Московский физико-технический институт

Левашев Владислав Алексеевич

Обобщение группы Кубика Рубика на n-мерный случай

Научный руководитель:
профессор МФТИ, доктор физико-математических наук
Алексей Яковлевич Канель-Белов

Москва 2018

Содержание

1 Введение

Классический Кубик Рубика представляет собой обычный куб, разрезанный на 27 кубиков, 26 из которых видимые. В начальной конфигурации каждая грань большого куба раскрашена в один из шести разных цветов. При этом можно поворачивать "слои"куба на 90 градусов. Задача - собрать кубик из произвольной конфигурации в начальное. Известно, что не всегда это возможно. Например, если вытащить какой-нибудь из угловых кубиков и развернуть его на 120 градусов, то из полученной конфигурации нельзя получить начальную. Это явление описывается в терминах инвариантов разворотов угловых и боковых кубиков и перестановок маленьких кубиков. Для математики интересно описать множество допустимых конфигураций. То есть тех, которые можно перевести в начальное положение.

Вопрос о том, какие конфигурации можно перевести в начальную, а какие нет, подробно освещён в [1]. Далее такие конфигурации будем называть *разрешимыми*. Неформально теорема о классификации всех разрешимых состояний формулируется следующим образом. Разрешимыми являются те состояния, у которых суммы углов поворотов всех рёберных и угловых кубиков кратны 2π, причём знаки перестановки рёберных и угловых кубиков совпадают.

Чтобы придать этой формулировке точное значение нужно определить перестановки σ_2 и σ_3 рёберных и угловых кубиков. Далее нужно определить повороты каждого из угловых кубиков α_i и каждого из рёберных кубиков β_i. Тогда теорема о классификации будет формулироваться следующим образом:

Теорема. *Разрешимыми будут те состояния, для которых $\sum \alpha_i$ кратна 2π, $\sum \beta_i$ кратна 2π и $sgn(\sigma_2) = sgn(\sigma_3)$.*

В этой работе определяется и изучается группа $Rub(n)$ для $n \geq 4$ с ребром длины 3, которая является естественным обобщением трёхмерного случая. Рассмотрим куб $\{-1, 0, 1\}^n$, его элементы можно разделить на множества $B_{n,m}$, которые будут состоять из элементов в которых ровно $n-m$ нулей. Элементы множества $B_{n,m}$ мы будем называть $m-$ мерными кубиками. Легко видеть, что $B_{3,2}$ и $B_{3,3}$ это ровно рёберные и угловые кубики трёхмерного куба.

Для того, чтобы сформулировать результат, нужно аналогично трёхмерному случаю определить перестановки σ_k, где $2 \leq k \leq n$, которые будут перестановками кубиков размерности k. Также нужно определить перестановки граней $\alpha_{\delta,k}$ для каждого фиксированного кубика размерности k. Тогда основной результат работы будет формулироваться следующим образом:

Теорема. *При $n \geq 4$ $Rub(n)$ состоит из перестановок, для которых выполнено:*

- $sgn(\alpha_{\delta,n}) = 1$, *для* $\delta \in B_{n,n}$,
- $\prod\limits_{\delta \in B_{n,k}} \alpha_{\delta,k} \in A_k$ *при* $2 \leq k \leq n-1$,
- $\prod\limits_{\delta \in B_{n,n}} \alpha_{\delta,n} \in [A_n, A_n]$,
- $sgn(\sigma_k) = 1$ *при* $4 \leq k \leq n$,
- $sgn(\sigma_2) = sgn(\sigma_3)$.

Как видно из теоремы в случае $n \geq 4$ возникают интересные эффекты. Если $n = 4$ в инварианте угловых кубиков(то есть кубиков размерности 4) появляется группа $[A_4, A_4] = V_4$. Далее этот инвариант пропадает, так как $[A_n, A_n] = A_n$ при $n \geq 5$. Можно заметить, что это хорошо согласуется с трёхмерным случаем, так как A_3 абелева группа из трёх элементов, поэтому $[A_3, A_3] = 1$.

Работа будет полезна как специалистам, так и начинающим, потому что на модели кубика Рубика можно проследить групповые эффекты, которые возникают в алгебре и дискретной геометрии.

2 Вспомогательные определения

В ходе работы мы будем обозначать $[n]$ множество из первых n натуральных чисел. Также если $\delta_1 = (c_1, ..., c_n)$, $\delta_2 = (c'_1, ..., c'_m)$, тогда будем отождествлять (δ_1, δ_2) с $(c_1, ..., c_n, c'_1, ..., c'_m)$. Запись 1^k будет означать последовательность из k единиц.

Под V_4 будем пониматься группа Клейна, состоящая из тождественной перестановки и произведений пар транспозиций: $(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)$. Несложная проверка показывает, что $[A_4, A_4] = V_4$. Также будем обозначать биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$, причём в случае $k < 0$ или $k > n$ мы положим $\binom{n}{k} = 0$. Теперь, если $g, h \in S_n$, то запись g^h означает hgh^{-1}, а $[h, g] = hgh^{-1}g^{-1}$.

В изучении группы Кубика Рубика очень удобно пользоваться определением сплетения групп перестановок. Приводимое ниже было найдено в [3].

Определение. *Пусть $F \subset S_n$ и $H \subset S_m$ подгруппы группы перестановок множеств X и Y соответственно. Обозначим $F \wr H$ подгруппу группы перестановок множества $X \times Y$, состоящую из элементов, которые мы будем обозначать $(\sigma; \pi_{y_1}, ..., \pi_{y_m})$, где $\sigma \in H, \pi_{y_i} \in F$, определенных следующим образом:*

$$(\sigma; \pi_{y_1}, ..., \pi_{y_m})(x, y) = (\pi_y(x), \sigma(y))$$

Замечание. *Для краткости будем обозначать элементы $(\sigma; \pi_{y_1}, ..., \pi_{y_m})$ как (σ, π_y). В таких обозначениях явное умножение элементов будет записываться следующим образом:*

$$(\sigma, \pi_y)(\sigma', \pi'_y) = (\sigma\sigma', \pi_{\sigma'(y)}\pi'_y).$$

Определение. *Назовём множеством $m-$мерных кубиков $n-$мерного кубика множество*

$$B_{n,m} = \{(\delta_1, ..., \delta_n) \in \{-1, 0, 1\}^n | \sum_{k=1}^{n} (\delta_i)^2 = m\}$$

.

Перед определением группы Кубика Рубика нам понадобится ещё пару несложных конструкций.

Определение. *Определим $H_{n,m} : S_m \times B_{n,m} \to \mathbb{Z}^n$ следующим образом: $H(\sigma, \delta) = (c_1, ..., c_n)$, где $c_i = 0$, если $\delta_i = 0$ и $c_i = \sigma(j)$, если δ_i является $j-$ым ненулевым элементом в δ. Или, более формально, во втором случае $c_i = \sigma(\sum\limits_{k=1}^{i} (\delta_k)^2)$.*

Пример. *Если $n = 5, m = 3, \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \delta = (1, 0, 0, -1, -1)$, тогда $H_{5,3}(\sigma, \delta) = (2, 0, 0, 3, 1)$.*

Замечание. *Образ функции $H_{n,m}$ состоит из последовательностей длины n, у которых ровно m ненулевых элементов, причём каждый элемент $[m]$ встречается ровно один раз. Обозначим этот образ $S_{n,m}$.*

Определение. *Определим $H'_{n,m} : S_{n,m} \to S_m$ следующим образом: $H'_{n,m}(c_1, ...c_n)(k) = \pi_k$, где π - последовательность, полученная из $(c_1, ..., c_n)$ выбрасыванием нулевых элементов, а π_k - его $k-$ая координата.*

Определение. *Определим оператор поворота $L^n_{i,j} : \{-1, 0, 1\}^n \to \{-1, 0, 1\}^n$ следующим образом:*

$$L^n_{i,j}(\sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} \delta_k e_k - \delta_j e_i + \delta_i e_j.$$

Мы будем опускать верхний индекс n, так как это не должно вызвать недоразумений.

3 Определение группы Кубика Рубика

Под $n-$*мерным кубом* будем подразумевать множество $\{-1,0,1\}^n$. Давайте зафиксируем одну из граней, например, $\delta_1 = 1$. В трехмерном случае мы получали группу Кубика Рубика, поворачивая эту грань на 90 градусов. Сейчас мы будем делать произвольные повороты этой грани, переводящие её в себя.

Для попарно различных натуральных чисел i, j, k, не превосходящих n, и $d \in \{-1, 1\}$ определим $\sigma_{i,j}^{k,d} \in \prod\limits_{m=2}^{n} S_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m}$, где S_m по определению действует на $[m]$, а $S_{\binom{n}{m}2^m}$ на $B_{n,m}$, следующим образом: $(\sigma_{i,j}^{k,d})_s = (\sigma_s, \pi_\delta)$, где

$$\sigma_s(\delta) = \begin{cases} L_{i,j}(\delta), & \delta_k = d, \\ \delta, & \delta_k \neq d, \end{cases}$$

Определение π_δ будет зависеть от количества 1, встречающихся в δ. А именно, если в δ чётное число раз встречается 1, то

$$\pi_\delta = \begin{cases} (H'_{n,s}(i,j)H_{n,s}(1,\delta))(1,2), & \delta_k = d, \\ 1, & \delta_k \neq d, \end{cases}$$

и если 1 встречается в δ нечётное число раз, то

$$\pi_\delta = \begin{cases} (1,2)(H'_{n,s}(i,j)H_{n,s}(1,\delta)), & \delta_k = d, \\ 1, & \delta_k \neq d. \end{cases}$$

Определение. *Подгруппу, порожденную* $\sigma_{i,j}^{k,d}$, *где* i, j, k *- попарно различные числа и* $d \in \{-1, 0, 1\}$, *назовём группой* $n-$*мерного Кубика Рубика и обозначим* $Rub(n)$.

Определение. *Назовём образ ограничения проекции* $p_k : \prod\limits_{m=2}^{n} S_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m} \to S_k \wr S_{\binom{n}{k}2^k}$ *на* $Rub(n)$ *группой* k*-мерных кубиков* n*-мерного Кубика Рубика и обозначим* $Rub(n,k)$. *Причём* $Rub(n,n)$ *будем называть угловой группой Кубика Рубика.*

Замечание. $Rub(n,n)$ *лежит в* $A_n \wr S_{2^n}$, *так как* $H'_{n,n}(i,j)H_{n,n}(1,\delta) = (i,j)$.

Определение. *Будем говорить, что* $(\sigma_k, \pi_\delta) \in Rub(n,k)$ *не меняет ориентацию, если* $\pi_\delta = 1$ *для любого* $\delta \in B_{n,k}$. *Также будем говорить, что* (σ_k, π_δ) *не меняет положения кубиков, если* $\sigma_k = 1$.

4 Возникающие гомоморфизмы

В данном разделе мы опишем несколько гомоморфизмов, связанных с введённой группой $Rub(n)$. Первые три это просто гомоморфизмы забывания. В первом мы смотрим на перестановку точек, забывая про ориентацию. Во втором и третьем мы смотрим на знак их ориентации. Четвёртый и пятый - вложения групп $Rub(n-1)$ и $Rub(n-1, n-1)$ в $Rub(n)$ и $Rub(n,n)$ соответственно. Они помогут понять что-то про введённые группы, пользуясь индукцией.

1. $\lambda_m : S_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m} \to S_{\binom{n}{m}2^m}$ определяется следующим образом: $\lambda_m(\sigma, \pi_\delta) = \sigma$. Гомоморфность очевидна из явного вида для умножения на сплетении групп перестановок.

2. при $m < n$ $\gamma_m : S_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m} \to \mathbb{Z}_2$:

$$\gamma_m(\sigma; \pi_\delta) = \prod_{\delta \in B_{n,m}} sgn(\pi_\delta).$$

Гомоморфность следует из явного вида для сплетения групп перестановок.

3. $\gamma_n : A_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m} \to (A_m)_{ab}$:

$$\gamma_n(\sigma; \pi_\delta) = \prod_{\delta \in B_{n,n}} \pi_\delta.$$

Замечание. *Определение двух следующих гомоморфизмов выглядит довольно технично, но смысл легко объяснить. Разберем четырёхмерный случай. Если представлять себе множество* $\{-1, 0, 1\}^4$, *как три трёхмерных куба, каждый из который соответствует слою* $\delta_4 = d$, *то легко видеть, что при действии, например,* $\sigma^{3,1}_{1,2}$ *происходит тоже самое, что с трёхмерным кубом в* $Rub(3)$, *причём в случае* $d \in \{-1, 0\}$ *ориентации совпадают, а при* $d = 1$ *сопрягаются с помощью транспозиции* $(1, 2)$.

4. $m_n : Rub(n-1) \to Rub(n)$. Сначала для $2 \le k \le n$ определим гомоморфизм

$$m_{n,k} : S_{k-1} \wr S_{2^{k-1}\binom{n-1}{k-1}} \times S_k \wr S_{2^k\binom{n-1}{k}} \to S_k \wr S_{2^k\binom{n}{k}}$$

следующим образом: $m_{n,k}(\sigma', \pi'_\delta; \sigma'', \pi''_\delta) = (\sigma, \pi_\delta)$, где

$$\sigma(\delta) = \begin{cases} (\sigma'(\delta_1, ..., \delta_{n-1}), \delta_n), & \delta_n \neq 0, \\ (\sigma''(\delta_1, ..., \delta_{n-1}), \delta_n), & \delta_n = 0, \end{cases}$$

$$\pi_\delta = \begin{cases} \pi'_{(\delta_1,...,\delta_{n-1})}, & \delta_n = -1, \\ (12)\pi'_{(\delta_1,...,\delta_{n-1})}(12), & \delta_n = 1, \\ \pi''_{(\delta_1,...,\delta_{n-1})}, & \delta_n = 0. \end{cases}$$

Гомоморфность следует из того факта, что σ не меняет последнюю координату. Легко видеть, что все $m_{n,k}$ задают гомоморфизм

$$\prod_{m=2}^{n-1} S_m \wr S_{\binom{n-1}{m}2^m} \to \prod_{m=2}^{n} S_m \wr S_{\binom{n}{m}2^m}$$

.

Его ограничение на $Rub(n-1)$ мы назовём m_n. Образ $Rub(n-1)$ лежит в $Rub(n)$ так как $\sigma^{k,d}_{i,j} \in Rub(n-1)$ переходит в $\sigma^{k,d}_{i,j} \in Rub(n)$.

5. $h_{n,k} : Rub(n-1, n-1) \to Rub(n, n)$ при $k \ge 3$.

Отображение $\varphi_{n,k} : [n-1] \to [n]$, которое определено как $\varphi_{n,k}(s) = s$, если $s < k$ и $\varphi_{n,k}(s) = s + 1$ иначе, очевидно индукцирует гомоморфизм: $\varphi^*_{n,k} : S_{n-1} \to S_n$. Тогда определим $h_{n,k}$ следующим образом: если $\sigma'(\delta_1, ...\delta_{k-1}, \delta_{k+1}, ...\delta_n) = (\delta'_1, ...\delta'_{k-1}, \delta'_{k+1}, ...\delta'_n)$, то положим $h_{n,k}(\sigma', \pi'_\delta) = (\sigma, \pi_\delta)$, где

$$\sigma'(\delta_1, ...\delta_n) = (\delta'_1, ...\delta_k, ...\delta'_n),$$

$$\pi_\delta = \begin{cases} \varphi^*_{n,k}(\pi'_{(\delta_1,...,\delta_{k-1},\delta_{k+1},\delta_n)}), & \delta_k \neq 1, \\ (12)\varphi^*_{n,k}(\pi'_{(\delta_1,...,\delta_{k-1},\delta_{k+1},...,\delta_n)})(12), & \delta_k = 1. \end{cases}$$

Гомоморфность аналогично следует из того, что σ не меняет $k-$ую координату.

5 Доказательство основных результатов

Доказательство необходимости условий в основной теореме почти очевидны, поэтому мы выносим их в отдельные леммы.

Лемма 1. *Для любого $\sigma \in Rub(n,m)$ выполнено $\gamma_m(\sigma) = 1$.*

Доказательство. Достаточно проверить для порождающих $\sigma' = p_m(\sigma_{i,j}^{k,d}) = (\tau, \pi_\delta)$. Орбита действия τ на $B_{n,m}$ состоит либо из одного элемента, либо из четырёх. Если τ оставляет на месте δ, то из определения следует, что $\pi_\delta = 1$, так как тогда либо $\delta_k \neq d$, либо $\delta_i = \delta_j = 0$. Докажем, что если $i-$ая и $j-$ая координата не равны нулю одновременно, то произведение

$$\pi_\delta \pi_{\tau(\delta)} \pi_{\tau^2(\delta)} \pi_{\tau^3(\delta)} = 1$$

Если $\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0$, то π_δ и $\pi_{\tau(\delta)}$ имеют вид $(1,2)(i,j)$ и $(i,j)(1,2)$. Поэтому нужно произведение очевидно равно 1.

Пусть теперь, например, $\delta_i \neq 0$, $\delta_j = 0$ и δ имеет чётное число 1. Тогда $\pi_\delta = g(12)$ для некоторого цикла g и $\pi_{\tau(\delta)} = g^{-1}(12)$, так как количество 1 не поменяется. Далее $\pi_{\tau^2(\delta)} = (12)g$ и $\pi_{\tau^3(\delta)} = (12)g^{-1}$. Тогда $\pi_\delta \pi_{\tau(\delta)} \pi_{\tau^2(\delta)} \pi_{\tau^3(\delta)} = 1$. Остальные случаи перебираются аналогично. Так как орбиты не пересекаются, то мы получаем требуемое. □

Замечание. *Из рассуждения выше видно, что $(\sigma_{i,j}^{k,d})^4 = 1$.*

Лемма 2. *Для любого элемента $\sigma \in Rub(n)$ выполнено:*

- $sgn(\lambda_2(p_2(\sigma)) = sgn(\lambda_3(p_3(\sigma)))$.
- $sgn(\lambda_m(p_m(\sigma)) = 1$ *для любых n, m таких, что $4 \leq m \leq n$.*

Доказательство. Обозначим $\sigma_m = \lambda_m(p_m(\sigma))$. Так как σ_2 и σ_3 могут быть выражены как образ произведения одинакового числа порождающих элементов $\sigma_{i,j}^{k,\delta}$, достаточно проверить для $\sigma = \sigma_{i,j}^{k,\delta}$. Заметим, что если $\sigma_m(d) \neq d$, то $\sigma_m^2(d) \neq d$. Порядок σ_m равен 4, следовательно σ_m - произведение 4-циклов.

Посчитаем сколько элементов не остаются неподвижными под действием σ_m. Это в точности те элементы, у которых на k-ом месте стоит δ и i-ая и j-ая не равны нулю одновременно. Если среди i-ой и j-ой координат обе ненулевые, то таких элементов $4\binom{n-3}{m-3}2^{m-3}$. Если только одна ненулевая, то $4\binom{n-3}{m-2}2^{m-2}$. Следовательно, σ_m является произведением $\binom{n-3}{m-3}2^{m-3} + \binom{n-3}{m-2}2^{m-2}$ 4-циклов, поэтому σ_m чётна при $m \geq 4$.

Из предыдущего абзаца следует, что σ_2 является просто 4-циклом, а σ_3 является произведением $(2n-5)$ 4-циклов, следовательно, нечётны. С учётом замечания в начале доказательства теоремы, получаем требуемое. □

Доказательство следующей теоремы можно найти в [1].

Теорема. $Rub(3)$ *- подгруппа в $S_{12} \wr S_2 \times S_8 \wr A_3$, состоящая из перестановок вида $(\pi, \alpha_i; \sigma, \beta_i)$ где $\alpha_1 \ldots \alpha_8 = 1$, $\beta_1 \ldots \beta_{12} = 1$ и $sgn(\pi) = sgn(\sigma)$.*

Лемма 3. *Рассмотрим конечный связный неориентированный граф $G = (V,E)$ с $|V| \geq 3$ и подгруппу $H \subset S_{|V|}$. Если для любых двух пересекающихся рёбер $(v_1,v_2), (v_2,v_3) \in E$ выполнено $(v_1,v_2,v_3) \in H$, то $A_{|V|} \subset H$.*

Доказательство. Фиксируем две вершины $x, y \in V$, принадлежащие одному ребру $e \in E$. Достаточно показать, что для любой другой вершины $v \in V \backslash \{x,y\}$ выполнено $(x,y,v) \in H$. Из связности следует, что существует самонепересекающийся путь с началом в ребре e и с концом в ребре e', содержащем вершину v. Но тогда из условия следует, что в H лежат все чётные перестановки вершин, встречающихся в этом пути. В частности, $(x,y,v) \in H$. □

Теорема. *Угловая группа 4-х мерного Кубика Рубика $Rub(4,4)$ является подгруппой $A_{16} \wr A_4$, состоящей из перестановок $\sigma = (\sigma', \pi_\delta)$ для которых выполнено $\prod\limits_{\delta \in B_{n,n}} \pi_\delta \in V_4$. Угловая группа $Rub(n,n)$ при $n \geq 5$ совпадает с $A_{2^n} \wr A_n$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n следующее утверждение: для $n \geq 3$ $Rub(n,n)$ совпадает с подгруппой $A_{2^n} \wr A_n$, состоящей из перестановок, для которых $\gamma_n(\sigma) = 1$. Так как $[A_4, A_4] = V_4$ и при $n \geq 5$ выполнено $[A_n, A_n] = A_n$, то это то, что нам нужно. Для $n = 3$ это утверждение следует из теоремы 1. Докажем переход. То, что все элементы $Rub(n,n)$ имеют такой вид следует из леммы 1. Сначала покажем, что можно получить любую перестановку, не меняющую ориентации. Чтобы избежать лишних обозначений отождествим на время $\sigma^{k,d}_{i,j}$ с $p_n(\sigma^{k,d}_{i,j})$.

Рассмотрим следующий граф $G = (V, E)$, где $V = \{-1, 1\}^n$ и две вершины соединяются ребром, если отличаются ровно по одной координате. Такой граф очевидно связный. Пусть $\delta^i, \delta^j, \delta^s$ такие различные вершины графа, что δ^i отличается от δ^j по k-ой координате, и δ^j отличается от δ^s по m-ой координате. Тогда $k \neq m$ так как иначе $\delta^i = \delta^s$. Заметим что, чтобы доказать, что $((\delta^i, \delta^j, \delta^s), 1) \in Rub(n,n)$, можно, считать, что $1 \leq k < m \leq 4$, так как все случаи, когда $k \geq 3$ или $m \geq 3$ симметричны. Для произвольного $\delta' \in \{-1, 1\}^{n-4}$ обозначим

$$\begin{array}{rl}
\delta^1 = (1,1,1,1,\delta') & \delta^9 = (1,1,1,-1,\delta') \\
\delta^2 = (-1,1,1,1,\delta') & \delta^{10} = (-1,1,1,-1,\delta') \\
\delta^3 = (-1,-1,1,1,\delta') & \delta^{11} = (-1,-1,1,-1,\delta') \\
\delta^4 = (1,-1,1,1,\delta') & \delta^{12} = (1,-1,1,-1,\delta') \\
\delta^5 = (1,1,-1,1,\delta') & \delta^{13} = (1,1,-1,-1,\delta') \\
\delta^6 = (-1,1,-1,1,\delta') & \delta^{14} = (-1,1,-1,-1,\delta') \\
\delta^7 = (-1,-1,-1,1,\delta') & \delta^{15} = (-1,-1,-1,-1,\delta') \\
\delta^8 = (1,-1,-1,1,\delta') & \delta^{16} = (1,-1,-1,-1,\delta')
\end{array}$$

По предположению индукции существует $\sigma' \in Rub(n-1, n-1)$, не меняющая ориентации, такая, что для любых $d_1, d_2 \in \{-1, 1\}$ σ' переводит $(d_1, d_2, 1, \delta')$ и $(d_1, -d_2, 1, \delta')$ друг в друга. Тогда $\sigma = \varphi_{n,3}(\sigma')$ не меняет ориентации, и $\lambda_n(\sigma) = (\delta^1, \delta^4)(\delta^2, \delta^3)(\delta^5, \delta^8)(\delta^6, \delta^7)$.

Для $i \in \{1, 2, ..., 8\}$ определим θ^i как последовательность, полученную из δ^i вычеркиванием 4-ой координаты. Если $\pi \in A_8$, то по предположению индукции существует $\tau \in Rub(n-1, n-1)$ такая, что $\lambda_{n-1}(\tau)(\theta^i) = \theta^{\pi(i)}$ и τ не меняет ориентацию. Таким образом $\sigma'' = \sigma^{h_{n,4}(\tau)}$ не меняет ориентацию и $\lambda_n(\sigma'') = (\delta^{\pi(1)}, \delta^{\pi(4)})(\delta^{\pi(2)}, \delta^{\pi(3)})(\delta^{\pi(5)}, \delta^{\pi(8)})(\delta^{\pi(6)}, \delta^{\pi(7)})$. Из простоты A_8 следует, можно сделать любую перестановку на δ^i для $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Аналогично, если у набора δ^i попарно совпадают третья или четвёртая координата, можно сделать чётную перестановку на δ^i. А именно, можно сделать любую чётную перестановку на δ_i, где $i \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, или $i \in \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12\}$, или $i \in \{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16\}$. Легко проверить, что можно так можно получить все тройные циклы вида $(\delta^1, \delta^2, \delta^k)$, где $3 \leq k \leq 16$. Из этого следует, что можно сделать чётную перестановку на δ^i, где $1 \leq i \leq 16$. В частности, можно сделать тройной цикл на различных вершинах $\delta^{i_1}, \delta^{i_2}, \delta^{i_3}$, где $\delta^{i_1}, \delta^{i_2}$ и $\delta^{i_2}, \delta^{i_3}$ - вершины, соединенные ребром в нашем графе. Из леммы 1 следует, что можно сделать любую чётную перестановку вершин.

Покажем теперь, что можно получить любую перестановку из $A_{2^n} \wr A_n$, не меняющую положение кубиков.

Пусть n чётно. Тогда положим

$$\delta^1 = (1, 1, 1^{n-3}, 1), \delta^2 = (1, -1, 1^{n-3}, 1), \delta^3 = (1, 1, 1^{n-3}, -1), \delta^4 = (1, -1, 1^{n-3}, -1).$$

По предположению индукции, для $3 \leq k \leq n-1$ существует $\tau'_k \in Rub(n-1,n-1)$, не меняющая положения кубиков и

$$\pi'_{(1,11^{n-3})} = (1,2,k), \pi'_{(1,-1,1^{n-3})} = (2,1,k), \pi_\delta = 1, \delta \neq (1,1,1^{n-3}), (1,-1,1^{n-3}).$$

Тогда $\tau_k = h_{n,n}(\tau'_k)$ не меняет положения кубиков и $\pi_{\delta^1} = \pi_{\delta^4} = (2,1,k)$ и $\pi_{\delta^2} = \pi_{\delta_3} = (1,2,k)$. Обозначим теперь $\sigma^{1,1}_{2,n} = (\sigma', \pi'_\delta)$. Тогда

$$\tau''_k = (\sigma^{1,1}_{2,n})^{-1} \tau_k \sigma^{1,1}_{2,n} = (1, \pi'^{-1}_\delta \pi_{\sigma'(\delta)} \pi'_\delta) = (1, \pi''_\delta).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\pi''_{\delta^1} = (2,n,k), \pi''_{\delta^2} = (1,n,k), \pi''_{\delta^3} = (1,n,k), \pi''_{\delta^4} = (2,n,k).$$

Таким образом, с помощью перестановок τ_k, τ''_k и сопряженных к ним при помощи элементов, не меняющих ориентации, очевидно, можно получить любую перестановку, не меняющую положения кубиков. Случай нечётного n разбирается аналогично. Достаточно заменить первую координату в δ^i на -1. $\square$

Теорема. *При* $n \geq 4$ $Rub(n)$ *- подгруппа в* $\prod\limits_{k=2}^{n-1} S_{2^k\binom{n}{k}} \wr S_k \times A_{2^n} \wr A_n$, *состоящая из перестановок* σ, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

- $\gamma_k(p_k(\sigma)) = 1$ *при* $2 \leq k \leq n$,
- $sgn(\lambda_k(p_k(\sigma))) = 1$, *при* $4 \leq k \leq n$,
- $sgn(\lambda_3(p_3(\sigma))) = sgn(\lambda_2(p_2(\sigma)))$

Доказательство. То, что все $\sigma \in Rub(n)$ имеют указанный вид, было доказано в лемме 1 и 2. Доказывать будем индукцией по n. В качестве базы возьмем утверждение теоремы 3. Разобьём доказательство на несколько пунктов:

1. Сначала покажем, что $Rub(n,n)$ выделяется в $Rub(n)$ прямым слагаемым. Из предыдущей теоремы, достаточно показать, что существуют $\sigma, \sigma' \in Rub(n)$ такие, что $p_k(\sigma) = p_k(\sigma') = 1$, при $k \leq n-1$. и $p_n(\sigma), p_n(\sigma') \neq 1$, причём $p_n(\sigma)$ не меняет ориентации и $p_n(\sigma')$ не меняет положения кубиков. Все остальные можно получить при помощи сопряжений. Положим

$$\delta^1 = (1,-1,-1,1^{n-4}), \delta^2 = (1,-1,1,1^{n-4}), \delta^3 = (-1,-1,1,1^{n-4}), \delta^4 = (-1,1,1,1^{n-4}).$$

По предположению индукции существует $u' \in Rub(n-1)$, не меняющая ориентации, такая, что $p_k(u') = 1$ при $k \leq n-2$ и $\lambda_{n-1}(p_{n-1}(u')) = (\delta^1, \delta^2)(\delta^3, \delta^4)$.

Положим $u = m_n(u')$ и $\sigma = [\sigma^{n,1}_{1,2}, u]$. Заметим, что $p_k(\sigma)$ не меняет ориентацию при $k \leq n-1$, так как её не меняет u и $\sigma^{n,1}_{1,2}$. Теперь, если $\delta \in B_{n,k}$ при $k \leq n-2$, то δ остаётся неподвижной при действии $\lambda_k(p_k(\sigma)$, так как δ неподвижна при действии $\lambda_k(p_k(u))$. Аналогично, если $\delta \in B_{n,n-1}$ и имеет ноль на одной из первых $n-1$ позиций. Если $\delta \in B_{n,n-1}$ имеет ноль на последней позиции, то δ неподвижна при действии $\lambda_{n-1}(p_{n-1}(\sigma^{n,1}_{1,2}))$, поэтому неподвижна при действии $\lambda_{n-1}(p_{n-1}(\sigma))$. Прямые вычисления показывают, что $\lambda_n(p_n(\sigma))(\delta^1, 1) = (\delta^2, 1)$. Поэтому $\lambda_n(p_n(\sigma)) \neq 1$.

Аналогично, по предположению индукции, существует v', не меняющая положения кубиков, такая, что $p_k(v') = 1$ при $k \leq n-2$ и $p_{n-1}(v') = (1, \pi'_\delta)$, где

$$\pi'_{\delta^1} = (1,2,3), \pi'_{\delta^2} = (2,1,3), \pi_\delta = 1, \delta \neq \delta^1, \delta^2.$$

Положим $v = m_n(v')$ и $\sigma' = [(\sigma^{n,1}_{1,2})^{-1}, v^{-1}]$. Обозначим $p_k(\sigma^{n,1}_{1,2}) = (\tau, 1)$ и $p_k(v) = (1, \pi''_\delta)$. Тогда $p_k(\sigma') = (1, (\pi''_{\tau(\delta)})^{-1} \pi''_\delta)$. Аналогично предыдущему параграфу проверяется, что $p_k(\sigma) = 1$ при $k \leq n-1$ и, подставляя $(\delta^1, -1)$, получим $(1,2,3)$.

2. Теперь докажем, что при $k \le n-1$ $Rub(n)$ содержит все перестановки τ, удовлетворяющие следующим условиям:

- если $k' < k$, то $p_{k'}(\tau) = 1$,
- $p_k(\tau)$ не меняет ориентации,
- $sgn(\lambda_k(p_k(\tau))) = 1$.

Заметим, что это выполнено по индукции, если $\lambda_k(p_k(\tau))$ оставляет неподвижными все $\delta \in B_{n,k}$, имеющие ненулевую последнюю координату.

Пусть теперь $\delta \in B_{n,k}$ и $\delta_n \neq 0$. Так как $k < n$, то существуют z,$u \in [n-1]$, такие, что $\delta_z = 0$ и $\delta_u \neq 0$. Тогда положим $p_k(\sigma^{u,\delta_u}_{n,z}) = (\sigma, \pi_\delta)$. Очевидно, что существуют $\delta^1, \delta^2 \in B_{n,k}$, удовлетворяющие $(\delta^i)_n = 0$, $(\delta^i)_u \neq \delta_u$. Тогда, согласно определению, $\sigma(\delta^i) = \delta^i$. Обозначим $\delta' = \sigma(\delta)$. Теперь δ' имеет нулевую последнюю координату.

Аналогично предыдущему пункту, по индукции, существует $\tau'' \in Rub(n)$, удовлетворяющее первому и третьему из перечисленных условий, и $p_k(\tau'') = (\tau', \pi'_\delta)$, где

$$\tau' = (\delta^1, \delta^2, \delta'), \pi'_{\delta'} = \pi^{-1}_\delta, \pi'_{\delta^2} = \pi_\delta, \pi'_{\delta''} = 1, \delta'' \neq \delta, \delta_1, \delta_2.$$

Тогда положим $\tau = (\sigma^{u,\delta_u}_{n,z})^{-1}\tau''\sigma^{u,\delta_u}_{n,z}$. Прямым вычислением получаем

$$p_k(\tau) = (\sigma^{-1}\tau'\sigma, \pi^{-1}_{\sigma^{-1}\tau\sigma(\delta)}\pi'_{\sigma(\delta)}\pi_\delta).$$

Причём, по построению, $\sigma^{-1}\tau'\sigma = (\delta^1, \delta^2, \delta)$. Легко вычисляется, что

$$\pi^{-1}_{\sigma^{-1}\tau\sigma(\delta)}\pi'_{\sigma(\delta)}\pi_\delta = 1.$$

Достаточно подставить $\delta, \delta^1, \delta^2$. Итак, τ не меняет ориентации и удовлетворяет сформулированным условиям. Из замечания в начале пункта следует, что для любого такого τ можно сопряжениями добиться, чтобы δ_1, δ_2 были фиксированные. Поэтому они порождают все перестановки, удовлетворяющие выше написанным пунктам.

3. Аналогично покажем докажем, что при $k \le n-1$ $Rub(n)$ содержит все перестановки τ, удовлетворяющие следующим условиям:

- если $k' < k$, то $p_{k'}(\tau) = 1$,
- $p_k(\tau)$ не меняет положения кубиков,

Это очевидно, достаточно для $g \in S_k$ взять любую перестановку $\sigma'_g \in Rub(n-1)$, такую, что $p_{k'}(\sigma'_g) = 1$ при $k' < k$ и $p_k(\sigma'_g) = (1, \pi_\delta)$. Причём

$$\pi_{\delta^1} = g, \pi_{\delta^2} = g^{-1}, \pi_\delta = 1, \delta \neq \delta^1, \delta^2$$

для некоторых $\delta^1, \delta^2 \in B_{n-1,k}$. Тогда положим $\sigma_g = m_n(\sigma'_g)$. Тогда всевозможные σ_g и сопряженные к ним при помощи перестановок, полученных в пункте 2, порождают все σ, удовлетворяющие выше написанным условиям.

4. Остаётся проверить, что $p_2(Rub(n)) = S_{4\binom{n}{2}} \wr S_2$. По пункту 2 и 3 достаточно показать, что $\lambda_2(p_2(Rub(n))$ содержит нечётную перестановку. Это опять очевидно, достаточно взять $\sigma' \in Rub(n-1)$, такую, что $\lambda_2(p_2(\sigma'))$ нечётна.

Из этих четырёх пунктов мы легко получим нужные нам перестановки. Если $\sigma = (\sigma_2, \sigma_3, ...\sigma_n)$ удовлетворяет условиям теоремы, то по пункту 4 существует $\sigma' = (\sigma_2, \sigma'_3, ..., \sigma'_n) \in Rub(n)$. Тогда $\sigma(\sigma')^{-1} = (1, \sigma''_3, ...\sigma''_n)$, где $\lambda_3(\sigma''_3)$ чётная по лемме 2. По пункту 2 и 3 мы можем сокращать, пока не дойдем до перестановки σ имеющей вид $(1, ..., 1, \sigma_n)$, тогда мы применим пункт 1. $\square$

6 Следствия

Обозначим $a_{n,k} = |Rub(n,k)|$ и $a_n = |Rub(n)|$. Тогда из доказанных в предыдущих пунктах теорем получим следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть c_n - индекс $[A_n, A_n]$ в A_n. Тогда*

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2}(2^k\binom{n}{k})!(k!)^{2^k\binom{n}{k}}, & k = 2,3, \\ \frac{1}{4}(2^k\binom{n}{k})!(k!)^{2^k\binom{n}{k}}, & 4 \le k \le n-1, \\ \frac{1}{c_n}(2^n)!(\frac{n!}{2})^{2^n}, & k = n. \end{cases}$$

Следствие 2.

$$a_n = \frac{1}{2}\prod_{k=2}^{n} a_{n,k}$$

7 Заключение

Таким образом, вопрос о $n-$мерном Кубике Рубика с ребром длины 2 и 3 закрыт. Из доказательств теорем понятно, как строить любую перестановку группы. Даже легко выписать конкретную верхнюю оценку на минимальное число поворотов, которые нужно сделать, чтобы получить любую допустимую перестановку $n-$мерного Кубика Рубика (или на диаметр графа Кэли с построенной системой образующих). Для случая $n = 3$ известно, что это число равно 20.

Остается открытым вопрос об $n-$мерном Кубике Рубика с ребром длины больше 3. Для $n = 3$ этот вопрос исследован в статье [6]. Представляется, что для большей размерности это может быть сделано комбинацией методов, описанных в этой работе(с помощью индукции по размерности) и статьи [6].

Список литературы

[1] W. D. Joyner. Mathematics of the Rubik's Cube, 1996.

[2] Каргаполов М., Мерзляков Ю. Основы теории групп, 1972.

[3] Вавилов Н., Конкретная теория групп.

[4] Материалы ЛКТГ, Кубик Рубика и проблема Хигмана, 2008.

[5] Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое, 1980.

[6] Stefano Bonzio, Andrea Loi, Luisa Peruzzi, On the nxnxn Rubik's Cube, 2017.