ОТЗЫВ

официального оппонента Каледина Д.Б. на диссертацию

**Миховича Андрея Михайловича**

"Функтор схематизации в размерности 2 и асферичность",

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 -- геометрия и топология.

Диссертация посвящена некоторым вопросам алгебраической топологии. Эта наука, также известная как теория гомотопий, находится не просто на стыке алгебры и топологии, а в области их пересечения. Гомотопические типы, основные объекты изучения теории гомотопий, могут быть представлены как топологически пространствами специального вида (CW-комплексами), так и чисто алгебраически, симплициальными множествами. При этом представление симплициальными множествами с концептуальной точки зрения предпочтительнее, т.к. представляющие объекты меньше и чисто комбинаторные. Однако с практической точки зрения, хорошо известно, что требуемая комбинаторика крайне сложна, и эффективно применять ее нелегко. В размерности 1, все сравнительно просто -- CW-комплексы размерности 1 отвечают свободным группам -- но уже в размерности 2 до сих пор имеется масса открытых вопросов и гипотез, в том числе классические уже гипотезы Дж. Уайтхеда, и ряд вопросов Ж.-П. Серра. Релевантная комбинаторика здесь известна, это копредставления групп, пермутационные представления и скрещенные модули, но эти обьекты ведут себя весьма нетривиально, и в их теории много тонких вопросов и замечательных и неожиданных теорем (как например теорема Линдона о тождествах, и теорема Вайса о жесткости пермутационных модулей).

По мере развития общей теории гомотопий, развивалась и теория гомотопий в размерности 2; важным продвижением здесь стала рациональная теория гомотопий, построенная Квилленом, которая позволила изучать теорию гомотопий методами теории алгебр Ли и алгебраических групп. К сожалению, это возможно только для "рациональных" гомотопических типов, и только после проунипотентного пополнения -- в то время как хорошо известно, что основные трудные задачи теории гомотопий касаются конечных групп и кручения. Попытка построить аналог теории Квиллена в общем случае была предложена Гротендиком, в форме гипотетического функтора схематизации, однако до конкретных результатов доведена не была. Тем не менее, хотя общей теории в положительной характеристике в обозримом будущем ожидать не приходится, остается надежда получать результаты нам полем p-адических чисел (которое имеет характеристику 0). В двумерной ситуации это значит, что наряду с классической "дискретной" теорией существует и p-адическая, изучающая про-p-группы, и можно надеяться на некоторый параллелизм результатов. Такой параллелизм действительно обнаруживается, но ведет себя странно: простые утверждения в дискретной теории оказываются весьма сложны (или даже неверны) в p-адической, и наоборот. Однако параллельное развитие двух теорий все же оказывается довольно продуктивным, и порой удается результаты из одной применить для доказательства результатов в другой, которые потом в свою очередь применить к первой.

Дав общий обзор обсуждаемой тематики, опишем конкретно рассматриваемую диссертацию. Автор изучает двумерную топологию, как дискретную, так и p-адическую, причем, как и классическими методами копредставлений, так и с помощью функтора схематизации. При этом он основательно разобрался в обсуждаемом круге вопросов, построил несколько общих теорий, и доказал несколько конкретных результатов. Вот главные из них:

1. Важнейший вопрос дискретной двумерной топологии это гипотеза Дж. Уайтхеда об асферичности копредставлений групп (асферичность это отсутствие высших групп гомотопий). Гипотеза до сих пор открыта, но работа автора позволяет посмотреть на нее с новой стороны. Вместо того, чтобы изучать только асферические копредставления, или их прямолинейные обобщения (т.н. "комбинаторно асферические"), автор, следуя старому плану О.В. Мельникова, вводит совершенно новый класс "квазирациональных" копредставлений. С практической точки зрения, такие копредставления ничем не хуже асферических, но как совокупность они ведут себя гораздо лучше: в частности, как доказывает автор, они содержат асферические копредставления и их подкопредставления, а также, в p-адическом случае, про-p-копредставления групп с одним соотношением. Определение квазирационального копредставления при этом крайне простое и естественное (группа коинвариантов модуля соотношений по действию самой группы не имеет кручения), имеет очевидный гомологический смысл, и как показывает автор, не зависит от выбора копредставления, т.е. является свойством самой группы. Тем самым, само определение квазирацинального копредставления -- вместе с теоремами, которые автор про них доказал -- является существенным научным открытием и важным продвижением в обсуждаемой области математики.

2. Используя свою общую теорию, автор смог дать ответ на несколько классических открытых вопросов Ж.-П. Серра, поставленных довольно давно и весьма трудных. В частности, он получил про-p аналог классической же -- но весьма красивой и неожиданной -- теоремы Линдона о тождествах, гласящей, что модули соотношений копредставлений дискретных групп с одним соотношением индуцированы с циклических подгрупп. Автор точно и четко показывает, почему буквального аналога этого утверждения в про-p-теории ожидать не следует, и какова правильная формулировка, а затем доказывает теорему в этой правильной формулировке.

3. Другой вопрос Серра, на который дает ответ автор -- это вопрос о про-p- группах когомологической размерности 2. Здесь, опять же, в исходной формулировке вопрос не вполне правильный, а правильная формулировка дана и доказана автором: конечнопорожденная про-p-группа с одним соотношением,

которая вкладывается в свое p-адическое рациональное проунипотентное пополнение, имеет когомологическую размерность 2.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, и списка цитируемой литературы. Во введении дан краткий, но весьма внятный и содержательный общий обзор рассматриваемой тематики, включая ее историю, работы Уайтхеда и Серра, а также идеи О.В. Мельникова середины 90-х годов, а затем описываются основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена теории квазирациональных копредставлений. Здесь это понятие вводится, мотивируется, доказываются основные результаты про него, а также объясняется, каково место квазирациональности в общей схеме построения рассматриваемой области, гипотетически предложенной Мельниковым. Вся теория строится как в дискретной, так и в p-адической ситуации.

Вторая глава посвящена построению и изучению топологических и скрещенных модулей. Часть результатов здесь известна и дана в качестве напоминания, другая принадлежит автору. Большинство результатов довольно технические и нацелены на применения в третьей главе, однако также именно здесь доказана упомянутая выше общая теорема о когомологической размерности 2.

Наконец, третья глава посвящена более детальному изучению унипотентных групп. Сперва дан краткий обзор соответствующей гомологической теории. Далее, применяя методы первых двух глав и функтор схематизации, автор доказывает аналог теоремы о когомологической размерности два для унипотентных групп, а также упомянутую выше p-адическую версию теоремы Линдона о тождествах.

К числу недостатков работы следует отнести некоторую сумбурность не столько даже изложения, сколько организации. Работа написана достаточно хорошо, читать ее легко, и при этом легко следить и за доказательствами. Все необходимые определения даны, а все понятия, включая хорошо известные, снабжены напоминаниями. Однако напоминания порой встречаются далеко не сразу. Собственно, даже ключевое понятие асферичности появляется в первый раз на странице 1 -- да что там, в строчке 1 -- но что это такое, автор напоминает на странице 15. Кроме того, как это часто бывает и как и должно быть, работа основана на опубликованных статьях автора, частично написанных по-английски -- но, хотя очевидно, что автор провел большую работу по соединению кусков в единое стройное целое, некоторые следы все же остались (например, слово submodules на странице 54).

Отмечу, однако, что эти недостатки никак не влияют на общее впечатление от работы, которое весьма положительное. Работа в целом хорошо написана, автор продемонстрировал отличное владение темой, получил ряд важных результатов и сделал ряд математических открытий.

Результаты диссертации прошли апробацию как на российских, так и на международных конференциях и семинарах. Они опубликованы в статьях, три из которых -- в научных изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web-of-Science. Выводы диссертации научно обоснованы.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским Государственным Университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода.

Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.04 "геометрия и топология" (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным в Положении о присуждении ученых степеней в Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно приложениям Положения о диссертационном совете Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова. Публикации и научные доклады диссертанта в полной мере отражают содержание работы.

Автореферат включает в себя описание основных результатов и полностью отражает содержание диссертации.

Считаю, что Михович Андрей Михайлович заслуживает присвоения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 -- "геометрия и топология".

Официальный оппонент, д.ф.-м.н., проф. РАН, в.н.с. Математического Института РАН им. В.А.Стеклова Каледин Дмитрий Борисович
Контактные данные: +7(916)189-7093, kaledin@mi-ras.ru, 16.05.19г.
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.06, "математическая логика, алгебра и теория чисел"

Адрес места работы: 119991, Москва, ул. Губкина 8, МИАН им. В.А. Стеклова.

Подпись Д.Б. Каледина удостоверяю: Высоцкая В.И.

ОТДЕЛ КАДРОВ
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук * МОСКВА *