



ФГБОУ ВО «Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Под редакцией **В.М. Гончаренко** и **В.Ю. Попова**

Рекомендовано ФГБОУ ВО «Государственный университет управления»
в качестве **учебника** для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
«Бизнес-информатика», «Экономика»,
«Прикладная математика и информатика»
(квалификация (степень) «бакалавр»)

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАУ «Федеральный институт развития образования»
Регистрационный номер рецензии № 442 от 06.11.2014

BOOK.ru

ЭЛЕКТРОННО-БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

КНОРУС • МОСКВА • 2016

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в631я73
М34

Рецензенты:

А.В. Белов, декан факультета прикладной математики и кибернетики НИУ ВШЭ, доц. кафедры кибернетики, ведущий научный сотрудник лаборатории физики низкоразмерных систем, канд. физ.-мат. наук,

С.В. Мхитарян, проф. кафедры маркетинга и коммерции МЭСИ, д-р экон. наук,
В.В. Угроз, проф. кафедры «Прикладная математика» Финансового университета при Правительстве РФ, д-р физ.-мат. наук

Авторский коллектив:

И.А. Александрова, В.М. Гончаренко, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев,
С.В. Петропавловский, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра, А.Б. Шаповал

Математические методы в экономике и финансах : учебник / коллектив авторов ; под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. — М. : КНОРУС, 2016. — 602 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-04915-0

DOI 10.15216/978-5-406-04915-0

Излагаются основные математические методы, которые применяются при решении экономических и финансовых задач. Основные темы: теория обыкновенных дифференциальных уравнений и численные методы их решения, модели экономической динамики с непрерывным временем, разностные уравнения и дискретные модели в экономике и финансах, избранные вопросы вариационного исчисления и оптимального управления, уравнения в частных производных первого порядка, уравнения математической физики и их применение в финансах, а также процентные расчеты, потоки платежей и облигации, портфельный анализ и факторные модели.

Соответствует ФГОС ВО 3+.

Для студентов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Прикладная математика и информатика» и другим направлениям подготовки бакалавров, магистров, аспирантов и слушателей послевузовского образования, а также преподавателей.

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в631я73

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Сертификат соответствия № РОСС RU.АГ51.Н03820 от 08.09.2015.

Изд. № 7323. Подписано в печать 25.04.2016. Формат 60×90/16.

Гарнитура «NewtonС». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 38,0. Уч.-изд. л. 25,0. Тираж 700 экз.

ООО «Издательство «КноРус».

117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.

Тел.: 8-495-741-46-28.

E-mail: office@knorus.ru <http://www.knorus.ru>

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские Технологии».

109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

Тел.: 8-495-221-89-80.

ISBN 978-5-406-04915-0

© Коллектив авторов, 2016
© ООО «Издательство «КноРус», 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
-------------------	---

Глава 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Основные понятия и примеры	12
1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка	16
1.2.1. Нормальная и симметрическая формы	16
1.2.2. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением первого порядка	17
1.2.3. Задача Коши и теорема существования и единственности	20
1.2.4. Особые точки	23
1.2.5. Общее и частное решения	27
1.2.6. Общий и частный интеграл	31
1.2.7. Особое решение	32
1.3. Уравнения с разделяющимися переменными	34
1.4. Автономные уравнения	37
1.4.1. Определения и общие свойства	37
1.4.2. Фазовый портрет автономного уравнения	39
1.5. Однородные дифференциальные уравнения	41
1.5.1. Однородные функции и однородные уравнения	41
1.5.2. Уравнения, приводимые к однородным	45
1.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	48
1.6.1. Основные определения	48
1.6.2. Линейное однородное дифференциальное уравнение	49
1.6.3. Метод вариации постоянной	50
1.6.4. Теорема единственности и существования для линейного дифференциального уравнения	54
1.6.5. Метод Бернулли	55
1.7. Уравнения Бернулли	56
1.8. Уравнения в полных дифференциалах	59
1.8.1. Общие понятия и условия интегрируемости	59
1.8.2. Интегрирующий множитель	63
1.9. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной	66
1.9.1. Общие понятия и теорема существования и единственности	66
1.9.2. Особые точки и особое множество	69
1.9.3. Уравнения, не содержащие в явном виде одну из неизвестных	72
1.9.4. Общий метод введения параметра	74
1.9.5. Уравнение Лагранжа и Клеро	76
Контрольные вопросы и упражнения	79

Глава 2. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Общие сведения	82
2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка	83
2.2.1. Уравнения, не содержащие в явном виде аргумента	83
2.2.2. Уравнения, не содержащие в явном виде искомую функцию	84
2.2.3. Однородные уравнения	85
2.2.4. Уравнения в полных производных	86
2.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	88
2.3.1. Общие сведения	88
2.3.2. Свойства решений линейного уравнения	89

2.4. Линейные однородные уравнения	90
2.4.1. Определитель Вронского и фундаментальный набор решений	91
2.4.2. Общее решение линейного однородного уравнения	93
2.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	95
2.5.1. Характеристическое уравнение.	95
2.5.2. Случай действительных и различных корней	97
2.5.3. Случай комплексных корней	98
2.5.4. Случай кратного корня	99
2.5.5. Алгоритм решения линейного однородного уравнения в n -мерном случае.	100
2.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.	102
2.6.1. Метод вариации постоянных	102
2.6.2. Метод неопределенных коэффициентов.	104
Контрольные вопросы и упражнения	110

Глава 3. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Общие сведения о системах обыкновенных дифференциальных уравнений	112
3.2. Метод исключения.	115
3.3. Системы линейных дифференциальных уравнений	117
3.4. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	121
3.4.1. Общие сведения	121
3.4.2. Характеристическое уравнение.	123
3.4.3. Линейное преобразование системы. Каноническая система.	124
3.4.4. Случай различных действительных корней	126
3.4.5. Случай комплексных корней	129
3.4.6. Случай кратного корня	131
3.4.7. Метод присоединенных векторов.	134
3.4.8. Системы с числом уравнений, большим двух	137
3.5. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами	142
3.5.1. Метод вариации постоянных	142
3.5.2. Метод неопределенных коэффициентов.	144
Контрольные вопросы и упражнения	147

Глава 4. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Простейшие модели экономического роста	149
4.1.1. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе)	149
4.1.2. Связь между эластичностью спроса и видом выпуклости выпуска.	151
4.1.3. Логистический рост	152
4.1.4. Общий случай	154
4.2. Модель роста Харрода – Домара.	156
4.2.1. Основные предположения модели.	156
4.2.2. Случай постоянного потребления	157
4.2.3. Случай роста потребления с постоянным темпом	158
4.3. Динамическая модель рынка Вальраса.	161
4.4. Динамические модели Кейнса.	163
4.4.1. Модель Кейнса с акселерацией	163
4.4.2. Модель Кейнса с запаздыванием.	164
4.5. Неоклассическая модель роста Солоу	165
4.5.1. Неоклассическая производственная функция	165
4.5.2. Уравнение неоклассического роста	168
4.5.3. Стационарные кривые уравнения Солоу	170

4.5.4. «Золотое» правило накопления.	173
Контрольные вопросы и упражнения	175
Глава 5. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ	
5.1. Общие сведения и примеры.	177
5.2. Линейное разностное уравнение	181
5.2.1. Общие сведения	181
5.3. Линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	184
5.3.1. Характеристическое уравнение.	184
5.3.2. Случай различных действительных корней	185
5.3.3. Случай комплексных корней	186
5.3.4. Случай кратного корня	187
5.4. Линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	188
5.5. Модель делового цикла Самуэльсона – Хикса.	191
5.5.1. Уравнение Самуэльсона – Хикса.	191
5.5.2. Случай различных действительных корней	193
5.5.3. Случай совпадающих корней	194
5.5.4. Случай комплексных корней	195
5.6. Паутинная модель рынка	197
5.7. Задача о цене облигации.	198
Контрольные вопросы и упражнения	200
Глава 6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	
6.1. Основные понятия.	203
6.2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка	205
6.2.1. Однородные линейные уравнения с частными производными	206
6.2.2. Неоднородные линейные уравнения с частными производными	208
6.3. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.	210
6.4. Заключительные замечания к разделам, посвященным дифференциальным уравнениям	213
Контрольные вопросы и упражнения	214
Глава 7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
7.1. Постановка задачи численного решения задачи Коши.	215
7.2. Понятие о приближенно-аналитических методах	217
7.3. Общая характеристика одношаговых методов	218
7.4. Методы Рунге – Кутты	219
7.4.1. Метод Рунге – Кутта первого порядка	220
7.4.2. Метод Рунге – Кутта второго порядка	221
7.4.3. Типы и классификация ошибок численного интегрирования	224
7.4.4. Методы Рунге – Кутта высших порядков.	228
7.5. Методы прогноза-коррекции	232
7.6. Сравнительный анализ методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений	235
7.7. Вычислительная устойчивость численных методов интегрирования дифференциальных уравнений	237
7.8. Понятие о неявных методах интегрирования дифференциальных уравнений ..	241
Контрольные вопросы и упражнения	243
Глава 8. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	
8.1. Постановка задачи экономической динамики	244
8.2. Уравнение Эйлера	247

8.3. Задача со свободными концами	254
8.4. Необходимое условие экстремума	255
8.5. Вариационная производная	257
8.6. Функционалы, зависящие от производных высших порядков	258
8.7. Изопериметрическая задача	259
8.8. Условный экстремум	261
8.9. Решение задачи оптимальной динамики производства	264
8.10. Задача оптимального использования источников электроэнергии	266
8.11. Численные примеры	272
8.12. Принцип максимума Понтрягина	275
8.13. Задачи со свободным концом траектории	282
Контрольные вопросы и упражнения	288
Глава 9. ВВЕДЕНИЕ В УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	
9.1. Основные понятия об уравнениях с частными производными	291
9.1.1. Основные определения	291
9.1.2. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	297
9.1.3. Замена независимых переменных в уравнениях второго порядка с двумя переменными	298
9.2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	304
9.2.1. Гиперболические уравнения	304
9.2.2. Параболические уравнения	305
9.2.3. Эллиптические уравнения	307
9.2.4. Уравнения с постоянными коэффициентами	309
9.2.5. Волновое уравнение	310
9.2.6. Уравнение Лапласа	312
9.2.7. Уравнение теплопроводности	312
9.3. Примеры	313
Контрольные вопросы и упражнения	318
Глава 10. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ	
10.1. Вывод уравнений колебаний струны	320
10.2. Начальные и граничные условия для волнового уравнения	324
10.3. Задача Коши для волнового уравнения	328
10.3.1. Формула Даламбера	328
10.3.2. Физическая интерпретация	330
10.3.3. Корректность задачи Коши для волнового уравнения	332
10.4. Метод Фурье (метод разделения переменных) для однородного уравнения колебаний струны	333
10.4.1. Решение задачи Коши с нулевыми граничными условиями	334
10.4.2. Гармоники и стоячие волны	339
10.4.3. Сведение краевой задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями	341
10.4.4. Метод разделения переменных для краевых задач с неоднородным уравнением	342
10.5. Примеры	345
Контрольные вопросы и упражнения	360
Глава 11. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	
11.1. Вывод уравнения теплопроводности	363
11.2. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности	366
11.2.1. Первая краевая задача	366

11.2.2. Вторая краевая задача.	367
11.2.3. Третья краевая задача.	368
11.2.4. Задача Коши.	368
11.3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.	370
11.4. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности.	377
11.4.1. Однородное уравнение теплопроводности.	377
11.4.2. Неоднородное уравнение.	380
11.5. Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.	381
11.6. Примеры.	387
Контрольные вопросы и упражнения.	396
Глава 12. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	
12.1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.	398
12.2. Формулы Грина для оператора Лапласа.	400
12.2.1. Первая, вторая и третья формулы Грина.	400
12.2.2. Интегральная формула Грина.	401
12.3. Свойства гармонических функций.	402
12.3.1. Теорема о нормальной производной и теорема о среднем.	402
12.3.2. Принцип максимума для гармонических функций и его следствия.	403
12.3.3. Корректность внутренней задачи Дирихле.	406
12.4. Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.	407
12.5. Примеры.	412
Контрольные вопросы и упражнения.	420
Глава 13. ФОРМУЛА БЛЭКА — ШОУЛЗА	
13.1. Производные финансовые инструменты.	422
13.2. Портфель финансовых инструментов.	425
13.3. Лемма Ито и уравнение Блэка — Шоулза.	426
13.4. Уравнение Блэка — Шоулза и уравнение теплопроводности.	429
Контрольные вопросы и упражнения.	436
Глава 14. ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЕТЫ	
14.1. Начисление процентов.	439
14.1.1. Начисление простого процента.	439
14.1.2. Начисление сложного процента.	443
14.2. Номинальная процентная ставка. Кратное начисление процентов.	445
14.3. Эффективная процентная ставка.	449
14.4. Дисконтирование. Удержание процентов.	450
14.5. Сравнение множителей наращивания и дисконтирования.	453
14.6. Процентные ставки в условиях инфляции.	454
14.7. Эквивалентность процентных ставок.	458
14.7.1. Эквивалентность простых и сложных процентных ставок.	458
14.7.2. Эквивалентность непрерывных и дискретных ставок.	459
Контрольные вопросы и упражнения.	461
Глава 15. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ	
15.1. Потоки платежей и их основные характеристики.	464
15.2. Внутренняя норма доходности финансового потока.	467
15.3. Средний срок и внутренняя норма доходности финансового потока.	470
15.4. Финансовые ренты.	472
15.4.1. Основные характеристики финансовых рент.	472
15.4.2. Свойства коэффициентов приведения и наращивания.	476
15.4.3. Авансовая рента.	478
15.4.4. Определение параметров годовых рент.	480

15.5. p -срочная рента	483
15.6. «Вечная» годовая рента	487
15.7. Объединение и замена рент	489
15.7.1. Выкуп ренты	489
15.7.2. Рассрочка платежа	490
15.7.3. Консолидация рент	490
15.7.4. Замена немедленной ренты отсроченной	494
Контрольные вопросы и упражнения	495
Глава 16. ОБЛИГАЦИИ	
16.1. Основные характеристики облигаций	498
16.2. Свойства рыночной цены и доходности к погашению	503
16.3. Дополнительные характеристики облигации	511
16.4. Портфель облигаций	522
Контрольные вопросы и упражнения	530
Глава 17. ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ	
17.1. Доходность и риск портфеля ценных бумаг	532
17.2. Портфель Марковица	536
17.2.1. Портфель, состоящий из двух активов	536
17.2.2. Допустимое и эффективное множество портфелей	542
17.2.3. Портфель с заданной доходностью и минимальным риском	543
17.2.4. Эффективное множество портфелей	546
17.2.5. Угловые точки	548
17.3. Оптимальный портфель	550
17.3.1. Функция полезности и оптимальный портфель	550
17.3.2. Аналитический подход	552
17.4. Диверсификация портфеля	559
17.5. Существование безрискового актива	562
17.5.1. Структура множества эффективных портфелей	562
17.5.2. Портфель с заданной доходностью и минимальным риском при существовании безрискового актива	564
17.5.3. Теорема разделения	568
17.6. Модель CAPM	569
17.7. Рыночная модель	573
17.8. Факторные модели	575
17.8.1. Однофакторная модель	575
17.8.2. Двухфакторная модель	579
17.8.3. Многофакторная модель	580
Контрольные вопросы и упражнения	582
Ответы к упражнениям	586
ПРИЛОЖЕНИЯ	
Приложение 1	591
Приложение 2	595
Рекомендуемая литература	597

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические соотношения, полученные в результате исследования реального явления или процесса, называются математической моделью этого явления. Если эти соотношения описывают связи между некоторой функцией и ее производными или дифференциалами, модель называется динамической. С помощью динамических моделей, как правило, описываются процессы, развивающиеся во времени. В результате построения таких моделей возникают дифференциальные уравнения, если модель непрерывна, и разностные уравнения, если модель дискретна. Они описывают, и тем самым позволяют исследовать поведение различных систем в самых разных областях науки — в механике, экономике, химии, экологии, социологии и т.д.

Дифференциальные и разностные уравнения изучаются в первых главах книги. Затем рассматриваются различные приложения дифференциальных уравнений к решению экономических и финансовых задач, а также задач вариационного исчисления и оптимального управления. Так как дифференциальные уравнения, возникающие при описании реальных экономических процессов, часто не поддаются точному решению, в отдельной главе рассматриваются численные методы их решения.

Следующая часть учебника посвящена уравнениям математической физики. В ней подробно изучаются волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа. В отдельной главе рассматривается уравнение Блэка — Шоулза, которое, наряду с уравнением теплопроводности, играет ключевую роль в различных разделах финансовой математики.

Основам финансовой математики посвящена заключительная часть книги. Наряду с традиционными разделами, связанными с процентными расчетами и потоками платежей, подробно рассматриваются расчеты, свя-

занные с облигациями, теория инвестиционного портфеля и факторные модели.

На протяжении всей книги неизменно подчеркивается глубокая связь математических методов с экономическими и финансовыми задачами. Прежде всего, это связано с тем, что в последние годы все большее значение придается переплетению математики с экономикой и другими социальными науками. Причем это проявляется не только при решении практических задач, но и в фундаментальной науке.

Еще в 1969 году первую Нобелевскую премию по экономике получили Рагнар Фриш (Норвегия) и Ян Тинберген (Нидерланды) за создание и применение динамических моделей к анализу экономических процессов. Первый американский Нобелевский лауреат по экономике Пол Сэмюэльсон считает язык математики наиболее подходящим для современной экономической теории. В своих работах он предпринял попытку выразить важнейшие экономические категории и зависимости математическим образом. По мнению Самуэльсона, именно математический метод исследования позволяет сделать экономику наукой. Активно использовали в своих работах математический аппарат такие известные экономисты, как В. Леонтьев, К. Эрроу, Дж. Харсаний и Дж. Нэш. Широкое применение получило эконометрическое моделирование, благодаря которому были построены модели не только отраслей или сфер экономики, но и национальных экономик отдельных стран и мировой экономики. Здесь приоритет принадлежит Л. Клейну, хотя моделирование активно применяли и другие ученые: Ж. Дебре, Р. Солоу, Г. Марковиц, М. Миллер, У. Шарп. Нобелевской премии по экономике был удостоен в 1975 году и советский математик Л. Канторович.

Данная книга написана на основании многолетнего опыта преподавания финансовой математики (дисциплины «Основы финансовых вычислений», «Математические основы финансового анализа») студентам экономических направлений подготовки бакалавров, а также дисциплин

«Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики» студентам, обучающимся по направлению «Прикладная математика и информатика» Финансового университета при Правительстве РФ.

Книга, с одной стороны, позволяет получить базовые знания по математическим методам, применяемым в экономике и финансах, а с другой, — дает необходимые навыки для решения практических задач.

Главы 1—5 написаны И.Г. Шандра.

Главы 6—7 — И.Е. Денежкиной.

Глава 8 — В.В. Киселевым.

Главы 10—12 — С.В. Петропавловским.

Глава 13 — А.Б. Шаповалом.

Глава 14 написана совместно И.А. Александровой и В.Ю. Поповым.

Глава 15 написана совместно И.А. Александровой, В.Ю. Поповым и В.М. Гончаренко.

Глава 16 написана совместно И.А. Александровой, В.Ю. Поповым и А.Б. Шаповалом.

Глава 17 написана совместно И.А. Александровой и А.Б. Шаповалом.

Приложение 1 написано В.М. Гончаренко.

А.Б. Шаповал выполнил свою часть работы в Лаборатории исследования социальных отношений и многообразия общества РЭШ при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ, договор № 14.U04.31.0002.

Книга может рассматриваться как естественное продолжении учебника [2], в котором изучались основные оптимизационные методы, применяемые в экономике и финансах, но, при этом, читаться независимо.

ГЛАВА 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Многие задачи математики, физики, экономики, описывающие различные явления и процессы, приводят к необходимости решения уравнений, содержащих в качестве неизвестной некоторую функцию и ее производные (или дифференциалы) до некоторого порядка. Такие уравнения называются *дифференциальными*. Основы теории дифференциальных уравнений были заложены во второй половине семнадцатого века независимо друг от друга И.Ньютоном и Г.Лейбницем (термин *дифференциальные уравнения* принадлежит Г.Лейбницу). В дальнейшем эта теория существенно обогатилась трудами многих выдающихся математиков: И. Бернулли, Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, О.Коши и других.

1.1. Основные понятия и примеры

Определение 1.1. *Уравнение, связывающее независимые переменные с неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка называется дифференциальным уравнением.*

Например, дифференциальными являются следующие уравнения:

$$y' + 4y = x^2, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (1.2)$$

Определение 1.2. *Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.*

Приведенные выше дифференциальные уравнения (1.1) и (1.2) являются уравнениями соответственно первого и второго порядка.

Определение 1.3. *Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если неизвестная функция зависит от одной переменной. Если*

же в уравнение входят частные производные неизвестной функции по нескольким независимым переменным, то уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Так, уравнение (1.1) является примером обыкновенного дифференциального уравнения, а уравнение (1.2) – примером дифференциального уравнения в частных производных.

Данная глава посвящена изучению обыкновенных дифференциальных уравнений. Условимся на протяжении данной главы, если это не оговорено особо, под термином *дифференциальное уравнение* понимать *обыкновенное дифференциальное уравнение*.

Любое (обыкновенное) дифференциальное уравнение n -го порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

где F – некоторая заданная функция, x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция, а $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ – ее производные.

Определение 1.4. *Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, такая, что ее подстановка в это уравнение обращает его в тождество.*

Определение 1.5. *График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.*

Определение 1.6. *Решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением*

$$\Phi(x, y) = 0,$$

*называется **интегралом** этого уравнения.*

Пример 1.1. Рассмотрим дифференциального уравнения

$$y' = 2x.$$

Его решением, как нетрудно убедиться, является функция

$$y = x^2$$

Этому решению соответствует интеграл

$$y - x^2 = 0$$

Очевидно, что решением этого уравнения также будет и любая функция вида

$$y(x) = x^2 + C, \quad (1.4)$$

где C – произвольная постоянная, что говорит о том, что данное уравнения имеет бесконечно много решений. Более того, формулой (1.4) определяются все решения данного уравнения, или, как говорят, задается *общее решение* уравнения. Отметим, что общее решение зависит от произвольной постоянной C . Придавая ей определенные числовые значения, мы будем получать конкретные решения, или, как принято говорить *частные решения*.

Пример 1.2. Рассмотрим в качестве ещё одного примера дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = 6x. \quad (1.5)$$

Имеем

$$y' = 3x^2 + C_1$$

и далее

$$y = x^3 + C_1x + C_2, \quad (1.6)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Очевидно, что при любых значениях C_1 и C_2 полученная функция y будет решением уравнения (1.5), то есть формула (1.6) задает общее решение уравнения (1.5). Заметим, что в данном случае общее решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 (что совпадает с порядком данного уравнения). Придавая постоянным в соотношении (1.6) конкретные значения, мы будем получать частные решения уравнения (1.5).

Замечание 1.1. В дальнейшем понятия *общего* и *частного решения* дифференциального уравнения будут уточнены. Однако ряд важных об-

стоятельств можно отметить уже сейчас, исходя из рассмотренных выше примеров:

1) *дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много решений;*

2) *общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных;*

3) *частные решения получаются из общего, если указанным постоянным придаются конкретные значения.*

Замечание 1.2. Дифференциальное уравнение не обязательно имеет бесконечно много решений. Так, например, уравнение

$$y' = \sqrt{-y^2}$$

имеет единственное решение $y(x) = 0$.

Замечание 1.3. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения принято называть **интегрированием** этого уравнения.

Замечание 1.4. В теории дифференциальных уравнений под выражением вида $\int f(x)dx$ понимают не множество всех первообразных функции $f(x)$, а какую-либо одну фиксированную первообразную. Само выражение $\int f(x)dx$ называют **квadrатурой** функции $f(x)$, а найти решение дифференциального уравнение **в квадратурах** означает выразить его решение в виде конечного числа квадратур от элементарных функций.

К сожалению, проинтегрировать в квадратурах можно лишь сравнительно небольшой класс уравнений. Поэтому, наряду с методами отыскания точных решений дифференциальных уравнений, большое значение для практики имеют методы построения приближённых решений (так называемые *численные методы*) и методы *качественного анализа*, позволяющие описать поведение интегральных кривых без получения их уравнений в явном виде.

Рекомендуемая литература

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Лань, 2009.
2. *Александрова И.А., Гончаренко В.М., Денежкина И.Е., Киселев В.В., Набатова Д.С., Попов В.Ю., Шандра И.Г., Шаповал А.Б.* Методы оптимальных решений в экономике и финансах. М.: Кнорус, 2014.
3. *Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П.* Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. М.: ИНФРА-М. 2003.
4. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
5. *Бабайцев В.А., Гисин В.Б.* Математические методы финансового анализа. М: Финуниверситет, 2011.
6. *Бабайцев В.А., Гисин В.Б., Рябов П.Е.* Математические методы финансового анализа. Руководство к решению задач. М: Финакадемия, 2004.
7. *Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С.* Финансовые инвестиции. М.: Финансы и статистика. 2003.
8. *Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С.* Сборник задач по финансовым инвестициям. М.: Финансы и статистика. 2005.
9. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000.
10. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
11. *Бочаров П. П., Касимов Ю. Ф.* Финансовая математика. М.: Гардарики. 2002.
12. *Брусов П. Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика. М.: Кнорус, 2014.
13. *Брусов П. Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Задачи по финансовой математике. М.: Кнорус, 2014.

14. Будаk В.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1972.
15. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркина Г.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: МГТУ им. Баумана, 2001.
16. Винюков И.А., Попов В.Ю., Пчелинцев С.В. Линейная алгебра. Ч. 2: Многочлены и комплексные числа. Собственные значения и собственные векторы. Модель Леонтьева. М.: Финуниверситет, 2013.
17. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
18. Воронов А.А. Теория автоматического управления. М.: Высшая школа, 1986.
19. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. М.: Экономика, 1978.
20. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
21. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, изд. 5-е, М.: Книжный дом. «ЛИБРОКОМ», 2012
22. Гисин В.Б., Денежкина И.Е., Зададаев С.А. Практикум по дифференциальным уравнениям. М.: Финакадемия, 2006.
23. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
24. Годунов С.К., Золотарева Ю.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: Наука, 1974.
25. Денежкина И.Е. Численные методы. Курс лекций. М.: Финакадемия, 2010.
26. Денежкина И.Е., Посашков С.А., Шандра И.Г. Дифференциальные уравнения. Курс лекций. М.: Финакадемия, 2007.
27. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М.: Едиториал УРСС, 2004.
28. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2010.

29. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002.
30. *Касимов Ю. Ф.* Финансовая математика. М.: Юрайт. 2011.
31. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008.
32. *Киселев В.В.* Оптимальное управление в экономике. М.: Финакадемия, 2009.
33. *Колемаев В.А.* Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ, 2008.
34. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
35. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2002.
36. *Кремер Н.Ш.* Исследование операций в экономике. М.: ЮНИТИ, 1996.
37. *Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. Неоклассические основы теории финансов. СПб.: Питер. 2000.
38. *Крушвиц Л., Шефер Д., Шваке М.* Финансирование и инвестиции. Сборник задач и решений. СПб.: Питер. 2001.
39. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М: Мир, 1964.
40. *Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.
41. *Ланге О.* Оптимальные решения. М.: Прогресс, 1967.
42. *Лахметкина Н.И., Петропавловский С.В., Попов В.Ю., Шаповал А.Б.* Количественные методы инвестиционного анализа. М.: Финуниверситет, 2012.
43. *Люу Ю. Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики. Пер. с англ., М.: БИНОМ, Лаборатория знаний. 2007. 753с.
44. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. М.: Политиздат, 1990.

45. *Маленко Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1984.
46. *Малыхин В.И.* Высшая математика. М.: Инфра-М, 2009.
47. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
48. *Очан Ю.С.* Сборник задач по методам математической физики. М.: Высшая школа, 1973.
49. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2001.
50. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003.
51. *Понтрягин А.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1979.
52. *Попов В.Ю., Шаповал А.Б.* Инвестиции: математические методы. М.: Форум, 2008.
53. *Прасолов А.В.* Математические модели динамики в экономике. СПб.: Изд-во Ун-та экономики и финансов, 2000.
54. *Рябов П.Е., Шаповал А.Б.* Лекции по курсу «Математические методы финансового анализа». М: Финакадемия, 2003.
55. *Самарский А.А.* Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1987.
56. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.:Наука, 1974, т.2.
57. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968.
58. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
59. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике. Ч.1 - 3. Финансы и статистика, 2011.
60. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ЛКИ, 2008.
61. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999.

62. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. М.: ЮНИТИ, 1999.
63. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1966.
64. Фомин Г. П. Финансовая математика: 300 примеров и задач. Учебное пособие. М.: Гном-Пресс. 2000.
65. Халл Дж. Форварды, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. Вильямс, 2007.
66. Четыркин Е.М. Финансовая математика. М.: Дело, 2001.
67. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Дж. В. Инвестиции. Финансы и статистика, 2007.
68. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
69. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под ред. Федосеева В.В. М.: ЮНИТИ, 1999.
70. Axelrod R. The evolution of cooperation. Basic Books, 2006.
71. Bodie Z., Kane A., Marcus A.J. Investments and Portfolio Management. McGraw-Hill, 2011.
72. Markovitz H. M. Portfolio Selection. J. Finance. 1952. V. 7. P. 77--91.
73. Markovitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: John Wiley, 1959.
74. Ross S. M. An Elementary Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics. Cambridge University Press. 2003.