1 Введение

Данная работа связана с задачей о поведение роботов в лабиринтах. Вопросы этой темой представляют большой интерес. Это связано с тем, что продвижения в некоторых важных задачах теоретической Computer Science могут быть получены из области поведения роботов в лабиринтах. Такое положение дел делает актуальными задачи данной тематики. Роботы в лабиринтах очень важны, в частности, им посвящено много литературы. В данной работе решаются некоторые открытые вопросы, поставленные в диссертации Анджанса: какие пространства может может обойти робот с генератором случайных чисел, какие пространства может может обойти робот с генератором случайных чисел и камнем, какие пространства может может обойти робот с генератором случайных чисел, камнем и флажком, какие пространства может может обойти робот с генератором случайных чисел, камнем и плоскостью флажков. Подобные задачи помогают развить математический аппарат в данной области, кроме того в этой работы мы изучаем практически не изученное поведение робота с генератором случайных чисел. Представляется чрезвычайно важным перенос комбинаторных методов разработанных А. М. Райгородским в задачи этой тематики.

Задачи этой темы могут принимать разные виды. Но есть несколько общих частей. Основным элементом является робот. Это некоторый конечный автомат, но у него может быть генератор случайных чисел или память в какой-то форме. Он перемещается в некоторой среде. Её называют лабиринтом. В этой среде могут быть камни, которые робот может переносить, или эта среда может быть раскрашена. Множество флагов в лабиринте, которые робот может увидеть, но не может переносить, по сути является двухцветной раскраской. Робот решает разные задачи начиная с обхода лабиринта, что фактически является решением нахождения клетки выхода из него, встречи двух роботов, заканчивая распознаванием типа лабиринта.

Основные результаты работы состоят в том, что робот с генератором случайных битов обходит $\mathbb{Z}^2$ и не может обойти $\mathbb{Z}^3$, робот с генератором случайных битов и камнем обходит $\mathbb{Z}^4$ и не может обойти $\mathbb{Z}^5$, робот с генератором случайных битов, камнем и флажком обходит $\mathbb{Z}^6$ и не может обойти $\mathbb{Z}^7$, робот с генератором случайных битов, камнем и плоскостью флажков обходит $\mathbb{Z}^8$ и не может обойти $\mathbb{Z}^9$. при различных условиях.

2 Базовые определения нашей модели

Сначала дадим основные определения, которые нам понадобятся для решения поставленной задачи. В рамках данной работы, средой, в которой движется робот, будем считать некоторую группу. Тогда нашу модель можно описать с помощью следующих определений. Часть из этих терминов даны в урезанном варианте и рассматривается только с точки зрения решаемых задач.

Системой лабиринт-робот называется $L = (G, R, n, D, M)$, где G - некоторая группа, R- конечный автомат специального вида, n - неотрицательное целое число, D - подмножество G, M - подмножество G.

Определение 2.

Конечный автомат с генератором случайных чисел $R = (Q, q_0, \delta, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots))$ называется автоматом робота. Q - множество состояний автомата, $q_0 \epsilon Q$- начальное состояние автомата, $\delta \subset Q \times \{0,1\}^{n+2} \to Q$ - функция переходов в автомате, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ - последовательность независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин, $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$.

Замечание 1.

Переходы в автомате $R = (Q, q_0, \delta, \xi)$ осуществляются по битовым векторам длины $n + 2$.

Определение 3.

Состоянием системы лабиринт-робот называется набор $(a, s_1, s_2, \ldots, s_n, k, q)$, где $a \epsilon G$, $s_i \epsilon G$, $q \epsilon Q$, $k \epsilon \mathbb{N}$. Будем называть a - расположением робота, s_i - расположениями камней, k - номер хода робота, соответствующей случайной величине ξ_k, которая дает случайный бит. Начальным состоянием системы лабиринт-робот будет $(e, e, e, \ldots, e, 1, q_0)$, где e - нейтральный элемент группы G.

Определение 4.

$(d_1, d_2, \ldots, d_m) = D$ называются переходными элементами системы лабиринт-робот.

Определение 5.

Ходом в состоянии $q \epsilon Q$ называется пара (d, p), где $d \epsilon D$, $p \epsilon \{0,1\}^n$.

По сути ход соответствует перемещению робота в G и множеству камней, которые он перенесет с собой. Для каждого элемента $Q \times \{0,1\}^{n+2}$ свой ход

Определение 6.

Результатом хода робота в состоянии системы $(a, s_1, s_2, \ldots, s_n, k, q)$ будет состояние $(a', s'_1, s'_2, \ldots, s'_n, k+1, q')$ со следующими свойствами. Пусть (d, p) ход соответствующий состоянию q; $a' = ad$, $s'_i = s_i d$, если i-ый бит p равен 1 и $s_i = a$, иначе $s'_i = s_i$; $w \epsilon \{0,1\}^{n+2}$ причем i-ый бит w равен 1, если $s_i = a$, иначе 0, $n+1$-ый бит равен 1, если $a \epsilon M$ иначе 0, $n+2$-ой бит получается из ξ_k; q' получается из состояния q в автомате R по вектору w.

В целом система лабиринт-робот L работает так. Начинаем с начального состояния, и поочерёдно изменяем состояния согласно ходам робота. То есть, можно сказать, что данная система генерирует последовательность состояний l_k, согласно вышеописанным правилам. Расположение робота на k-ом ходу обозначим через a_k. Важно отметить, что вероятности перемещений не зависят от номера хода.

Лемма 1.

Для задач обхода G равносильно рассматривать существование конечного автомата с генератором случайных чисел и существование недетерменированный автомат с рациональными вероятностями перехода.(Тут мы действуем в предположении, что существует $d_i d_j = e$)

Если существует автомат с генератором случайных чисел, то существует недетерменированный автомат с рациональными вероятностями перехода, так как по сути автомат с генератором случайных чисел частный случай недетерменированного автомата с рациональными вероятностями перехода.

Теперь покажем, что утверждение верно и в обратную сторону. Построим автомат с генератором случайных чисел. Там будут состояния аналогичные состояниям недетерменированного автомата. Если переходы из вершины имели вероятности $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_k}{q_k})$, тогда приведем их к общему знаменателю $(\frac{p'_1}{q}, \frac{p'_2}{q}, \ldots, \frac{p'_k}{q})$. Построим переходы с промежуточным состояниями таким образом, чтобы были аналогичные переходы с вероятностью $(\frac{p'_1}{2^{2q}}, \frac{p'_2}{2^{2q}}, \ldots, \frac{p'_k}{2^{2q}})$ и возврат в исходную вершину с тем же состоянием с вероятностью $\frac{2^{2q} - \sum p'_i}{2^{2q}}$. Для этого возьмем сбалансированное бинарное дерево из исходной вершины с 2^{2q} листами. Ход между ними имеет вид (d_i, p) из вершины нечетного уровня и (d_j, p) из вершины четного уровня, где $p = 0^n$, а переходы зависят только от случайного бита. Из p'_i листовых вершин переход в вершину аналогичной той, в которую был переход с вероятностью $\frac{p_{\rm i}}{q_i}$ с таким же ходом. Из оставшихся листов однозначные переходы в еще одну добавленную вершину с ходом (d_i, p), а из нее переход в исходную вершину с ходом (d_j, p) .Так как $\frac{2^{2q} - \sum p'_{\rm i}}{2^{2q}} < 1$, то с вероятностью 1 робот в какой-то момент перейдет в одно из состояний соответствующих переходам недетерменированного автомата из рассматриваемой вершины.

■

Общий смысл этих определений в том, что у нас есть робот, который является недетерминированным конечным автоматом R, n камней, лабиринт G и множество флагов на нем M. Робот итерационно переходит по своим состояниям и в соответствии этим переходам ходит по лабиринту. Кроме того он может носить с собой камни, если находится с ними в одной клетке. По сути робот является программой с конечной памятью и с возможностью получать случайные биты, что мы используем далее для более удобной демонстрации возможности обхода некоторых лабиринтов. Равносильность этих утверждений расписывать не будем, но задача написать программу по роботу или построить робота по программе не составляет особого труда.

3 Случайные блуждания

3.1 Базовые понятия случайных блужданий

Рассмотрим некоторые необходимые понятия случайных блужданий

Определение 7

Простое дискретное случайное блуждание в $\mathbb{Z}^{\rm k}$ — это случайный процесс $\{Y_n\}_{n \geqslant 0}$ с дискретным временем, имеющий вид

$$Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ где } Y_0 \text{ — начальное состояние}(0^k);$$

$$P(X_i = e_j) = P(X_i = -e_j) = \frac{1}{2k}$$

случайные величины $X_i, i = 1, 2, \ldots$ совместно независимы.

Утверждение 1

Для случайного блуждания в $\mathbb{Z}^{\mathrm{k}}$ равносильны следующие события

1. P($Y_i = \{0\}^k$ бесконечное число раз)=1 (Иначе говоря

$$\forall l \ P(x : \exists i_1, i_2, \ldots, i_l \ : \ i_1 < i_2 < \ldots < i_l \ \forall j \ Y_{i_j}(x) = \{0\}^k)) = 1).$$

   Будем писать

$$P(x : \exists i_1, i_2, \ldots, i_l \ : \ i_1 < i_2 < \ldots < i_l \ \forall j \ Y_{i_j}(x) = \{0\}^k)),$$

   как $P($ Y_i=$\{0\}^k$ хотя бы k+1 раз).

2. P($x : \exists i > 0$:$Y_i(x) = \{0\}^k$) =1. Где x элемент вероятностного пространства, на котором задано случайное блуждание). Назовем это возвратностью случайного блуждания.

3. $\forall x$ Если $\exists$i : $P(Y_i = \overrightarrow{x}) > 0$, то P($\exists i$:$Y_i = x$) =1. P($\exists i > 0$:$Y_i = \{0\}^k$) >0

Доказательство

Покажем, несколько следствий между этими событиями.

1=>2

Так как, если $Y_i = \{0\}^k$ бесконечное число раз с вероятностью 1, то $Y_i = \{0\}^k$ при каком-то $i > 0$.

2=>1

Пусть 1 не верно, а 2 верно. Это можно записать так

$\exists$k: $P(Y_i = 0$ ровно k раз $) = \delta > 0$ и $\forall \varepsilon \exists m : P(\exists$i: $0 < i < m, Y_i = \{0\}^k) > 1 - \varepsilon$.

Тогда для $m(\varepsilon)$ и верно, что

$$P(\text{при } 0 < i < (k+1) \cdot m \ : \ Y_i = \{0\}^k \text{ хотя бы k+1 раз}) > (1 - \varepsilon)^{k+1}.$$

Значит

$$P(Y_i{=}\{0\}^k \text{ хотя бы k+1 раз}) > (1-\varepsilon)^{k+1},$$

но

$$\text{P}(Y_i{=}0 \text{ ровно k раз}) + \text{P}(Y_i{=}\{0\}^k \text{ хотя бы k+1 раз}){\leqslant}1$$

Из этого следует

$$\forall k, \delta > 0 \exists \varepsilon : (1-\varepsilon)^{k+1} + \delta > 1.$$

Противоречие.

3=>2

Берем $\overrightarrow{\text{x}}$=0

1=>3

P($Y_i = \{0\}^k$ бесконечное число раз)=1.Тогда, если

$$\exists \text{i} : \text{P}(Y_i{=}\overrightarrow{x}){>}0, \text{ то P(y:}\exists\text{i}{>}0 : Y_i\text{(y)=-}\overrightarrow{x}) = 1.$$

Значит из ∃i : $P(Y_i = \overrightarrow{x}) > 0$, следует P$(y : \exists i > 0 : Y_i(y) = -\overrightarrow{x})$ =1. После i-ого хода мы с вероятностью 1 возвращаемся в точку $\{0\}^k$(мы бы не успели побывать там бесконечное число раз). Проведя аналогично доказательство для $-\overrightarrow{x}$ (а про него уже известно, что∃i : $P(Y_i = -\overrightarrow{x}) > 0$), получим

$$P(\exists i > 0 : Y_i = \overrightarrow{x}) = 1.$$

Замечание 2

По сути случайное блуждание обходит пространство $\mathbb{Z}^{\text{k}}$ значит, что мы дойдем до всех клеток, кроме начальной с вероятностью один. Но после 1ого хода у нас все то же случайное блуждание, которое обходит все пространство, кроме клетки, в которой мы находимся, то есть во всех случаях, кроме хода оставляющего нас в той же клетке мы с вероятностью 1 в нее еще попадем на следующих ходах, а если мы остались в той же клетке, то мы в нее уже попали. Тогда выполняется 2-е условие утверждения 1.

Кроме того, если случайное блуждание возвратно и может дойти до любой клетки, то оно обходит всё пространство, так как выполняется третье условие утверждения 1. Поэтому возвратность для простого случайного блуждания эквивалентна обходу пространства.

Замечание 3

P$(x:\exists i>0{:}Y_i(x)=\{0\}^k)$ =1 эквивалентно расходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(Y_i=\{0\}^k).$$

Доказательство

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(Y_i=\{0\}^k) =\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} P(x:\exists i_1,i_2,\ldots,i_k \ : \ i_1<i_2<\ldots<i_k \ \forall j \ Y_{i_j}(x)=\{0\}^k))$$

Так как обе части являются мат ожиданием количества посещений $\{0\}^k$ подсчитанные разными способами. В одном случае находимся ли мы в $\{0\}^k$на i-ом ходу, во втором с какой вероятностью мы побывали в $\{0\}^k$ хотя бы l раз. А

$$P(x:\exists i_1,i_2,\ldots,i_l \ : \ i_1<i_2<\ldots<i_l \ \forall j \ Y_{i_j}(x)=\{0\}^k))=$$

$$=(P(x:\exists i>0:Y_i(x)=\{0\}^k))^l.$$

Обозначим P$(x:\exists i>0{:}Y_i(x)=\{0\}^k)$ через ε, тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(Y_i=\{0\}^k)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i,$$

а этот ряд сходится при $\varepsilon<1$, и расходится при $\varepsilon=1$.

Определение 8

Взаимно однозначное отображение $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$ множества $(1,2,\ldots)$ в себя назовем конечной перестановкой, если $\pi_n=n$ для всех n, за исключением, быть может, конечного числа.

Определение 9

Если $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ - некоторая последовательность случайных величин, то через $\pi(\xi)$ будем обозначать последовательность $\xi=(\xi_{\pi 1},\xi_{\pi 2},\ldots)$. Обозначим $\mathcal{F}_n^{\infty}=\sigma(\xi_n,\xi_{n+1},\ldots)$ - σ-алгебру, порожденную случайными величинами

$\xi_1, \xi_2, \ldots$. И пусть $\mathcal{F}' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^{\infty}$. Поскольку пересечение σ-алгебр есть снова σ-алгебра, то $\mathcal{F}'$ есть σ-алгебра. Эта σ-алгебра будет называться «хвостовой» или «остаточной».

Определение 10

Событие А $= \{\xi \epsilon B\}, B \epsilon \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, то через π(A) обозначим событие

$$\{\pi(\xi) \epsilon B\}, B \epsilon \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty}).$$

Определение 11

Событие А $= \{\xi \epsilon B\}, B \epsilon \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, называется перестановочным, если для любой конечной перестановки π событие π(A) совпадает с A.

Теорема 1 (закон «0 или 1» Хьюитта и Сэвиджа).

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $A = \{\xi \epsilon B\}$-перестановочное событие. Тогда вероятность P(A) может принимать лишь два значения: нуль или единица.

Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [2].

Замечание 4

Заметим, что свойство блуждания Y_i с шагом X_i А=($Y_i = \{0\}^k$ бесконечное число раз) является перестановочным событием случайных величин X_i. Значит по Теореме 1 P(A) принимает значение 0 или 1.

3.2 Возвратность простого случайного блуждания в пространстве

Докажем, что простое случайное блуждание на плоскости с вероятностью 1 побывает во всех клетках плоскости.

Заметим, что для этого достаточно доказать, что

$$P(\exists i > 0 : Y_i = \{0\}^2) = 1.$$

Потому что тогда тогда верна и третья часть утверждения 1, а так как все клетки плоскости достижимы, то блуждание побывает в них с вероятностью 1.

Для начала докажем, что

$$\sum P(Y_i = \{0\}^2) \to +\infty.$$

Вероятность оказаться на 2n-ом ходу в изначальной клетке

$$P(Y_{2n} = \{0\}^2) = \sum_{a=0}^{n} (C_{2n}^{n} \cdot (C_{n}^{a})^2 \cdot (\frac{1}{4})^{2n}),$$

где C_{2n}^{n}- количество способов выбрать из 2n перемещений n перемещений вверх и вправо,$(C_{n}^{\mathrm{a}})^2$ -количество способов выбрать a перемещений вверх в одной половине и a перемещений вниз во второй, $(\frac{1}{4})^{2n}$-вероятность конкретного перемещения на k шагов.

$$\sum_{a=0}^{n} (C_{n}^{a})^2 = C_{2n}^{n},$$

поэтому

$$P(Y_{2n} = \{0\}^2) = (C_{2n}^{n} \cdot (\frac{1}{4})^{n})^2,$$

но

$$C_{2n}^{n} \sim \frac{4^n}{(\pi n)^{0.5}},$$

тогда

$$P(Y_{2n} = \{0\}^2) \sim \frac{1}{\pi n},$$

а

$$\sum \frac{1}{\pi n} \to +\infty.$$

Если бы

$$P(\exists i > 0 : Y_i = \{0\}^k) = \varepsilon < 1,$$

тогда

$$\sum P(Y_i = \{0\}^2) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots = \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Так как

$$\sum_{\mathrm{i=0}}^{\infty} P(Y_i = \{0\}^2) = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} (\exists i_1, i_2, \ldots, i_k \ : \ i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \ P(Y_{i_j} = \{0\}^2)).$$

Противоречие. ■

3.3 Невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$

Доказательство невозвратности случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^{\mathrm{k}}$ разобьем на три части:

1. Невозвратность простого случайного блуждания на $\mathbb{Z}^3$
2. Смесь двух случайных блужданий, одно из которых эквивалентно простому случайному блужданию на $\mathbb{Z}^3$невозвратно.
3. Невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^{\mathrm{k}}$

Для начала разберемся с невозвратностью простого случайного блуждания на $\mathbb{Z}^3$. Для этого докажем, что $\sum\limits_{\mathrm{i=0}}^{\infty} P(Y_i = \{0\}^3)$ конечна, так как из этого следует, что

$$P(\exists i > 0 : Y_i = \{0\}^k) = \varepsilon < 1.$$

$P(Y_{2n+1} = \{0\}^3) = 0$, потому что мы не можем вернуться в исходную клетку за нечетное число шагов.

$$P(Y_{2n} = \{0\}^3) = \sum_{i,j>=0}^{i+j<=n} (\frac{(2n)!}{(i! \cdot j! \cdot (n-i-j)!)^2} \cdot (\frac{1}{6})^{2n}) =$$

$$= 2^{-2n} \cdot C_{2n}^n \cdot \sum_{i,j>=0}^{i+j<=n} (\frac{n!}{i! \cdot j! \cdot (n-i-j)!} \cdot (\frac{1}{3})^n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2n} \cdot C_{2n}^n \cdot C_n \cdot \sum_{i,j>=0}^{i+j<=n} \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot (n-i-j)!} \cdot (\frac{1}{3})^{2n},$$

где $C_n = \max \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot (n-i-j)!}$, тогда

$$P(Y_{2n}=\{0\}^3)\leqslant 2^{-2n}\cdot C_{2n}^n\cdot C_n\cdot 3^{-n}\cdot\sum_{i,j>=0}^{i+j<=n}\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot(n-i-j)!}\cdot(\frac{1}{3})^n=2^{-2n}\cdot C_{2n}^n\cdot C_n\cdot 3^{-n}.$$

Покажем, что $C_n\sim\frac{n!}{\lceil\frac{n}{3}+1\rceil!^3}\sim\frac{n!}{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor!^3}$.

Понятно, что $C_n\geq\frac{n!}{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor!^3}$ (возьмем $i,j,n-i-j\geq\lfloor\frac{n}{3}\rfloor$). Кроме того, заметим, что если $i>\lfloor\frac{n}{3}\rfloor>j$, то $(i-1)!\cdot(j+1)!<i!\cdot j!$, тогда усредняя таким образом пары из $i,j,n-i-j$ мы только увеличиваем $\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot(n-i-j)!}$. Если мы больше не сможем увеличивать их таким образом, то $i,j,n-i-j$ принимают значения $\lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $\lceil\frac{n}{3}\rceil$,$\lceil\frac{n}{3}+1\rceil$. Кроме того процесс точно остановится, так как после каждого действия $\mid i-\lfloor\frac{n}{3}\rfloor\mid+\mid j-\lfloor\frac{n}{3}\rfloor\mid+\mid n-j-i-\lfloor\frac{n}{3}\rfloor\mid$уменьшается на 2. Применив к

$$2^{-2n}\cdot C_{2n}^n\cdot\frac{n!}{\lceil\frac{n}{3}+1\rceil!^3}\cdot 3^{-n}$$

формулу Стирлинга получим $\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\pi^{1.5}\cdot n^{1.5}}$.

$\sum\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\pi^{1.5}\cdot n^{1.5}}$ сходится, значит $P(Y_{2n}=\{0\}^3)$ ограничена функцией, сумма ряда которой сходится. Из этого следует, что $\sum P(Y_{2n}=\{0\}^3)$ сходится (так как $P(Y_{2n}=\{0\}^3)\geq 0$). Значит блуждание является невозвратным, а следовательно не может обойти все пространство ■

Замечание 5

$P(Y_n=\overrightarrow{x})\leqslant 6^3\cdot(P(Y_n=\{0\}^3)+P(Y_{n+1}=\{0\}^3)+P(Y_{n+2}=\{0\}^3)+P(Y_{n+3}=\{0\}^3)$.

Вектор $\overrightarrow{x}$ из утверждения выше можно представить, как $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$

Докажем это.

Обозначим $(x_1\%2)+(x_2\%2)+(x_3\%2)$ через x', где $a\%b$ обозначение для$a\ mod\ b$.

$$P(Y_{2n+|x_1|+|x_2|+|x_3|}=\overrightarrow{x})=$$

$$=\sum_{i,j>=0}^{i+j<=n}(\frac{(2n+\mid x_1\mid+\mid x_2\mid+\mid x_3\mid)!}{i!\cdot j!\cdot(n-i-j)!\cdot(i+\mid x_1\mid)!\cdot(j+\mid x_2\mid)!\cdot(n-i-j+\mid x_3\mid)!}\cdot(\frac{1}{6})^{2n+|x_1|+|x_2|+|x_3|})\leqslant$$

$$\leqslant 6^3\cdot\sum_{i,j>=0}^{i+j<=n}(\frac{(2n+\mid x_1\mid+\mid x_2\mid+\mid x_3\mid+x')!}{i!\cdot j!\cdot(n-i-j)!\cdot(i+\mid x_1\mid+(x_1\%2))!\cdot(j+\mid x_2\mid+(x_2\%2))!\cdot(n-i-j+\mid x_3\mid+(x_3\%2))!}\cdot(\frac{1}{6})^{2n+|x_1|+|x_2|+|x_3|+x'})\leqslant$$

$$\leqslant 6^3\cdot \sum_{i,j>=0}^{i+j<=n} (\frac{(2n+\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \mid x_3 \mid +x')!}{((i+(\mid x_1 \mid +(x_1\%2))/2)!\cdot(j+\mid x_2 \mid +(x_2\%2))/2)!\cdot((n-i-j)+(\mid x_3 \mid +(x_3\%2))/2)!)^2}\cdot(\frac{1}{6})^{2n+|x_1|+|x_2|+|x_3|+x'}) \leqslant$$

$$\leqslant 6^3\cdot \sum_{i,j>=0}^{i+j<=n'} (\frac{(2n')!}{(i!\cdot j!\cdot(n'-i-j)!)^2}\cdot(\frac{1}{6})^{2n'}) = 6^3\cdot P(Y_{2n'}=\{0\}^3)$$

Где $n' = n + (\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \mid x_3 \mid +(x_1\%2)+(x_2\%2)+(x_3\%2))/2$.

Тогда $2n' - 2n - (\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \mid x_3 \mid) = 0$, 1, 2 или 3.

Из этого следует, что $P(Y_n = \overrightarrow{x}) \leq \frac{c}{n\sqrt{n}}$, где с некоторая константа.

Теперь перейдем ко второму пункту доказательства.

Смесь блужданий X, Y, с вероятностями p,q (p+q=1; p,q>0), где X - эквивалентен простому случайному блужданию, обозначим через Z. Тогда

$$P(Z_n = \overrightarrow{z}) = \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i.$$

Мы хотим доказать, что $P(Z_n = \overrightarrow{z}) < \frac{b}{n\sqrt{n}}$ для некоторого b. Обозначим за $\varepsilon = min(p,q)^2$ и докажем, что такие константы b есть для

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i$$

и

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i\geqslant \varepsilon n}^{i\leqslant n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i.$$

Начнем с

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i\geqslant \varepsilon n}^{i\leqslant n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i\geqslant\varepsilon n,\overrightarrow{x}}(P(X_i = \overrightarrow{x}))\cdot \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i\geqslant \varepsilon n}^{i\leqslant n} P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i =$$

$$= \max_{i\geqslant\varepsilon n,\overrightarrow{x}}(P(X_i = \overrightarrow{x}))\cdot \sum_{i\geqslant \varepsilon n}^{i\leqslant n} \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i =$$

$$= \max_{i\geqslant\varepsilon n,\overrightarrow{x}}(P(X_i = \overrightarrow{x}))\cdot \sum_{i\geqslant \varepsilon n}^{i\leqslant n} p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \cdot \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \leqslant$$

$$\leqslant \underset{i \geqslant \varepsilon n, \overrightarrow{x}}{max}(P(X_i = \overrightarrow{x}))\cdot \sum_{i \geqslant \varepsilon n}^{i \leqslant n} p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \leqslant$$

$$\leqslant \underset{i \geqslant \varepsilon n, \overrightarrow{x}}{max}(P(X_i = \overrightarrow{x})) \cdot (p+q)^n = \underset{i \geqslant \varepsilon n, \overrightarrow{x}}{max}(P(X_i = \overrightarrow{x})) \leq \frac{c}{\varepsilon n \sqrt{\varepsilon n}} = \frac{c'}{n\sqrt{n}}.$$

Теперь разберем вторую часть

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i < \varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i.$$

Так как $\varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$, $p' = min(p, q)$, $q' = 1 - p'$, то

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i < \varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p'^i \cdot q'^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i < \varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i.$$

Обозначим через $f(i) = p'^i \cdot q'^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i$. Покажем, что f(i) возрастает на $(0, \varepsilon n)$.

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{n-i}{i+1} \geq \frac{p'}{q'} \cdot \frac{n - \varepsilon n}{\varepsilon n + 1} \to \frac{p' \cdot (1 - p'^2)}{(1-p') \cdot p'^2} = 1 + \frac{1}{p'}$$

Значит с какого-то n можно сказать, что f(i) возрастает на $(0, \varepsilon n)$. Тогда

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i < \varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p'^i \cdot q'^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \leqslant$$

$$\leqslant f(\lfloor \varepsilon n \rfloor)\cdot \sum_{i=0}^{i < \varepsilon n} \sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \leqslant$$

$$\leq f(\lfloor \varepsilon n \rfloor)\cdot\varepsilon \mathrm{n},$$

так как $\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \leqslant \sum_{\overrightarrow{x}} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot \sum_{\overrightarrow{y}} P(Y_i = \overrightarrow{y}) = 1.$

$$f(\lfloor \varepsilon n \rfloor)\cdot\varepsilon \mathrm{n} = p'^2 \cdot n \cdot C_n^{n \cdot p'^2} \cdot'^{np'^2} \cdot (1-p')^{n(1-p'^2)}$$

Хотим показать, что $f(\lfloor \varepsilon n \rfloor) \cdot \varepsilon n \leqslant Polynom_1(n) \cdot d^n$, где $d < 1$, а $Polynom_1(n)$ какой-то полином. Тогда начиная с какого-то n

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i <$$

$$< \frac{c'}{n\sqrt{n}} \cdot C_n^{n \cdot p'^2} \leqslant Polynom_2(n) \cdot (\frac{1}{\varepsilon^\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}})^n$$

Это следствие из формулы Стирлинга. Возьмем за $Polynom_1(n) = Polynom_2(n) \cdot p'^2 \cdot n$ и за $d = (p'^{2p'^2} \cdot (1-p'^2)^{(1-p'^2)})^{-1} \cdot p'^{p'^2} \cdot (1-p'^2)^{(1-p'^2)}$, ,.

Тогда

$$d < 1 \Longleftrightarrow (p'^{2p'^2} \cdot (1-p'^2)^{(1-p'^2)})^{-1} \cdot p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{(1-p'^2)} < 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{(1-p'^2)} < (\mathrm{p}'^{2p'^2} \cdot (1\text{-}\mathrm{p}'^2)^{(1-p'^2)}) \Longleftrightarrow p'^{-p'^2} < (1+\mathrm{p}')^{(1-p'^2)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1+\frac{1}{p'})^{(p'^2)} < (1+p') \Longleftrightarrow ln(1+p') > p'^2 \cdot ln(1+\frac{1}{p'}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ln(1+p')}{p'} > p' \cdot ln(1+\frac{1}{p'}).$$

Заметим, что последнее это $g(1+p') > g(1+\frac{1}{p'})$, где $g(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$. Нам достаточно показать, что $g(x)$ убывающая функция при x>0.

$$g'(x) < 0 \Longleftrightarrow \frac{\frac{x}{1+x} - ln(x+1)}{x^2} < 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{1+x} - ln(x+1) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 < ln(x+1) - 1 + \frac{1}{1+x} = h(x).$$

$h(0) = 0$ и $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, что больше нуля при $x > 0$, значит $h(x) > 0$ при $x > 0$.

Тогда начиная с какого-то n(обозначим его через m)

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i < \frac{c'}{n\sqrt{n}},$$

из этого следует

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \leq \frac{max(c', m\sqrt{m})}{n\sqrt{n}},$$

так как

$$\sum_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}} \sum_{i=0}^{i\,<\,\varepsilon n} P(X_i = \overrightarrow{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \overrightarrow{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot \mathrm{C}_n^i \leq 1.$$

Значит $P(Z_n = \overrightarrow{z}) < \frac{b}{n\sqrt{n}}$, где $b = max(c', m\sqrt{m})$. Из этого следует, что $\sum\limits_n P(Z_n = \overrightarrow{z})$ сходится, тогда это блуждание невозвратно.

Осталось доказать само утверждение про невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^{\mathrm{k}}$.

Заметим, что, если блуждание Y_i построенное на шагах X_i возвратное, то блуждание $Y_i^{(0)}$которое строится на нем с шагами равным n обычным ходам $X_i' = \sum\limits_{j=n\cdot(i-1)+1}^{n\cdot i} X_i$, то есть $Y_i^{(0)} = Y_{ni}$, тоже возвратное. Если бы это было не так, то $\mathrm{P}(Y_i^{(0)} = \{0\}^k$ бесконечное число раз$)=0$ (замечание 4), кроме того рассмотрим блуждания $Y_i^{(l)} = Y_{ni+l}$, при l<n. Какое-то из них посещает $\{0\}^k$ бесконечное число раз, но тогда рассмотрим его после первого посещения $\{0\}^k$. Оно будет эквивалентно $Y_i^{(0)}$, но $\mathrm{P}(Y_i^{(0)} = \{0\}^k$ бесконечное число раз$)=0$. Противоречие.

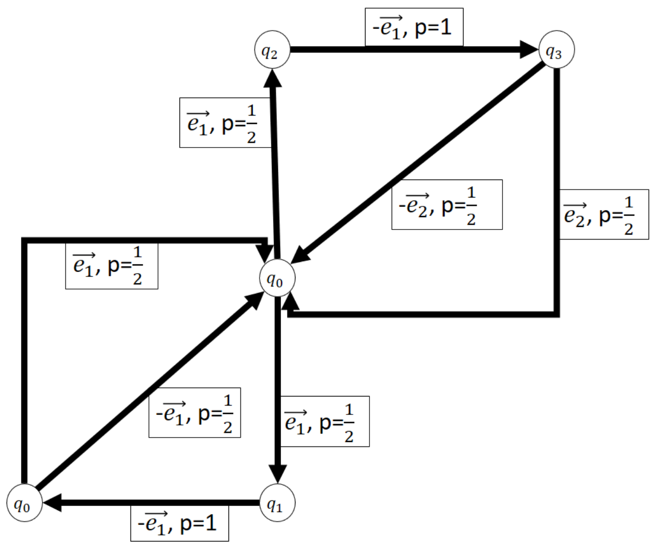
Пусть случайного блуждания Y_i с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^{\mathrm{k}}$ возвратно(обозначим эти вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$). Тогда $\exists n > 1 : P(Y_{n-1} = -\overrightarrow{a}) > 0$, кроме того $P(Y_{n-1} = (n-1) \cdot \overrightarrow{a}) > 0$(n-1 шаг по вектору $\overrightarrow{a}$) и $P(Y_n = \{0\}^k) > 0$ (n-1 шаг, чтобы получить вектор $-\overrightarrow{a}$ и один шаг по вектору $\overrightarrow{a}$). Покажем, что тогда $\exists m, l : P(Y_m = -\overrightarrow{l \cdot a}) > 0$, $P(Y_m = \overrightarrow{l \cdot a}) > 0$. Если n=2, то это уже выполнятся для m=1, l=1. Иначе возьмем $m = n \cdot (n-1)^2, l = (n-1) \cdot n$, тогда $-l \cdot \overrightarrow{a}$ можно получить сделав шаги дающие $-\overrightarrow{a}$ за n-1 ход $(n-1) \cdot n$ раз, а $l \cdot \overrightarrow{a}$ получим сделав $(n-1) \cdot n$ раз ход по вектору $\overrightarrow{a}$ и $(n-1) \cdot (n-2)$ раз по n шагов соответствующих возвращению в $\{0\}^k$. Тогда есть возвратное блуждание Y_i' с тремя некомпланарными векторами $l\overrightarrow{a}, m\overrightarrow{b}, m\overrightarrow{c}$ и шагом $-l\overrightarrow{a}$. Проделав аналогичную операцию с векторами $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ получим Y_i''' с шагами $k_1\overrightarrow{a}, k_2\overrightarrow{b}, k_3\overrightarrow{c}, -k_1\overrightarrow{a}, -k_2\overrightarrow{b}, -k_3\overrightarrow{c}$. Но тогда Y_i''' смесь блуждания эквивалентного простому в $\mathbb{Z}^3$с коэффициентом минимальной вероятности одного из этих 6 шагов(а она положительная) умноженным на 6 и еще некоторого блуждания. Значит оно невозвратно. Противоречие.

4 Робот с генератором случайных чисел

Разберем для начала случай, когда есть только робот и покажем, что он может обойти $\mathbb{Z}^2$ и не может $\mathbb{Z}^3$. В этом случае $M = \emptyset$, n=0. Множество D в пространстве $\mathbb{Z}^k$ имеет вид $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{-e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{-e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k}, -\overrightarrow{e_k})$. Робот считается обходящим пространство, если для любой ее клетки с вероятностью один по

4.1 Обход роботом $\mathbb{Z}^2$.

Написать программу для такого робота довольно легко. Он просто должен эмулировать случайное блуждание. А так как оно обходит плоскость, то и робот ее обойдет. Ниже можно посмотреть простой автомат, реализующий это.



4.2 Невозможность обойти $\mathbb{Z}^3$

Докажем это для любого робота. Рассмотрим граф недетерминированного конечного автомата соответствующий ему. Обозначим его размер через m. Будем считать, что вероятность каждого ребра больше нуля и все вершины достижимы из начальной. Иначе их можно просто выкинуть и это никак не повлияет на поведение робота. Возьмем компоненты сильной связности графа. Листовой компонентой сильной связности обозначим компоненту сильной связности из которой нет ребер вне ее (такая обязательно есть). Расстояние между клетками будет считать по метрике расстояния городских кварталов. Клетками будем называть элементы лабиринта, вершинами состояния робота. Плоскостями будем нвзывать множество клеток вида $\overrightarrow{a} + x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{c}$, при фиксированном $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

Покажем, что его листовые компоненты сильной связанности тоже должны обходить все пространство. Обозначим какую-то из его вершин за новое начальное состояние q_0', а новый автомат построенный на этой листовой компоненте за $R'(q_0')$, размер компоненты обозначим через m'. Тогда новый робот должен обходить все пространство, кроме не более чем m клеток. Это связано с тем, что от q_0 до q_0' есть путь не более, чем за m шагов(обозначим за $\overrightarrow{x_1}(q_0')$ клетку в пространстве в которой мы оказались дойдя до q_0'). Тогда продолжение этого пути с вероятностью 1 должно побывать во всех клетках пространства, кроме тех, в которой он уже был, а их не более m. Так как они последовательны, то эти клетки помещаются в сферу с центром в 0^k(где k размерность пространств в котором мы работаем) и радиусом m и в сферу с центром $\overrightarrow{x_1}(q_0')$ и радиусом m. Это верно при выборе любого q_0' из нашей листовой компоненты. С вероятностью один мы когда-нибудь попадем в клетку $2m+1^k$. Обозначим состояние в котором мы оказались в этой клетке за q_1(это состояние принадлежит нашей листовой компоненте). С этого момента робот ведет себя как робот $R'(q_1)$ находящийся в клетке $2m+1^k$ в изначальном состояние, а он обходит все пространство, кроме сферы с центром в $2m+1^k$ и радиусом m. Значит $R'(q_0')$ обходит с одной стороны все клетки кроме сферы с центром в 0^k и радиусом m, с другой стороны все клетки кроме сферы с центром в 0^k и радиусом m. Эти сферы не пересекаются, поэтому $R'(q_0')$ обходит все пространство. Кроме того перемещения этого робота являются возвратными.

Теперь разберемся, почему недетерминированный автомат для ориентированный граф которого является компонентой сильной связности не может обходить пространство (начальная вершина - q_0, размер графа m). Обозначим за $p_{i,j}$ вероятность попасть в состояние q_j из состояния q_i за количество шагов не превосходящих m (при i=j считаем, что нужен хотя бы один шаг). Так как это компонента сильной связности, то из любой вершины мы можем дойти по ребрам до любой другой не более чем за m шагов. Значит $p_{i,j} > 0$. Обозначим за $p = \underset{i,j}{min} p_{i,j}$>0. Тогда вероятность не попасть в течение $l \cdot m$ шагов в j-ую вершину меньше $(1-p)^l$. А оно стремится к нулю при $l \to \infty$. Значит с вероятностью 1 мы побываем в состояние q_j бесконечное число раз.

Из-за того что перемещения робота возвратны, он побывает в клетке 0^k бесконечное число раз. Рассмотрим вероятности попасть в клетку в состояние q_j, если прошлый раз мы были в ней в состояние q_i. Обозначим эту вероятность через $p_{i,j}$ ($p_{i,j}$ не зависит от клетки из которой мы начинаем). $\forall i \sum\limits_j p_{i,j} = 1$. Рассмотрим эти переходы по состояниям, как некоторый другой ориентированный граф по которому мы гуляем бесконечно долго. В нем можно выбрать несколько состояний $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_j}$таких, что мы гарантировано побываем хотя бы в одном из них, они все достижимы из q_0 и $q_{i_{j_1}}$ не достижимо из $q_{i_{j_2}}$(будем брать по одной вершине из листовых компонент сильной связности нового ориентированного графа). Мы побываем в одном из этих состояний бесконечное число раз. Обозначим его через q'. Заметим, что тогда для любой клетки, где робот был в состояние q', он был там бесконечное число раз.

Теперь рассмотрим случайное блуждание в пространстве с векторами переходов и их вероятностями такими, что пара (вектор, вероятность) соответствуют паре (вектор, вероятность) перемещения робота между двумя состояниями q'. Как показано выше, это случайное блуждание возвратно, значит оно не может содержать трех некомпланарных векторов. Тогда после первого попадания в q' множество клеток, где мы можем быть в состояние q' является элементом какой-то плоскости. Но мы гарантировано побываем в любой клетке, а в сфере с центром в этой клетке и радиусом m есть вероятность побывать в состояние q'. Тогда если мы возьмем клетку на расстояние больше m+1 от плоскости, то будет клетка вне плоскости с ненулевой вероятностью состояния q'. Противоречие.■

5 Робот с генератором случайных чисел и камнем

Теперь рассмотрим случай робота с камнем. Изначальное положение робота и камня в клетке с нулевыми координатами.

5.1 Обход $\mathbb{Z}^4$.

Довольно легко описать программу в соответствие с которой будет перемещаться робот. Он отходит от камня случайно блуждает вдоль координат x_1, x_2, пока не вернется к камню, а потом делает шаг в случайном направление вдоль x_3, x_4 вместе с камнем. Повторяет. Так как случайное блуждание на плоскости возвратно, робот все время возвращается к камню. Тогда ходя вместе с камнем робот обходит всю плоскость x_3, x_4, так как перемещения с камнем в случайном направление тоже является случайным блужданием. Оно возвратно, поэтому робот побывает с камнем во всех клетках плоскости x_3, x_4 бесконечное число раз. Тогда для любой из этих клеток мы бесконечное число раз блуждали от камня вдоль x_1, x_2. Рассмотрев только эти ходы получим простое случйное блуждания из клетки плоскости x_3, x_4 вдоль x_1, x_2, а таким образом можно получить все клетки пространства

5.2 Невозможность обойти $\mathbb{Z}^5$

Разберем, как ходит робот. Разделим его перемещения на два типа. Перемещение с камнеми перемещения без камня. Разберем перемещение без камня. Заметим, что если робот уходит от камня, то он должен к нему вернуться с вероятностью один, так как иначе он не сможет обойти даже $\mathbb{Z}^3$. Покажем, что если робот возвращается к камню с вероятностью один, то множество клеток, которые он может посетить является конечным объединением плоскостей. Пусть мы отходим от камня в состояние q_1. Тогда возьмем недетерминированный конечный автомат R' с состояниями аналогичными R и начальным состоянием q_1', переходами в состояниях аналогичных R совпадают с переходами в R соответствующие отсутствию камней в клетке, переход из q_1' соответствуют переходам из q_1 при условие наличия камня в клетке. Обозначим количество состояний в R' через m. Он точно эмулирует перемещения с момента отхода робота в q_1 от камня до возвращения к нему.

Рассмотрим его ориентированный граф компонент сильной связности. Если какой-нибудь лист не достижим при блуждание в пространстве до первого возвращения в изначальную клетку, то мы можем его выкинуть из графа, так как мы все равно в него не попадаем. Выкинув таким образом все недостижимые компоненты, возьмем какой-нибудь из имеющихся листов и состояние q из этой компоненты, в котором мы можем вернуться в изначальную клетку. Тогда множество клеток, в которых мы можем быть в состояние q, если потом можем закончить в состояние q, будет подмножеством объединения конечного числа плоскостей с одинаковыми образующими векторами. Если бы это было не так, то случайное блуждание построенное на переходах в пространстве робота между двумя состояниями q (между этими состояниями могут быть только состояния отличные от q) имело бы три некомпланарных вектора. Кроме того была бы сколь угодно удаленная клетка, где мы можем быть в состояние q. Так как это случайное блуждание содержит три некомпланарных вектора, то $\forall \varepsilon > 0$ можно найти расстояние, начиная с которого вероятность попасть из одной клетки в другую при расстояние больше данного меньше ε. Из-за этого $\forall \varepsilon > 0$ можно найти расстояние, начиная с которого вероятность попасть из одной клетки в состояние q в другую в состояние q' при расстояние больше данного меньше ε. Это связано с тем, что есть переход из q' в q за менее чем m ходов с положительной вероятностью p, и иначе(возьмем ε для которого это не верно) существовало бы для сколь угодно большого расстояния пара клеток с ним таких, что вероятность перейти между ними из состояния q в q(между этими состояниями могут быть любые состояния) с вероятностью перехода $\geqslant \varepsilon \cdot p$. Взяв клетку с состоянием q достаточно далекую, чтобы для любого состояния листовой компоненты вероятность дойти из нее в изначальную клетку (а в другое состояние мы и не можем попасть) была меньше $\frac{1}{2m}$. Тогда вероятность дойти из далекой клетки в состояние q в изначальную не превосходит $\frac{1}{2}$. Но наши переходы должны возвращаться с вероятностью один. Противоречие. Важно отметить, что множество клеток, в которых мы можем быть в состояние из нашей листовой компоненты, если потом можем закончить в состояние q, также будет подмножеством объединения конечного числа плоскостей с одинаковыми образующими векторами. Кроме того существенен факт, что для разных состояний из одной листовой компоненты связности вектора, образующие плоскость, можно считать одинаковыми.

Заметим, что тогда множество клеток, где могут быть состояния из которых можно дойти до состояния q в исходной клетке, так же является объединением нескольких плоскостей с одинаковыми образующими векторами. Это связано с тем, что из любого из этих состояний можно не более чем за m шагов дойти до состояния q, тогда либо мы в течение эти m шагов попали в изначальную клетку, либо попали в одну из клеток в состояние q. Но из этой клетки мы гарантировано попадаем в изначальную, а состояние робота в котором это произойдет соответствует какому-то состоянию из нашей листовой компоненты. Значит наша клетка на расстояние не более чем m от некоторого объединения конечного числа плоскостей с одинаковыми образующими векторами. Это рассуждение можно провести для всех листовых компонент сильной связности, тогда множество клеток, где робот может побывать является элементом некоторого множества объединения конечного числа плоскостей. Проведя это рассуждения для всех R' получим уже другое, но все еще конечное объединение плоскостей внутри которых ходит робот, что мы и хотели доказать для данного типа перемещений. Обозначим это конечное объединение плоскостей за $A(\overrightarrow{x})$, где $\overrightarrow{x}$-изначальная клетка. Для удобства будем считать, что $A(\overrightarrow{x})$ это конечное объединение толстых плоскостей ширины $2l+1$ из клетки $\overrightarrow{x}$, где толстая плоскость ширины $2l+1$ из клетки $\overrightarrow{x}$ это объединение плоскостей с одинаковыми образующими векторами на расстояние не более l от $\overrightarrow{x}$.

Осталось разобраться, как устроены перемещения с камнем. Построим автомат соответствующий тасканию камня изначального робота. Для этого состояние в котором мы уходим из клетки оставив камень будем рассматривать, как переход из этого состояния в состояния, в которых мы могли вернуться к камню, с вероятностями, с которыми это могло произойти. Чтобы мы не оставляли камень, добавим по одному состоянию на каждый такой переход, чтобы сделать шаг вверх с камнем, шаг вниз с камнем. Так как этот автомат все время таскает камень, то он ведет себя, как просто робот без камня. Обозначим множество клеток, где побывает этот робот за B, тогда для обхода $\mathbb{Z}^5$ должно быть верно, что $A(B) = \mathbb{Z}^5$. Рассмотрим какую-нибудь из его листовых компонент связности. Мы можем в нее попасть за какое-то конечное число ходов робота, то есть $\exists C \exists n :\mid C \mid < n\ A(B'+C) = \mathbb{Z}^5$, где B'- множество клеток, где побывает листовой робот. Рассмотрим вероятности побывать в клетках $\mathbb{Z}^5$ в состояние q и соответствующее ему случайное блуждание. Если листовая компонента порождает случайное блуждание эквивалентное блужданию на плоскости, то $A(B' + C)$ было бы в лучшем случае объединением конечного чила $\mathbb{Z}^4$. Представим $A = \bigcup L_i$, где L_iзадает какую-то из плоскостей.

Утверждение 2.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ множество клеток x_i для которых P(листовой робот попал в $L_i(\overrightarrow{x_j})$ в состояние q)$>\varepsilon$ имеет вид конечного объединения подпространств размерности четыре(за подпространство размерности четыре берем множество клето предстаимых в виде $\overrightarrow{a_0} + x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{a_3} + x_4 \cdot \overrightarrow{a_4}$, где $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ линейно независимые вектора). Введем на $\mathbb{Z}^5$ отношение эквивалентсти $\overrightarrow{x_1} \sim \overrightarrow{x_2}$, если $L(\overrightarrow{x_1}) = L(\overrightarrow{x_2})$. Можно спроектировать $\mathbb{Z}^5$ в некоторый $X = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ вдоль L, а X можно спроектировать в $X' = \mathbb{Z}^3$ по последним двум координатам. Посмотрим как ведет себя наше случайное блуждание на X'. Если оно посещает только клетки какой-то плоскости, то утверждение доказано. Если это не так, то оно содержит три некомпланарных вектора. Но для таких блужданий верно, что $\forall \varepsilon > 0$ можно найти расстояние, начиная с которого вероятность попасть из одной клетки в другую при расстояние больше данного меньше ε. Таким образом множество клеток в X'с вероятность попасть в них больше ε либо конечно, либо является подмножеством плоскости. Можно сказать, что это множество являестся подмножеством объединения конечного числа плоскостей. Для клеток из $\mathbb{Z}^5$ вероятность в них попасть не может быть больше, чем для клетки соответствующей ей в X'. Значит утверждение доказано. ■

Возьмем такие подпространства для достаточно малого ε для всех пар (L_i, q) (q приадлежит листовому роботу, мощность этого множества обозначим за v). Тогда множество клеток $\overrightarrow{x_j}$, для которых листовой робот попал хотя бы в одну из $L_i(\overrightarrow{x_j})$ в состояние q с вероятностью больше ε. Является подмножеством объединения конечного подпространства размерности четыре(обозначим это множество, через A'). Тогда взяв $\varepsilon < \frac{1}{v}$, получим, что для клеток $\mathbb{Z}^5 \diagdown (A' \bigcup A(C))$ вероятность пость в них не превосходит $v \cdot \varepsilon$, что меньше 1. Это множество не пусто, значит робот может не попасть в какую-то из клеток.

6 Робот с генератором случайных чисел, камнем и флажком

Перейдем к случаю робота с камнем и флажком. Изначальное положение робота и камня в клетке с нулевыми координатами, там же находится едиственный элемент из M.

6.1 Обход $\mathbb{Z}^6$

Для начала опишем, как имея флажок и камень, побывать камнем на $\mathbb{Z}^4$. Робот ходит от камня без него по случайным векторам из множества $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{-e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{-e_2})$. Если он возвращается к камню не попав в процессе на клетку с флажком, то он перемещается с камнем по случайному вектору из $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{-e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{-e_4})$, иначе он перемещается с камнем по случайному вектору из $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{-e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{-e_2})$, а потом вместе с камнем переходит по случайному вектору из $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{-e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{-e_4})$. Из-за того

Добавив случайное блуждание от камня и обратно по векторам из множества $(\overrightarrow{e_5}, \overrightarrow{-e_5}, \overrightarrow{e_6}, \overrightarrow{-e_6})$ после каждого перемещения камня получим обход $\mathbb{Z}^6$.

6.2 Невозможность обойти $\mathbb{Z}^7$

Рассмотрим блуждания робота. Они могут иметь следующие виды:

1. Перемещение с камнем
2. Перемещение от камня и обратно
3. Перемещение от флага до камня или от камня до флага.

Заметим, что чтобы обходить $\mathbb{Z}^7$ мы всегда должны с вероятностью один возвращаться к флагу, иначе мы и $\mathbb{Z}^5$ можем не обойти, и с вероятностью один возвращаться к камню, так как флаг это камень, который мы не можем таскать, а робот с камнем не может обойти даже $\mathbb{Z}^5$. Посмотрим на множество клеток, где может располагаться камень, чтобы от него можно было дойти до флага. Оно совпадает с множеством клеток камня до которых можно дойти от флага, а это множество является объединением конечного числа плоскостей(Обозначем его через $L = \bigcup_{i=1}^{v} L_i$, где L_i-некоторая плоскость). Тогда рассмотрим множество клеток, где мог побывать робот перемещаясь с камнем(понятно, что первый и последний раз он находиться в клетке приадлежащей L). Рассмотрим робота соответствующего перемещениям с камнем, между посещениями флага. Таких роботов несколько(в зависимости от состояния в котором мы оказались дойдя от флага,). Пусть мощность множества этих плоскостей v, тогда для любой клетки, где робота с камнем могут находиться, вероятность робота с камнем когда-нибудь оказаться в какой-то из плоскостей L_i не меньше $\frac{1}{v}$ (иначе вероятность вернуться в L из нее меньше 1). Рассмотрев проекцию вдоль плоскости L_i переходов робота с камнем, мы получим робота с камнем, который может попасть в клетку, до которой схлопнулась плоскость L_i с не меньшей вероятностью. Но для этого робота множество клеток, которые он может посетить с вероятностью хотя бы ε является подмножеством объединения конечного числа плоскостей, тогда множество клеток из которых мы можем попасть в плоскость L_i с вероятность хотя бы ε роботом до проекции является подмножеством объединения конечного числа подпространств размерности четыре. Тогда множество клеток из которых робот может попасть в какое-то L_i с вероятностью хотя бы $\frac{1}{v}$. Является подмножеством объединения конечного числа подпространств размерности четыре. Только на этих клетках может быть камень, если мы хотим гарантировано вернуться в L. Клетки в которые робот можем попасть ходя от камня до камня имеют вид подмножеством объединения конечного числа плоскостей. Значит множество достижимых клеток для робота имеет вид объединения конечного числа подпространств размерности шесть. Тогда $\mathbb{Z}^7$ обойти нельзя.

7 Робот с генератором случайных чисел, камнем и плоскостью флажков

Осталось рассмотреть случай робота с камнем и плоскостью флажков. Изначальное положение робота и камня в клетке с нулевыми координатами, из нее же выходит плоскость флажков с координатами(0,0,0,0,0,0,a,b).

7.1 Обход $\mathbb{Z}^8$

Чтобы построить обход $\mathbb{Z}^8$ просто слегка модернизируем программу робота, обходящего $\mathbb{Z}^6$ с камнем и флажком. Оказавшись на флаге робот должен сделать случайный, равновероятный ход по одному из векторов ($\overrightarrow{e_7}$, $\overrightarrow{-e_7}$, $\overrightarrow{e_8}$, $\overrightarrow{-e_8}$, $\overrightarrow{0}$). Переход на $\overrightarrow{0}$ делаем ходом по вектору $\overrightarrow{e_7}$, а потом обратно. Из-за того, что это блуждание побывает во всех клетках плоскости бесконечное число раз, а изначальный робот был во всех клетках $\mathbb{Z}^6$(и находился на клетке с флагом и камнем бесконечное число раз), то теперь робот побывает в каждой клетке пространстве $\mathbb{Z}^8$.

7.2 Невозможность обойти $\mathbb{Z}^9$

Рассмотрим блуждания робота. Они могут иметь следующие виды:

1. Перемещение с камнем
2. Перемещение от камня и обратно
3. Перемещение от флага до камня или от камня до флага.
4. Перемещение вдоль плоскости флагов

Если робот обходит $\mathbb{Z}^9$, то сделав проекцию перемещений робота вдоль плоскости флагов, получим робота, обходящего $\mathbb{Z}^7$. Это можно сделать, так как тогда плоскость флагов просто схлопнется в один флаг(так что свойство наличия флага при перемещение по ней не нарушится), а аналогичных перемещений робота по ней можно добиться поменяв вероятности перехода между состояниями на соответствующие. Единственное изменение, что мы в $\mathbb{Z}^9$ не всегда "знаем", находиться ли камень в той же плоскости сонаправленой плоскости флагов, но это не совсем так, так как из-за того, что мы всегда возвращаемся к камню, то по состоянию робота мы можем определить либо плоскость, либо прямую, либо конечное множество клеток относительно камня, где он может находится в этом состояние. Проверку конечного множества клеток мы можем "вшить" в робота. А так как мы работаем в спроектированном пространстве, то в случае плоскости и прямой(будем считать, что их расстояние до клетки с камнем не превосходит m), то их пересечение с проекционной плоскостью не более клетки. То есть в этом случае можно просто проверить наличие камня на расстояние не больше m вдоль проекционной плоскости.

8 Заключение

По результатам работы нами выяснено, какие пространства может обойти робот с генератором случайных бит, робот с генератором случайных бит и камнем, робота с генератором случайных бит, камнем и флажком, робота с генератором случайных бит, камнем и плоскостью флажков. Кроме того разобраны некоторые общие аспекты блуждания робота с генератором случайных бит и камнем. Для дальнейшего изучения представляет интерес поведение робота с генератором случайных бит на лабиринтах другого типа и на лабиринтах со случайными письменами(случайная раскраска).

9 Литература

[1]: А.В. Анджанс . Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах: Дис. канд. физ.-мат. наук. Рига, 1987. - 90 с.

[2]: А.Н. Ширяев. Вероятность-2 М.: Изд-во МЦНМО 2004.

[3]: В. Б. Кудрявцев, Ш. М. Ушчумлич, Г. Килибарда, “О поведении автоматов в лабиринтах”, Дискрет. матем., 4:3 (1992)