

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЗАМКНУТЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА КОЛЬЦЕВОЙ АВТОДОРОГЕ

Подорога А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, anastasiapodoroga@gmail.com

Tikhonov I. V., Podoroga A. V. The asymptotic behavior of closed traffic flows on a ring road. We discuss some approaches to mathematical description of road traffic. The evolution of closed traffic flow on a ring road is considered. Special effects connected with the stabilization of possible solutions are noted.

Обсуждаются различные подходы, применяемые при математическом описании процессов дорожного движения. Рассмотрена модельная задача об эволюции замкнутого транспортного потока на кольцевой автодороге. Отмечены специальные эффекты, связанные со стабилизацией возможных решений при увеличении времени.

Тематика, связанная с математическим описанием дорожного движения, интересна тем, что она позволяет сочетать принципиально разные методы исследования. Так, выводы, следующие из теории дифференциальных уравнений, можно проверять средствами компьютерного моделирования. И, наоборот, результаты численных экспериментов часто подсказывают новые содержательные задачи для дифференциальных уравнений. Об одной такой конкретной ситуации пойдет речь в настоящем сообщении.

Некоторое время назад на кафедре математической физики факультета ВМК МГУ была разработана компьютерная программа “Cars”, имитирующая движение индивидуальных транспортных средств (автомобилей) по однополосной дороге. Допустим, что ансамбль состоит из n автомобилей:

$$a[n], \quad a[n-1], \quad \dots, \quad a[3], \quad a[2], \quad a[1],$$

последовательно расположенных на однополосной дороге и движущихся друг за другом в положительном направлении. Каждый индивидуальный автомобиль $a[j]$ снабжен тремя числовыми переменными

$$x_k[j], \quad v_k[j], \quad w_k[j], \tag{1}$$

означающими координату, скорость и ускорение j -го авто в момент времени

$$t_k = k\tau, \quad k \in \mathbb{N} \cup 0. \tag{2}$$

Шаг τ для приращения времени t в формуле (2) выбирается достаточно малым, порядка 10^{-1} с. Две первые величины в (1) изменяются по законам кинематики:

$$v_{k+1}[j] = v_k[j] + \tau w_{k+1}[j], \quad x_{k+1}[j] = x_k[j] + \tau v_{k+1}[j]. \tag{3}$$

Управляющим параметром в формулах (3) является ускорение автомобиля, которое вычисляется на каждом шаге, исходя из текущего состояния самого автомобиля и другого авто, двигающегося перед ним:

$$w_{k+1}[j] = F(x_k[j], v_k[j], w_k[j]; x_k[j-1], v_k[j-1], w_k[j-1]). \quad (4)$$

Правило (4) соответствует естественному поведению водителя на автодороге и составляет главное содержание алгоритма “Cars”. Значения переменных (1) и внутренних параметров алгоритма (4) изменяются в диапазонах, характерных для «реальных» автомобилей.

Основной принцип работы алгоритма (4) можно выразить достаточно просто: требуется, чтобы каждый автомобиль двигался с максимальной возможной скоростью, но ни при каких обстоятельствах не допускал столкновения с впереди идущим автомобилем. Состояние $x_k[j] \geq x_k[j-1]$ считается ошибкой при работе алгоритма (4). В результате последовательной отладки программы “Cars” удалось добиться отсутствия ошибок, по крайней мере, на всех основных режимах, испытанных в системе.

Программа написана на языке C# и имеет удобный интерфейс, позволяющий визуально наблюдать за текущим состоянием транспортного потока. Все данные хранятся также в цифровом формате и могут быть использованы для дальнейшей обработки.

К настоящему моменту проведено значительное число экспериментов и получен объемный материал (см. [1]–[4]). Особенно удобным для моделирования оказался случай кольцевой автодороги, поскольку здесь можно создать замкнутый транспортный поток, отождествив финальную точку $x = L$ с начальной точкой $x = 0$. Обычно выбиралось кольцо длины $L = 5$ км с диапазоном изменения числа n (количества автомобилей) от 75 до 500 авто. Рассматривалась также длина $L = 20$ км с диапазоном изменения n от 200 до 2000 авто.

Эксперименты на кольце выявили одну особенность. В большинстве случаев, независимо от начального состояния системы, достаточно быстро происходила характерная стабилизация транспортного потока к тому или иному устойчивому режиму. Если общее число автомобилей было небольшим (меньшим некоторого критического значения для заданной длины кольца), то через фиксированное время элементы потока свободно распределялись по кольцу и начинали двигаться с максимальной скоростью, совсем не затормаживая друг друга. Если же общее число автомобилей превосходило упомянутое критическое значение, то через некоторое время образовывался регулярный затрудненный поток, содержащий внутри себя устойчивые локальные уплотнения. Эти уплотнения (“jams”) смещались в дальнейшем как единое целое в направлении против хода движения автомобилей. Означенный эффект наглядно наблюдается на рисунке, где повышенная интенсивности темного цвета в плоскости (t, x) соответствует возрастанию плотности и уменьшению скорости транспортного потока. Раз возникшее уплотнение продолжает смещаться по кольцу бесконечно долгое время.

Отметим также, что если общее число автомобилей оказывалось близким к критическому значению, то картина становилась менее устойчивой, и стабилизация потока наступала за более длительное время с возможным последующим

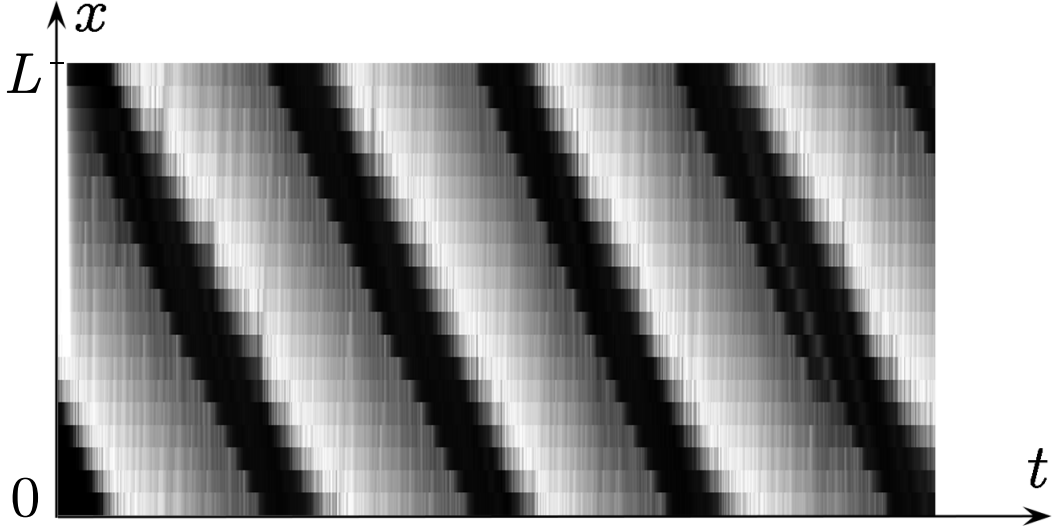


Рис. 1: Движение локальных уплотнений в плоскости (t, x)

нарушением стабильности.

Представляется, что отмеченные эффекты *стабилизации* допускают простое объяснение на языке квазилинейных дифференциальных уравнений, используемых при макроскопическом описании транспортных потоков. В рамках макроскопического подхода [5] транспортный поток трактуется как специфический поток сплошной среды со стандартными характеристиками

$$\rho = \rho(x, t), \quad v = v(x, t), \quad q = q(x, t). \quad (5)$$

Величины (5) выражают соответственно плотность, скорость и интенсивность транспортного потока в точке $x \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \geq 0$. Аналогом уравнения неразрывности выступает следующий *закон сохранения автомобилей*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Справедлива *формула потока*

$$q(x, t) = \rho(x, t) v(x, t). \quad (7)$$

Центральную роль играет специальный *закон безопасного движения*

$$v = V(\rho), \quad 0 < \rho \leq \rho_{\max}, \quad (8)$$

с непрерывной, монотонно убывающей функцией $V(\rho)$, для которой приняты краевые условия

$$V(0+) = v_{\max}, \quad V(\rho_{\max}) = 0. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) выражают естественное убывание скорости транспортного потока при возрастании его плотности. Совмещая формулы (7) и (8), получаем зависимость интенсивности потока от плотности:

$$q = \rho V(\rho) = Q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (10)$$

Выражение $q = Q(\rho)$ из формулы (10) называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения (см. [5]). Подставляя фундаментальную диаграмму в закон сохранения (6), приходим к основному уравнению дорожного движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t). \quad (11)$$

Это квазилинейное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции ρ . Поскольку для квазилинейных уравнений типичными являются разрывные решения (см. [6]–[8]), то наряду с (11) удобно рассматривать также проинтегрированное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x, t) dx = Q(\rho(\alpha, t)) - Q(\rho(\beta, t)). \quad (12)$$

Всякая кусочно непрерывная функция ρ , удовлетворяющая соотношению (12) при почти всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и почти всех значениях $t \geq 0$, называется *обобщенным решением* квазилинейного уравнения (11). При этом, конечно, предполагается, что $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho_{\max}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$.

Стандартной для (11) является задача Коши с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Здесь кусочно непрерывная функция $\rho_0(x)$ выбрана так, чтобы $0 \leq \rho_0(x) \leq \rho_{\max}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. В задаче на кольце фиксированной длины $L > 0$ естественно считать все функции L -периодическими по x при любом фиксированном $t \geq 0$.

Как уже отмечалось ранее (см. [2]), многочисленные эксперименты, проведенные в программе “Cars”, показывают, что транспортный поток при стандартных настройках параметров программы хорошо соответствует фундаментальной диаграмме, предложенной в работе Нагеля–Шрекенберга [9]. Эта диаграмма имеет вид

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1 \rho, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ k_2 (\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases} \quad (14)$$

с коэффициентами

$$k_1 = \frac{q_{\max}}{\rho^*}, \quad k_2 = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}. \quad (15)$$

Здесь ρ^* — фиксированное значение из интервала $(0, \rho_{\max})$, отвечающее переходной плотности от свободного движения потока (при $0 < \rho < \rho^*$) к затрудненному движению (при $\rho^* < \rho < \rho_{\max}$). Значения максимальной плотности $\rho_{\max}$ и максимальной интенсивности $q_{\max}$ считаются заданными константами.

Конечно же, фундаментальная диаграмма (14) не вполне точно отражает все происходящее, но она является наилучшим «первым приближением» к истинным (более сложным) процессам, проходящим в транспортных потоках программы “Cars”.

Типовые обобщенные решения уравнения (11), возникающие в модели Нагеля–Шрекенберга (14), (15), указаны в работе [2]. Дополним прежние соображения следующей гипотезой, объясняющей стабилизацию решений при достаточно больших значениях $t > 0$.

Итак, рассматриваем поведение L -периодических решений задачи Коши (11), (13) в модели Нагеля–Шрекенберга (14), (15). Ключевой характеристикой является значение

$$M = \int_0^L \rho_0(x) dx, \quad (16)$$

соответствующее общему числу автомобилей на кольце в начальный момент времени $t = 0$. Из тождества (12) следует, что данное значение не изменяется при возрастании $t > 0$ в том смысле, что

$$M = \int_0^L \rho(x, t) dx, \quad t > 0, \quad (17)$$

для решения поставленной задачи Коши. Используя закон сохранения (17) и явные формулы решений из работы [2], требуется доказать такое утверждение.

Утверждение. Пусть $\rho_0(x)$ — кусочно непрерывная L -периодическая функция, удовлетворяющая условию $0 \leq \rho_0(x) \leq \rho_{\max}$ при $x \in \mathbb{R}$. Пусть величина $M > 0$ определена формулой (16). Предположим, что $\rho(x, t)$ — обобщенное L -периодическое решение задачи Коши (11), (13) в модели Нагеля–Шрекенберга (14) с коэффициентами k_1, k_2 из формулы (15). Имеет место следующая альтернатива.

(i) Если $M < L\rho^*$, то существует момент времени t^* , зависящий лишь от длины кольца L и параметров фундаментальной диаграммы (14), такой, что $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho^*$ при всех $x \in [0, L]$ и $t \geq t^*$. В этом случае

$$\rho(x, t) = f(x - k_1 t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq t^*, \quad (18)$$

с некоторой функцией $f = f(s)$, такой, что $0 \leq f(s) \leq \rho^*$ при всех $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Если $M > L\rho^*$, то существует момент времени t^* , зависящий лишь от длины кольца L и параметров фундаментальной диаграммы (14), такой, что $\rho^* \leq \rho(x, t) \leq \rho_{\max}$ при всех $x \in [0, L]$ и $t \geq t^*$. В этом случае

$$\rho(x, t) = g(x + k_2 t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq t^*, \quad (19)$$

с некоторой функцией $g = g(s)$, такой, что $\rho^* \leq g(s) \leq \rho_{\max}$ при всех $s \in \mathbb{R}$.

Другими словами, в случае (i) наступает стабилизация решения в виде прямой волны (18), а в случае (ii) — в виде обратной волны (19). Обе формулы согласованы с наблюдаемой картиной в модели “Cars” и хорошо объясняют эффекты, отмеченные ранее на других примерах в [9]–[11].

Сейчас мы не располагаем полным доказательством сформулированного утверждения, но наши предварительные рассуждения убеждают в его истинности. Особую специфику имеет пограничный случай $M = L\rho^*$, когда число автомобилей равно критическому. В силу имеющихся примеров неединственности

(см. [2], [4]) после стабилизации решения к теоретическому значению $\rho(x, t) \equiv \rho^*$ возможно последующее разрушение решения, новая стабилизация и так далее.

Отметим, наконец, что вопросы стабилизации решений представляют традиционный интерес для теории квазилинейных дифференциальных уравнений (см. [12], [13]).

Список литературы

- [1] Подорога А. В. Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения // “Системы компьютерной математики и их приложения”: материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15 – С. 42-44.
- [2] Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”. Герценовские чтения — 2015. Материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г. – СПб: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2015. – С. 209-213.
- [3] Подорога А. В. Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге // “Системы компьютерной математики и их приложения”: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16 – С. 35-38.
- [4] Подорога А. В., Тихонов И. В. Неединственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения дорожного движения в модели Нагеля–Шрекенберга // “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2016. – С. 222-224.
- [5] Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
- [6] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие). – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
- [7] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 296 с. (Lax P.D. Hyperbolic Partial Differential Equations. AMS, 2006.)
- [8] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 576 с. (L. C. Evans. Partial Differential Equations.)
- [9] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2. No 12. – P. 2221-2229.
- [10] Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 31 с.
- [11] Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н., Юмашев М. В. Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // Прикл. матем. и механ. 2000. Т. 64. Вып. 4. – С. 671-678.

- [12] Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. Вып. 5. – С. 3-40.
- [13] Henkin G. M., Shananin A. A. Cauchy–Gelfand problem for quasilinear conservation law // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2014. Vol. 138. No. 7. – P. 783–804.