Метод Досса для стохастического уравнения Шрёдингера–Белавкина

А. А. Лобода

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера–Белавкина, уравнение теплопроводности, аналитическое продолжение, стохастические уравнения, формулы Фейнмана–Каца.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12249

Как известно (см. [1]), для задачи Коши

$$\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)=\frac{\lambda^2}{2m}\,\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x),\qquad \Psi(0,x)=f(x),\quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

где $\lambda>0$, решение определяется равенством (*формула Фейнмана–Каца*)

$$\Psi(t,x)=\mathsf{E}f\biggl(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,B_t\biggr)\exp\biggl(\int_0^t\frac{V}{\lambda}\biggl(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,B_s\biggr)\,ds\biggr).$$

В [2] доказывается, что в случае уравнения Шрёдингера

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)=\frac{-h^2}{2m}\,\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x),\qquad \Psi(0,x)=f(x),\quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

решение аналогичной задачи Коши определяется равенством

$$\Psi(t,x)=\mathsf{E}\widetilde{f}(x+\sqrt{ih}B_t)\exp\biggl(\frac{1}{ih}\int_0^t\widetilde{V}(x+\sqrt{ih}B_s)\,ds\biggr),$$

где E – математическое ожидание, функции $\widetilde{f}(\,\cdot\,)$ и $\widetilde{V}(\,\cdot\,)$ являются аналитическими продолжениями по аргументу функций $f(\,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,)$ в подходящую область (см. [2]).

В этой работе показано, что подобным образом может быть записано решение стохастического уравнения Шрёдингера–Белавкина, если известна рандомизированная формула Фейнмана–Каца для евклидова аналога этого уравнения.

О рандомизированной формуле Фейнмана–Каца речь идет в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $C_0(t_1,t_2)$ – пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль в точке t_1, со стандартной мерой Винера w_{t_1,t_2}. Тогда функция $\Psi_\omega(\,\cdot\,)(\,\cdot\,)$, определяемая равенством*

$$\Psi_\omega(t)(q)=\int_{C_0(0,t)}\exp\biggl(b\int_0^t V(\tau,q+\xi(\tau))\,d\tau+c\int_0^t R(q+\xi(\tau))\,dB_\omega(\tau)\biggr)\varphi_0(q+\xi(t))w_{0,t}\,(d\xi),$$

является решением задачи Коши

$$d\Psi_\omega(t)(\,\cdot\,)=a(\Psi_\omega(t))''(\,\cdot\,)+bV(t,\,\cdot\,)\Psi_\omega(t)(\,\cdot\,)+cR(\,\cdot\,)\Psi_\omega(t)(\,\cdot\,)\,dB_\omega(t),\qquad \Psi_\omega(0)(\,\cdot\,)=\varphi_0(q),$$

причем a, b, c – положительные числовые параметры и для всех $q\in Q$ выполнена оценка $R(q)>0$, функции $R(\,\cdot\,)$, φ_0 вещественные и непрерывные, $V(t,\,\cdot\,)$ – интегрируема и ограничена на Q, где Q – конфигурационное пространство, на котором определена $\Psi_\omega(\,\cdot\,)(\,\cdot\,)$.

Схема доказательства. Как и в детерминированном случае, используется формула Ито; с ее помощью получается следующее равенство:

$$
\begin{aligned}
d\biggl(&\exp\biggl(b\int_t^{t+s} V(\tau,q+\xi(t)+\xi_1(\tau))\,d\tau + c\int_t^{t+s} R(q+\xi(t)+\xi_1(\tau))\biggr)\,dB_\omega(\tau)\\
&\times\int_{C_0(0,t)}\exp\biggl(b\int_0^t V(\tau,q+\xi(\tau))\,d\tau + c\int_0^t R(q+\xi(\tau))\,dB_\omega(\tau)\biggr)\\
&\times\varphi_0(q+\xi(t+s))w_{0,t}\,(d\xi)\biggr)\\
&=\exp\biggl(b\int_t^{t+s} V(\tau,q+\xi(t)+\xi_1(\tau))\,d\tau + c\int_t^{t+s} R(q+\xi(t)+\xi_1(\tau))\,dB_\omega(\tau)\biggr)\\
&\times\int_{C_0(0,t)}\exp\biggl(b\int_0^t V(\tau,q+\xi(\tau))\,d\tau + c\int_0^t R(q+\xi(\tau))\,dB_\omega(\tau)\biggr)\\
&\times\varphi_0(q+\xi(t+s))w_{0,t}\,(d\xi)\\
&\times\bigl(bV(\tau,q+\xi(t)+\xi_1(t+s)) + cR(q+\xi(t)+\xi_1(t+s))\bigr)\,dB_\omega\\
&+\frac{d}{ds}\biggl(\int_{C_0(0,t)}\exp\biggl(b\int_0^t V(\tau,q+\xi(\tau))\,d\tau + c\int_0^t R(q+\xi(\tau))\,dB_\omega(\tau)\biggr)\biggr)\\
&+\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\biggl(\int_{C_0(0,t)}\dots\biggr).
\end{aligned}
$$

Далее, обе его части интегрируются по $C_0(t,t+s)$ и осуществляется переход к пределу при $s\to 0$ (подробнее см. [3]).

Для последующего важен случай, когда задача Коши из теоремы 1 имеет вид

$$
\begin{gathered}
d\Psi_\omega(t)(q) = \alpha\,\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2}\,dt + \biggl(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}\,q^2\biggr)\Psi_\omega(t)(q)\,dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,q\Psi_\omega(t)(q)\,dB_\omega(t),\\
\Psi_\omega(0,\,\cdot\,) = \varphi_0(\,\cdot\,),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где функция $\varphi_0(\,\cdot\,)\in C_b(\mathbb{R}^1)$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\operatorname{Re}\alpha\geqslant 0$. В этом случае ее решение определяется следующей формулой Фейнмана–Каца:

$$
\begin{aligned}
\Psi_\omega(t)(q) = \int\exp\biggl\{&\int_0^t \alpha V(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t\frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\biggr\}\\
&\times\exp\biggl\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))\,dB_\omega(t)\biggr\}\varphi_0(q+\xi(t))w_{0t}^{\alpha}\,(d\xi).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В самой формуле Фейнмана–Каца параметр α вещественный и положительный. При таких значениях параметра получается как раз евклидов аналог стохастического уравнения Шрёдингера.

В статье [2] из формулы Фейнмана–Каца для уравнения теплопроводности получена формула Фейнмана–Каца для (нестохастического) уравнения Шрёдингера.

В работах [2] и [4] для получения представления решения уравнения Шрёдингера в виде интеграла по траекториям используют аналитическое продолжение по параметру; см. также [5], [6]. При таком варианте аналитического продолжения счетно-аддитивная мера не появляется, что было отмечено в работе [4]. Вместо нее возникает обобщенная мера, называемая *мерой Фейнмана*, определенная на подходящем функциональном пространстве. Отметим, что в важных для приложений случаях никакое аналитическое продолжение счетно-аддитивной меры, определенное на бесконечномерном пространстве, не может оказаться счетно-аддитивной мерой. Отметим также, что мера Фейнмана может быть получена принципиально другим способом – с помощью применения теоремы Чернова или близких к ней предложений (см. [7], [8]).

Далее используется еще один подход, восходящий к работе Досса [2], основанный на аналитическом продолжении интегрируемой функции. При этом мера, по которой производится интегрирование, заменяется ее образом, который снова оказывается счетно-аддитивной мерой.

Именно, пусть

$$\varphi(t,q)=\int_{C_0([0,t],Q)}\exp\biggl(\int_0^t V(q+\xi(\tau))\,d\tau\biggr)\varphi_0(q+\xi(t)\,w(d\xi));$$

тогда после замены переменной получается следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}\varphi\biggl(t,\frac{q}{\sqrt{-i}}\biggr)&=\int_{C_0([0,t],Q)}\exp\biggl(\int_0^t V\biggl(\frac{q}{\sqrt{-i}}+\xi(\tau)\biggr)\,d\tau\biggr)\varphi_0\biggl(\frac{q}{\sqrt{-i}}+\xi(t)\biggr)\,w(d\xi)\\&=\int_{C_0([0,t],Q)}\exp\biggl(\int_0^t V\biggl(\frac{q}{\sqrt{-i}}+\frac{\sqrt{-i}\xi(\tau)}{\sqrt{-i}}\biggr)\,d\tau\biggr)\varphi_0\biggl(\frac{q}{\sqrt{-i}}+\frac{\sqrt{-i}\xi(t)}{\sqrt{-i}}\biggr)\,w(d\xi)\\&=\int_{C_0([0,t],Q)}\exp\biggl(\int_0^t V\biggl(\frac{1}{\sqrt{-i}}(q+\xi_1(\tau))\,d\tau\biggr)\varphi_0\biggl(\frac{1}{\sqrt{-i}}(q+\xi_1(\tau)\biggr)wf^{-1}\,(d\xi_1),\end{aligned}$$

где $f(\xi)=\xi_1=\sqrt{-i}\xi$. Таким образом,

$$\varphi(t,q_1)=\int_{C_0([0,t],Q)}\exp\biggl(\int_0^t V\biggl(q_1+\frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\biggr))\,d\tau\biggr)\varphi_0\biggl(q_1+\frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\biggr))wf^{-1}\,(d\xi_1),\qquad(3)$$

где $q_1=q/\sqrt{-i}$.

Далее будет описано обобщение метода Досса на стохастический случай. С помощью этого обобщения формула Фейнмана–Каца для уравнения Шрёдингера–Белавкина будет выведена из формулы Фейнмана–Каца для стохастического уравнения теплопроводности. Этот метод получения формулы Фейнмана–Каца для уравнения Шрёдингера–Белавкина отличается от использованного в работе [9].

Он состоит в том, что все функции, входящие в формулу Фейнмана–Каца, соответствующую уравнению теплопроводности, аналитически продолжаются в подходящую область и затем продолжаются по непрерывности на ее замыкание, после чего к полученному интегралу применяется формула замены переменной. То, что полученный интеграл по счётно-аддитивной мере будет давать представление решения уравнения Шрёдингера–Белавкина, вытекает из теоремы 1 в силу единственности аналитического продолжения.

При доказательстве приводимой ниже основной теоремы используется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\psi\colon[0,\infty)\to L_2(\mathbb{R}^1)$ – решение уравнения*

$$\psi(t)-\psi(0)=\int_0^t((\psi(\tau))''-iV\psi(\tau))\,d\tau,$$

причем для каждого $t\geqslant 0$ функция $x\mapsto\psi(t)(x)$ допускает аналитическое продолжение на область

$$\biggl\{z\in\mathbb{C}:z=\rho e^{-i\alpha},\,\alpha\in\biggl[0,\frac{\pi}{4}\biggr),\,\rho>0\biggr\}$$

и продолжение по непрерывности на ее замыкание. Пусть функция $\varphi\colon[0,\infty)\to L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ – комплексификация пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) определяется так:

$$\varphi(t)(x)=\psi(t)(\sqrt{-i}x),\qquad\sqrt{-i}=e^{-i\pi/4},$$

где дифференцирование производится по пространственной переменной. Тогда функция φ является решением уравнения

$$i\varphi(t) - i\varphi(0) = \int_0^t (-(\varphi(\tau))'' + V\varphi(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство. Этот факт проверяется следующим образом:

$$i\varphi(t)(x) - i\varphi(0)(x) = i\psi(t)(\sqrt{-i}x) - i\psi(0)(\sqrt{-i}x) = \int_0^t (i(\psi(\tau))''(\sqrt{-i}x) + V\psi(\tau)(\sqrt{-i}x))\, d\tau$$
$$= \int_0^t (-(\varphi(\tau))''(x) + V\varphi(\tau)(x))\, d\tau;$$

при этом используются равенства

$$\varphi'(t) = \psi'(t), \qquad (\varphi(t))'(x) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)(\phi(t))'(x), \qquad (\varphi(t))''(x) = -i(\psi(t))''(x),$$
$$i(\psi(t))''(x) - i\cdot iV\psi(t)(x) = -(\varphi(t))''(x) + V\varphi(t)(x).$$

По определению решением приведенного выше стохастического уравнения теплопроводности (1) является решение следующего стохастического интегрального уравнения:

$$\Psi_\omega(t)(q) - \Psi_\omega(0)(q) = \int_0^t \alpha\Delta(\Psi_\omega(\tau))(q)\, d\tau + \int_0^t \alpha V(q)\Psi_\omega(\tau))(q)\, d\tau$$
$$+ \int_0^t -\frac{\lambda}{4}\, q^2(\Psi_\omega(\tau))(q)\, d\tau + \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, q\Psi_\omega(\tau))(q)\, dB_\omega(\tau). \qquad (4)$$

Если функция $(t, q, \omega) \mapsto \Psi_\omega(\tau))(q)$ является решением этого уравнения, то функция η_μ, определяемая равенством $\eta_\mu(t)(q,\omega) = \Psi_\omega(t)(\sqrt{-\mu}q)$, является решением следующего уравнения:

$$\mu(\eta_\mu(t)(q,\omega) - \eta_\mu(0)(q,\omega))$$
$$= \int_0^t -\frac{1}{2}\,\alpha\Delta(\eta_\mu(\tau))(q,\omega)\, d\tau + \int_0^t \alpha\mu V(\sqrt{-\mu}q)\eta_\mu(\tau)(q,\omega)\, d\tau$$
$$- \int_0^t -\frac{\lambda}{4}(\sqrt{-\mu}q)^2(\eta_\mu(\tau))(q,\omega)\, d\tau - \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{-\mu}\sqrt{-\mu}q\eta_\mu(\tau)(q,\omega)\, dB_\omega(\tau). \qquad (5)$$

Это проверяется непосредственным дифференцированием. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Ψ – решение следующей задачи Коши*:

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2}\, dt + \left(iV(q) - \frac{\lambda}{4}\, q^2\right)\Psi_\omega(t)(q)\, dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, q\Psi_\omega(t)(q)\, dB_\omega(t),$$
$$\Psi_\omega(0,\,\cdot\,) = \varphi_0(\,\cdot\,). \qquad (6)$$

Тогда

$$\Psi(t, q_1) = \int \exp\left\{\int_0^t iV\left(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\right) d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}\left(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\right)^2 d\tau\right\}$$
$$\times \exp\left\{\int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\right) dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0\left(q_1 + \frac{1}{\sqrt{-i}}\,\xi_1(t)\right) wf^{-1}\,(d\xi_1) \quad (7)$$

(*в обозначениях* (3)).

Доказательство. Продолжим функцию $\mu \mapsto \eta_\mu$ на область

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\alpha},\, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right],\, \frac{3}{2} > \rho > \frac{1}{2}\right\},$$

переходя на ее замыкание по непрерывности. Уравнение (6) получается из (5) при $\mu = i$. Каково бы ни было вещественное μ, для функции η_μ справедлива формула Фейнмана–Каца. При этом равенство (2) все время выполнено в силу единственности аналитического продолжения. Согласно теореме 1 решение уравнения (1) при вещественном α – это функция (2). Легко видеть, что функция (7) получается из функции (2) с помощью замены, указанной в лемме. Тогда по лемме функция (7) является решением уравнения Шрёдингера–Белавкина.

Автор выражает благодарность О. Г. Смолянову за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] B. Simon, *Functional Integrals and Quantum Physics*, Academic Press, N. Y., 1979. **[2]** H. Doss, *Comm. Math. Phys.*, **73**:3 (1980), 247–264. **[3]** А. А. Лобода, *Дифференц. уравнения*, **54**:4 (2018), 561–564. **[4]** R. H. Cameron, *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 434–462. **[5]** О. Г. Смолянов, А. Трумен, *ТМФ*, **120**:2 (1999), 193–207. **[6]** О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990. **[7]** И. Д. Ремизов, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 477–480. **[8]** И. Д. Ремизов, *Матем. заметки*, **104**:3 (2018), 454–466. **[9]** И. В. Садовничая, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:2 (1998), 659–667.

А. А. Лобода
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: orion1312@yandex.ru

Поступило
14.11.2018
После доработки
25.01.2019
Принята к публикации
20.05.2019