее синих.
- 4° Перенумеровав вагоны в первом и втором стеках, мы получим ситуацию после первого роспуска в алгоритме ( $B(p)$ ).
- 5° Далее сортируем с помощью алгоритма ( $B(p)$ ).

Теорема 2 доказана.

Продолжим заполнять нашу таблицу (задача 26). Теперь она выглядит, как показано на рисунке 13.

Здесь следует сделать одно замечание.

**Замечание 2.** В программистском практикуме встречается задача о вычислении  $n$ -го числа Фибоначчи:

$$F(0) = 1, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2), n > 1.$$

Вот рекурсивная программа вычисления  $F(n)$ .

```
function F(n:integer):integer;
| {n>=0}
begin
| if(n=0) or (n=1) then begin
| | F:=1;
| end else begin {1 < n}
| | F:= F(n-1)+F(n-2);
| end;
end;
```



		Число стеков ( $k$ )								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Число вытягиваний ( $p$ )	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	3	4	4	4	4	4	4	4
	4	1	5		8	8	8	8	8	8
	5	1	8			16	16	16	16	16
	6	1	13				32	32	32	32
	7	1	21					64	64	64
	8	1	34							

Рисунок 13

Что можно сказать о времени работы этой программы и необходимой для нее памяти?

Используемая программой память пропорциональна  $n$ . Глубина рекурсии ( $n$ ) умножается на количество памяти, необходимое для одного экземпляра процедуры (т.е. на константу). А вот время растет экспоненциально, т.к. вычисление  $F(n)$  сводится к двум вызовам  $F(n-1)$  и  $F(n-2)$ , те — к четырем вызовам  $F(n-2)$ ,  $F(n-3)$ ,  $F(n-3)$  и  $F(n-4)$  и так далее. Поэтому время растет экспоненциально, правда, не как  $2^n$ , а как  $F(n) \simeq \phi^n$ , где  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  — больший корень уравнения  $x^2 = x + 1$ .

Хорошо известно, как избежать рекурсии (если вы случайно не знаете, как это сделать, то попробуйте прежде, чем читать дальше, придумать самостоятельно нерекурсивную программу).

Нужно вместо одного значения  $F(n)$  вычислять одновременно пару (вектор)  $(F(n), F(n-1))$ , начиная с пары  $(1, 1)$ .

Вот кусок этой программы:

```
begin
| c:= b;
| b:= a;
| a:= a+c:
end
```

Повторив это вычисление  $n$  раз, начиная со значений  $a:=1; b:=1$ ; вы получите в  $a$  значение  $F(n)$ . Время работы такого алгоритма  $\simeq n$ , а памяти он требует  $\simeq const$ .

Прием, который был применен, обычно называется *индуктивным расширением по Кушниренко*.

В нашем случае ситуация аналогична, но работа рекурсивной процедуры усугубляется еще тем, что каждый рекурсивный вызов обращается не к простой функции, а к сложной программе.

Избавление от рекурсии в нашем случае заключается в обращении к алгоритму поразрядной сортировки. Только система счисления нам понадобится не двоичная или основанная на других геометрических прогрессиях, а основанная на последовательности Фибоначчи.

### Отступление о системах счисления

Более общий способ построения систем счисления таков. Задается некоторый «базис» системы — набор целых чисел  $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \dots$ . Для того, чтобы записать число  $n$  в этой системе счисления, нужно выбрать наибольшее из чисел  $q_s \leq n$  и разделить  $n$  на  $q_i$  с остатком  $n = a_s q_s + n_{s-1}$ . Затем нужно разделить  $n_{s-1}$  на  $q_{s-1}$  с остатком  $n_{s-1} = a_{s-1} q_{s-1} + n_{s-2}$  и т.д. В результате получатся такие равенства

$$\begin{aligned} n &= a_s q_s + n_{s-1}, \\ n_{s-1} &= a_{s-1} q_{s-1} + n_{s-2}, \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$n_0 = a_0 q_0 (n_0 = a_0) \text{ или}$$

$$n = a_s q_s + a_{s-1} q_{s-1} + \dots + a_0 q_0.$$

Число  $n$  записывается в виде выражения  $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_0}$  и эта запись называется записью числа в системе счисления с базисом  $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \dots$ . Числа  $a_i$  играют роль цифр и удовлетворяют неравенствам  $a_i < q_{i+1}/q_i$ . Заметим, что в таких системах счисления в разных разрядах могут стоять, вообще говоря, разные наборы цифр. Десятичная система обладает базисом из степеней десятки, двоичная из степеней двойки,  $q$ -ичная из степеней числа  $q$ .

Для нашего алгоритма нам понадобится система счисления с базисом  $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  — последовательностью чисел Фибоначчи. Такая система так и называется *фибоначчиевой*. Вот пример записи первых девяти чисел в фибоначчиевой системе счисления:

$$\begin{array}{lll} 0 = 0_f & 3 = 100_f & 6 = 1001_f \\ 1 = 1_f & 4 = 101_f & 7 = 1010_f \\ 2 = 10_f & 5 = 1000_f & 8 = 10000_f \end{array}$$

**Упражнение 1.** а) Запишите в фибоначчиевой системе счисления числа от 9 до 33; 100; 1992; 1000000.

б) Важнейшим свойством фибоначчиевой системы является то, что в ней, как и в двоичной, используются всего две цифры: 0 и 1. Докажите это.

в) Докажите, что запись любого числа в фибоначчиевой системе счисления не содержит двух рядом стоящих единиц.

г) Может показаться, что фибоначчиева система счисления так же удобна во всех отношениях, как, скажем, десятичная или двоичная. Но попробуйте научиться складывать числа в фибоначчиевой системе. Составьте для этого таблицу сложения чисел от 1 до 21 в этой системе.

д) В любой  $q$ -ичной системе счисления

$$\underbrace{10\dots 0_q}_{n \text{ нулей}} \times \underbrace{10\dots 0_q}_{m \text{ нулей}} = 1 \underbrace{0\dots 0_q}_{n+m \text{ нулей}}, \text{ т.к. } q^n \times q^m = q^{n+m}.$$

В фибоначчевой системе это не так, например,

$$10000_f \times 10000_f = 13 \times 8 = 104 = 89 + 13 + 2 = 1000100010_f.$$

Попробуйте научиться перемножать числа в фибоначчевой системе счисления. Составьте для этого таблицу умножения чисел от 1 до 13 в этой системе.

**Упражнение 2.** Если вы освоились с фибоначчевой системой, то попробуйте решить задачи 4б), 21, 22, записав номера вагонов в фибоначчевой системе.

Можете ли вы теперь сами сформулировать алгоритм сортировки?

Если нет, то попробуем ответить на такой вопрос: «Какое свойство фибоначчевой системы счисления позволяет уменьшить число вытягиваний?» Это свойство сформулировано в упражнении 1г):

«Запись любого числа в этой системе не содержит двух единиц, стоящих рядом.»

Это свойство можно сформулировать и так:

«Если в записи числа в  $k$ -ом разряде стоит единица, то в  $(k + 1)$ -ом разряде обязательно стоит цифра 0.»

Посмотрим, что будет происходить на горке с двумя стеками, если мы будем сортировать состав по алгоритму двоичной сортировки, а номера вагонов запишем в фибоначчевой системе счисления. Вагоны, которые на  $k$ -ом шаге попали в стек с номером 1 (т.е. у которых в  $k$ -ом разряде стоит 1) будут вытянуты в хвосте состава и после следующего роспуска все вместе отправятся в нулевой стек (ведь перед 1 обязательно стоит 0).

Возникает идея: «не будем вытягивать эти вагоны из стека, а на  $(k + 1)$ -ом шаге перенумеруем стеки.»

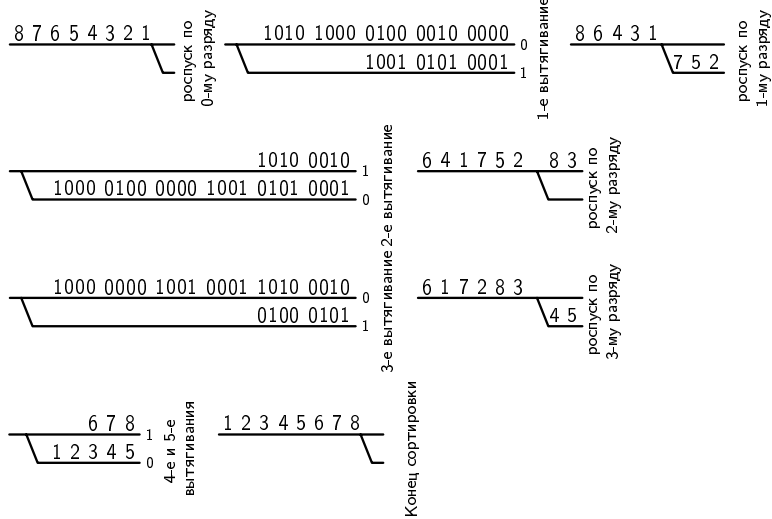
**Алгоритм СОРТИРОВКА ФИБОНАЧЧИ (F)**

- 1° Нумеруем вагоны в фибоначчиевой системе.
- 2° На  $k$ -ом шаге распускаем состав в соответствии с поразрядной сортировкой.
- 3° Затем вытягиваем вагоны из нулевого стека.
- 4° Перенумеровываем стеки для  $(k + 1)$ -го шага.

Покажем на примере решения задачи 4б), как работает алгоритм сортировки Фибоначчи (см. рис. 14, сравнить с рис. 6).

Из примера видно, что для сортировки 8 вагонов, идущих в обратном порядке, нужно сделать 5 вытягиваний, в

Рисунок 14 (решение задачи 4б по алгоритму (F))



то время, как при поразрядной сортировке в двоичной или в троичной системах требуется 6 вытягиваний.

**Упражнение 3.** а) Отсортируйте с помощью алгоритма Фибоначчи состав из 13 вагонов, идущих в обратном порядке.  
 б) Отсортируйте состав из задачи 6.  
 в)\* Попробуйте, прежде чем читать дальше, обобщить этот алгоритм для горки с большим, чем 2, числом стеков.

Итак, вернемся к задаче о сортировке на горке с  $k$  стеками. Как вы уже догадались, общий алгоритм является обобщением сортировки Фибоначчи.

**Определение 6.** Введем последовательность  $u_k(p)$ , задав ее рекуррентно,

$$\begin{aligned} u_k(p) &= u_k(p-1) + u_k(p-2) + \dots + u_k(p-k), \quad \text{при } p > k, \\ u_k(1) &= 1, \dots, u_k(k) = 2^{k-1}. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

**Теорема 3.**  $W(p, k) = u_k(p)$ .

Доказательство этого утверждения естественно обобщает доказательство теоремы 2. Будем доказывать по индукции.

*База индукции.* При  $p \leq k$  наше утверждение следует из теоремы 1, леммы 5, следствия 2 и равенства  $(\heartsuit)$ .

*Шаг индукции.* Рассмотрим случай  $p > k$ . Пусть при всех  $l$ , таких что  $k < l < p$ , за  $l$  вытягиваний можно отсортировать состав из не более  $u_k(l)$  вагонов, идущих в обратном порядке. Докажем, что то же верно и для  $l = p$ .

Докажем, что  $W(p, k) \leq u_k(p)$ , т.е. состав из большего числа вагонов отсортировать нельзя. Пусть это не так. Пусть  $n > u_k(p)$  и пусть после первого роспуска в стеках оказалось  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$  вагонов. Сравним эту последовательность с последовательностью  $u_k(p-1) \geq u_k(p-2) \geq \dots \geq u_k(p-k)$ . Т.к.  $n > u_k(p)$ , то существует номер  $m$  такой, что  $n_m > u_k(p-m)$ , а это означает, что среди чисел

$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$  не меньше  $t$  строго больших  $u_k(p - t)$ . Следовательно, после  $t$  вытягиваний мы будем иметь или на горке, или в одном из стеков последовательность из не менее  $u_k(p - t) + 1$  вагонов, номера которых идут в обратном порядке, и которую, по индукционному предположению, мы не можем отсортировать за оставшиеся  $p - t$  вытягиваний.

Так же, как и в теореме 2, строится рекурсивный алгоритм.

Пусть алгоритм  $(C(p))$ ,  $p > k$ , сортирует состав из  $u_k(p)$  вагонов, идущих в обратном порядке, причем после первого роспуска алгоритма  $(C(p))$  в первом стеке оказывается  $u_k(p - 1)$  вагон, во втором —  $u_k(p - 2)$ , ..., в  $k$ -ом —  $u_k(p - k)$ . Покрасим вагоны в первых  $(k - 1)$ -ом стеках в синий цвет, а в последнем — в желтый, и вернем ситуацию назад во времени. У нас на горке стоит  $u_k(p)$  вагонов. Вставим после каждого синего вагона зеленый (т.е. зеленый вагон правее синего), и перенумеруем состав в убывающем порядке. Теперь у нас на горке стоит состав из  $u_k(p + 1) = u_k(p) + (u_k(p - 1) + u_k(p - 2) + \dots + u_k(p - k + 1))$  вагонов.

### Алгоритм $(C(p+1))$

- 1° во время первого роспуска синие вагоны отправляются в первые  $(k - 1)$  стек в соответствии с алгоритмом  $(C(p))$ , а желтые и зеленые в последний;
  - 2° вагоны из последнего стека вытягиваются (первое вытягивание);
  - 3° зеленые вагоны распускаются в первые  $(k - 1)$  стек в соответствии с алгоритмом  $(C(p))$ , а желтые в последний.
- Теперь в первых  $(k - 1)$  стеках все зеленые вагоны стоят левее синих.

- 4° Вспоминая номера синих и желтых вагонов при сортировке алгоритмом  $(C(p))$  (зеленые вагоны получают номера соответствующих синих), мы получим ситуацию после первого роспуска в алгоритме  $(C(p))$ .
- 5° Далее сортируем с помощью алгоритма  $(C(p))$ .

Теорема 3 доказана.

Приведенные на промежуточном финише решения задач 2-7 п.б) являются частными случаями алгоритмов  $(A(k))$ ,  $(B(k))$ ,  $(C(k))$  и являлись небольшими подсказками для школьников. Из 9 групп школьников, начавших решать эту задачу, полностью построили алгоритмы  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  трое: Андрей Вашевник (с Виктором Клепцыным) (Москва, школа №57); Александр Смирнов (с Вениамином Кисунько) (Москва, школа №57) и Александр Хохлов (Тверь, школа №17), причем А. Хохлов придумал алгоритм  $(A)$  еще до промежуточного финиша.

Окончательный вид таблицы  $W(p, k)$  изображен на рисунке 15.

Чтобы полностью завершить решение задачи 10, исследуем асимптотику числа вытягиваний  $p(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  (т.е. найдем те константы, о которых говорилось в задаче 10).

**(А) Алгоритм  $(A(p))$ .**

$$\begin{aligned} 2^{p(n)-2} &< n \leq 2^{p(n)-1}, \\ p(n) - 2 &< \log_2 n \leq p(n) - 1, \\ \log_2 n + 1 &\leq p(n) < \log_2 n + 2, \\ \frac{1}{\ln 2} \ln n + 1 &\leq p(n) < \frac{1}{\ln 2} \ln n + 2. \end{aligned}$$

**(В) Алгоритм  $(B(p))$  ( $k = 2$ ).**

Хорошо известно, что  $F(p) = c_1 \lambda_1^p + c_2 \lambda_2^p$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни уравнения  $\lambda^2 = \lambda + 1$ . Пусть  $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > -1$ . Тогда

$$F(p(n) - 1) < n \leq F(p(n)),$$



		Число стеков ( $k$ )							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Число вытягиваний ( $p$ )	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	3	4	4	4	4	4	4
	4	1	5	7	8	8	8	8	8
	5	1	8	13	15	16	16	16	16
	6	1	13	24	29	31	32	32	32
	7	1	21	44	56	61	63	64	64
	8	1	34	81	108	120	125	127	128

Рисунок 15.  
Таблица  $W(p, k)$ .

$$\log_{\lambda_1} F(p(n) - 1) < \log_{\lambda_1} n \leq \log_{\lambda_1} F(p(n)),$$

$$\log_{\lambda_1} F(p(n)) = p(n) + \log_{\lambda_1} \left( c_1 \left( 1 + \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{p(n)} \right) \right),$$

$$p(n) - 1 + const < \log_{\lambda_1} n \leq p(n) + const,$$

$$\log_{\lambda_1} n + const \leq p(n) < \log_{\lambda_1} n + const + 1,$$

$$\frac{1}{\ln \lambda_1} \ln n + const \leq p(n) < \frac{1}{\ln \lambda_1} \ln n + const + 1.$$

**(С) Алгоритм  $(C(p))$ .**

Точно также получаем, что  $u_k(p) = c_1 \lambda_{k1}^p + c_2 \lambda_{k2}^p + \dots + c_k \lambda_{kk}^p$ , где  $\lambda_{ki}$  — корни уравнения  $x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1$ . Пусть  $\lambda_{k1}$  — максимальный корень этого уравнения. Так же, как и в предыдущем пункте, получаем

$$\frac{1}{\ln \lambda_{k1}} \ln n + const \leq p(n) < \frac{1}{\ln \lambda_{k1}} \ln n + const + 1.$$

Такая же оценка в задаче 16.

Школьникам, получившим эти оценки, было в устной беседе предложено доказать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k1} = 2$ , т.е. что алгоритмы  $(C_k(p))$  «сходятся» (в каком-то смысле) к  $(A(p))$ .

### О решениях остальных задач

Доказанные выше утверждения полностью решают **задачи 2-76), 10, 11, 15, 21-24, 26.**

**Задачи 17, 18** решаются одинаково, используя принцип Дирихле.

**Задачи 19, 20а), 20в)** — упражнения на введенные понятия. Вот первые пять многочленов Эйлера.

$$\begin{aligned} A_1(x) &= x, \\ A_2(x) &= x + x^2, \\ A_3(x) &= x + 4x^2 + x^3, \\ A_4(x) &= x + 11x^2 + 11x^3 + x^4, \\ A_5(x) &= x + 26x^2 + 66x^3 + 26x^4 + x^5. \end{aligned}$$

#### Решение задачи 20б):

Если в перестановке  $\sigma$  элемент  $i$  — точка возврата, то в перестановке  $\sigma^{-1}$  элемент  $i$  — точка спуска и наоборот:

$$\sigma : \begin{pmatrix} \dots & k < m \dots \\ \dots & i + 1 \dots i \dots \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} : \begin{pmatrix} \dots & i \dots i + 1 \dots \\ \dots & m > k \dots \end{pmatrix}.$$

#### Решение задачи 27а)

Если в перестановке  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  есть  $k$  точек возврата, то в перестановке  $\bar{\sigma} = (\sigma_n, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1)$  есть  $n - k - 1$  точка возврата. Следовательно,  $\langle v \rangle = \langle d \rangle = (n - 1)/2$ . Из 20а) следует, что  $\langle l \rangle = (n + 1)/2$ .

**В задаче 20г)** Вашеvник (с Клепцыным) и Смирнов (с Кисунько) получили, что  $A(n, 2) = 2^n - (n + 1)$ , а Хохлов вывел

рекуррентное соотношение

$$A(n+1, k) = A(n, k)k + A(n, k-1)(n-k+2), \quad (*)$$

которое позволяет получить функциональное уравнение на

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n(x)y^n.$$

Соотношение (\*) получается, если вспомнить, что любую перестановку из  $S_{n+1}$  можно получить, вставив  $n+1$  в перестановку из  $S_n$ , и проследить, как при этом меняется число точек спуска.

Многочлены  $A_n(x)$  удовлетворяют такому соотношению

$$A_n(x) = \left( \sum_{k \geq 0} k^n x^n \right) (1-x)^{n+1}.$$

Никаких решений задач 12, 13, 14 не было представлено.

**Замечание 3.** Существует нерекурсивный алгоритм, обобщающий алгоритм ( $F$ ) в случае любого  $k$ .

В двух словах (для тех, кто знаком с КС-грамматиками), рассмотрим контекстно-свободную грамматику с  $k$  терминальными символами  $0, 1, 2, \dots, k-1$  и  $k$  нетерминальными символами  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{k-1}$  и правилами вывода:

$$\begin{aligned} L_i &\rightarrow 0L_0 & 0 \leq i \leq k-1 \\ L_i &\rightarrow (i+1)L_{i+1} & 0 \leq i < k-1 \\ L_i &\rightarrow ? & 0 \leq i \leq k-1, \end{aligned}$$

где  $L_0$  — начальный нетерминальный символ. Нужно породить в этом языке все слова длины  $p$ , лексикографически их

упорядочить (естественно,  $0 < 1 < \dots < k - 1$ ) и присвоить соответствующим вагонам.

*Алгоритм ОБОБЩЕННАЯ СОРТИРОВКА ФИБОНАЧЧИ (K)*

- 1° Алгоритм начинается с нулевого шага.
- 2° На  $l$ -ом шаге распускаем состав в соответствии с символами в  $l$ -ом разряде, как в поразрядной сортировке.
- 3° Затем вытягиваем вагоны из нулевого стека (т.е. того стека, где собрались вагоны, у которых в  $l$ -ом разряде стоит 0).
- 4° Перенумеровываем стеки для  $(l+1)$ -го шага в соответствии с символами в  $(l + 1)$ -ом разряде, пустой стек получает номер  $k - 1$ .

Этот алгоритм вместе с приведенными здесь результатами полностью завершает решение задачи о **минимальном числе вытягиваний при сортировке железнодорожных составов**. Доказательство корректности работы этого алгоритма и его соответствия алгоритмам (A) и (C), скорее всего, можно будет прочитать в одном из номеров «Кванта».

### Задача 4.

Нумерация рисунков продолжает начатую в условиях этой задачи.

1. Все три. Например, вторая превращается в первую так, как показано на рисунке 9. (Такое взаимное уничтожение петель называется *фокусом Уитни*.)



Рис. 9. Фокус Уитни

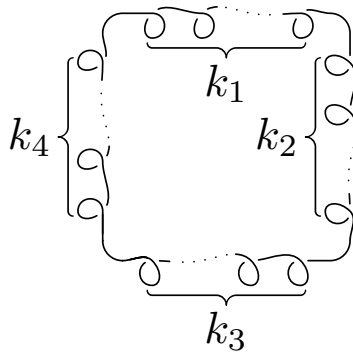


Рис. 10.

2. Здесь много вариантов правильного ответа. Чаще всего представлялся список, состоящий из стандартных проволок типа  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , где  $k_i \in \mathbf{N}$ , имеющий вид большой окружности с наборами петель четырех типов (рис. 10). Для превращения произвольной проволоки в одну из стандартных, систематически применяется операция протаскивания петель друг сквозь друга (рис. 11).

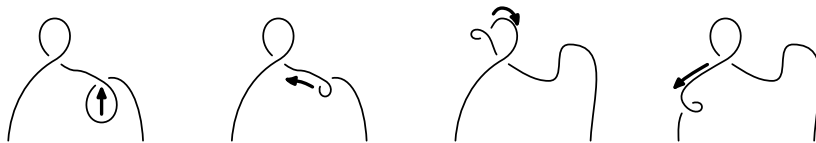
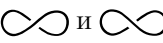


Рис. 11. Протаскивание петельки

Решившие эту задачу понимали, что в этом списке имеются повторения, например при  $k_4 > k_1$  стандартная проволока типа  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$  эквивалентна стандартной проволоке типа  $(0, k_2, k_3, k_4 - k_1)$  за счет фокуса Уитни (примененного  $k_1$  раз). Высказывалась гипотеза (правильная!), что после подбных сокращений и сброса пары петель в левом нижнем углу рис. 10 получается *полный список без повторений* (т.е. решение задачи классификации), члены которого зависят от двух параметров, один из которых принимает целые значения (скажем,  $m = k_3 - k_2$ ), а второй — целые неотрицательные значения (скажем,  $n = |k_4 - k_1|$ ).

**3.** Здесь нужно придумать инвариант. Годится, например, число скручиваний (см. задачу 7), которое и было предъявлено в разных вариантах (ориентированные и неориентированные проволоки, см. замечание 1 ниже). М. Мази из Словении придумал в этом месте инвариант  $w$  (writhe, см. задачу 10), который в ориентированном случае совпадает со скручиванием. Решение задачи 3 следует из того, что  имеют различные числа скручивания.

**Замечание 1.** По ходу решения задач 1-9 было объявлено, что можно рассматривать как проволоки *ориентированные* (с фиксированным направлением обхода), так и неориентированные. В приведенных здесь решениях задач 1-9, мы ограничиваемся неориентированным случаем, оставляя (более простой) ориентированный случай читателю.

**4.** Число вращений  $r$  — непрерывная функция с целыми значениями; значит,  $r$  — константа. Поясним этот важный общий способ рассуждения подробнее, применительно к нашему случаю. Очевидно, что при разрешенных операциях наложения и протаскивания число  $r$  не меняется; не меняется и оно при других *малых* разрешимых движениях проволоки, а значит не меняется и при *любых* ее разрешенных преобразованиях (ибо любые движения — конечная последовательность

малых).

5. Выбрав направление обхода на  $h$ , нужно отметить знаком  $+$  все точки, в которых касательный вектор к  $h$  горизонтален и направлен слева направо, отметить знаком  $-$  все точки, в которых этот вектор идет горизонтально, но справа налево, и затем положить  $r(h)$  равным половине числа перемен знака при движении по выбранному направлению.

6. Таковы проволоки из задачи 3. Их неэквивалентность следует из решения задачи 3 или задачи 7.

7. Доказательство такое же, как в задаче 4, только  $r(h)$  нужно заменить на  $t(h)$ .

8. В одну сторону утверждение уже доказано: если  $h \sim h'$ , то из задачи 4 следует, что  $r(h) = r(h')$ , а из задачи 7, что  $t(h) = t(h')$ . Обратно, пусть  $r(h) = r(h')$  и  $t(h) = t(h')$  для двух проволок  $h$  и  $h'$ . Докажем, что  $h \sim h'$ . Приведем обе к стандартному виду, скажем  $h$  к виду  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , а  $h'$  — к виду  $(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4)$  (см. решение задачи 2). Тогда

$$\begin{aligned} |1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4| &= r(h) = r(h') = |1 + k'_1 + k'_2 - k'_3 - k'_4| \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 &= t(h) = t(h') = k'_1 - k'_2 + k'_3 - k'_4. \end{aligned}$$

Заметим, что при сбросе пары петель в левом нижнем углу рис. 10 происходит следующее изменение параметров:

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \mapsto (k_3 - 1, k_4 - 1, k_1, k_2),$$

поэтому при этом сбросе величина  $1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4$  в точности изменяет знак, а значит, можно добиться выполнения равенства

$$1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 1 + k'_1 + k'_2 - k'_3 - k'_4.$$

Из этого равенства с учетом  $t(h) = t(h')$  следует, что  $k_4 - k_1 = k'_4 - k'_1$  и  $k_3 - k_2 = k'_3 - k'_2$ , а значит, стандартный вид  $h'$

можно преобразовать в стандартный вид  $h$ , выполнив фокус Уитни (и обратную к нему операцию) нужное число раз.

9. Полный список без повторов показан на рисунке 12.

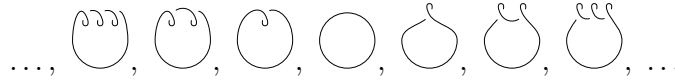


Рис. 12.

Для доказательства полноты достаточно заметить, что любая проволока на сфере эквивалентна проволоке, лежащей вблизи южного полюса, где ее можно привести (как на плоскости) к стандартному виду типа  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , а затем воспользоваться операцией *переброски через северный полюс* (рис. 13).



Рис. 13.

Для доказательства неповторяемости, следует воспользоваться (модифицированными) инвариантами  $r(h)$  и  $t(h)$ .

10. а) Как ни странно, все решившие эту задачу указали тот инвариант, который имели в виду авторы:  $w(H) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ , где  $n$  – число точек самопересечения,  $\varepsilon_i = +1$  если  $i$ -ая точка самопересечения положительна и  $\varepsilon_i = -1$  если она отрицательна. Доказательство инвариантности  $w(H)$  – простая проверка (при разрешенных операциях наложения и протаскивания  $w(H)$  не меняется).

б) Число  $w(H)$  меняется на слагаемое  $\pm 1$  в зависимости от типа устранимой (появляющейся) петельки ( $\infty$  или  $\infty$ ).

11. Правильное описание можно дать разными способами, например так:  $A$ -угол – это тот угол, который виден сначала



справа, а потом слева при переходе по верхней ветке; при этом ясно, что этот угол не зависит от направления перехода.

**12.** Ответы: (i)  $c$ ; (ii)  $c^2$ ; (iii)  $a + bc$ ; (iv)  $(a^2 + b^2)c + 2ab$ ; (v)  $a^3c^2 + 3a^2bc + 3ab^2 + b^3c$ .

**13.** Последовательно применяя условие (1), сведем задачу вычисления полинома  $P$  для данного зацепления к вычислению  $P$  для системы незацепленных окружностей, которые однозначно находятся по условиям (2) и (3).

**14.** а) Ответ:  $b = a^{-1}$ ,  $c = -a^2 - a^{-2}$ ,  $a$  — любое. Доказательство: в силу условий (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} P(\text{link}) &= aP(\text{link}) + bP(\text{link}) = \\ &= a \left[ bP(\text{link}) + aP(\text{link}) \right] + b \left[ bP(\text{link}) + aP(\text{link}) \right] = \\ &= abP(\text{link}) + (a^2 + b^2 + abc)P(\text{link}) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$P(\text{link}) = cP(\text{link})$$

в силу условия (2)). Инвариантность относительно наложения означает, что  $P(\text{link}) = P(\text{link})$ , а это возможно только при  $ab = 1$  и  $a^2 + b^2 + c = 0$ .

б) Если принять  $b = a^{-1}$ ,  $c = -a^2 - a^{-2}$ , то нетрудно считать, что  $P(\text{link}) = P(\text{link})$  выполняется автоматически<sup>1)</sup>.

Указание: воспользуйтесь соотношением  $P(\text{link}) = P(\text{link})$ , которое получается двукратным применением инвариантности относительно положения.


<sup>1)</sup>Мы сохраняем обозначение  $P$  для полинома  $P = P(a, b, c)$  после замены  $b = a^{-1}$  и  $c = -a^2 - a^{-2}$ .

в) При устранении петелек  $P$  умножается на  $-a^{\pm 3}$  (в зависимости от типа устраняемой петельки).

**15.** Ответ:  $\widetilde{P}_H := (-a)^{-3w(H)}P(|H|)$ , где  $H$  — ориентированное зацепление (или узел),  $|H|$  — то же зацепление, но без ориентации.

**16.** (i)  $-a^2 - a^{-2}$ , (ii)  $(-a^2 - a^{-2})^2$ , (iii) 1, (iv)  $-a^{10} - a^2$ , (v)  $-a^{16} + a^{12} + a^4$ .

**17.** Число  $w(H)$ , также как полином  $P(H)$ , инвариантно относительно наложения и протаскивания, но при устранении петель они меняются на слагаемое  $\pm 1$  и на множитель  $a^{\pm 3}$  соответственно. Отсюда и следует инвариантность полинома  $\widetilde{P}$ , ибо его инвариантность относительно наложения и протаскивания вытекает из этих свойств для  $w$  и  $P$ , а инвариантность относительно устранения петелек — из того, что изменения  $w$  и  $P$  компенсируют друг друга.

**18.** В качестве искомого инварианта можно взять  $\widetilde{P}$ . Узел  нельзя распутать, т.к. в противном случае мы имели бы  $-a^{16} + a^{12} + a^4 = 1$  (в силу задачи 16 (v) и условия (3)). Инвариантность  $\widetilde{P}$  вытекает из решения задач 10 (а,б) и 17.

**19–21.** Доказывается прямыми вычислениями из определения  $\widetilde{P}(a)$ .

**22.**  $\widetilde{P}_{-L}(a) = \widetilde{P}_L(a)$ , где  $-L$  обозначает зацепление (узел) совпадающий с  $L$ , но имеющий противоположную ориентацию.

**23.** Пример показан на рис. 14. Равенство  $K_L = K_{L'}$  вытекает из задачи 21, а неэквивалентность  $L$  и  $L'$  из того, что обе компоненты  $L'$  заузлены, в то время как в  $L$  заузлена только одна.

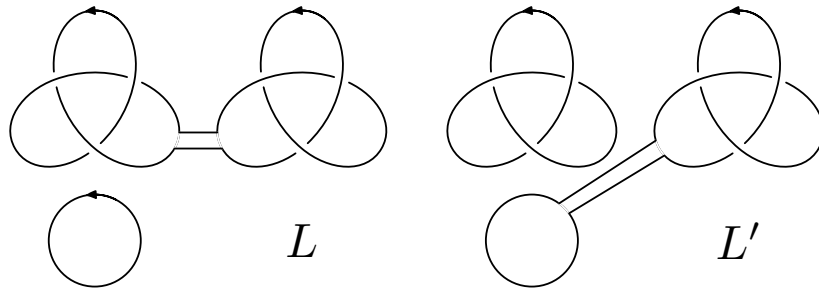
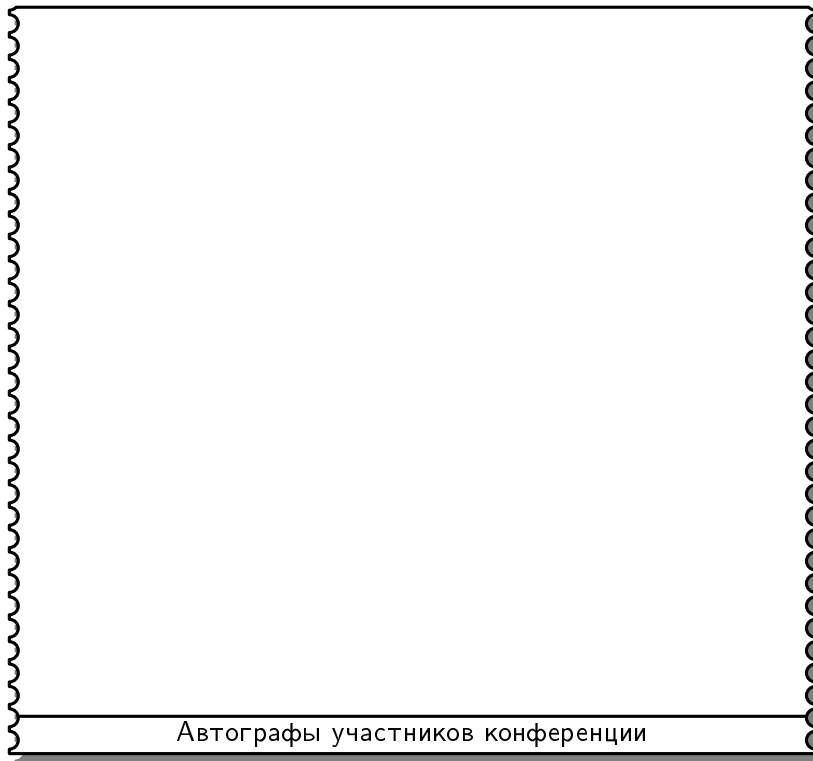


Рис. 14.



### Задача 6.

Предложенная задача была исследовательской в полном смысле этого слова: автор придумал понятие и знал ответы только на самые простые вопросы. Сложные вопросы ставились отчасти наугад. На промежуточном финише автор согласился с мнением наиболее продвинувшихся школьников, что стоит сосредоточиться на задачах о вырожденных и красивых двойных сетях на плоскости, опустив общий случай как необъятный и не слишком содержательный. Не увенчалась успехом и попытка найти аналог красивых двойных сетей в пространстве. Поэтому решения пунктов 1 д), 4, 5 в) и 6 здесь не приводятся.

Наиболее принципиальный результат — полная классификация красивых двойных сетей — был получен участницей конференции Ириной Анно (г. Москва, школа №57). Ей же принадлежат примеры с красивым шестиугольником, и несколько конструкций регулярных двойных сетей в пространстве, развеявших ожидания их разумной классификации.

Приведенное ниже доказательство о классификации в значительной мере опирается на идеи Ирины Анно; некоторые моменты взяты из работы Евгения Головина (г. Набережные Челны, школа №26).

**0. а)** Треугольники и параллелограммы. Кроме того, из любого треугольника можно сделать вырожденный четырехугольник, добавив вершину на любой из сторон: добавим в треугольнике  $ABC$  вершину  $D$  на стороне  $BC$  так, чтобы  $AB + BD = AC + CD$ .

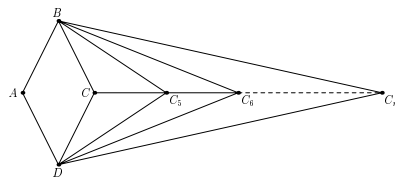


Рис. 1.

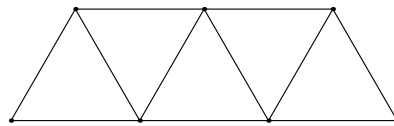


Рис. 2.



пересечет в  $B$ , мы получим, что  $R$  лежит на  $BQ$  — четвертая точка. Осталась возможность пересечь  $AC$  в одном из концов, скажем в  $C$ . Но тогда объявим  $QR$  новой осью; вершины  $P$ ,  $B$  и  $A$  лежат по одну сторону от нее, что, как показано выше, ведет к противоречию. На рис. 4 приведен пример вырожденной ДС максимально возможной нелинейности 3.

**1. г)** 4 и любое число больше 5. Параллелограмм — для 4 вершин, и полоска из  $n - 2$  равных правильных треугольников — для  $n > 5$  вершин (см. рис. 5).

**2.** Можно. Впишем 5-угольник  $ABCDE$  в параллелограмм с вершиной  $A$  и сторонами, параллельными  $AB$  и  $AE$ , и проведем через каждую вершину 5-угольника отрезки внутри параллелограмма, параллельные его сторонам (см. рис. 6).

**3. а)** *Указание.* Если две вершины лежат внутри многоугольника, и некоторый путь между ними выходит за пределы многоугольника, то этот путь — не кратчайший: заменив участок вне многоугольника на участок, идущий по границе, мы путь укоротим.

**3. б)** *Указание.* Докажите, что если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — три последовательные вершины многоугольника, и внутренний угол  $ABC$  не меньше развернутого, то среди лежащих внутри многоугольника путей из  $A$  в  $C$  путь  $ABC$  — единственный кратчайший.

**3. в)**    **5. а)**    **5. б)** Дадим полную классификацию

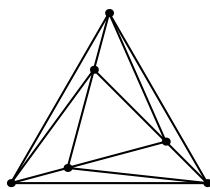


Рис. 4.

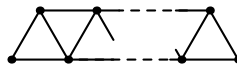


Рис. 5.

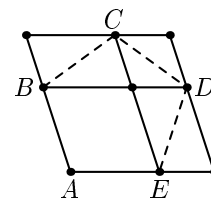


Рис. 6.

(см. рис. 7–10) красивых двойных сетей (КДС), по ходу получим ответы на пункты 3 в) и 5 а).

**Ответ 3в):** Любой красивый параллелограмм длины  $n = 1$  или  $n > 2$  и красивый шестиугольник.

**Ответ 5а):** 6 направлений (в красивом шестиугольнике).

**Ответ 5б):** Все перечисленные рис. 7–10 сети, а также все их выпуклые невырожденные подсети.

### Ключевые примеры КДС:

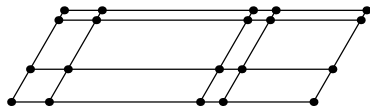


Рис. 7.

**Клетчатый параллелограмм:** параллелограмм, разбитый на меньшие части несколькими отрезками, равными и параллельными его сторонам.

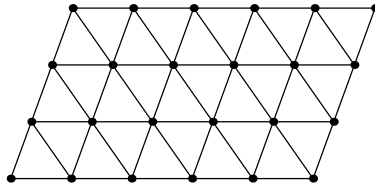


Рис. 8.

**Треугольная сетка:** клетчатый параллелограмм с равными клетками, в каждом из которых проведено по диагонали так, что все диагонали параллельны.

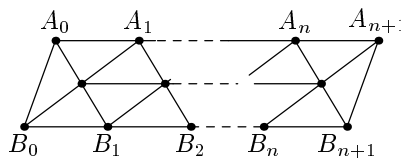


Рис. 9.

**Красивый параллелограмм длины  $n$ :** на двух противоположных сторонах параллелограмма отмечаются по  $n$  точек, делящих их на  $n + 1$  равных отрезков;  $i$ -я точка одной стороны соединяется отрезком с  $(i - 1)$ -й и  $(i + 1)$ -й точкой

другой стороны, и наоборот; точки пересечения отрезков соединяются напрямую между собой.

**Красивый шестиугольник:** на треугольной сетке берем звезду Давида, составленную из 12 равных треугольников, затем соединяем соседние вершины звезды прямыми отрезками.

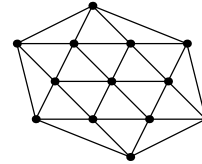


Рис. 10.

**Определение.** Вершины, соединенные прямолинейным путем, назовем *смежными*. Несмежные вершины в красивой сети назовем, соединенными параллелограммом. (Имеется в виду параллелограмм, ограниченный парой кратчайших путей между этими вершинами.)

Докажем, что этот параллелограмм — единственный.

**Лемма 1.** Пусть в красивой ДС есть путь  $ABC$ , где  $AB$  и  $BC$  прямолинейные пути. Достроим его до параллелограмма  $ABCD$ . Тогда все кратчайшие пути из  $A$  в  $C$  не выходят за границы этого параллелограмма.

*Доказательство.* Все ясно, если  $A$  и  $C$  соединены напрямую. Допустим,  $A$  и  $C$  соединены параллелограммом  $AKCL$ , где  $K$  и  $B$  лежат по одну сторону от  $AC$ . Если  $B$  лежит внутри треугольника  $AKC$ , то выпуклый путь  $ABC$  короче  $AKC$  — противоречие. Если  $B$  лежит вне треугольника  $AKC$ , а  $K$  — вне треугольника  $ABC$ , то пути  $AKC$  и  $ABC$  пересекаются, скажем,  $AK$  пересекает  $BC$ , скажем, в точке  $M$  (см. рис. 11). Но тогда путь  $AMC$  короче  $AKC$  — противоречие. Остается случай когда  $K$  лежит

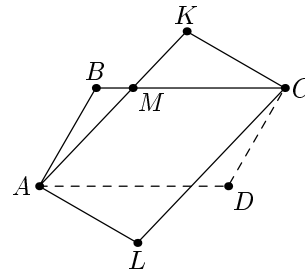


Рис. 11.



внутри или на границе треугольника  $ABC$ . Но тогда параллелограмм  $AKCL$  целиком лежит в параллелограмме  $ABCD$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть две вершины соединены между собой параллелограммом. Тогда из них не выходит ребер внутрь этого параллелограмма.

*Доказательство.* Пусть  $A$  и  $C$  соединены параллелограммом  $ABCD$ ; рассмотрим подсеть, им ограниченную. В ней все несмежные вершины соединены параллелограммами.

Допустим, внутри параллелограмма из  $A$  выходят ребра. Докажем, что тогда внутри параллелограмма проходит выпуклый путь, который короче пути по сторонам.

Выберем среди ребер выходящих из  $A$  ребро  $AK$  так, чтобы в углу  $KAB$  не было таких ребер. Если  $K$  и  $C$  смежны, то путь  $AKC$  выпуклый (т.к. всякий путь из двух ребер — выпуклый). Если  $K$  и  $C$  не смежны, соединим их параллелограммом  $KLCM$ , где  $L$  лежит в четырехугольнике  $ABCK$  (см. рис. 12). Допустим, путь  $AKLC$  не выпуклый.  $L$  не смежна  $A$ , иначе в углу  $KAB$  есть ребро. Соединим  $L$  с  $A$  параллелограммом  $APLQ$ , где  $P$  лежит в треугольнике  $ABL$ . По лемме 1 точка  $Q$  лежит в треугольнике  $ALK$ , но внутри  $ALK$  не выходит ребер из  $A$ , значит  $Q$  лежит на  $AK$ . Аналогично,  $P$  лежит на  $AB$ . Рассмотрим угол  $L$  в четырехугольнике  $PLCB$ . Если  $L$  больше развернутого, то путь  $APLC$  выпуклый. Если нет, то угол  $AKM$  равен углу  $L$ , и путь  $AKMC$  выпуклый. Такой путь будет короче пути  $ABC$  —

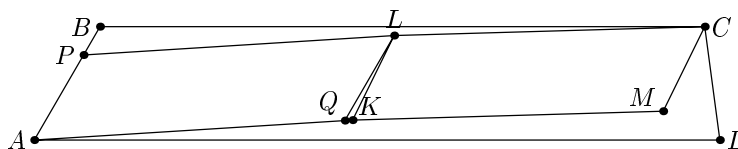


Рис. 12.

противоречие.

**Следствие 3.** Пусть два ребра выходят из общей вершины  $A$ , и в образованном ими углу нет других ребер. Тогда всякая вершина, лежащая внутри этого угла, соединена с  $A$  параллелограммом, у которого две стороны идут по этим ребрам.

*Доказательство.* Обозначим выходящие из  $A$  ребра  $m$  и  $n$ , вершину внутри угла —  $C$ . Вершина  $C$  не смежна  $A$ , иначе внутри угла  $mAn$  есть ребро  $AC$ . Пусть  $ABCD$  — параллелограмм, соединяющий  $A$  и  $C$ . Тогда ребра  $m$  и  $n$  не выходят внутрь угла  $BAD$  — по лемме 2, а ребра  $AB$  и  $AD$  не выходят внутрь угла  $mAn$  по условию. Значит, углы  $BAD$  и  $mAn$  совпадают.

**Следствие 4.** Если вершина  $C$  лежит на продолжении ребра  $AB$ , то  $A$  и  $C$  — смежны.

*Доказательство.* Пусть  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ . Предположим противное. Тогда  $A$  и  $C$  соединены параллелограммом, но ребро  $AB$  выходит внутрь этого параллелограмма.

Пусть  $A$  лежит между  $B$  и  $C$ . Тогда, как мы только что доказали,  $B$  и  $C$  смежны. Но тогда прямой путь из  $B$  в  $C$  проходит через  $A$ .

**Замечание.** Строго говоря, следующая теорема не нужна для классификации КДС. Все же обойти вниманием аффинную инвариантность КДС было бы неестественно. Теорема содержательна: хотя и прямые и параллелограммы сохраняются при аффинном преобразовании, но расстояния меняются, и кратчайший путь вполне бы мог перестать быть кратчайшим!

**Теорема 5 (об аффинности).** Аффинное преобразование переводит КДС в КДС.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что при аффинном преобразовании параллелограмм кратчайших путей останется таковым. Назовем кратчайший путь по параллелограмму

плохим, если после преобразования он перестает быть кратчайшим. Предположим противное: КДС  $Z$  перешла в  $Z'$ , не являющуюся КДС. Выберем среди плохих путей в  $Z$  самый короткий. Пусть это путь  $ABC$  в соединяющем  $A$  и  $C$  параллелограмме  $ABCD$ . Будем обозначать образы вершин и путей теми же буквами, но со штрихом. Поскольку путь  $ABC$  — плохой, то в  $Z'$  есть путь  $s'$  из  $A'$  в  $C'$  более короткий чем  $A'B'C'$ . Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, получим, что  $s'$  не выходит за границы параллелограмма  $A'B'C'D'$ . Тогда прообраз  $s$  пути  $s'$  не выходит за границы параллелограмма  $ABCD$ . По лемме 2 путь  $s$  может стартовать из  $A$  только по ребру параллелограмма  $ABCD$ , скажем, по  $AB$ . Пусть  $H$  — ближайшая к  $A$  вершина на  $AB$ , тогда  $H$  лежит на  $s$ . Очевидно, что  $HBC$  — это кратчайший путь из  $H$  в  $C$ , и по лемме 1, вершины  $H$  и  $C$  соединены параллелограммом  $HBCD$ . С другой стороны, кратчайший путь из  $H'$  в  $C'$  — по  $s'$ , что короче  $H'B'C'$ . Поскольку  $HBC$  проходит по параллелограмму, то это плохой путь, но он короче  $ABC$  — противоречие.

**Ответ 3.в):** Любой красивый параллелограмм длины 1 или длины  $n > 3$  и красивый шестиугольник не является подсетями большей КДС.

*Указание.* Предположим, что красивый параллелограмм длины 1 является чьей-то подсетью. Рассмотрим ближайшую к нему внешнюю вершину, и соединяя ее с другими вершинами с помощью следствий 3 и 4, покажите, что есть еще вершина на красивом параллелограмме либо более близкая к нему вершина.

Ответ также следует из полной классификации красивых двойных сетей.

**Определение.** *Минимальным параллелограммом (МП)* называется параллелограмм, образованный ребрами КДС, внутри и на сторонах которого нет вершин.

**Свойство 6.** Во всякой КДС найдется МП.

*Доказательство.* Выберем среди соединяющих параллелограммов параллелограмм  $P$  наименьшей площади. Пусть он соединяет вершины  $A$  и  $C$ . Допустим, в  $P$  есть вершина  $K$ , отличная от его вершин. Если  $K$  смежна  $A$  и  $C$ , то путь  $AKC$  короче пути из  $A$  в  $C$  по  $P$ . Если нет, то либо с  $A$ , либо с  $C$  вершина  $K$  соединена параллелограммом, который целиком лежит внутри  $P$ , и имеет меньшую площадь.

**Замечание.** Заметим, что если параллелограмм  $ABCD$  соединяет  $A$  и  $C$ , то в нем может присутствовать диагональ  $BD$ , то есть  $B$  и  $D$  могут быть смежны.

**Теорема 7.** Если в КДС есть МП без диагоналей, то эта КДС — клетчатый параллелограмм.

*Доказательство.* Пусть  $P = OXCY$  — минимальный параллелограмм, и  $K$  — вершина вне его. Рассмотрим  $OX$  и  $OY$  как координатные оси. Обозначим  $X'$  и  $Y'$  проекции  $K$  на эти оси. Докажем, что  $X'$  и  $Y'$  — вершины, связанные с  $K$  напрямую. Рассмотрим случай, когда  $K$  лежит во втором квадранте, остальные случаи разбираются аналогично.

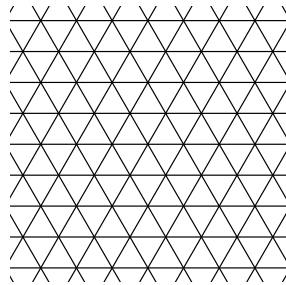
В углу  $CXO$  нет ребер, поэтому по лемме 2 вершины  $K$  и  $X$  соединены параллелограммом  $KLXX'$ ,  $Y'$  — пересечение  $KL$  и  $OY$ , и все доказано.

Пусть, наоборот,  $X'$  и  $Y'$  — вершины на осях  $OX$  и  $OY$  соответственно. Построим вершину  $K$  с проекциями  $X'$  и  $Y'$ . Внутри угла  $YCX$  нет ребер, поэтому по следствию 1 вершины  $C$  и  $X'$  соединены параллелограммом  $CMX'X$ , причем по лемме 2 внутри угла  $MX'X$  не выходит ребер. Аналогично,  $Y'$  соединена с  $X$  параллелограммом  $Y'LXO$ . По следствию 1 вершина  $L$  соединена с  $X'$  параллелограммом  $LKX'X$ , где  $K$  — искомая вершина.

Итак, наша ДС есть клетчатый параллелограмм  $Q$ , в котором, возможно, есть еще косые, то есть не параллельные осям, ребра. Покажем, что косых ребер нет. Рассмотрим

левую нижнюю вершину  $A$  параллелограмма  $Q$ . Применяя следствие 1 к правому верхнему углу  $C$  минимального параллелограмма  $P$ , видим, что  $C$  и  $A$  соединены параллелограммом, и что, по лемме 2, внутрь угла  $A$  косых ребер не выходит. Пусть теперь  $B$  — правая верхняя вершина произвольной клетки. Аналогично, она соединена параллелограммом с  $A$ , и из  $B$  влево вниз косых ребер не выходит. Точно также, косые ребра не выходят и в других направлениях.

**Описание КДС, у которых в минимальном параллелограмме (МП) проведена диагональ.**



Три набора равноотстоящих параллельных прямых на плоскости образуют бесконечную треугольную сетку (см. рис. 13). Эта сетка разбивает плоскость на равные треугольники, которые мы будем называть элементарными (ЭТ). По любому ЭТ сетка однозначно восстанавливается.

Фиксируем в КДС МП с диагональю. Он разбит этой диагональю на два треугольника; оба задают одну и ту же бесконечную треугольную сетку. Вершины этой сетки назовем узлами, а ЭТ, ограниченный ребрами КДС, — ячейкой.

Заметим, что фиксированный МП состоит из двух ячеек, и что по любой ячейке КДС сетка однозначно восстанавливается.

Скажем, что две ячейки  $a$  и  $b$  связаны, если найдется последовательность ячеек  $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ , такая, что в ней ячейки с соседними номерами граничат по ребру. Назовем два ЭТ вертикальной парой, если у них есть общая вершина и они центрально симметричны относительно нее.

Две прямые, продолжающие противоположные стороны

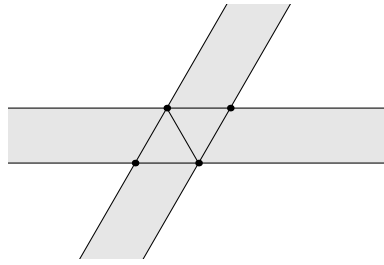


Рис. 14.

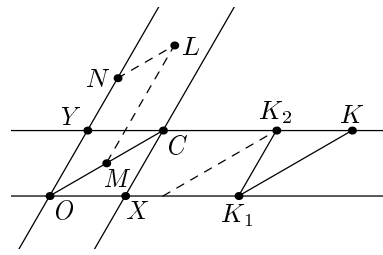


Рис. 15.

параллелограмма, ограничивают полосу; рассмотрим крест, состоящий из объединения двух полос для фиксированного МП (см. рис. 14).

**Свойство 8.** Все вершины КДС, лежащие в кресте, лежат в узлах на границе креста.

**Свойство 9.** Каждая вершина в кресте — это вершина ячейки. Любые две ячейки в кресте связаны цепочкой ячеек, лежащих в кресте.

**Доказательство свойств 8 и 9.** Если вершина лежит внутри или на границе МП, то это — вершина МП, то есть узел.

Если вершина лежит внутри одной из полос, то она лежит внутри одного из углов, образованных стороной и диагональю МП. Пусть, например, вершина  $L$  лежит в углу  $COY$  (см. рис. 15). По лемме 2 вершина  $L$  соединена с  $O$  параллелограммом  $LMON$ , но вершина  $M$  оказывается внутри МП — противоречие.

Пусть вершина  $K$  лежит на границе креста, например, на прямой  $YC$  правее МП (остальные случаи рассматриваются аналогично). Соединив  $K$  с  $O$  параллелограммом  $KK_1OC$ , получим вершину  $K_1$ . Соединив  $K_1$  с  $Y$  параллелограммом  $K_1OYK_2$ , получим вершину  $K_2$  и т.д. Какая-то из вершин  $K_i$  попадет внутрь МП, значит,  $K_i$  — узел.

Рассмотрим последовательность треугольников  $KK_1K_2$ ,

$K_1K_2K_3, K_{i-2}K_{i-1}X, K_{i-1}XC, COX$ . Двигаясь с конца, легко видеть, что все эти треугольники — ячейки. Значит  $K$  — узел. Кроме того, поскольку любая ячейка креста связана с ячейками МП, то все ячейки креста связаны между собой.

**Свойство 10.** Найдется ячейка, примыкающая к МП.

*Доказательство.* Пусть  $OYCX$  — фиксированный МП с диагональю  $OC$ . Покажем, что в кресте найдется еще вершина кроме вершин МП.

Если кроме вершин МП других вершин нет, то вершина  $O$  — вырожденная. Если есть вершины только на прямой  $OC$ , то, по следствию 4, все они смежны  $O$ , и снова  $O$  — вырождена.

Плоскость вне креста разбивается на четыре угла с вершинами  $O, X, C$  и  $Y$ . Пусть есть вершина  $K$  в одном из этих углов вне прямой  $OC$ . Вершина МП, противоположная вершине угла, по лемме 2 соединена с  $K$  параллелограммом, и по крайней мере одна из вершин этого параллелограмма лежит на границе креста. Если эта вершина не совпадает с вершинами МП, то мы ее и искали. Если совпадает, то такое возможно лишь когда другая вершина соединяющего параллелограмма лежит на  $OC$ . Пусть например,  $K$  лежит в углу  $OCY$  и соединена с  $C$  параллелограммом  $KLCY$  (см. рис. 16). Тогда по лемме 2 вершина  $O$  соединена с  $K$  параллелограммом  $ORKL$ , и  $R$  — искомая вершина.

Итак, в кресте есть дополнительная вершина. По свойству 9 есть цепочка ячеек в кресте, связывающая ее с ячейками МП, а в этой цепочке есть искомая ячейка.

**Свойство 11.** Все вершины КДС — узлы.

**Свойство 12.** Каждая вершина КДС — вершина ячейки. Любые две ячейки связаны.

*Доказательство свойств 11 и 12.* Рассмотрим МП и примыкающую к

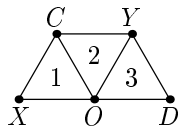


Рис. 18.

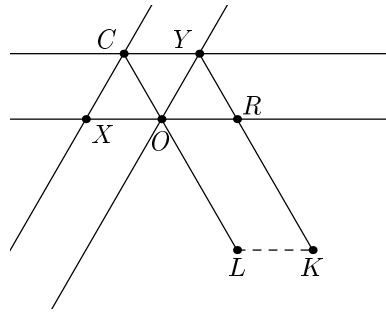


Рис. 16.

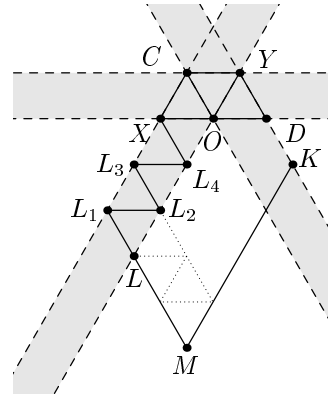


Рис. 17.

нему ячейку. Переобозначим, если необходимо, вершины как на рис. 18. Заметим, что параллелограмм, составленный из второй и третьей ячеек, также минимальный и дает ту же треугольную сетку.

Закрасим кресты, соответствующие обоим МП, как показано на рис. 17. Для всех закрашенных вершин и ячеек свойства 11 и 12 выполняются.

Пусть  $M$  — какая-нибудь незакрашенная вершина, скажем, лежащая в углу, вертикальном к  $COY$ .  $M$  соединена с  $Y$  параллелограммом  $MKYL$ . Но  $L$  — вершина закрашенная, поэтому есть закрашенная ячейка  $LL_1L_2$ , связанная с  $COX$  (см. рис. 17). Но тогда есть МП  $LL_1L_2L_3$ . Он состоит из двух ячеек, поэтому задает ту же самую треугольную сетку. Рассмотрим крест, связанный с этим МП. В этом кресте лежат как  $M$ , так и три исходные ячейки. Применяя свойства 8 и 9, получаем, что  $M$  — узел и вершина ячейки, связанной с исходными ячейками.

**Следствие 13.** Всякая ячейка — это половина некоторого



МП.

**Свойство 14.** Если две вершины связаны параллелограммом, то стороны этого параллелограмма идут по линиям треугольной сетки, и параллелограмм разбит на ячейки.

*Доказательство.* Можно считать, что одна из вершин — это  $O, X, C, Y$  или  $D$ , а другая —  $M$  (см. рис. 17). Вершина  $M$  соединена с вершинами  $C$  и  $Y$  параллелограммом, идущим по сторонам сетки. Вершины  $X, O$  и  $D$  лежат в углу  $KML_1$ , поэтому каждая из них соединена с  $M$  параллелограммом со сторонами, параллельными сторонам этого угла, то есть тоже по сетке. Последовательно соединяя каждую вершину цепочки треугольников, связывающих  $M$  с МП, разобьем параллелограмм  $MLYK$  на ячейки.

**Определения.** Ребро назовем *особым*, если оно не идет по линиям сетки. Вершину назовем *одинокой*, если она является вершиной только одной ячейки.

**Теорема 15.** Если в КДС нет особых ребер, то она — подсеть треугольной сетки.

*Доказательство.* Рассмотрим объединение всех ячеек. Покажем, что в этой фигуре нет дыр. Предположим, дыра есть. Пусть сторона  $AB$  ячейки  $ABC$  примыкает к дыре (см. рис. 19). Тогда внутри угла  $ABC$  найдется вершина  $K$  КДС. Она соединена с  $C$  параллелограммом  $KLCM$ . Однако по свойству 14 этот параллелограмм разбит на ячейки, в частности  $DAB$  — МП, то есть  $AB$  не примыкает к дыре — противоречие.

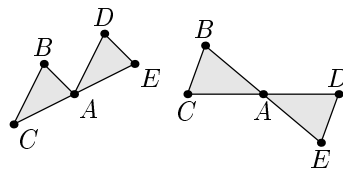


Рис. 20.

Покажем, что фигура является многоугольником. Это мо-

жет быть не так только если есть соединение ячеек уголком, то есть присутствует вершина такая вершина  $A$ , из которой выходят четыре внешних ребра фигуры как показано на рис. 20. Но между ячейками  $ABC$  и  $ADE$  есть цепочка примыкающих. Тогда путь из  $ABC$  в  $ADE$  через вершину  $A$  и возвращение по цепочке примыкающих ячеек охватывает дыру. Противоречие.

Осталось показать, что всякое ребро входит в фигуру. Допустим противное, то есть ребро КДС  $AB$  не входит в фигуру, то есть не ограничивает ячейку. Но вершины  $A$  и  $B$  — это вершины ячеек, тогда путь из  $A$  в  $B$  по ребру и возвращение по цепочке ячеек охватывает дыру, к которой примыкает ячейка, и повторяя доказательство из первого абзаца, снова получаем противоречие.

Итак, внешние ребра КДС ограничивают многоугольник, разбитый на ячейки, то есть это — подсеть треугольной сетки.

Теорема 15 доказана.

#### Осталось описать ДС, у которых есть особые ребра.

**Свойство 16.** Концы особого ребра — одинокие вершины.

*Доказательство.* Пусть  $AM$  — особое ребро, но вершина  $A$  не одинока. Тогда есть ребро  $AB$ , по которому граничат две ячейки (см. рис. 21) (иначе в  $A$  ячейки соединены уголком).

Точка  $M$  лежит в области, дополнительной к углу  $CAD$ . Прямые  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  разбивают эту область на четыре угла. Если  $M$  лежит на одной из этих прямых, то  $AM$  идет по линиям треугольной сетки, то есть не особое. Если  $M$  лежит в углу 2 (см. рис. 21), то  $M$  соединена с  $B$  параллелограммом  $MLBK$ , и ребро  $MA$  выходит внутрь этого параллелограмма — противоречие. Если  $M$  лежит в углу 1, то ребро  $MA$  выходит внутрь параллелограмма, соединяющего  $M$  с  $C$  — снова

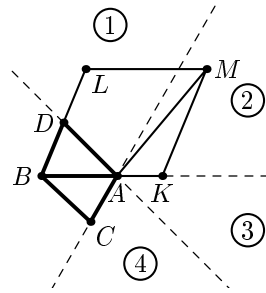


Рис. 21.

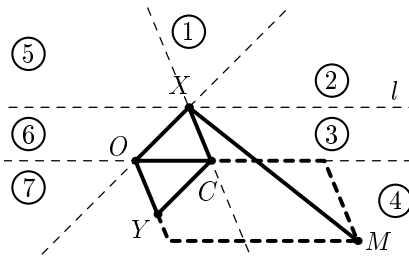


Рис. 22.

противоречие. Аналогично сводятся к противоречию предположения, что  $M$  лежит в углу 3 или 4. Итак, особое ребро не может выходить из одинокой вершины.

**Свойство 17.** Пусть  $XM$  — особое ребро. Рассмотрим единственную ячейку с вершиной  $X$ . Тогда  $M$  лежит на продолжении стороны ячейки, противоположной  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $XOC$  — ячейка,  $YOC$  — ячейка, примыкающая к ней. Проведем прямую  $l$  через  $X$  параллельно  $OC$ . Вершина  $M$  лежит в области, дополнительной к углу  $OXC$ . Прямые  $OX$ ,  $CX$  и  $OC$  разбивают эту область на 7 частей (см. рис. 22). Будем считать, что границы не входят в эти части.

Если  $M$  лежит в углу 1, то ребро  $MX$  выходит внутрь параллелограмма, соединяющего  $M$  с  $Y$ .

Если  $M$  лежит в части 2 или 4, то ребро  $MX$  выходит внутрь параллелограмма, соединяющего  $M$  с  $O$ .

В части 3 вообще нет узлов сетки.

Случаи, когда  $M$  лежит в частях 5, 6 или 7, сводятся к противоречию аналогично случаям 2, 3 и 4.

Если  $M$  лежит на прямой, проходящей через  $X$ , то ребро  $XM$  идет по линиям треугольной сетки и, следовательно, не особое.

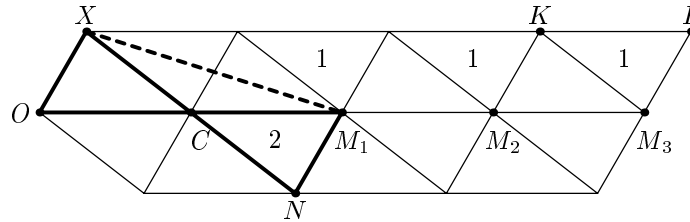


Рис. 23.

Для  $M$  остается единственная возможность — лежать на прямой  $OC$ .

**Свойство 18.** Всякое особое ребро — это диагональ параллелограмма, составленного из двух примыкающих ЭТ. Оно соединяет вершины вертикальной пары ячеек (см. рис. 23).

*Доказательство.* Пусть  $MX$  — особое ребро,  $XOC$  — единственная ячейка с вершиной  $X$ . Обозначим возможные положения вершины  $M$  на луче  $OC$  точками  $M_1, M_2, M_3, \dots$  (луч  $CO$  рассматривается аналогично).

Посмотрим, для каких ячеек с вершинами  $M_i$  вершина  $X$  будет лежать на продолжении противоположной стороны ячейки. Очевидно, это одна из ячеек, помеченных 1 или ячейка 2.

Допустим, это одна из 1, скажем  $M_3KLM_3$ . Рассмотрим параллелограмм  $LXOM_3$ , соединяющий  $L$  с  $O$ . Этот параллелограмм разбивается на ячейки, но тогда ребро  $M_3X$  пересекает ребро  $KM_2$  — противоречие. Отсюда единственная возможность — ячейка 2.

**Теорема 19.** В КДС есть ребра не более 6 направлений.

*Доказательство.* Есть три направления по линиям треугольной сетки, и еще не более трех направлений у особых ребер, так как есть три способа составить параллелограмм из двух ЭТ.

**Свойство 20.** Из одной вершины выходит не более двух

особых ребер. Если выходит ровно два особых ребра, возникает конструкция из трех ячеек как на рис. 24.

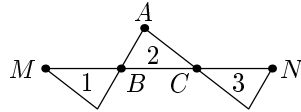


Рис. 24.

Если есть оба этих ребра, то по свойству 18 есть и ячейки 1 и 3, центрально симметричные ячейке 2 относительно вершин  $B$  и  $C$  соответственно.

**Свойство 21.** Особое ребро всегда внешнее.

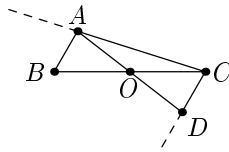


Рис. 25.

*Доказательство.* Пусть  $A$  — одинокая вершина ячейки  $ABC$ ,  $M$  и  $N$  — ближайшие к  $B$  и  $C$  узлы на прямой  $BC$ . Тогда только  $AM$  и  $AN$  могут быть выходящими из  $A$  особыми ребрами. Если

есть оба этих ребра, то по свойству 18 есть и ячейки 1 и 3, центрально симметричные ячейке 2 относительно вершин  $B$  и  $C$  соответственно.

*Доказательство.* Пусть особое ребро  $AC$  соединяет одинокие вершины вертикальной пары ячеек  $OAB$  и  $OCD$ . Обозначим  $p$  полуплоскость с границей  $AC$ , где не лежит  $O$ . Предположим, что в  $p$  есть вершина КДС  $M$ , и придем к противоречию. Разобьем  $p$  продолжениями сторон пары ячеек на 5 частей (см. рис. 25).

Если  $M$  лежит на границе частей, то  $M$  соединена с  $A$  (или  $C$ ) напрямую, и тогда  $A$  (или  $C$ ) не одинока. Если  $M$  лежит в части 1, то  $M$  соединена с  $O$  параллелограммом  $MKOL$ , из  $C$  выходит ребро в направлении  $K$ , поэтому  $C$  не одинока. Если  $M$  лежит в части 2, соединим  $M$  с  $B$  параллелограммом, и  $C$  не одинока. Если  $M$  лежит в части 3, соединим параллелограммом  $M$  с  $D$ , и  $C$  не одинока. Случаи частей 4 и 5 сводятся к противоречию аналогично 2 и 1.

**Свойство 22.** Пусть особое ребро  $AC$  соединяет вершины вертикальной пары ячеек  $OAB$  и  $OCD$  (см. рис. 25). Если из  $C$  не выходит других особых ребер, то КДС целиком лежит в

углу  $ACD$ .

*Доказательство.* Обозначим  $p$  ограниченную прямой  $CD$  полуплоскость, в которой не лежит вершина  $O$ . Предположим, что в дополнении к углу  $ACD$  есть вершина  $N$  КДС. Тогда по свойству 15  $N$  может лежать только в углу  $DCR$ . Как бы она не была соединена с  $C$  — напрямую или параллелограммом, в полуплоскости  $p$  есть вершина, соединенная с  $C$  напрямую. Но тогда из  $C$  выходит еще одно длинное ребро либо  $C$  не одинока. Противоречие.

**Свойство 23.** В графе, составленном из особых ребер, могут быть только такие компоненты связности:  $P_n$  (цепочка из  $n$  ребер) при  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $C_6$  — цикл из 6 ребер.

*Доказательство.* Если в графе из каждой вершины выходит не более двух ребер, любой его связный подграф есть  $P_n$  или  $C_n$ . Если строить  $P_n$  вместе с соответствующими ячейками на треугольной сетке, при  $n = 6$  цепочка замкнется. Осталось показать, что при  $n = 5$  найдется еще одно особое ребро, замыкающее цепочку в цикл. Действительно, рассмотрим цепочку особых ребер  $ABCDEF$  и ячейки 1, 2, 3, 4, 5, 6 (см. рис. 26). Если бы из  $A$  не выходит других особых ребер, то, по свойству 22 вся КДС лежала бы в углу  $BAE$ , однако вершина  $F$  туда не попадает. Значит, есть еще особое ребро  $AF$ , которое замыкает цепочку.

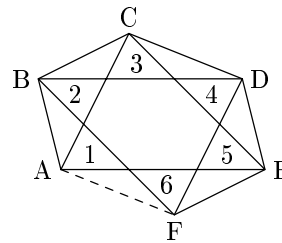


Рис. 26.

**Теорема 24.** Если в графе особых ребер КДС есть компонента связности  $P_1$ , то эта КДС — подсеть красивого параллелограмма.

*Доказательство.* Пусть  $P_1$  — это ребро  $A_1B_1$ , а  $C_1B_1B_2$  и  $C_1A_1A_2$  — соответствующая вертикальная пара ячеек (см. рис. 27). Согласно свойству 22 КДС целиком лежит в полу-

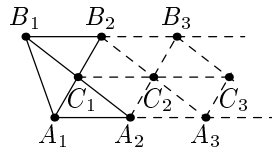


Рис. 27.

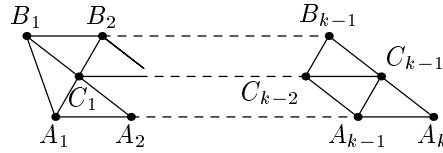


Рис. 28.

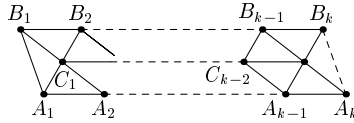


Рис. 29.

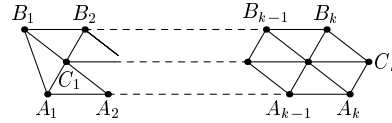


Рис. 30.

полосе, ограниченной лучами  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и отрезком  $A_1B_1$ . Обозначим попавшие в полуполосу узлы по порядку  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$  как на рис. 27. Пусть на луче  $A_1A_2$  лежит  $a$  вершин КДС, на луче  $B_1B_2$  —  $b$  вершин, и на луче  $C_1C_2$  —  $c$  вершин, и пусть для определенности  $a \geq b$ .  $A_a$  соединена с  $B_1$  параллелограммом  $C_cB_{a-1}B_1A_2$ , поэтому  $b \geq a - 1$ . Кроме того, на  $A_aB_{a-1}$  лежит  $C_{a-1}$ , значит,  $c \geq a - 1$ . Вершина  $C_c$  соединена с  $A_1$  параллелограммом  $C_cC_1A_1A_c$ , поэтому  $a \geq c$ , аналогично  $b \geq c$ .

Пусть  $a = k \geq 2$ . Тогда  $k - 1 \leq c \leq b \leq k$ . Всего возможны три случая:

- 1)  $b = k - 1$ ,  $c = k - 1$  (см. рис. 28). Это уже КДС, и из одинокой вершины  $A_k$  особое ребро проводить некуда.
- 2)  $b = k$ ,  $c = k - 1$  (см. рис. 29). Вершины  $A_k$  и  $B_k$  могут быть соединены только напрямую, тогда получается красивый параллелограмм длины  $k - 1$  (при  $k > 2$ ).
- 3)  $b = k$ ,  $c = k$  (см. рис. 30) Это — красивая КДС (при  $k > 2$ ), одиноких вершин — кроме  $A_1$  и  $B_1$  — в ней нет.

Во всех трех случаях получались подсети красивых параллелограммов.

**Теорема 25.** Если в графе особых ребер КДС есть компонента связности, в которой не менее двух ребер, то эта КДС — подсеть красивого шестиугольника.

*Доказательство.* Пусть есть компонента связности  $P_2$ , составленная из особых ребер  $AB$  и  $BC$ . Тогда, согласно свойству 20, есть конструкция из этих ребер и ячеек 1, 2 и 3 (см. рис. 31). По свойству 22 КДС целиком лежит в пересечении углов  $FAB$  и  $BCG$ , то есть в четырехугольнике  $ABCL$ .

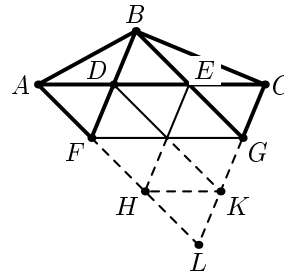


Рис. 31.

Если узлы  $H, K, L$  — не вершины КДС, то КДС очевидно совпадает с  $ABCGF$ . Если  $H$  или  $K$  — вершины, а  $L$  — нет, то, соединяя  $H$  с  $C$ , а  $K$  — с  $A$ , видим, что КДС совпадает с  $ABCKH$ . Наконец, если  $L$  — вершина, то КДС совпадает с  $ABCL$ . Во всех случаях получаем подсеть  $ABCL$ , которая, в свою очередь, является подсетью красивого шестиугольника.

Аналогично, если в графе особых ребер есть компонента связности  $P_3, P_4$  или  $C_6$ , то КДС аффинно эквивалентна ДС на рис. 32, 33 или красивому шестиугольнику соответственно.



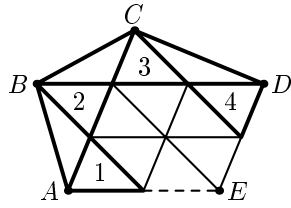


Рис. 32.

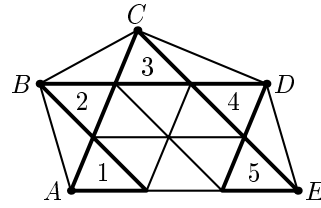
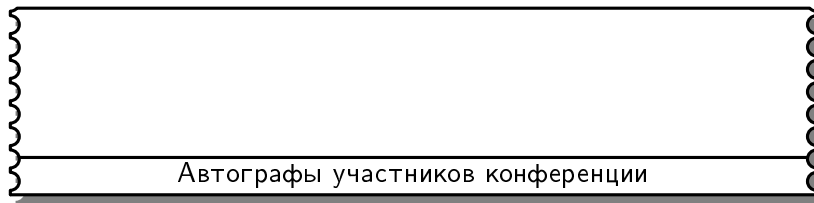
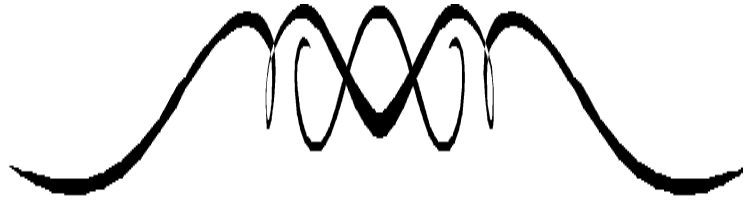


Рис. 33.



Автографы участников конференции

