МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ШИШЛЯННИКОВ Евгений Михайлович

СВОЙСТВА ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич

Москва — 2019

Оглавление

Введение

Настоящая диссертация представляет собой исследование в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Актуальность темы исследования

Важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой при изучении нелинейных систем по их первому приближению. При изучении линейных систем возникают теоретические вопросы связанные с асимптотическими свойствами их решений: устойчивостью и колеблемостью.

Показатели Ляпунова. В 1892 году А.М. Ляпуновым была защищена докторская диссертация на тему «Общая задача об устойчивости движения». Этот момент можно считать начальным в истории развития теории устойчивости. За более чем вековой период было предложено и успешно использовано множество показателей, отвечающих за разные асимптотические свойства решений уравнений или систем. Их изучением занимались многие математики, в том числе: Р.Э. Виноград [27, 28], Б.Ф. Былов [23, 24], В.М. Миллионщиков [60, 61, 62], Н.А. Изобов [41, 42, 43], М.И. Рахимбердиев [69, 70], И.Н. Сергеев [86, 88], Е.К. Макаров [56, 57], С.Н. Попова [67, 68], Е.А. Барабанов [9, 10], О.И. Морозов [65, 66], А.С. Фурсов [101, 102], А.Н. Ветохин [25, 26], В.В. Быков [18, 19], Ю.И. Дементьев [32, 33] и другие. Здесь указаны не все работы авторов. Подробную библиографию можно найти в обзорах [39, 40] и монографиях [22, 38].

Характеристические показатели Ляпунова [55], а также введенные позже нижние характеристические показатели Перрона [3], степенные показатели Демидовича [34], экспоненциальные и σ-показатели Изобова [37, 43], центральные показатели Винограда–Миллионщикова [28, 62], генеральные (особые) показатели Боля–Персидского [38, 1], вспомогательные показатели Миллионщикова [58, 59] служат для исследования различных асимптотических свойств решений и их совокупностей и используются при исследовании различных типов устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных систем.

Теория колебаний. В теории колебаний важное место занимают вопросы, связанные с колеблемостью решений, восходящие к фундаментальным работам Ж. Штурма [4] и А. Кнезера [2]. Исследованиями в этом направлении занимались В.А. Кондратьев [47, 48], И.Т. Кигурадзе [44, 45, 46], Т.А. Чантурия [103, 104], А.Н. Левин [51, 52], Н.А. Изобов [35, 36], И.В. Асташова [6, 7, 8], С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов [29, 30] и другие (более подробные библиографии см. в обзоре [52] и монографии [5]). В данных работах в первую очередь исследуются вопросы существования и свойства колеблющихся решений дифференциальных уравнений (т.е. решений, имеющих бесконечное число нулей на полупрямой или на промежутке), а также возможность описать все множество таких решений. В этих работах немало усилий направлено на получение коэффициентных (т.е. опирающихся только на свойства коэффициентов уравнения) признаков существования или отсутствия колеблющихся решений, а также изучаются свойства промежутков неосциляции (т.е. отрезков, на которых решение имеет меньше нулей, чем порядок уравнения). В то же время почти не исследуются характеристики, позволяющие сравнивать колеблющиеся решения между собой.

Частоты решений уравнения. Первая попытка определить показатель, который бы являлся аналогом показателей Ляпунова и позволял бы судить о колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем, была предпринята И.Н. Сергеевым в 2004 г. в его докладе [82]: было дано определение *характеристической частоты* скалярной функции, геометрический смысл которой — среднее на всей полуоси количество нулей этой функции на отрезках длины π. Так, характеристическая частота позволяет измерять колеблемость решения, ставя в соответствие, например, функции $\sin \omega x$ ее частоту ω (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = e^{\lambda t}$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$). Впоследствии эти новые показатели решений были названы *частотами Сергеева* (например, [11]).

Регуляризовав характеристические частоты по Миллионщикову [60], И.Н. Сергеев выделил главные характеристические частоты дифференциального уравнения n-го порядка, спектр которых для автономного уравнения аналогичен спектру показателей Ляпунова и состоит из множества модулей мнимых частей корней соответствующего характеристического уравнения. Подробное исследование свойств этих частот содержится в работах [73]–[84].

Показатели колеблемости и блуждаемости. В докладе [90] были введены *полная частота* и *векторная частота* (или *показатели колеблемости*) для решений дифференциальных систем. Их подсчет происходит путем усреднения числа нулей проекции решения на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение нулей было минимальным: если указанная минимизация производится перед усреденением, то получается векторная частота, а если после — то полная частота. По своему геометрическому смыслу полная и векторная частоты отвечают за частоту вращения решения вокруг нуля. Таким образом, полная и векторная частоты являются обобщениями понятия характеристической частоты на случай решений систем. Эти характеристики можно вычислять и для решения линейного уравнения порядка n [91], полагая их равными полной и векторной частоте вектор-функции x, определенной равенствами $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

В работах [88, 92] были определены *скорость блуждания* и *показатели блуждания* и *блуждаемости*. Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А показатели блуждаемости и блуждания — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае показателя блуждания минимизация производится в каждый момент времени. Таким образом, показатели блуждания и блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора x вокруг нуля, но не учитывают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора.

Изучением характеристических частот и показателей колеблемости и блуждаемости занимались также В.В. Быков [20, 21], Е.А. Барабанов и А.С. Войделевич [11, 12, 13], А.Х. Сташ [99], Д.С. Бурлаков [15], С.В. Цой [17], М.Д. Лысак [53, 54], В.В. Миценко [63, 64] и М.В. Смоленцев [96]. В их работах исследовались *спектры* указанных характеристик (спектр — это множество всех значений показателя на различных решениях данного уравнения или системы) для различных типов уравнений и систем, связь между значениями показателей и коэффициентами уравнений и систем, а также связь этих характеристик друг с другом.

Связь между показателями колеблемости и блуждаемости. В работе [94] было установлено, что показатели блуждания ограничивают сверху векторные частоты. Затем в 2012 г. И.Н. Сергеевым и Д.С. Бурлаковым независимо друг от друга была обнаружена еще более тесная связь между этими показателями. Точнее, выяснилось, что при незначительном изменении определения векторной частоты, она начинает совпадать с показателем блуждания. Причем были предложены разные способы изменять определения векторной частоты: И.Н. Сергеев ввел дополнительно понятие гиперчастоты, а Д.С. Бурлаков заменил в прежнем определении точную нижнюю грань на существенную. Эти результаты были опубликованы в их совместном докладе [16].

В работе [71] было доказано интегральное равенство, связывающее частоту гиперкратных корней вектор-функции на отрезке с длинной пути ее следа на единичной сфере.

Спектры показателей Ляпунова и Перрона. В исследовании каждого из показателей ляпуновского типа возникает вопрос о том, каким может быть спектр этого показателя для данного уравнения или системы. Известно [22], что спектр показателей Ляпунова ограниченной линейной системы представляет собой набор из n чисел (с учетом кратности), а в случае ее автономности вместе со спектром показателя Перрона совпадает со множеством действительных частей корней характеристического многочлена. Известно также [38, раздел 2.2], что в неавтономном случае для нижних показателей Перрона это не верно (спектр может представлять собой более сложное множество, чем набор из n чисел).

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости. Как показано в работе [87], спектр практически всех, к примеру, нижних характеристик колеблемости и блуждаемости для уравнений второго порядка состоит ровно из одного числа. Однако уже для уравнения третьего порядка, спектр, например, характеристической частоты может содержать сколь угодно много (и даже целый отрезок) значений [31, 97].

В работе [94] показано, что спектр полной частоты для автономных систем совпадает со множеством модулей мнимых частей собственных чисел матрицы, соответствующей этой системе. Затем в работе [17] установлено, что этот факт справедлив и в случае векторной частоты, более того, на любом решении автономной системы значения полной и векторной частот совпадают.

В докладе [83] была высказана гипотеза о том, что спектр скорости блуждания автономной системы инвариантен относительно замен координат, и в кандидатской диссертации Д.С. Бурлакова удалось выразить спектр этой величины через собственные значения матрицы и, следовательно, подтвердить гипотезу. О показателе блуждаемости известно (см. работу [94]), что его спектр для любой автономной системы так же, как и у частот, совпадает со множеством модулей мнимых частей собственных чисел матрицы, соответствующей системе.

В случае линейных однородных неавтономных систем известно [99], что существует двумерная *неограниченная* система, у которой спектры частот содержат некоторый отрезок. При этом оставался открытым вопрос о том, какими могут быть спектры показателей колеблемости и блуждаемости в случае неавтономных *ограниченных* систем.

Изменение названий показателей

В 2017 году в статье [72] И.Н. Сергеевым были систематизированы все введенные им к настоящему времени показатели ляпуновского типа (см. также [84], [95]), что привело к изменению названий некоторых из них. Так, полная и векторная частоты теперь стали называться *сильным* и *слабым* показателями колеблемости, а показатели блуждаемости и блуждания — *сильным* и *слабым* показателями блуждаемости. В настоящей работе используются эти новые названия.

Цель исследования

Целью настоящей работы является исследование спектров показателей колеблемости и блуждаемости в случае двумерных ограниченных неавтономных дифференциальных систем, а точнее нахождение такого класса множеств, что для каждого множества из этого класса, существует система, у которой спектр данного показателя совпадает с этим множеством.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, математического анализа, а также теории равномерно распределенных последовательностей.

Научная новизна

В работе получены следующие результаты:

- для любого *конечного* множества неотрицательных *рациональных* чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная *периодическая* дифференциальная система, у которой спектр (множество значений показателей блуждаемости) совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *конечного* множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого замкнутого ограниченного *счетного* множества неотрицательных *рациональных* чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *отрезка*, левым концом которого является ноль, построена двумерная линейная *ограниченная* система, на каждом решении которой показатели колеблемости и блуждаемости равны, а множество всех их значений совпадает с этим отрезком.

Теоретическая и практическая ценность

Научная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

- для любого *конечного* множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, существует двумерная линейная однородная *ограниченная* система дифференциальная система (*периодическая*, если все элементы заданного множества *соизмеримы*), у которой спектр значений показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого замкнутого ограниченного *счетного* множества неотрицательных *рациональных* чисел с единственной нулевой предельной точкой, существует двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *отрезка*, левым концом которого является ноль, существует двумерная линейная *ограниченная* система, на каждом решении которой показатели колеблемости и блуждаемости равны, а их общий спектр совпадает с этим отрезком.

Апробация работы

Содержащиеся в работе результаты неоднократно докладывались автором на заседаниях:

- семинара по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров И.В. Асташовой, А.В. Боровских, Н.Х. Розова, И.Н. Сергеева (2016–2017 гг.),

а также на следующих конференциях:

- XXIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 11–15 апреля 2016 г.);
- конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета по итогам года (г. Москва, 28 декабря 2016 г.);
- XVII международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017»(г. Минск, Белоруссия, 16–20 мая 2017 г.).

По теме диссертации опубликовано 7 работ [105]–[111], три из которых [107], [108] и [111] являются статьями в рецензируемых научных журналах из списков ВАК, RSCI, Web of Science, SCOPUS. Работ в соавторстве нет.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в статьях автора и в настоящей диссертации, получены самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем диссертации составляет 79 страниц. Библиография включает 111 наименований.

Формулировки результатов

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, а $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — множество всех линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в себя. Будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис, порождающий стандартные нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (см. [85, §2.2]).

Каждую непрерывную оператор-функцию $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ отождествим с системой вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty), \tag{1}$$

и обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ класс всех таких систем. Пусть $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех *ненулевых* решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$.

Показатели колеблемости и блуждаемости будут определены на множестве всех решений вообще

$$\mathcal{S}_*^n \equiv \bigcup_{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A),$$

совпадающем со множеством $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^n)$, где $\mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Обозначим через $\mathcal{M}_0^2$ класс, состоящий из систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$, у каждой из которых функция A ограничена и каждое решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ по норме ограничено и отделено от нуля. Все системы, существование которых мы будем доказывать, окажутся именно из класса $\mathcal{M}_0^2$.

1. Определение показателей колеблемости и блуждаемости

Показатели колеблемости и блуждаемости имеют схожее строение: сначала определяется некоторый функционал от двух аргументов: решения и правого конца отрезка времени (его левый конец совпадает с нулем), а затем к этому функционалу применяются в разном порядке оператор усреднения по времени и оператор взятия нижней грани.

Зададим такой функционал для показателей колеблемости (строго говоря, в следующем определении будут заданы целых пять функционалов, и каждый из них будет порождать свой ряд показателей колеблемости).

Определение 1. Для скалярной функции $y \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ и положительного момента $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $\mathrm{N}_\alpha(y,t)$ количество на промежутке $(0,t]$:

а) ее *нулей* — при $\alpha = 0$;

б) ее *строгих смен знака* [81] (т.е. нулей, в любой окрестности которых есть значения разных знаков) — при $\alpha = -$;

в) ее *нестрогих смен знака* [98] (т.е. нулей, в любой окрестности которых есть как неположительные, так и неотрицательные значения) — при $\alpha =\sim$;

г) ее *корней* [80] (т.е. нулей с учетом их *кратности*) — при $\alpha = +$;

д) ее *гиперкорней* [71] (т.е. корней, при подсчете которых любой кратный корень берется бесконечно много раз) — при $\alpha = *$.

Замечание 1. Имеет место цепочка неравенств

$$\mathrm{N}_-(y,t) \le \mathrm{N}_\sim(y,t) \le \mathrm{N}_0(y,t) \le \mathrm{N}_+(y,t) \le \mathrm{N}_*(y,t).$$

Обозначим через S^{n-1} и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ соответственно единичную сферу и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Для любого решения $x \in \mathcal{S}^n_*$ зададим его *нижние сильный и слабый показатели колеблемости*

$$\check{\nu}^\bullet_\alpha(x) \equiv \inf_{m \in S^{n-1}} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \mathrm{N}_\alpha(\langle x, m\rangle, t), \quad \check{\nu}^\circ_\alpha(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in S^{n-1}} \mathrm{N}_\alpha(\langle x, m\rangle, t)$$

(галочка над показателем в записях $\check{\nu}^\bullet_\alpha$ и $\check{\nu}^\circ_\alpha$ означает, что показатель *нижний*, полный кружок $\check{\nu}^\bullet_\alpha$— что показатель *сильный*, пустой кружок

$\check{\nu}^\circ_\alpha$ — что показатель *слабый*, а нижний индекс α в обеих записях $\check{\nu}^\bullet_\alpha$ и $\check{\nu}^\circ_\alpha$ всегда соответствует функционалу внутри определяющей формулы) *нулей, строгих* или *нестрогих смен знака, корней* или *гиперкорней* при $\alpha = 0, -, \sim, +, *$ соответственно.

Рассмотрим внимательно формулу, задающую показатель сильной частоты $\check{\nu}^\bullet_0(x)$ определения 2, в случае, когда, например, $\alpha = 0$. Сначала функционал $\mathrm{N}_0(\langle x, m\rangle, t)$ вычисляет число нулей проекции решения x на вектор m на промежутке $(0, t]$. Затем оператор нижнего предела $\varliminf\limits_{t\to\infty}$ вычисляет среднее число нулей проекции решения x на вектор m на всей полуоси $\mathbb{R}^+$. И наконец оператор $\inf\limits_{m\in S^{n-1}}$ нижней грани выбирает минимизируещее направление.

В формуле слабой частоты $\check{\nu}^\circ_0(x)$ наоборот: сначала для каждого момента t выбирается направление, а затем вычисляется среднее число нулей полученной функции $\inf\limits_{m\in S^{n-1}} \mathrm{N}_0(\langle x, m\rangle, t)$ (уже не зависящей от m).

Нормировочный множитель π в обеих формулах подобран так, чтобы для любой частоты ν из определения 2 в случае эталонного решения

$$x = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0, \ldots, 0)^\top$$

выполнялось равенство $\nu(x) = \omega$.

Теперь зададим функционал для показателей блуждаемости.

Определение 3. Для вектор-функции $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$ определим ее *след* (на единичной сфере) $e_u \equiv u/|u|$ и ее *вариацию следа* за время от 0 до $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{P}(u, t) \equiv \int_0^t |\dot{e}_u(\tau)|\, d\tau.$$

Вариация следа равна длине пути следа функции на единичной сфере за время от 0 до t.

Определение 4. Для решения $x \in \mathcal{S}^n_*$ его *нижние сильный* и *слабый показатели блуждаемости* зададим соответственно равенствами

$$\check{\rho}^\bullet(x) \equiv \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx, t), \quad \check{\rho}^\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mathrm{P}(Lx, t)$$

($\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов из $\mathbb{R}^2$ в себя).

В формуле, задающей нижний сильный показатель блуждаемости $\check{\rho}^{\bullet}(x)$ из определения 4, сначала функционал $\frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t)$ вычисляет среднюю скорость движения следа решения x по единичной сфере на промежутке $(0,t]$ под действием оператора L. Затем оператор нижнего предела $\varliminf\limits_{t\to\infty}$ вычисляет среднюю скорость движения следа решения x по единичной сфере на всей полуоси $\mathbb{R}^+$ под действием оператора L. И наконец оператор $\inf\limits_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n}$ взятия нижней грани выбирает минимизирующий линейный оператор. Действие последнего оператора эквивалентно выбору минимизирующего базиса.

В формуле слабого показателя блуждаемости $\check{\rho}^{\circ}(x)$ обратный порядок: для каждого момента t выбирается минимизирующий базис, а затем вычисляется среднее значение полученной функции $\inf\limits_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n}\mathrm{P}(Lx,t)$ (уже не зависящей от L) на всей полуоси.

Определение 5. *Верхние слабый, сильный показатели колеблемости* $\hat{\nu}_{\alpha}^{\circ}(x), \hat{\nu}_{\alpha}^{\bullet}(x)$ (для каждого α) и *верхние слабый, сильный показатели блуждаемости* $\hat{\rho}^{\circ}(x)$, $\hat{\rho}^{\bullet}(x)$ решения $x\in\mathcal{S}_*^n$ зададим теми же формулами, что и соответствующие нижние в определениях 2 и 4, но с заменой в них нижних пределов верхними.

Для каждого натурального $n\geq 2$ обозначим через $\mathcal{K}^n$ множество, состоящее из всех полученных в определениях 2, 4 и 5 двадцати четырех показателей.

2. Основные теоремы

Для любого подмножества решений $\mathcal{Z}\subset\mathcal{S}_*^2$ обозначим через

$$\mathrm{In}(\mathcal{Z})\equiv\{z(0)\mid z\in\mathcal{Z}\}\subset\mathbb{R}^2$$

его *множество начальных значений*.

Определение 6. Назовем *спектром* показателя $\varkappa\in\mathcal{K}^2$ для системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^2$ множество

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)\equiv\{\varkappa(z)\mid z\in\mathcal{S}_*(A)\},$$

причем значение $a \in \mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ будем называть *существенным* (см. [89, 93]), если множество

$$\mathrm{In}\left(\varkappa_A^{-1}(a)\right), \quad \text{где} \quad \varkappa_A^{-1}(a) \equiv \{z \in \mathcal{S}_*(A) \mid \varkappa(z) = a\},$$

имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств [14, §1.2]. Через $\mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ обозначим множество всех существенных значений показателя для системы A и назовем его *существенным спектром* системы A.

Для любого значения $a \in \mathbb{R}^+$ и любого подмножества показателей $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^2$ определим подмножество решений $\mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \subset \mathcal{S}_*^2$ равенством

$$\mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \equiv \{z \in \mathcal{S}_*^2 \mid \varkappa(z) = a \text{ сразу при всех } \varkappa \in \mathcal{K}\},$$

и положим

$$\mathcal{C}_\mathcal{K} \equiv \bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} \mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \subset \mathcal{S}_*^2.$$

Получаем, что множество $\mathcal{C}_\mathcal{K}(a)$ состоит из решений, на которых все показатели из $\mathcal{K}$ принимают значение a, а множество $\mathcal{C}_\mathcal{K}$ состоит из всех решений, на каждом из которых все показатели из $\mathcal{K}$ принимают одинаковое значение.

Если для системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$ выполнено соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_\mathcal{K}$, то ее спектры всех показателей из $\mathcal{K}$ одинаковые, поэтому будем обозначать через $\mathrm{Sp}_\mathcal{K}(A)$ их общий спектр, т.е. спектр, которому все они равны (также и для существенных спектров введем обозначение $\mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_\mathcal{K}(A)$).

Пусть $\mathcal{K}_\rho \equiv \{\hat{\rho}^\bullet, \check{\rho}^\bullet, \hat{\rho}^\circ, \check{\rho}^\circ\}$.

Теорема 1. *Для любого конечного множества неотрительных чисел X, содержащего ноль, существует такая система $A \in \mathcal{M}_0^2$ (периодичная, если все элементы множества X соизмеримы), что на каждом ее ненулевом решении значения всех показателей из множества $\mathcal{K}_\rho$ совпадают, и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X.$$

Утверждение теоремы 1 является чуть более сильным, чем совокупность утверждений первых двух пунктов из раздела научная новизна:

класс, состоящий из всех конечных множеств положительных чисел с соизмеримыми элементами, состоит не только из всех конечных подмножеств положительных рациональных чисел, но и из всех конечных множеств подобных им, т.е. получающихся домножением всех элементов множества на некоторое положительное иррациональное число.

Теорема 2. *Для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел X с единственной нулевой предельной точкой существует такая система $A \in \mathcal{M}_0^2$, что на каждом ее ненулевом решении значения показателей из множества $\mathcal{K}_\rho$ совпадают и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X.$$

Определение 7. Будем говорить, что показатель $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ имеет на решении $z \in \mathcal{S}_*^2$ *точный предел*, в случае, когда для величины $\varkappa(z)$ верно утверждение: если в формуле, определяющей величину $\varkappa(z)$, нижние или верхние пределы заменить на обычные (*точные*), то величина, задаваемая полученной формулой, определена и совпадает с $\varkappa(z)$.

В случае слабых показателей точность предела означает совпадение верхнего (нижнего) показателя с одноименным нижним (верхним). А в случае сильного — что существует такая последовательность элементов из множества, по которому берется инфимум, что на ней достигается нижняя грань, и для каждого ее элемента предел в определении показателя является точным. В частности, из этого следует, что, как и в слабом случае, верхний (нижний) показатель совпадает с одноименным нижним (верхним).

Теорема 3. *Для любого положительного числа λ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$ такая, что на каждом ее ненулевом решении все показатели из множества $\mathcal{K}^2$ имеют точные пределы и их значения совпадают, а также верно равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}^2}(A) = [0, \lambda].$$

Используемые обозначения

Приведем список наиболее часто используемых обозначений:

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — множества соответственно натуральных, рациональных и действительных чисел;
- тройной знак равенства «$\equiv$» обозначает равенство по определению;
- $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$;
- $\mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}$;
- $\operatorname{End} \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$ — множества соответственно всех и всех невырожденных линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в себя;
- $\widetilde{\mathcal{M}}^2$ — множество линейных однородных двумерных систем непрерывными на полуоси $\mathbb{R}^+$ коэффициентами;
- $\mathcal{M}^2_0$ — подмножество множества $\widetilde{\mathcal{M}}^2$, состоящее из систем с ограниченными коэффициентами, у которых каждое ненулевое решение ограничено и отделено от нуля;
- $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ — соответственно множество всех и всех ненулевых решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$;
- $\mathcal{S}^2$ и $\mathcal{S}^2_*$ — соответственно множество всех и всех ненулевых решений всех систем из $\widetilde{\mathcal{M}}^2$;
- $\operatorname{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in \mathcal{S}_*(A)\}$ — спектр показателя $\varkappa : \mathcal{S}_*(A) \to \mathbb{R}^+$ системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$;
- $(x, y)^\top \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — столбец координат двумерной вектор-функции;
- $z|_{[a,b]}$ — сужение вектор-функции z на отрезок $[a, b]$;
- χ_M — характеристическая функция множества M.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Игорю Николаевичу Сергееву за помощь и внимание к работе над диссертацией. Автор также выражает благодарность Владимиру Владиславовичу Быкову за моральную и организационную поддержку.

Глава 1

Конечные спектры

О показателях блуждаемости решений двумерных систем было известно [94], что спектр каждого из них в случае *автономной* системы состоит ровно из одного числа. В настоящей главе мы докажем теорему 1, построив *неавтономную* ограниченную систему, для которой спектр любого из этих показателей совпадает с произвольным наперед заданным конечным множеством, объединенным с нулем.

В классе $\mathcal{F}$ всех *конечных* подмножеств $X \subset (0, \infty)$ выделим подкласс $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$, состоящий только из подмножеств с попарно *соизмеримыми* элементами.

Теорема 1. *Для любого множества $X \in \mathcal{F}$ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$ (периодичная, если $X \in \mathcal{F}_c$) такая, что верно соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X \cup 0.$$

Доказательство теоремы 1 состоит в явном построении системы A из формулировки теоремы. Перед самим доказательством, мы установим леммы для вычисления показателей блуждаемости решений, затем лемму, дающую возможность восстанавливать систему по паре ее фундаментальных решений, и лемму, позволяющую строить некоторые вектор-функции, определенные на отрезке, из которых потом склеиваются фундаментальные решения искомой системы A.

1.1 Подсчет показателей блуждаемости

Выведем формулу для вариации следа в случае, когда фазовое пространство двумерное, т.е. является плоскостью, а решения представляют собой двумерные вектор-функции.

Для любой вектор-функции $u \in \mathrm{C}(E, \mathbb{R}^2_*)$ (здесь и далее E — либо отрезок вида $[0, T]$, либо полуось $\mathbb{R}^+$) пусть ϕ_u — это непрерывная ветвь ее угловой координаты, однозначно определяемая соотношениями

$$\phi_u(0) \in [0, 2\pi), \quad |u(t)|(\cos\phi_u(t), \sin\phi_u(t))^\top = u(t), \quad t \in E, \qquad \phi_u \in \mathrm{C}(E).$$

Обратим внимание, что если функция ϕ_u возрастает, то вектор-функция u движется против часовой стрелки относительно начала координат.

Замечание 2. Для вариации следа в определении 3 в случае $n = 2$, в силу выкладки

$$|\dot{e}_u| = \left|\frac{d}{d\tau}(\cos\phi_u, \sin\phi_u)^\top\right| = |(-\sin\phi_u, \cos\phi_u)^\top\dot{\phi}_u| = |\dot{\phi}_u|,$$

справедлива формула

$$\mathrm{P}(u, t) = \int_0^t |\dot{\phi}_u(\tau)|\, d\tau.$$

Введем вспомогательные множества вектор-функций, определенных на отрезке.

Для любых чисел $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ обозначим через $\mathcal{A}(T, \varphi_0)$ множество, состоящие из всех вектор-функций $\zeta \in \mathrm{C}^1([0, T], \mathbb{R}^2_*)$, удовлетворяющих следующим **трем условиям**:

1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi \equiv \phi_\zeta$;

2) функция ϕ *монотонна* на отрезках $[0, Q]$ ($Q \equiv T/4$), и $[Q, H]$ ($H \equiv T/2$);

3) при каждом $t \in (0, H]$ верно равенство $\phi(H + t) = \phi(H - t)$.

Первое условие означает, что движение проекции на единичную окружность любой функции из $\mathcal{A}(T, \varphi_0)$ начинается из точки с угловой координатой φ_0, второе — что движение этой проекции на отрезке

$[0, H]$ предствляет собой два последовательных монотонных перемещения, и третье — что на отрезке $[H, T]$ движение проекции происходит симметрично с движением на отрезке $[0, H]$.

И обозначим через $\bar{\mathcal{A}}_0 \equiv \bar{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$ и $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ и для любого $\delta \in (0, \pi/2]$ через $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ множества, состоящие из вектор-функций $\zeta \in \mathcal{A}(T, \varphi_0)$, удовлетворяющих также **четвертому условию** (каждому из множеств $\mathcal{A}_0$, $\bar{\mathcal{A}}_0$ и $\mathcal{A}_1$ соответствует свое четвертое условие):

4_0) (для множества $\mathcal{A}_0$) при каждом $t \in [0, H]$ выполнено включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta]$;

$\bar{4}_0$) (для множества $\bar{\mathcal{A}}_0$) при каждом $t \in [0, H]$ выполнено включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi)$;

4_1) (для множества $\mathcal{A}_1$) функция ϕ *нестрого возрастает* на отрезке $[0, H]$ и $\pi \leq \phi(H) - \varphi_0 \leq 3\pi/2$.

Условие 4_0 означает, что проекции функций из $\mathcal{A}_0$ движутся внутри сектора, правая сторона которого имеет угловую координату φ_0, и ширина которого меньше чем полукруг, причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен δ; условие $\bar{4}_0$ — что проекции функций из $\bar{\mathcal{A}}_0$ всегда лежат в целом полукруге с началом в точке φ_0, но никогда не касаются его левой стороны; 4_1 — что проекции функций из $\mathcal{A}_1$ на отрезке $[0, H]$ движуться только против часовой стрелки в секторе шириной $3\pi/2$ с началом в φ_0, причем за время H проекция обязательно проходит путь больший или равный целому полукругу.

Следующая лемма будет служить опорой для некоторой техники подсчета значений показателей блуждаемости, используемой в настоящей работе.

Лемма 1. *Для произвольных чисел* $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует оператор* $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$ *такой, что для любой функции* $\zeta \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta) \cup \bar{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \cup \mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ *выполнено соответствующее* *неравенство*

$$\mathrm{P}(L\zeta, T) \le \begin{cases} \varepsilon, & \zeta \in \mathcal{A}_0; \\ 6\pi, & \zeta \in \bar{\mathcal{A}}_0; \\ 2\pi + \varepsilon, & \zeta \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

Говоря словами, для любой фиксированной тройки множеств $\mathcal{A}_0 \cup \bar{\mathcal{A}}_0 \cup \mathcal{A}_1$ (с общими для всех трех множеств числами φ_0 и T) найдется такой невырожденный линейный оператор L, что под его действием длина пути проекции на единичную сферу за время T у любой функции из $\mathcal{A}_0$ близка к нулю, у функции из $\bar{\mathcal{A}}_0$ ограничена некоторой константой, а у функции из $\mathcal{A}_1$ близка к длине двух полуоборотов — 2π.

Доказательство. Положим

$$L_n \equiv S_n R, \quad (x', y')^\top \equiv R\zeta, \quad \phi' \equiv \phi_{R\zeta},$$

$$(x'', y'')^\top \equiv L_n\zeta, \quad \phi'' \equiv \phi_{L_n\zeta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$S_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R \equiv \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \psi \equiv \varphi_0 - \delta/2.$$

Докажем, что при достаточно больших n композиция L_n поворота R по часовой стрелке на угол ψ и растяжения S_n вдоль вертикальной оси является искомым оператором.

А. Если $\zeta \in \mathcal{A}_1$, то из условий 1 и 4_1 и определений операторов R и S_n следуют соотношения

$$\phi'(0) = \phi(0) - \psi = \delta/2 \in (0, \pi/2),$$

$$\phi'(H) = \phi(H) - \varphi_0 + \delta/2 \in [\pi + \delta/2, 3\pi/2 + \delta/2] \subset (\pi, 3\pi/2 + \pi/4];$$

$$\phi''(0) \in (0, \pi/2), \quad \phi''(H) \in (\pi, 2\pi);$$

$$\phi''(0) = \operatorname{arctg}\frac{y''(0)}{x''(0)} = \operatorname{arctg}\frac{ny'(0)}{x'(0)} = \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\delta/2));$$

$$\phi''(H) = 3\pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{x''(H)}{y''(H)} = 3\pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{x'(H)}{ny'(H)} =$$

$$= 3\pi/2 - \operatorname{arctg} \frac{|R\zeta(H)| \cos \phi'(H)}{n|R\zeta(H)| \sin \phi'(H)} =$$

$$= 3\pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\phi'(H))/n) \leq 3\pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(3\pi/2 + \pi/4)/n) =$$

$$= 3\pi/2 - \operatorname{arctg}(-1/n) = 3\pi/2 + \operatorname{arctg}(1/n).$$

Учитывая, что функция ϕ нестрого возрастает на отрезке $[0, H]$, из геометрических свойств операторов R и S_n для всех $t \in [0, H]$ получим неравенства $\dot{\phi}''(t) \geq 0$, а из них и условия 3 — цепочку

$$\mathrm{P}(L_n\zeta, T) = \int\limits_0^T |\dot{\phi}''(\tau)|\, d\tau = 2(\phi''(H) - \phi''(0)) \leq$$

$$\leq 2\big(3\pi/2 + \operatorname{arctg}(1/n) - \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\delta/2))\big) \equiv a_n.$$

Б. Если $\zeta \in \mathcal{A}_0$, то, рассуждая как в п. А, из условий 1–3 и 4_0 получим

$$\phi'(0) = \delta/2, \quad \phi'(Q) = \phi(Q) - \varphi_0 + \delta/2 \in [\delta/2, \pi - \delta/2], \quad \phi'(H) \in [\delta/2, \pi - \delta/2];$$

$$\phi''(0) \in (0, \pi/2), \quad \phi''(Q) \in (0, \pi), \quad \phi''(H) \in (0, \pi);$$

$$\mathrm{P}(L_n\zeta, T) = 2(|\phi''(Q) - \phi''(0)| + |\phi''(H) - \phi''(Q)|) \leq$$

$$\leq 8 \operatorname{arctg} \frac{x'(0)}{ny'(0)} = 8 \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\delta/2)/n) \equiv b_n.$$

В. Числа a_n и b_n не зависят от функции ζ, поэтому из п. п. А, Б и равенств

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

следует, что при достаточно больших n для любой функции $\zeta \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ верна соответственно оценка $\mathrm{P}(L_n\zeta, T) \leq \varepsilon$ или оценка $\mathrm{P}(L_n\zeta, T) \leq 2\pi + \varepsilon$.

Г. Если $\zeta \in \bar{\mathcal{A}}_0$, то снова, рассуждая как в п. А, из условий 1–3 и $\bar{4}_0$ получим

$$\phi'(0) = \delta/2, \quad \phi'(Q) = \phi(Q) - \varphi_0 + \delta/2 \in [\delta/2, \pi + \delta/2], \quad \phi'(H) \in [\delta/2, \pi + \delta/2];$$

$$\phi''(0) \in (0, \pi/2), \quad \phi''(Q) \in (0, 3\pi/2), \quad \phi''(H) \in (0, 3\pi/2);$$

$$\mathrm{P}(L_n\zeta, T) = 2(|\phi''(Q) - \phi''(0)| + |\phi''(H) - \phi''(Q)|) \leq 2(3\pi/2 + 3\pi/2) = 6\pi.$$

Лемма 1 доказана.

Разобьем положительную полуось на равные отрезки и разобьем произвольное решение на множество вектор-функций, являющихся сужениями решения на эти отрезки: для любого решения $z \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2_*)$ и для любых чисел $i \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ определим функцию $\zeta^i \equiv \zeta_z^{T,i} \in \mathrm{C}^1([0,T], \mathbb{R}^2_*)$ равенствами

$$\zeta_z^{T,i}(t) \equiv z((i-1)T + t), \quad t \in [0,T].$$

Леммы 2 и 3 позволяют вычислять значение показателя блуждаемости для некоторых решений.

Лемма 2. *Если для чисел $a \in [0,1]$, $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$, последовательности чисел $l_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}$, и решения $z \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2_*)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_i = a, \qquad \zeta^i \in \mathcal{A}_{l_i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

то $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(a')$, где $a' \equiv \dfrac{2\pi}{T} a$.

Доказательство. А. Докажем что, если функция ζ принадлежит множеству $\mathcal{A}_1$, то есть совершила два полных полуоборота, то никаким невырожденным оператором L нельзя сделать так, чтобы длина пути образа функции $L\zeta$ была меньше двух полуоборотов 2π. Говоря кратко, докажем, что для любой функции $\zeta \in \mathcal{A}_1$ и любого оператора $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$ верно неравенство

$$\mathrm{P}(L\zeta, T) \geq 2\pi.$$

Поскольку функция ϕ непрерывна и удовлетворяет левому неравенству условия 4_1, найдется такой момент $\lambda \in (0, H]$, что $\phi(\lambda) = \varphi_0 + \pi$, поэтому при некотором $k > 0$ имеем равенство $\zeta(\lambda) = -k\zeta(0)$. Пусть $\zeta' \equiv L\zeta$, тогда

$$\zeta'(\lambda) = L\zeta(\lambda) = L(-k\zeta(0)) = -kL\zeta(0) = -k\zeta'(0),$$

т.е. $\zeta'(\lambda) = -k\zeta'(0)$, откуда следует, что при некотором $m \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\phi_{\zeta'}(\lambda) = \phi_{\zeta'}(0) + \pi + 2m\pi. \tag{1.1}$$

Используя условие 3 и равенство (1.1), выведем требуемое утверждение

$$\mathrm{P}(L\zeta, T) = \int_0^{\lambda} |\dot{\phi}_{\zeta'}(\tau)|\, d\tau + \int_{\lambda}^{T-\lambda} |\dot{\phi}_{\zeta'}(\tau)|\, d\tau + \int_{T-\lambda}^{T} |\dot{\phi}_{\zeta'}(\tau)|\, d\tau \geq$$

$$\geq 2 \left| \int_0^{\lambda} \dot{\phi}_{\zeta'}(\tau)\, d\tau \right| = 2|\pi + 2m\pi| \geq 2\pi.$$

Б. Используя результат п. А, для произвольных оператора $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ и момента $t \in \mathbb{R}^+_*$ получим цепочку неравенств

$$\mathrm{P}(Lz, t) \geq \sum_{i=1}^{[t/T]} \mathrm{P}(L\zeta^i, T) \geq \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\pi l_i$$

($[t/T]$ — целая часть числа t/T), а затем выведем оценку снизу

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lz, t) \geq \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\pi l_i \geq$$

$$\frac{1}{T} \cdot \varliminf_{t\to\infty} \frac{T[t/T]}{t} \cdot \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{[t/T]} \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\pi l_i = \frac{1}{T} \cdot 1 \cdot 2\pi a = \frac{2\pi}{T} a,$$

т.е. $\check{\rho}^{\circ}(z) \geq a'$.

В. По числам T, φ_0, δ и произвольному $\varepsilon > 0$ по лемме 1 построим оператор L' и получим цепочку неравенств

$$\mathrm{P}(L'z, t) \leq \sum_{i=1}^{[t/T]} \mathrm{P}(L'\zeta^i, T) + \mathrm{P}(L'\zeta^{[t/T]+1}, T) \leq \sum_{i=1}^{[t/T]} (2\pi l_i + \varepsilon) + 2\pi + \varepsilon,$$

и оценку сверху

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(L'z, t) \leq \frac{1}{T} \cdot \varlimsup_{t\to\infty} \frac{T[t/T]}{t} \cdot \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{[t/T]} \sum_{i=1}^{[t/T]} (2\pi l_i + \varepsilon) + 0 =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot 1 \cdot (2\pi a + \varepsilon) = \frac{2\pi}{T} a + \frac{\varepsilon}{T},$$

из которой получаем оценку

$$\hat{\rho}^{\bullet}(z) = \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lz, t) \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(L'z, t) \leq a' + \frac{\varepsilon}{T}$$

Г. Из определений показалей ρ получим неравенства

$$\check{\rho}^{\circ}(z) \leq \check{\rho}^{\bullet}(z) \leq \hat{\rho}^{\bullet}(z), \tag{1.2}$$

$$\check{\rho}^{\circ}(z) \leq \hat{\rho}^{\circ}(z) \leq \hat{\rho}^{\bullet}(z). \tag{1.3}$$

Число ε сколь угодно мало, поэтому из п.п. Б, В получаем двойное равенство $\check{\rho}^{\circ}(z) = \hat{\rho}^{\bullet}(z) = a'$, из которого, учитывая неравенства (1.2) и (1.3), получаем включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(a')$.

Лемма 2 доказана.

В случае, когда все части решения z, как в условии леммы 2, начинаются в точке с угловой координатой φ_0, но все не совершают полный полуоборот, т.е. не лежат во множестве $\mathcal{A}_1$, и при этом не удается найти такой общий для всех частей зазор δ, чтобы сразу все части решения лежали во множестве $\mathcal{A}_0$ с этим зазором δ, у нас нет возможности применять лемму 2 при $l_i = 0,\ i \in \mathbb{N}$, и тогда будем использовать следующую лемму 3.

Лемма 3. *Пусть задано решение $z \in \mathcal{S}^2_*$, угол $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ и число $T > 0$. Если для любого $\varepsilon > 0$ существуют подмножество $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ и угол $\delta \in (0, \pi/2]$ такие, что выполнены соотношения*

$$\zeta^i \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), & i \in \Lambda' \equiv \mathbb{N} \setminus \Lambda, \\ \bar{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0), & i \in \Lambda, \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

и верно неравенство

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_\Lambda(i) < \varepsilon, \tag{1.5}$$

то верно включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем подмножество $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ и угол $\delta \in (0, \pi/2]$, для которых верны соотношения (1.4) и неравенство (1.5). Для любого $\varepsilon' > 0$ и чисел φ_0, δ и T по лемме 1 построим оператор L' и получим цепочку неравенств для любого момента $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{P}(L'z, t) \leq \sum_{i=1}^{[t/T]} \mathrm{P}(L'\zeta^i, T) + \mathrm{P}(L'\zeta^{[t/T]+1}, T) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{\Lambda'}(i)\varepsilon' + \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{\Lambda}(i)6\pi + 6\pi \leq [t/T]\varepsilon' + \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{\Lambda}(i)6\pi + 6\pi,$$

затем оценим предел

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L'z,t) \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \cdot \varlimsup_{t\to\infty} \frac{T[t/T]}{t} \cdot \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{[t/T]} \left([t/T]\varepsilon' + \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{\Lambda}(i)6\pi \right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot 1 \cdot (\varepsilon' + \varepsilon 6\pi)$$

и получим цепочку

$$\hat{\rho}^{\bullet}(z) = \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lz,t) \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L'z,t) \leq \frac{\varepsilon' + \varepsilon 6\pi}{T}.$$

Числа ε и ε' сколь угодно малы, поэтому из цепочек (1.2) и (1.3) получаем включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

Лемма 3 доказана.

1.2 Восстановление системы

Следующая лемма 4 позволяет свести задачу о построении искомой системы A из заданного класса и с заданным спектром к задаче о построении двух решений, обладающих некоторыми свойствами.

Для произвольных функций $z_1, z_2 \in \mathrm{C}(E, \mathbb{R}^2_*)$ обозначим через (z_1, z_2) матричную функцию размера 2×2, столбцы которой являются координатами функций z_1 и z_2 соответственно.

Лемма 4. *Если для функций $z_1, z_2 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2_*)$, чисел $\varepsilon, b > 0$, подмножества $S \subset [0,\infty)$ и семейства $\{C_a \mid a \in S\}$ непересекающихся отрезков положительной длины верны условия:*

(a) $|z_1(t)|, |z_2(t)|, |\dot{z}_1(t)|, |\dot{z}_2(t)| \leq b$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^+$;

(b) $\det(z_1(t), z_2(t)) \geq \varepsilon$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^+$;

(c) $\mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$, $\{\check{\rho}^{\bullet}(z) \mid z \in \mathcal{Z}\} = S$;

(d) *для любого* $a \in S$ *при* $c \in C_a$ *верно равенство* $\check{\rho}^{\bullet}(cz_1+z_2)=a$,
то существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$*, для которой имеют место соотношение* $\mathcal{S}(A) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ *и равенства* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть

$$Z \equiv (z_1, z_2), \quad A \equiv \dot{Z}Z^{-1} \tag{1.6}$$

тогда из условий (a), (b), равенства $Z^{-1} = Z^{\mathrm{adj}}/\det Z$ (Z^{adj} — транспонированная матрица алгебраических дополнений к матрице Z; см. [49, §14]) и соотношений $z_1, z_2 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2_*)$ следует, что равенства (1.6) корректно определяют систему A с непрерывными ограниченными коэффициентами.

2. Покажем, что решения системы A при некотором $\eta > 0$ удовлетворяют оценкам

$$\eta \le |z(t)| \le 1/\eta, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.7}$$

А. Матричная функция Z — это решение матричного уравнения $\dot{Z} = AZ$, поэтому каждый из ее столбцов является решением уравнения (1), т.е. $z_1, z_2 \in \mathcal{S}(A)$, причем из условия (b) следует, что векторы $z_1(t)$ и $z_2(t)$ линейно независимы при каждом $t \in \mathbb{R}^+$, а значит, функции z_1 и z_2 образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, верно равенство $\mathcal{S}_*(A) = \{az_1 + bz_2 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2_*\}$ (см. [100, §14]), из которого вытекает, что любое решения $\tilde{z} \in \mathcal{S}(A)$ представимо в виде

$$\tilde{z} = kz, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad z \in \mathcal{Z}. \tag{1.8}$$

Б. Из условия (a) получим, что произвольная функция $z \in \mathcal{Z}$ ограничена. При любом $c \in \mathbb{R}$ из условия (b) и равенства $\det(z_1, z_2) = \det(z_1, cz_1 + z_2)$ следует, что

$$\det(z_1, cz_1 + z_2) \ge \varepsilon. \tag{1.9}$$

Если $z = z_1$, то из условий (a) и (b), а если $z = cz_1 + z_2$, то из условия (a) и оценки (1.9), рассуждая от противного, получим, что функция z отделена от нуля.

В. Из п. 2, Б следует, что при некотором $\eta > 0$ справедливы оценки (1.7), а из них и представления (1.8) вытекает утверждение п. 2.

3. Из п. п. 1, 2 следует включение $A \in \mathcal{M}_0^2$.

4. Для любого решения $\tilde{z} \in \mathcal{S}(A)$ из (1.8) и определения 3 следует, что для любых момента $t \in \mathbb{R}$ и оператора $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ верно равенство $\mathrm{P}(L\tilde{z}, t) = \mathrm{P}(Lz, t)$, поэтому из условия (c) получим, что $\check{\rho}^\bullet(\tilde{z}) = \check{\rho}^\bullet(z),\ \tilde{z} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ и $\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = S$.

Для любого показателя $\varkappa \in \mathcal{K}_\rho$ вспомним определение множества

$$\varkappa_A^{-1}(a) \equiv \{z \in \mathcal{S}_*(A) \mid \varkappa(z) = a\},$$

и из условия (d) для любого значения $a \in S$ выведем цепочку

$$\mathrm{In}[(\check{\rho}^\bullet)_A^{-1}(a)] \supset \{z(0) \mid z = k(cz_1 + z_2),\ c \in C_a,\ k > 0\} =$$
$$= \{k(cz_1(0) + z_2(0)) \mid c \in C_a,\ k > 0\} \equiv \Omega.$$

Векторы $z_1(0)$ и $z_2(0)$ линейно независимы, следовательно, множество $\{cz_1(0) + z_2(0) \mid c \in C_a\}$ является отрезком, лежащим на прямой, не проходящей через точку $(0,0)$, а значит, множество Ω — это внутренняя область некоторого ненулевого угла, поэтому имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество, откуда вытекает равенство $\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A)$.

Лемма 4 доказана.

1.3 Существование особенной пары вектор-функций на отрезке

Оказалось, что существуют такие пары вектор-функций $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}'$, определенные на отрезке $[0, T]$, что при различных значениях параметра c их линейная комбинация $\boldsymbol{\zeta} + c\boldsymbol{\zeta}'$ лежит иногда в классе $\mathcal{A}_0$, а иногда в классе $\mathcal{A}_1$, чему и посвящена следующая лемма 5, а именно, утверждение (iii). Утверждение (i) позволяет склеивать из них непрерывно-дифференцируемые решения, а (ii) гарантирует их линейную независимость.

Лемма 5. *Для любых чисел $T > 0$ и $1 < c^- < c^+$ существуют вектор-функции $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}' \in \mathrm{C}^1([0, T], \mathbb{R}^2_*)$, число $\varepsilon > 0$ и функция*

$d:\mathbb{R}\setminus C\to(0,\pi/2]$, *где* $C\equiv[c^-,c^+]$, *для которых верны следующие три утверждения:*

(i) *верны равенства*

$$\boldsymbol{\zeta}(0)=\boldsymbol{\zeta}(T)=(1,0)^\top,\quad \boldsymbol{\zeta}'(0)=\boldsymbol{\zeta}'(T)=(0,1)^\top;$$
$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(0)=\dot{\boldsymbol{\zeta}}(T)=\dot{\boldsymbol{\zeta}}'(0)=\dot{\boldsymbol{\zeta}}'(T)=(0,0)^\top;$$

(ii) *при всех* $t\in[0,T]$ *справедлива оценка*

$$\det(\boldsymbol{\zeta}(t),\boldsymbol{\zeta}'(t))\ge\varepsilon;$$

(iii) *имеет место включение* $\boldsymbol{\zeta}\in\mathcal{A}_0(T,0,\pi/2)$, *и для любого* $c\in\mathbb{R}$ *верно одно из включений*

$$c\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}'\in\begin{cases}\mathcal{A}_0(T,\varphi_c,d(c)), & \textit{если}\quad c\in\mathbb{R}\setminus C;\\ \mathcal{A}_1(T,\varphi_c), & \textit{если}\quad c\in C,\end{cases}\qquad \varphi_c\equiv\pi/2-\operatorname{arctg}c.$$

Функция d для каждого значения параметра $c\in\mathbb{R}\setminus C$ определяет зазор $d(c)$, с которым линейная комбинаяция $c\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}'$ лежит в $\mathcal{A}_0$.

Доказательство. 1. Определим функции $\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}'$ на $[0,T]$.

Фиксировав скалярную функцию $g\in\mathrm{C}^1([0,Q],\mathbb{R}^+)$ $(Q\equiv T/4)$, удовлетворяющую соотношениям

$$g(0)=\dot g(0)=0,\qquad 0\le\dot g(t),\quad t\in(0,Q),$$
$$g(Q)=1,\quad \dot g(Q)=0,$$

и, определив функцию $g'\in\mathrm{C}^1([Q,H],\mathbb{R}^+)$ $(H\equiv T/2)$ равенствами

$$g'(t)\equiv g(t-Q),\quad t\in[Q,H],$$

положим

$$\boldsymbol{\zeta}|_{[0,Q]}\equiv\begin{pmatrix}1\\ g\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}|_{(Q,H]}\equiv\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\zeta}(H+t)\equiv\boldsymbol{\zeta}(H-t),\quad t\in(0,H];$$

$$\boldsymbol{\zeta}'|_{[0,Q]}\equiv\begin{pmatrix}-g\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}'|_{(Q,H]}\equiv\begin{pmatrix}-1-(x-1)g'\\ 1-(y+1)g'\end{pmatrix},$$

$$\text{где}\quad x\equiv c^-c^+>1,\quad y\equiv c^-+c^+-1>1;$$

$$\boldsymbol{\zeta}'(H+t)\equiv\boldsymbol{\zeta}'(H-t),\quad t\in(0,H],$$

и заметим, что верны включения $\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}'\in\mathrm{C}^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$, а также утверждение (i).

2. А. Верны оценки $|\boldsymbol{\zeta}|,|\boldsymbol{\zeta}'|\geq 1$.

Б. Для любого $t\in[0,Q]$ выполнены включения

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t)\in[0,\pi/4]\,,\quad \phi_{\boldsymbol{\zeta}'}(t)\in[\pi/2,3\pi/4]\,,$$

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}'}(t)-\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t)\in[\pi/4,3\pi/4],\tag{1.10}$$

а для любого $t\in[Q,H]$, поскольку точка $\boldsymbol{\zeta}'(H)=(-x,-y)^\top$ лежит строго в III четверти, — включения

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t)=\pi/4,\quad \phi_{\boldsymbol{\zeta}'}(t)\in[3\pi/4,\pi+\operatorname{arctg}(y/x)]\,,$$

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}'}(t)-\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t)\in[\pi/2,3\pi/4+\operatorname{arctg}(y/x)]\,,\tag{1.11}$$

причем имеют место неравенства

$$c^- -1<(c^- -1)c^+,\quad c^-+c^+-1<c^-c^+,\quad y<x,\quad y/x<1,\tag{1.12}$$

Из (1.10), (1.11) и неравенств (1.12), $\operatorname{arctg}(y/x)<\pi/4$ следует оценка

$$\sin(\phi_{\boldsymbol{\zeta}'}-\phi_{\boldsymbol{\zeta}})\geq\sin\left(3\pi/4+\operatorname{arctg}(y/x)\right)>0.\tag{1.13}$$

В. Из п. 2.А, оценки (1.13) и равенства

$$\det(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}')=|\boldsymbol{\zeta}||\boldsymbol{\zeta}'|\sin(\phi_{\boldsymbol{\zeta}'}-\phi_{\boldsymbol{\zeta}}).$$

получаем утверждение (ii) при $\varepsilon\equiv 1\cdot\sin\left(3\pi/4+\operatorname{arctg}(y/x)\right)$.

3. Первое соотношение из утверждения (iii) следует из построения функции $\boldsymbol{\zeta}$ в п. 1. При каждом $c\in\mathbb{R}$ проверим для функции $\zeta\equiv c\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}'$ выполнение общих для множеств $\mathcal{A}_1(T,\varphi_c)$ и $\mathcal{A}_0(T,\varphi_c,d(c))$ условий 1–3.

А. Из построения в п. 1. следует включение $\zeta\in\mathrm{C}^1([0,T],\mathbb{R}^2)$, а из неравенства $\det(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}')>0$ и цепочки

$$\det(\boldsymbol{\zeta},\zeta)=\det(\boldsymbol{\zeta},c\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}')=\det(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}')$$

получаем, что функция ζ на отрезке $[0,T]$ не обращается в ноль, следовательно, для нее определена функция ϕ_ζ.

Б. Условие 1 получим из равенства $\zeta(0)=(c,1)$, которое следует из утверждения (i), а условие 3 — из построения функций $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$ в п. 1.

Функция ζ при $t\in[0,Q]$ и при $t\in[Q,H]$ движется по отрезкам в фазовой плоскости, соединяющим соответственно точки $\zeta(0)$, $\zeta(Q)$ и $\zeta(Q)$,$\zeta(H)$, поэтому из монотонности функции g следует, что функция ϕ_ζ монотонна на $[0,Q]$, $[Q,H]$, а значит, верно условие 2.

4. Осталось построить функцию d и проверить условие 4_0 при $c\in\mathbb{R}\backslash C$ и условие 4_1 при $c\in C$.

Выпишем координаты следующих точек, в порядке, возрастания их первой координаты

$$\zeta(H)=(c-x,c-y)^\top,\quad \zeta(Q)=(c-1,c+1)^\top,\quad \zeta(0)=(c,1)^\top.$$

А. Если $c\in(-\infty,0]$, положим $d(c)\equiv\pi/4$ и заметим, что точка $\zeta(H)$ лежит в III четверти фазовой плоскости, а точка $\zeta(0)$ — во II, поэтому $\varphi_0\le\phi(H)$. Из неравенств $\varphi_0\ge\pi/2$ и $\phi(H)<\pi+\pi/4$ (поскольку $x>y$) получаем неравенство $\phi(H)-\varphi_0<\pi-d(c)$, а из него и неравенства $\varphi_0\le\phi(H)$ выводим включение $\phi(H)-\varphi_0\in[0,\pi-d(c))$.

Пусть $(x_\zeta,y_\zeta)^\top$ — это координаты функции ζ. При $c\in(-\infty,-1]$ точка $\zeta(Q)$ лежит в III четверти и $\phi(Q)<\pi+\pi/4$, поэтому при всех $c\in(-\infty,-1]$ имеем неравенство $\varphi_c\le\phi(Q)$ и включение $\phi(Q)-\varphi_0\in[0,\pi-d(c))$. Из включений $\phi(Q)-\varphi_0,\phi(H)-\varphi_0\in[0,\pi-d(c))$ и условия 2 получаем условие 4_0. При $c\in(-1,0]$ точки $\zeta(0)$ и $\zeta(Q)$ лежат во II четверти и $x_\zeta(Q)<x_\zeta(0)$, $y_\zeta(Q)\le y_\zeta(0)$, поэтому снова имеем неравенство $\varphi_0\le\phi(Q)$. Из $\varphi_0\le\phi(Q)$ и $\phi(Q)<\pi$ получаем включение $\phi(Q)-\varphi_0\in[0,\pi-d(c))$, а из него, включения $\phi(H)-\varphi_0\in[0,\pi-d(c))$ и условия 2 снова получаем условие 4_0. Мы доказали, что при всех $c\in(-\infty,0]$ выполнено включение $\zeta\in\mathcal{A}_0(T,\varphi_0,d(c))$.

Б. Если $c\in[y,\infty)$, то точки $\zeta(0)$ и $\zeta(Q)$ лежат в I четверти и $x_\zeta(Q)<x_\zeta(0)$, $y_\zeta(Q)>y_\zeta(0)$, откуда получаем $\phi(Q)>\varphi_0$.

Если $c\in[y,x]$, то точка $\zeta(H)$ лежит во II четверти, поэтому и имеем

$\phi(H) \geq \varphi_0$. А если $c \in (x, \infty)$, то $\zeta(H)$ в I четверти, верны равенства

$$\varphi_0 = \varphi_c = \operatorname{arctg} \frac{1}{c}, \quad \phi(H) = \operatorname{arctg} \frac{c-y}{c-x}$$

и неравенства

$$\frac{1}{c} < 1 < \frac{c-y}{c-x}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{c} < \operatorname{arctg} \frac{c-y}{c-x},$$

поэтому неравенство $\phi(H) \geq \varphi_0$ верно вообще для всех $c \in [y, \infty)$.

Теперь для всех $c \in [y, \infty)$, учитывая оценки $\phi(Q), \phi(H) \leq \pi$, получим включения $\phi(Q) - \varphi_0, \phi(H) - \varphi_0 \in [0, \pi - d(c))$ при $d(c) \equiv \varphi_0 = \varphi_c$, а из них и условия 2 — условие 4_0, из которого выведем $\zeta \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, d(c))$.

B. Если $c \in (0, y)$, то точки $\zeta(H)$ и $\zeta(O)$ лежат строго внутри соответственно III и I четверти. При $c \in (0, 1]$ точка $\zeta(Q)$ расположена во II четверти, а при $c \in (1, y)$ — в I четверти и $x_\zeta(Q) < x_\zeta(0)$, $y_\zeta(Q) > y_\zeta(0)$, поэтому при всех $c \in (0, y)$ имеет место цепочка

$$\phi(H) > \phi(Q) > \varphi_0. \tag{1.14}$$

Для всех $c \in (0, y)$ сравним величины π и $\phi(H) - \varphi_0$, рассмотрев разность

$$D(c) \equiv \pi - (\phi(H) - \varphi_0) = \pi - \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{y-c}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{c} - \operatorname{arctg} \frac{y-c}{x-c}. \tag{1.15}$$

Разность $D(c)$ имеет один знак с величиной

$$\Delta(c) \equiv \frac{1}{c} - \frac{y-c}{x-c} = \frac{c^2 - c(y+1) + x}{c(x-c)} =$$

$$= \frac{c^2 - c(c^- + c^+) + c^- c^+}{c(x-c)} = \frac{(c-c^-)(c-c^+)}{c(x-c)}.$$

При $c \in (0, y) \backslash [c^-, c^+]$ верно неравенство $\Delta(c) > 0$, поэтому из цепочки (1.15) получаем неравенство $\phi(H) - \varphi_0 \leq \pi - D(c)$, а из него, цепочки (1.14) и условия 2 — условие 4_0 при $d(c) \equiv \min\{\pi/2, D(c)\}$. Мы доказали включение $\zeta \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c))$.

При $c \in [c^-, c^+]$ верно неравенство $\Delta(c) \le 0$, откуда, учитывая цепочку (1.15) и неравенство $\phi(H) \le 3\pi/2$ получаем условие 4_1 и включение $\zeta \in \mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$.

Лемма 5 доказана.

Таким образом, мы научились для заданного промежутка значений параметра $[c^-, c^+]$ строить пару вектор-функций $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$ такую, что их линейная комбинация $c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}'$ лежит в $\mathcal{A}_1$, если $c \in [c^-, c^+]$, и лежит в $\mathcal{A}_0$, если иначе.

1.4 Построение решений

Наконец, перейдем к самому доказательству теоремы 1 — построению решений удовлетворяющих условиям леммы 4 при $S = X \cup \{0\}$, где X — конечное множество положительных чисел; и восстановлению по решениям искомой системы.

Доказательство теоремы 1. Пусть задано множество $X = \{a_1, \ldots, a_K\} \subset \mathcal{F}$, $K \in \mathbb{N}$, и $a_1 = \max X$.

1. Построим вектор-функции $z_1, z_2 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2_*)$ в несколько этапов.

А. Для каждого $k \in \{1, \ldots, K\}$ определим последовательность из целых чисел $(\lambda_k(j))_{j=1}^{\infty}$ следующими формулами:

$$a'_k \equiv \frac{a_k}{a_1} \le 1, \quad \lambda_k(j) \equiv [ja'_k] - [(j-1)a'_k]$$

($[ja'_k]$ — это целая часть числа ja'_k).

Число $\lambda_k(j)$ — целое и неотрицательное, причем из цепочки

$$\lambda_k(j) = ja'_k - \{ja'_k\} - ((j-1)a'_k - \{(j-1)a'_k\}) =$$

$$= a'_k - \{ja'_k\} + \{(j-1)a'_k\}$$

($\{ja'_k\}$ — это дробная часть числа ja'_k) и неравенства $a'_k \le 1$ следует, что $\lambda_k(j) < 2$, поэтому верны соотношения

$$\lambda_k(j) \in \{0, 1\}, \quad k \in \{1, \ldots, K\}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Б. Разобьем множество натуральных чисел на блоки: числа $\{1,\ldots,K\}$ — это первый блок, числа $\{K+1,\ldots,K+K\}$ — это второй блок и т.д. по K чисел в каждом блоке и внутри каждого блока перенумеруем числа слева направо. Для для любого i обозначим через $j_i\in\mathbb{N}$ номер блока в котором лежит i, а через $k_i\in\{1,\ldots,K\}$ — номер числа i внутри своего блока (для любого i числа j_i и k_i — это единственные числа, для которых верно разложение $i=(j_i-1)K+k_i$).

Для каждого $k\in\{1,\ldots,K\}$ по последовательности $(\lambda_k(j))_{j=1}^{\infty}$ построим подмножество $\mathbf{\Lambda}_k\subset\mathbb{N}$, определив его характеристическую функцию формулой

$$\chi_{\mathbf{\Lambda}_k}(i)=\begin{cases}\lambda_k(j_i), & k_i=k;\\ 0, & k_i\neq k,\end{cases}\tag{1.17}$$

Из соотношений (1.16) следует, что формула (1.17) корерректно задает подмножество $\mathbf{\Lambda}_k$. Заметим, что элементы $\mathbf{\Lambda}_k$ встречаются только на местах, имеющих номер k внутри блоков, поэтому верны соотношения

$$\mathbf{\Lambda}_k\cap\mathbf{\Lambda}_h=\varnothing,\quad k,h\in\{1,\ldots,K\},\quad k\neq h.\tag{1.18}$$

Определим также подмножество $\mathbf{\Lambda}_0\subset\mathbb{N}$ формулой $\mathbf{\Lambda}_0\equiv\mathbb{N}\setminus\bigcup_{k=1}^{K}\mathbf{\Lambda}_k$ и заметим, что имеет место соотношение

$$\bigcup_{h=0}^{K}\mathbf{\Lambda}_h=\mathbb{N}.\tag{1.19}$$

В. Фиксируем значения

$$1<c_1^-<c_1^+<\ldots<c_K^-<c_K^+$$

и для каждого $k\in\{1,\ldots,K\}$ по набору из чисел $T\equiv\dfrac{2\pi}{Ka_1}$, c_k^- и c_k^+, применяя лемму 4, построим функции $\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\zeta}'_k$, d_k и значение ε_k.

Г. Пусть для каждого $t\in[0,T]$

$$\boldsymbol{\zeta}_0(t)\equiv(1,0),\quad\boldsymbol{\zeta}'_0(t)\equiv(0,1).$$

Для любого $i\in\mathbb{N}$ выберем $h\in\{0,\ldots,K\}$ такое, что $i\in\mathbf{\Lambda}_h$ и положим $\kappa(i)\equiv h$, определив таким образом функцию $\kappa:\mathbb{N}\to\{0,\ldots,K\}$.

Из соотношений (1.18) и (1.19) следует, что функиция κ корректно определена.

Теперь построим решения z_1 и z_2, положив для каждого i

$$\zeta_{z_1}^{T,i} \equiv \boldsymbol{\zeta}_{\kappa(i)}, \quad \zeta_{z_2}^{T,i} \equiv \boldsymbol{\zeta}'_{\kappa(i)}. \tag{1.20}$$

Из утверждения (i) леммы 5 следует, что функции z_1 и z_2 непрерывно-дифференцируемы, а поскольку они построены из конечного числа непрерывных элементов, при некотором $b > 0$ для них выполнено условие (a) леммы 4. Из утверждения (ii) леммы 5 и равенства $\det(\boldsymbol{\zeta}_0, \boldsymbol{\zeta}'_0) = 1$ следует условие (b) леммы 4 при $\varepsilon \equiv \min\{1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K\}$.

2. Если элементы множества X соизмеримы, то для каждого $k \in \{1, \ldots, K\}$ число a'_k рационально, а значит, при некоторых $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ верно равенство $a'_k = p_k/q_k$, откуда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lambda_k(j + q_k) = [(j + q_k)a'_k] - [(j + q_k - 1)a'_k] =$$

$$= [p_k + ja'_k] - [p_k + (j-1)a'_k] = [ja'_k] - [(j-1)a'_k] = \lambda_k(j),$$

т.е. последовательность $(\lambda_k(j))_{j=1}^{\infty}$ имеет период q_k. Из определения (1.17), получаем, что функция κ имеет период $Q \equiv K \prod_{k=1}^{K} q_k$, а значит, в силу определения (1.20) функции z_1 и z_2 имеют период QT.

3. Докажем включения

$$z_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0), \quad cz_1 + z_2 \in \begin{cases} \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(a_k), & c \in C_k \equiv [c_k^-, c_k^+]; \\ \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0), & c \in C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{K} C_k. \end{cases} \tag{1.21}$$

А. Для любой функции $z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\}$, опираясь на формулы (1.20) и утверждение (iii) леммы 5, для любого $i \in \mathbb{N}$ определим тип функции $\zeta^i \equiv \zeta_z^{T,i}$ в каждом из следующих трех случаев.

Случай 1. Если $z = z_1$, то из равенства $\zeta^i = \boldsymbol{\zeta}_{\kappa(i)}$ получим соотношение $\zeta^i \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$.

Случай 2. Если $z = cz_1 + z_2$, то имеет место равенство $\zeta^i = c\boldsymbol{\zeta}_{\kappa(i)} + \boldsymbol{\zeta}'_{\kappa(i)}$, причем, когда $c \in C_0$, определены значения $d_1(c), \ldots, d_K(c)$, поэтому при $\delta = \min\{d_1(c), \ldots, d_K(c)\}$ верно соотношение $\zeta^i \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, \delta)$ (здесь используем соотношения $\mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d_k(c)) \subset \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, \delta), k \in \{1, \ldots, K\}$).

Случай 3. Если $z = cz_1 + z_2$ и $c \in C_k$ при некотором $k \in \{1, \dots, K\}$, то при $\delta = \min\limits_{\{1,\dots,K\}\setminus\{k\}} d_k(c)$ и $\varphi_0 = \varphi_c$ получим,

$$\zeta^i \in \mathcal{A}_{l_i}, \quad l_i \equiv \chi_{\mathbf{\Lambda}_k}(i). \tag{1.22}$$

Б. В случаях 1 и 2 функция z удовлетворяет условиям леммы 2 при $l_i = 0,\ i \in \mathbb{N}$, и $a = 0$, поэтому $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

В случае 3 каждый элемент последовательности (l_i) определен равенством из (1.22). Обозначив для любого $m \in \mathbb{N}$

$$n \equiv j_m - 1, \quad \Delta \equiv \sum_{i=nK+1}^{m} l_i \leq 1,$$

получим значение a из следующих цепочек

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=(j-1)K+1}^{jK} l_i + \Delta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_k(j) + \Delta =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big([ja'_k] - [(j-1)a'_k] \Big) + \Delta = [na'_k] + \Delta,$$

$$a = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} l_i = \frac{1}{K} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{nK}{m} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{[na'_k]}{n} + 0 = \frac{1}{K} \cdot 1 \cdot a'_k = \frac{a'_k}{K},$$

откуда, вычислив, что

$$a' = \frac{2\pi}{T} a = \frac{2\pi}{KT} a'_k = \frac{1}{T} \frac{2\pi}{Ka_1} a_k = \frac{a_1 K}{2\pi} \frac{2\pi}{Ka_1} a_k = a_k,$$

получим включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(a_k)$, а значит, верны включения (1.21).

4. Из (1.21) следует, что для функций z_1, z_2 выполнены условия (c) и (d) леммы 4, а из самой леммы 4, п. 2 настоящего доказательства и равенств (1.6) — утверждение теоремы.

Теорема 1 доказана.

Обратим внимание, что наше доказательство не было бы возможно, если бы не удалось построить такую ценную пару вектор-функций из леммы 5. Причем это замечение справедливо и для следующих в главах 2 и 3 доказательств теорем 2 и 3.

Глава 2

Счетные спектры

Настоящая глава целиком посвящена доказательству теоремы 2, из которой следует, что спектр показателя блуждаемости для ограниченной системы может содержать и *бесконечное* число значений, в данном случае *счетное*.

Обозначим через $\mathcal{I}$ класс, состоящий из всех *счетных ограниченных* подмножеств $X \subset (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ — рациональные числа), у каждого из которых точка 0 — *предельная*, и других предельных точек нет.

Теорема 2. *Для любого множества $X \in \mathcal{I}$ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$ такая, что верно соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X \cup 0.$$

По своей структуре доказательство теоремы 2 будет таким же, как доказательство теоремы 1: чтобы доказать существование системы A из теоремы 2, мы снова будем строить пару ее фундаментальных решений и затем по ним восстанавливать систему. Но алгоритм построения решений усложнится: потребуется ввести понятие разбиения множества натуральных чисел и несколько адаптировать лемму 5 о построении специальных функций из первой главы.

2.1 Разбиения

На первом шаге доказательства теоремы 1 мы по заданному конечному множеству X разделили множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ на $1+K$ непересекающихся подмножеств. В настоящей главе мы будем по заданному счетному множеству X разделять множество $\mathbb{N}$ на счетое число непересекающихся подмножеств, а семейство состоящее из этих подмножеств будем называть разбиением.

Определение 8. Семейство множеств $\{\mathbf{\Lambda}_k \subseteq \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$, назовем *разбиением* множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, если выполнены равенство

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{\Lambda}_k = \mathbb{N}$$

и для любых $k \neq k',\ k, k' \in \mathbb{N}$ соотношение $\mathbf{\Lambda}_k \cap \mathbf{\Lambda}_{k'} = \varnothing$.

Докажем вспомогательную лемму 6.

Лемма 6. *Если для последовательности чисел (l_i) и чисел $K \in \mathbb{N}$, $a > 0$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ верно равенство*

$$\sum_{i=(j-1)K+1}^{jK} l_i = a,$$

то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{a}{K}.$$

Доказательство. Пусть $m \equiv [n/K]$, тогда верна цепочка

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} l_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} a + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=mK+1}^{n} l_i =$$

$$= \frac{1}{K} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{mK}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a + 0 = \frac{1}{K} \cdot 1 \cdot a.$$

Лемма 6 доказана.

Следующая лемма 7 позволяет по заданной последовательности чисел из нужного нам класса строить разбиение, для элементов которого выполнены некоторые предельные равенства.

Лемма 7. *Если последовательность рациональных чисел* (a_k) *начинается с числа 1 и строго убывает, то существует такое разбиение* $\{\mathbf{\Lambda}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, *что при любом* k *для множества*

$$\Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{\infty} \mathbf{\Lambda}_h \tag{2.1}$$

верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Lambda_k}(i) = a_k. \tag{2.2}$$

Доказательство леммы 7 состоит из двух частей: в первой мы построим семейство множеств $\{\Lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, а во второй восстановим по ним искомое разбиение.

Для любого числа $Q \in \mathbb{N}$ разделим множество натуральных чисел на блоки: $\{1, \dots, Q\}$ —первый блок, $\{Q+1, \dots, 2Q\}$ — второй, и т.д. по Q идущих подряд элементов в каждом блоке, и введем обозначение для блока под номером $j \in \mathbb{N}$

$$B(Q, j) \equiv \{i \in \mathbb{N} \mid (j-1)Q + 1 \leq i \leq jQ\}.$$

Доказательство. 1. Положим $\Lambda_1 \equiv \mathbb{N}$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ дробь p_k/q_k $(p_k, q_k \in \mathbb{N})$ — это несократимое представление числа a_k, тогда определив числа

$$Q_0 \equiv 1, \quad Q_k \equiv \prod_{j=1}^{k} q_j,$$

для каждого $k \geq 2$ построим множество Λ_k такое, что выполнены неравенство

$$m_k > m_{k-1}, \quad \text{где} \quad m_k \equiv \min \Lambda_k, \tag{2.3}$$

и равенства

$$|\Lambda_k \cap B(Q_k, j)|/Q_k = p_k/q_k, \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

где $|\Lambda_k \cap B(Q_k, j)|$ — это число элементов множества $\Lambda_k \cap B(Q_k, j)$.

Будем строить множества $\{\Lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ по индукции. Если $k = 1$, то $a_1 = p_1 = q_1 = Q_1 = 1$ и равентва (2.4) для $\Lambda_1 = \mathbb{N}$ выполнены. Проведем шаг индукции. Пусть множесвто Λ_{k-1} построено.

А. При любом $j \in \mathbb{N}$ в блоке $B(Q_k, j)$ укладывается ровно q_k блоков ширины Q_{k-1}, а во всех вместе блоках ширины Q_k стоящих до блока $B(Q_k, j)$ укладывается ровно $h_0 \equiv (j-1)q_k$ блоков ширины Q_{k-1}, поэтому имеем разложение

$$B(Q_k, j) = \bigcup_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} B(Q_{k-1}, h),$$

из которого получаем равенство

$$\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j) = \bigcup_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} \Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, h). \tag{2.5}$$

Б. Домножив равенство из (2.4) на Q_k перепишем его ввиде

$$|\Lambda_k \cap B(Q_k, j)| = p_k Q_{k-1},$$

и заметим, что предположение индукции означает, что имеют место равенства

$$|\Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, j)| = p_{k-1} Q_{k-2}, \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

В. Из равенств (2.5) и (2.6), получим цепочку

$$|\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j)| = \sum_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} |\Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, h)| =$$

$$= q_k(p_{k-1} Q_{k-2}) = \frac{Q_k}{q_{k-1}} p_{k-1} = Q_k \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} > Q_k \frac{p_k}{q_k} = Q_{k-1} p_k.$$

Г. Пусть $\Delta \equiv Q_{k-1} p_k - q_k(p_{k-1} Q_{k-2}) > 0$.

Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{N}$, такого что $|\Omega| > \Delta$ обозначим через $\Omega^\Delta \subset \mathbb{N}$ — подмножество, которое получается из Ω, выкидыванием первых слева Δ элементов, тогда $|\Omega^\Delta| = |\Omega| - \Delta$.

Определим множество Λ_k равенствами

$$\Lambda_k \cap B(Q_k, j) \equiv \big(\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j)\big)^{\Delta}, \quad j \in \mathbb{N},$$

и заметим, что для Λ_k верны соотношения (2.3) и (2.4).

2. Докажем, что семейство множеств, определяемое равенствами

$$\boldsymbol{\Lambda}_k = \Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

является разбиением, и что для него верны равенства (2.1).

А. Из построения в п. 1 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ верно включение $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$, поэтому для любых $k, k' \in \mathbb{N}, k > k'$ имеем соотношения

$$\Lambda_k \subset \Lambda_{k'+1}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_k \cap \boldsymbol{\Lambda}_{k'} \subseteq \Lambda_k \cap (\Lambda_{k'} \setminus \Lambda_{k'+1}) = \varnothing.$$

Б. В силу неравенства (2.3) последовательность (m_k) возрастает, поэтому для любого $i \in \mathbb{N}$ определено число k_i такое, что $m_{k_i} > i$.

Из соотношений

$$i \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_{k_i} = \bigcup_{k=1}^{k_i-1} \Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1} = \bigcup_{k=1}^{k_i-1} \boldsymbol{\Lambda}_k$$

следует, что при некотором $k \le k_i - 1$ имеет место включение $i \in \boldsymbol{\Lambda}_k$, но число i — любое, поэтому верно равенство

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \boldsymbol{\Lambda}_k = \mathbb{N},$$

из которого, учитывая п. А, получаем, что семейство $\{\boldsymbol{\Lambda}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является разбиением.

В. При любом $k \in \mathbb{N}$ для любого $i \in \Lambda_k$ верна цепочка

$$i \in \Lambda_k \setminus \Lambda_{k_i} = \bigcup_{h=k}^{k_i-1} \Lambda_h \setminus \Lambda_{h+1} = \bigcup_{h=k}^{k_i-1} \boldsymbol{\Lambda}_h \subset \bigcup_{h=k}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_h,$$

откуда получаем соотношение $\Lambda_k \subset \bigcup\limits_{h=k}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_h$.

При любом $h \ge k$ для любого $i \in \boldsymbol{\Lambda}_h$ имеет место цепочка

$$i \in \boldsymbol{\Lambda}_h \subset \Lambda_h \subset \Lambda_k,$$

из которой получаем соотношение $\bigcup\limits_{h=k}^{\infty} \mathbf{\Lambda}_h \subset \Lambda_k$. Равенство (2.1) доказано.

3. Для каждого $k \in \mathbb{N}$, применяя лемму 6 к последовательности $(l_i) = (\chi_{\Lambda_k}(i))$ и числам $K = Q_k$, $a = Q_{k-1}p_k$ получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Lambda_k} = \frac{Q_{k-1}p_k}{Q_k} = \frac{p_k}{q_k} = a_k.$$

Лемма 7 доказана.

2.2 Пара вектор-функций на отрезке

Лемма 8 в настоящей главе будет служить для построения специальных функций, подобно лемме 5 в первой главе. Само построение пары вектор-функций будет почти таким же, но нам понадобится более подробная формулировка леммы.

Лемма 8. *Для любых чисел $T > 0$ и $1 < c^- < c^+$ существуют функции $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}' \in \mathrm{C}^1([0,T], \mathbb{R}^2_*)$, для которых выполнены следующие четыре утверждения:*

(i) *верны равенства*

$$\boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}(T) = (1,0)^\top, \quad \boldsymbol{\zeta}'(0) = \boldsymbol{\zeta}'(T) = (0,1)^\top;$$
$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(0) = \dot{\boldsymbol{\zeta}}(T) = \dot{\boldsymbol{\zeta}}'(0) = \dot{\boldsymbol{\zeta}}'(T) = (0,0)^\top;$$

(ii) *справедливы оценки*

$$|\boldsymbol{\zeta}|, |\boldsymbol{\zeta}'|, |\dot{\boldsymbol{\zeta}}|, |\dot{\boldsymbol{\zeta}}'| \le b \equiv \max\{|(x,y)^\top|, |(x-1, y+1)^\top| \cdot c^-\};$$
$$\text{где} \quad x \equiv c^- c^+, \quad y \equiv c^- + c^+ - 1,$$

(iii) *верна оценка*

$$\det(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}') \ge \varepsilon \equiv \sin\left(3\pi/4 + \operatorname{arctg}(y/x)\right) > 0;$$

(iv) *верно включение $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$, и для любого $c \in \mathbb{R}$ верно соответствующее включение*

$$c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}' \in \begin{cases} \mathcal{A}_1(T, \varphi_c), & \text{если} \quad c \in [c^-, c^+]; \\ \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c)), & \text{если} \quad c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+], \end{cases}$$

где $\varphi_c \equiv \pi/2 - \operatorname{arctg} c$, *а функция* $d : \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+] \to (0, \pi/2]$ *определена равенствами*

$$d(c) \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \textit{при} \quad c \in (-\infty, 0]; \\ \min\left\{\dfrac{\pi}{2}, D(c)\right\}, & \textit{при} \quad c \in (0, c^-) \cup (c^+, y); \\ \varphi_c, & \textit{при} \quad c \in [y, \infty), \end{cases}$$

$$D : (0, c^-) \cup (c^+, y) \to \mathbb{R}^+, \quad D(c) \equiv \operatorname{arctg}\frac{1}{c} - \operatorname{arctg}\frac{y-c}{x-c}.$$

Доказательство. 1. Определим функции $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}'$ на $[0, T]$ точно также, как в п. 1 доказательства леммы 5, наложив на функцию g дополнительное условие

$$\dot{g} \le c^-,$$

и получим, что верно утверждение (i).

2. Утверждение (ii) следует из неравенств

$$|\boldsymbol{\zeta}|, |\boldsymbol{\zeta}'| \le |(x, y)^\top|, \quad |\dot{\boldsymbol{\zeta}}|, |\dot{\boldsymbol{\zeta}}'| \le |(x-1, y+1)| \cdot \max_{t \in [0, Q]} \dot{g}(t).$$

3. Утверждения (iii) и (iv) доказаны соответственно в п.п. 2 и 3 доказательства леммы 5.

Лемма 8 доказана.

2.3 Решения системы со счетным спектром

Доказательство теоремы 2 состоит в построении решений удовлетворяющих условиям леммы 4 из первой главы при $S = X \cup \{0\}$, где X — счетноеное множество из класса $\mathcal{I}$, и восстановлении по решениям системы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $X \in \mathcal{I}$ и $M \equiv \max X$.

1. Фиксировав значения c^-, c^+ и $(c_k^+)_{k=1}^\infty$, для которых верны соотношения

$$1 < c^- < c_1^+ < \dots < c_k^+ < \dots < c^+, \quad \lim_{k\to\infty} c_k^+ = c^+$$

и неравенство $c^+ < c^- + c_1^+ - 1$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ по тройке чисел $T \equiv (2\pi)/M$, c^- и c_k^+, применяя лемму 8, построим вектор-функции $\boldsymbol{\zeta}_k, \boldsymbol{\zeta}'_k$, значения $b_k, \varepsilon_k, x_k, y_k$ и функции d_k, D_k.

2. Положим $C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+]$ и, заметив, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение $C_0 \subset \mathrm{D}(d_k) = \mathbb{R} \setminus [c^-, c_k^+]$ ($\mathrm{D}(d_k)$ — это область определения функции d_k) , определим функцию $d : C_0 \to (0, \pi/2]$ такую, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ при всех $c \in C_0$ верно неравенство

$$d(c) \leq d_k(c). \tag{2.7}$$

А. Для любого $k \in \mathbb{N}$ из цепочки $c^+ < c^- + c_1^+ - 1 = y_1$ получим неравенство $c^+ < y_k = c^- + c_k^+ - 1$, и положив $y \equiv c^- + c^+ - 1$, выпишем цепочку

$$0 < c^- < c_k^+ < c^+ < y_k < y. \tag{2.8}$$

Б. Если $c \in (-\infty, 0]$, то для любого k, неравенство (2.7) верно при $d(c) \equiv \pi/4$, а если $c \in [y, \infty)$ — при $d(c) \equiv \varphi_c$.

В. Заметим, что из цепочки (2.8) следует, что при любом k верно соотношение $C_k \equiv (0, c^-) \cup (c^+, y_k) \subset \mathrm{D}(D_k) = (0, c^-) \cup (c_k^+, y_k)$ и положим $x \equiv c^- c^+$. При всех $c \in C_k$ для разности аргументов арктангенсов функции D_k верна оценка

$$\frac{1}{c} - \frac{y_k - c}{x_k - c} = \frac{(c - c^-)(c - c_k^+)}{c(x_k - c)} > e(c)(c - c_k^+) > 0, \tag{2.9}$$

$$e(c) \equiv \frac{c - c^-}{c(x - c)},$$

причем, если $c < c^-$, то верна также оценка

$$|c - c_k^+| = c_k^+ - c > c_1^+ - c > 0, \tag{2.10}$$

а если $c > c^+$, то — оценка

$$|c - c_k^+| = c - c_k^+ > c - c^+ > 0. \tag{2.11}$$

Г. На множестве $(0, c^-) \cup (c^+, y)$ определим функцию

$$D(c) \equiv \begin{cases} m(c)e(c)(c_1^+ - c), & \text{при} \quad c \in (0, c^-); \\ m(c)e(c)(c^+ - c), & \text{при} \quad c \in (c^+, y), \end{cases}$$

$$\text{где}\quad m(c) \equiv \min_{\xi \in \left(0, \frac{1}{c}\right]} \dot{\operatorname{arctg}}(\xi) = \dot{\operatorname{arctg}} \frac{1}{c} > 0,$$

и из оценок (2.9), (2.10), (2.11) получим, что при любом k и при всех $c \in C_k$ для функции D_k верно неравенство $D(c) < D_k(c)$, откуда следует, что при всех $c \in (0, c^-) \cup (c^+, y)$ для функции $d(c) \equiv \min\left\{D(c), \frac{\pi}{2}, \varphi_c\right\}$ верно неравенство (2.7). Функция d определена.

3. Для строго убывающей последовательности (a_k), определяемой равенствами

$$X' \equiv \left\{\frac{a}{M} \mid a \in X\right\}, \quad a_1 \equiv \max X' = 1,$$

$$a_k \equiv \max\left(X' \setminus \{a_h \mid h \in \overline{1, k-1}\}\right), \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

по лемме 7 построим разбиение $\{\mathbf{\Lambda}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Для любого $i \in \mathbb{N}$ выберем k такое, что $i \in \mathbf{\Lambda}_k$ и положим $\kappa(i) = k$, определив таким образом функицию $\kappa : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Определим решения z_1, z_2 равенствами

$$\zeta_{z_1}^{T,i} \equiv \boldsymbol{\zeta}_{\kappa(i)}, \quad \zeta_{z_2}^{T,i} \equiv \boldsymbol{\zeta}'_{\kappa(i)}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

А. Из утверждения (i) леммы 8 следует, что решения z_1 и z_2 непрерывно-дифференцируемы.

Б. Из утверждения (ii) леммы 8 и построения (2.12) получаем, что для решений z_1 и z_2 выполнено условие (a) леммы 4 при

$$b \equiv \sup\{b_k, k \in \mathbb{N}\} = \max\{|(x, y)^\top|, |(x-1, y+1)^\top| \cdot c^-\}.$$

В. Для любого k проведем выкладку

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{c_1^+ + (c^- - 1)}{c^- c_1^+} = \frac{c_1^+ c_k^+ + c_k^+(c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+},$$

$$\frac{y_k}{x_k} = \frac{c_k^+ + (c^- - 1)}{c^- c_k^+} = \frac{c_k^+ c_1^+ + c_1^+(c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+} < \frac{y_1}{x_1},$$

и выведем цепочку

$$\varepsilon_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}\right) \leq \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{y_k}{x_k}\right) = \varepsilon_k$$

из которой, опираясь на утверждения (iii) леммы 8 и построение (2.12), получаем, что для z_1 и z_2 выполнено и условие (b) леммы 4 при $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$.

4. Для любого решения $z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\}$, снова опираясь на формулы (2.12) и утверждение (iv) леммы 8, определим значение a, при котором выполнено включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(a)$.

А. Если $z = z_1$, то решение z удовлетворяет условиям леммы 2 при $l_i = 0,\ i \in \mathbb{N}$, $a = 0$, $\varphi_0 = 0$ и $\delta = \pi/2$, поэтому $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

Б. Если $z = cz_1 + z_2$ и $c \in C_0$, то из построения функции d в п. 2 настоящего доказательства, следует, что для решения z выполнены условия леммы 2 при $l_i = 0,\ i \in \mathbb{N}$, $a = 0$, $\varphi_0 = \varphi_c$ и $\delta = d(c)$, а значит, снова верно включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

В. Если $z = cz_1 + z_2$ и при некотором $k \in \mathbb{N}$ верно включение $c \in (c^+_{k-1}, c^+_k]$ (при $k = 1$ считаем, что $c^+_0 \equiv c^-$), то имеют место включения

$$\begin{aligned} &c \notin [c^-, c^+_h], \ \text{ при } \quad h \le k-1;\\ &c \in [c^-, c^+_h], \ \text{ при } \quad h \ge k, \end{aligned}$$

поэтому из леммы 7 и леммы 2 при

$$l_i = \chi_{\Lambda_k}(i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \text{где} \quad \Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_h,$$

$$a = a_k, \quad \varphi_0 = \varphi_c, \quad \delta = \min_{h \in \overline{1,k-1}} d_h(c),$$

(при $k = 1$, число $\delta \in (0, \pi/2]$ — произвольное) учитывая, что

$$a' = \frac{2\pi}{T} a_k = \frac{2\pi M}{2\pi} a_k = M a_k,$$

получаем включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(M a_k)$. Аналогично при $z = c^- z_1 + z_2$ получим включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(M a_1)$.

Г. Пусть $z = c^+ z_1 + z_2$.

а) Из леммы 8 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ для функции $\zeta_k \equiv c^+ \boldsymbol{\zeta}_k + \boldsymbol{\zeta}'_k$ верно включние $\zeta_k \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, d_k(c^+))$, из которого вытекает включние $\zeta_k \in \bar{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_{c^+})$.

б) Из цепочки (2.8) получаем, что для любого k верно включение $c^+ \in (c^+_k, y_k)$, поэтому определено значение $D_k(c^+)$.

Для разности аргументов арктангенсов в формуле, определяющей $D_k(c^+)$, имеет место равенство

$$\frac{1}{c^+} - \frac{y_k - c^+}{x_k - c^+} = \frac{(c^+ - c^-)(c^+ - c_k^+)}{c^+(x_k - c^+)}$$

из которого следует, что последовательность $(D_k(c^+))_{k=1}^{\infty}$ убывает и стремится к нулю (для оценки знаменателя используем цепочку $x_k - c^+ > y_k - c^+ > y_1 - c^+ > 0$).

в) Пусть номер k' такой, что выполнено неравенство $D_{k'}(c^+) \leq \min\{\pi/2, \varphi_{c^+}\}$.

г) Точка ноль является точкой сгущения множества X, поэтому последовательность (a_k) стремится к нулю. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем номер $k \geq k'$, такой, что $a_k < \varepsilon$, затем фиксируем угол $\delta \in (D_k(c^+), D_{k-1}(c^+))$ и опираясь на п.п. а), б), в) получим, что для любого $h \in \overline{1, k-1}$ выполнено включение $\zeta_h \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, \delta)$.

д) Из п.п. а), г) и построения (2.12) следует, что для решения z выполнены соотношения (1.4) при $\Lambda = \Lambda_k$, а в силу леммы 7 выполнено и неравенство (1.5), а значит, решение z удовлетворяет условиям леммы 3 при $\varphi_0 = \varphi_{c^+}$, откуда получаем включение $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}(0)$.

5. Из п. п. 3 и 4 настоящего доказательства следует, что решения z_1, z_2 и множество $S = X \cup \{0\}$ удовлетворяют условиям леммы 4, а значит, получаем, что искомая система A существует. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, такой что $\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) = X$ ($\varkappa$ — произвольный показатель из $\mathcal{K}^n$), и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ система, определенная равенствами

$$A'(t) = A(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяет равенству $\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A') = X'$, где

$$X' \equiv \left\{\frac{a}{\lambda} \mid a \in X\right\},$$

поэтому результат теоремы 2 можно усилить, заменив класс $\mathcal{I}$, на класс $\mathcal{I}'$, состоящий из множеств класса $\mathcal{I}$ и всех подобных им (если имеет место включение $A \in \mathcal{M}_0^2$, то верно и включение $A' \in \mathcal{M}_0^2$).

Глава 3

Континуальные спектры

В работе [31] было установлено (с помощью эргодической теоремы), что спектр частот Сергеева некоторого линейного автономного уравнения 4-го порядка содержит целый отрезок. Далее, в работе [97] этот факт был установлен для некоторого периодического линейного уравнения третьего порядка, а в работе [99] — и для линейной двумерной *неограниченной* системы. В настоящей главе мы покажем, что континуальный спектр может быть также и у *ограниченной* двумерной системы.

Доказательства в работах [97] и [99] тесно связаны с проведенным в работе [31] исследованием частоты суммы двух гармонических колебаний с несоизмеримыми коэффициентами при аргументе, например, $\cos t + \cos\sqrt{2}t$. Мы, в свою очередь, только позаимствуем у авторов работы [31] идею использовать для построения примера *уравнения* с континуальным спектром *эргодичность* иррациональной обмотки тора, только вместо обмотки тора мы для построения *системы* с континульным спектром будем применять *равномерность* распределения в отрезке $[0, 1]$ дробных частей от чисел последовательности $i\theta, i \in \mathbb{N}$, где θ — это произвольное иррациональное число.

Обозначим через $\dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$ множество всех решений $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}^2}$, на которых каждый показатель $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ имеет точный предел.

Теорема 3. *Для любого $\lambda > 0$ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$, для которой выполнены включение $\mathcal{S}_*(A) \subset \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$ и равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}^2}(A) = [0, \lambda].$$

В настоящей главе мы снова пройдем путь из подготовки к построению системы и самого построения и увидим, что в случае континуального спектра алгоритм склеивания решений окажется очень простым и удивительным по сравнению с конечным и счетным случаями.

3.1 Вспомогательные леммы

Теперь мы на ряду с показателями блуждаемости будем вычислять показатели колеблемости, поэтому нам потребуются несколько иные определения множеств вектор-функций на отрезке.

Вспомним три условия для вектор-функций ζ из множества $\mathcal{A}(T, \varphi_0)$:

1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi \equiv \phi_\zeta$;

2) функция ϕ *монотонна* на отрезках $[0, Q]$ ($Q \equiv T/4$), и $[Q, H]$ ($H \equiv T/2$);

3) при каждом $t \in (0, H]$ верно равенство $\phi(H + t) = \phi(H - t)$.

Фиксировав $T = 2\pi$, для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ определим множество $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(\varphi_0) \equiv \mathcal{A}(T, \varphi_0)$ и через $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{B}'(\varphi_0)$ обозначим его подмножество, состоящее только из функций $\zeta \in \mathcal{B}(\varphi_0)$, удовлетворяющих **дополнительным условиям**:

4) $\dot{\phi}(t) > 0$ при всех $t \in (0, Q) \cup (Q, H)$;

5) $\phi(Q) - \varphi_0 \leq \pi/2$.

Определим подмножество $\mathcal{B}_1(\varphi_0) \subset \mathcal{B}'(\varphi_0)$ и для произвольного $\delta \in (0, \pi/2)$ подмножества $\mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta) \subset \mathcal{B}(\varphi_0)$ и $\bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0, \delta) \subset \mathcal{B}'(\varphi_0)$ формулами

$$\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta) \equiv \{\zeta \in \mathcal{B} \mid \phi(Q) - \varphi_0, \phi(H) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta)\}, \qquad (3.1)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_0 \equiv \bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0, \delta) \equiv \{\zeta \in \mathcal{B}' \mid \phi(H) - \varphi_0 \in (\pi - \delta, \pi]\}, \qquad (3.2)$$

$$\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_1(\varphi_0) \equiv \{\zeta \in \mathcal{B}' \mid \phi(H) - \varphi_0 \in (\pi, 3\pi/2]\}. \qquad (3.3)$$

Для получения оценки сверху при подсчете показателей блуждаемости в первой главе мы использовали лемму 1. Следующая лемма 9 будет выполнять такую же роль при подсчете показателей колеблемости.

Лемма 9. *Для любых чисел* $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ *и* $\delta \in (0, \pi/2)$ *существует вектор* $m \in S^1$ *такой, что для каждой функции* $\zeta \in \mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta) \cup \bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0, \delta) \cup \mathcal{B}_1(\varphi_0)$ *при любом* α *верно соответствующее равенство*

$$\mathrm{N}_\alpha(\langle \zeta, m \rangle, T) = \begin{cases} 0, & \zeta \in \mathcal{B}_0; \\ 2, & \zeta \in \bar{\mathcal{B}}_0 \cup \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $m \equiv (\cos\psi, \sin\psi)$, где $\psi \equiv \varphi_0 + \pi/2 - \delta$, тогда для функции $\langle \zeta, m \rangle$ имеет место цепочка

$$\langle \zeta, m \rangle = |\zeta| \cos\phi \cos\psi + |\zeta| \sin\phi \sin\psi = |\zeta| \cos(\phi - \psi). \qquad (3.4)$$

1. Если $\zeta \in \mathcal{B}_0$, то из условий 1, 2 и формулы (3.1) следует, что при любом $t \in [0, H]$ верно включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta)$, поэтому

$$\phi(t) - \psi = \phi(t) - \varphi_0 - \pi/2 + \delta \in [-\pi/2 + \delta, \pi/2), \quad t \in [0, H],$$

а значит, функция $\cos(\phi - \psi)$ вообще не имеет нулей на отрезке $[0, H]$, откуда, используя цепочку (3.4), при каждом α получаем равенство $\mathrm{N}_\alpha(\langle \zeta, m \rangle, H) = 0$.

2. Если $\zeta \in \bar{\mathcal{B}}_0 \cup \mathcal{B}_1$, то из условий 1, 4 и 5 получаем, что функция $\phi - \psi$ на отрезке $[0, Q]$ возрастает от значения

$$\phi(0) - \psi = \varphi_0 - \varphi_0 - \pi/2 + \delta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

до значения

$$\phi(Q) - \psi = \phi(Q) - \varphi_0 - \pi/2 + \delta \leq \delta < \pi/2,$$

а на отрезке $[Q, H]$ возрастает до значения $\phi(H) - \psi$, причем из формул (3.2) и (3.3) следует, что

$$\phi(H) - \psi = \phi(H) - \varphi_0 - \pi/2 + \delta \in (\pi/2, \pi + \delta),$$

поэтому функция $\phi - \psi$ на всем отрезке $[0, H]$ принимает значение $\pi/2$ ровно один раз в некоторой точке $\lambda \in (Q, H)$. При любом $t \in [0, H]$ верно включение $\phi(t) - \psi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, а значит, в силу (3.4) заключаем, что λ — это единственный ноль функции $\langle \zeta, m \rangle$ на отрезке $[0, H]$. Из (3.4) получим цепочку

$$\dot{\langle \zeta, m \rangle} = \frac{d}{dt}(|\zeta| \cos(\phi - \psi)) = |\dot{\zeta}| \cos(\phi - \psi) - |\zeta| \sin(\phi - \psi)\dot{\phi},$$

а из нее, равенства $\phi(\lambda) - \psi = \pi/2$ и условия 4 — соотношение

$$\langle \zeta(\dot{\lambda}), m \rangle = -|\zeta(\lambda)|\dot{\phi}(\lambda) \neq 0,$$

из которого следует, что число λ — это и строгая смена знака и некратный ноль функции $\langle \zeta, m \rangle$, откуда, используя замечание 1, выводим, что при каждом α верно равенство $\mathrm{N}_\alpha(\langle \zeta, m \rangle, H) = 1$.

3. Из результатов п. п. 1, 2 и условия 3 получаем утверждение леммы.

Лемма 9 доказана.

Лемма 10 представляет собой более подробную формулировку леммы 1 из первой главы, причем с использованием новых множеств вектор-функций.

Лемма 10. *Для произвольных чисел* $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует оператор* $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$ *такой, что для каждой функции* $\zeta \in \mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta) \cup \bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0, \delta) \cup \mathcal{B}_1(\varphi_0)$ *верны утверждения:*

1°) *функция* $\phi_{L\zeta}$ *монотонна на отрезках* $[0, Q]$ *и* $[Q, H]$, *а при* $\zeta \in \bar{\mathcal{B}}_0 \cup \mathcal{B}_1$ *монотонна на* $[0, H]$;

2°) *выполнено соответствующее неравенство*

$$\mathrm{P}(L\zeta, T) \leq \begin{cases} \varepsilon, & \zeta \in \mathcal{B}_0; \\ 6\pi, & \zeta \in \bar{\mathcal{B}}_0; \\ 2\pi + \varepsilon, & \zeta \in \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

Доказательство. 1. По лемме 1 по числам $T = 2\pi$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2)$ и $\varepsilon > 0$ выберем оператор L.

Утверждение 2° получим из соотношений $\mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta) \subset \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$, $\bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0, \delta) \subset \bar{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \cup \mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ и $\mathcal{B}_1(\varphi_0) \subset \mathcal{B}_1(T, \varphi_0)$.

2. В доказательстве леммы 1 установлено, что для оператора L верно равенство $L = S_n R,\ n \in \mathbb{N}$, где

$$S_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R \equiv \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \psi \equiv \varphi_0 - \delta/2.$$

Оператор R — это поворот по часовой стрелке на угол ψ, а оператор S_n — растяжение вдоль оси ординат, поэтому промежутки монотонности функции $\phi_{L_n\zeta}$ такие же, как у функции ϕ, следовательно, для оператора L верно утверждение 1°.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11 при вычислении показателей колеблемости и блуждаемости поможет получать оценку снизу (утверждение аналогичное утверждению настоящей леммы было необходимо и в первой главе в лемме 2, и там оно было установлено внутри доказательства леммы 2, а именно, в п. А).

Лемма 11. *Для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, любой функции $\zeta \in \mathcal{B}_1(\varphi_0)$ и любого вектора $m \in S^1$ при каждом α верна оценка*

$$\mathrm{N}_\alpha(\langle\zeta, m\rangle, T) \geq 2. \tag{3.5}$$

Лемма 11 означает, что если вектор-функция лежит во множестве $\mathcal{B}_1$, т.е. совершает целый полуоборот, то какой бы единичный вектор мы не взяли, проекция этой функции на вектор будет иметь не меньше двух нулей.

Доказательство. Для произвольного вектора m пусть ψ — это такой угол, что $m = (\cos\psi, \sin\psi)$, тогда для функции ζ верна цепочка (3.4). Функция $\phi - \psi$ на отрезке $[0, H]$ непрерывна и в силу условия 4 возрастает от значения $\varphi_0 - \psi$ до значения $\phi(H) - \psi$, причем из формулы (3.3) следует, что ширина отрезка $[\varphi_0, \phi(H)]$, а значит, и отрезка $[\varphi_0 - \psi, \phi(H) - \psi]$ больше π, поэтому функция $\cos(\phi - \psi)$ на интервале $(0, H)$ имеет хотя бы одну строгую смену знака. Из цепочки (3.4) вытекает оценка $\mathrm{N}_-(\langle\zeta, m\rangle, H) \geq 1$, а оценку (3.5) при каждом α получаем из условия 3 и замечания 1. Лемма 11 доказана.

Докажем вспомогательную лемму 12.

Лемма 12. *Если для последовательности действительных чисел* (a_n) *верно равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = a$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_{[t/T]}}{t} = \frac{a}{T}.$$

Доказательство.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} a_{[t/T]} = \frac{1}{T} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{[t/T]T}{t} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{1}{[t/T]} a_{[t/T]} = \frac{1}{T} \cdot 1 \cdot a.$$

Лемма 12 доказана

3.2 Вычисление показателей колеблемости и блуждаемости

В настоящей главе решения системы будут иметь более сложный вид, чем решения в теоремах 1 и 2, и лемма 2 для вычисления показателей уже не будет применима. Вместо нее мы будем использовать леммы 13 и 14.

Определение 9. Последовательность дробных долей (θ_i) называется *равномерно распределенной по модулю* 1 (сокращенно р. р. мод 1), если для каждого интервала $[a, b) \subset [0, 1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{[a,b)}(\theta_i) = b - a,$$

где $\chi_{[a,b)}$ — это характеристическая функция промежутка $[a, b)$.

Пример такой последовательности — $\theta_i \equiv \{i\pi\},\ i \in \mathbb{N}$, где $\{i\pi\}$ — это дробная часть числа $i\pi$ (доказательство см. [50, §2, пример 2.1]), причем на месте числа π может стоять любое иррациональное число.

Лемма 13. *Пусть заданы решение* $z \in \mathcal{S}^2_*$, *угол* $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, *р. р. мод 1 последовательность дробных долей* $\theta_i \notin \mathbb{Q},\ i \in \mathbb{N}$, *и вектор-функция*

$\xi \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}^2_*)$ *такая, что функция* ϕ_ξ *возрастает на отрезке* $[0,1]$, *и имеет место соотношение* $[\phi_\xi(0),\phi_\xi(1)] \subset [\varphi_0,\varphi_0+3\pi/2]$. *Если для решения* z *верны включения*

$$\zeta^i = \zeta_z^{T,i} \in \mathcal{B}'(\varphi_0), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

и равенства

$$\zeta^i(H) = \xi(\theta_i), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

то выполнено включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(a)$, *в котором значение* a *зависит от расположения промежутка* $(\phi_\xi(0),\phi_\xi(1)]$ *относительно точки* $\breve{\varphi} \equiv \varphi_0+\pi$ *следующим образом*

$$a = \begin{cases} 0, & \textit{если} \ \ \phi_\xi(1) < \breve{\varphi}; \\ 1-\theta, & \textit{если} \ \ \breve{\varphi} \in (\phi_\xi(0),\phi_\xi(1)], \quad \phi_\xi(\theta)=\breve{\varphi}, \quad \theta \in (0,1]; \\ 1, & \textit{если} \ \ \breve{\varphi} \le \phi_\xi(0). \end{cases}$$

Геометрически график в фазовом пространстве у решения из условия леммы 13 имеет следующий вид: он похож на гроздь, состоящую из вектор-функций из класса $\mathcal{B}'$, у которых правые концы совпадают и имеют угловую координату φ_0, а левые концы распределены вдоль графика вектор-функции ξ. Значение показателей на решении зависит от расположения грозди относительно прямой, проходящей через начало координат и точку на единичной окружнойсти с угловой координатой φ_0: если все ветви грозди расположены с одной стороны относительно этой прямой, то показатели равны нулю, если часть ветвей пересекают прямую, то показатели принимают значение $1-\theta$, а если пересекают все, то значение показателей равно 1.

Доказательство. I. Покажем, что $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(1-\theta)$ в случае, когда функция ϕ_ξ в некоторой точке $\theta \in (0,1]$ принимает значение $\breve{\varphi}$.

1. Используя непрерывность и возрастание функции ϕ_ξ на отрезке $[0,1]$, выберем такое рациональное число $\theta' \in (0,\theta)$, что $\breve{\varphi}-\phi_\xi(\theta') < \pi/2$, и положим $\delta \equiv \breve{\varphi}-\phi_\xi(\theta') \in (0,\pi/2)$.

Определим функцию $\phi' \equiv \phi_\xi - \varphi_0$ и из равенств (3.7) получим равенства

$$\phi_{\zeta^i}(H)-\varphi_0 = \phi_\xi(\theta_i)-\varphi_0 = \phi'(\theta_i), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

а затем из возрастания функции ϕ' на $[0,1]$, соотношения $[\phi'(0),\phi'(1)] \subset [0,3\pi/2]$, равенств $\phi'(\theta') = \pi - \delta$, $\phi'(\theta) = \pi$ и (3.8), соотношений (3.6) и формул (3.1), (3.2), (3.3) выведем включения

$$\zeta^i \in \begin{cases} \mathcal{B}_0(\varphi_0,\delta), & \theta_i \in (0,\theta'); \\ \bar{\mathcal{B}}_0(\varphi_0,\delta), & \theta_i \in (\theta',\theta]; \\ \mathcal{B}_1(\varphi_0), & \theta_i \in (\theta,1), \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

(члены последовательности (θ_i) иррациональны, поэтому никогда не принимают значение θ'; если $\theta = 1$, промежуток $(\theta,1)$ считается пустым множеством).

2. Из определений 2, 4 и 5 выведем неравенства

$$\check{\varkappa}^{\circ}(z) \leq \check{\varkappa}^{\bullet}(z) \leq \hat{\varkappa}^{\bullet}(z), \tag{3.10}$$

$$\check{\varkappa}^{\circ}(z) \leq \hat{\varkappa}^{\circ}(z) \leq \hat{\varkappa}^{\bullet}(z), \tag{3.11}$$

в которых на месте $\varkappa$ может стоять ν_α при любом α или ρ.

3. Для любого α докажем равенства

$$\check{\nu}^{\bullet}_{\alpha}(z) = \hat{\nu}^{\bullet}_{\alpha}(z) = \check{\nu}^{\circ}_{\alpha}(z) = \hat{\nu}^{\circ}_{\alpha}(z) = \check{\rho}^{\circ}(z) = \hat{\rho}^{\circ}(z) = 1 - \theta.$$

А. Из соотношений (3.9) и леммы 11 для любого $t \in \mathbb{R}^+$ и любого вектора $m \in S^1$ получим цепочку

$$\mathrm{N}_\alpha(\langle z,m\rangle,t) \geq \sum_{i=1}^{[t/T]} \mathrm{N}_\alpha(\langle \zeta^i,m\rangle,T) \geq 2\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i),$$

а из нее, используя определение 9 и применяя лемму 12 к последовательности (a_n), где $a_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i)$, выведем оценку снизу

$$\check{\nu}^{\circ}_{\alpha}(z) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in S^1} \frac{\pi}{t}\mathrm{N}_\alpha(\langle z,m\rangle,t) \geq \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in S^1} \frac{2\pi}{t}\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) =$$

$$= \varliminf_{t\to\infty} \frac{2\pi}{t}\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) = \frac{2\pi}{T}(1-\theta).$$

Б. Для чисел φ_0 и δ по лемме 9 построим вектор m' и, опираясь на соотношения (3.9) и равенства из утверждения леммы 9, для любого t получим равенство

$$\mathrm{N}_\alpha(\langle z, m'\rangle, t) = 2\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) + 2\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta',\theta]}(\theta_i) + \mathrm{N}_\alpha\left(\langle \zeta^{[t/T]+1}, m'\rangle, \{t/T\}T\right),$$

а затем, снова используя определение 9 и лемму 12, вычислим предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\mathrm{N}_\alpha(\langle z, m'\rangle, t) = \frac{2\pi}{T}(1-\theta) + \frac{2\pi}{T}(\theta-\theta') + 0. \tag{3.12}$$

В. Из неравенств (3.10) при $\varkappa = \nu_\alpha$, оценки п. А и равенства (3.12) получаем цепочку

$$1-\theta \le \hat{\nu}_\alpha^\bullet(z) = \inf_{m\in S^1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\mathrm{N}_\alpha(\langle z, m\rangle, t) \le$$

$$\le \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\mathrm{N}_\alpha(\langle z, m'\rangle, t) = 1-\theta+(\theta-\theta').$$

Число θ' в п. 1 может быть выбрано сколь угодно близко к числу θ, а значит, из полученной цепочки следует, что пределы в определении величины $\hat{\nu}_\alpha^\bullet(z)$ можно заменить на обычные, и верно равенство $\hat{\nu}_\alpha^\bullet(z) = 1-\theta$. Из аналогичной цепочки вытекает, что в определении величины $\check{\nu}_\alpha^\bullet(z)$ также можно заменить пределы, и что $\check{\nu}_\alpha^\bullet(z) = 1-\theta$.

Г. Из неравенств (3.11) при $\varkappa = \nu_\alpha$, оценки п. А и равенства $\hat{\nu}_\alpha^\bullet(z) = 1-\theta$ получаем равенства $\check{\nu}_\alpha^\circ(z) = \hat{\nu}_\alpha^\circ(z) = 1-\theta$, из которых вытекает, что пределы в определениях величин $\check{\nu}_\alpha^\circ(z)$ и $\hat{\nu}_\alpha^\circ(z)$ также можно заменить на обычные.

Используя результат о совпадении слабых частот гиперкорней и слабых показателей блуждаемости [71, теорема 4], получим равенства $\check{\rho}^\circ(z) = \hat{\rho}^\circ(z) = 1-\theta$, а из этих равенств — точность пределов в величинах $\check{\rho}^\circ(z)$ и $\hat{\rho}^\circ(z)$.

4. Докажем недостающие равенства

$$\check{\rho}^\bullet(z) = \hat{\rho}^\bullet(z) = 1-\theta. \tag{3.13}$$

А. Для чисел φ_0, δ и для произвольного $\varepsilon \in (0,\pi]$ по лемме 10 построим оператор L'.

Для любого i из равенства $\phi_{\zeta^i}(0) = \varphi_0$ и линейности опратора L' выведем равенство $\phi_{L'\zeta^i}(0) = \phi_{L'\zeta^1}(0)$, а затем, используя утверждение 1° леммы 10, получим цепочку

$$\mathrm{P}(L'\zeta^i, T) = 2\int_0^H |\dot{\phi}_{L'\zeta^i}(\tau)|\,d\tau = 2|\phi_{L'\zeta^i}(H) - \phi_{L'\zeta^i}(0)| =$$

$$= 2|\phi_{L'\xi}(\theta_i) - \phi_{L'\zeta^1}(0)| \equiv f(\theta_i). \qquad (3.14)$$

Функция $f(\theta)$ непрерывна, поэтому из критерия Вейля (см. [99,§1, теорема 1.1]) вытекает, что следующий предел существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(L'\zeta^i, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) \equiv b.$$

Из утверждения 2° леммы 10 для любого t выведем оценку

$$\Delta(t) \equiv \mathrm{P}\left(L'\zeta^{[t/T]+1}, \{t/T\}T\right) \le 6\pi,$$

а из нее и леммы 12 получим, что следующий предел также существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L'z, t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{[t/T]} \mathrm{P}(L'\zeta^i, T) + \Delta(t)\right) = \frac{b}{T} + 0. \qquad (3.15)$$

Б. Теперь оценим значение b/T. Снова используя утверждение 2° леммы 10 и соотношения (3.9), выведем неравенство для любого t

$$\mathrm{P}(L'z, t) \le (2\pi + \varepsilon)\sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) + 6\pi \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(\theta',\theta]}(\theta_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{(0,\theta')}(\theta_i) + 3\pi$$

и поделим обе его части на t, а затем, применяя определение 9 и лемму 12, перейдем в нем к пределу по t, получив оценку

$$\frac{b}{T} \le \frac{2\pi+\varepsilon}{T}(1-\theta) + \frac{6\pi}{T}(\theta-\theta') + \frac{\varepsilon}{T}\theta' + 0 \equiv 1-\theta+\varepsilon', \quad \text{где} \quad \varepsilon' > 0. \; (3.16)$$

В. Из неравенств (3.11) при $\varkappa = \rho$, равенств $\check{\rho}^\circ(z) = 1-\theta$ и (3.15), оценки (3.16) и рассуждения, аналогичного проведенному в п. I.3.В , следует, что верны равенства (3.13), и что пределы в определении показателей $\check{\rho}^\bullet_\alpha(z)$ и $\hat{\rho}^\bullet_\alpha(z)$ можно заменить на обычные, а значит, $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(1-\theta)$.

II. А. Если для решения z выполнено неравенство $\phi_\xi(1) < \breve{\varphi}$, то $\phi'(1) < \pi$, поэтому из возрастания функции ϕ', равенств (3.8) и формулы (3.1) следуют включения (3.9) при $\delta \equiv \min\{\pi - \phi'(1), \pi/4\}$ и $\theta' = \theta = 1$, а из них и рассуждения аналогичного проведенному в п.п. I.3–I.4 вытекает включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$.

Б. Если же для z выполнено неравенство $\breve{\varphi} \le \phi_\xi(0)$, то $\pi \le \phi'(0)$, поэтому из возрастания ϕ', (3.8), (3.3) и иррациональности членов последовательности (θ_i)снова получаем (3.9), но уже при любом $\delta \in (0, \pi/2)$ и $\theta' = \theta = 0$, а из аналогичного с проведенным в п.п. I.3–I.4 рассуждения выводим включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(1)$.

Лемма 13 доказана.

В случае, когда решение z целиком состоит из вектор-функций меньших, чем полуоборот, причем не обязательно лежащих в классе $\mathcal{B}'$, будем использовать лемму 14.

Лемма 14. *Пусть заданы решение $z \in \mathcal{S}^2_*$, числа $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2)$ и вектор $v \in \mathbb{R}^2_*$, тогда*

1) если выполнены соотношения

$$\zeta^i \in \mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta), \quad \zeta^i(Q) = \zeta^i(H) = v, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

то верно включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$;

2) если заданы еще и р. р. мод 1 последовательность дробных долей (θ_i), и вектор-функция $\xi \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^2_*)$, и вместо соотношений (3.17) выполнены соотношения

$$\zeta^i \in \mathcal{B}_0(\varphi_0, \delta), \quad \zeta^i(Q) = v, \quad \zeta^i(H) = \xi(\theta_i), \qquad i \in \mathbb{N},$$

то также верно включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$.

Доказательство. Оба утверждения настоящей леммы следуют из рассуждения аналогичного с рассуждением в п.п. I.3–I.4 доказательства леммы 13 с заменой цепочки (3.14) на цепочку

$$\mathrm{P}(L'\zeta^i, T) = 2\int_0^H |\dot{\phi}_{L'\zeta^i}(\tau)|\, d\tau =$$

$$= 2(|\phi_{L'\zeta^i}(Q) - \phi_{L'\zeta^i}(0)| + |\phi_{L'\zeta^i}(H) - \phi_{L'\zeta^i}(Q)|) =$$

$$= 2(|\phi_{L'v} - \phi_{L'\zeta^1}(0)| + |\phi_{L'v} - \phi_{L'v}|) = 2(|\phi_{L'v} - \phi_{L'\zeta^1}(0)| \equiv f.$$

в первом случае и на цепочку

$$\mathrm{P}(L'\zeta^i, T) = 2\int_0^H |\dot{\phi}_{L'\zeta^i}(\tau)|\,d\tau =$$

$$= 2(|\phi_{L'v} - \phi_{L'\zeta^1}(0)| + |\phi_{L'\xi}(\theta_i) - \phi_{L'v}|) \equiv f(\theta_i)$$

во втором. Лемма 14 доказана.

3.3 Построение системы по решениям

Докажем аналогичную лемме 4 в первой главе лемму 15.

Лемма 15. *Если для решений $z_1, z_2 \in \mathcal{S}^2$, чисел $\varepsilon, b > 0$ и подмножества $X \subset \mathbb{R}^+$ выполнены условия*

(a) $|z_1|, |z_2|, |\dot{z}_1|, |\dot{z}_2| \le b$;

(b) $\det(z_1, z_2) \ge \varepsilon$;

(c) $\mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\} \subset \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}, \quad \{\check{\rho}^\bullet(z) \mid z \in \mathcal{Z}\} = X$,

то существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$, для которой верны соотношения

$$\mathcal{S}(A) \subset \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}, \quad \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}^2}(A) = X.$$

Доказательство. 1. Пусть $Z \equiv (z_1, z_2)$, тогда, повторяя рассуждение п.п. 1, 2 доказательства леммы 4, из условий (a) и (b) получим включение $A \equiv \dot{Z}Z^{-1} \in \mathcal{M}_0^2$, и что для любого решения $\tilde{z} \in \mathcal{S}(A)$ найдутся число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и решение $z \in \mathcal{Z}$ такие, что верно представление $\tilde{z} = kz$.

2. В силу определений 1 и 3 для любого момента $t \in \mathbb{R}^+$ и любого вектора $m \in S^1$ при всех α верно равенство $\mathrm{N}_\alpha(\langle \tilde{z}, m\rangle, t) = \mathrm{N}_\alpha(\langle z, m\rangle, t)$ и для любого оператора $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2$ — равенство $\mathrm{P}(L\tilde{z}, t) = \mathrm{P}(Lz, t)$. Из полученных равенств и определений 2, 4 и 5 следует, что для любого показателя $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ справедливо равенство $\varkappa(\tilde{z}) = \varkappa(z)$, и что включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$ влечет включение $\tilde{z} \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$, а значит, утверждение настоящей леммы вытекает из условия (c).

Лемма 15 доказана.

3.4 Фундаментальная система решений

В доказательстве теоремы 3 будем строить решения удовлетворяющие лемме 15 при $X = [0,1]$ и восстанавливать по ним систему A.

Доказательство теоремы 3.

I. Определим вектор-функцию $\boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{C}^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$ и скалярную функцию $g' \in \mathrm{C}^1([Q,H],\mathbb{R}^+)$, как в п. 1 доказательства леммы 5.

Пусть числа $x, y, F \in \mathbb{R}$ удовлетворяют соотношениям

$$1 < y < x, \quad x \leq (y+1)^2/4, \quad 0 < F < x - y,$$

и $\theta_i,\ i \in \mathbb{N}$ — произвольная р. р. мод 1 последовательность иррациональных чисел (например, $\{i\pi\}$), тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ определимим вектор-функцию $\boldsymbol{\zeta}_i \in \mathrm{C}^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$ равенствами

$$\boldsymbol{\zeta}_i|_{[0,Q]} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_i|_{(Q,H]} \equiv \begin{pmatrix} (-x+\theta_i F)g' \\ 1-(y+1)g' \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\zeta}_i(H+t) \equiv \boldsymbol{\zeta}_i(H-t), \quad t \in (0,H].$$

II. Получим некоторые свойства функций $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_1, \ldots, \boldsymbol{\zeta}_i, \ldots$, опираясь на их построение в п. I.

1. При некотором $b > 0$ имеют место оценки $|\boldsymbol{\zeta}|, |\dot{\boldsymbol{\zeta}}| \leq b$, $|\boldsymbol{\zeta}_i|, |\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i| \leq b$, $i \in \mathbb{N}$.

2. Докажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ для любого i выполнено неравенство $\det(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_i) > \varepsilon$.

А. Верны оценки

$$|\boldsymbol{\zeta}| \geq 1, \quad |\boldsymbol{\zeta}_i| \geq \varepsilon_1 \equiv \inf_{i\in\mathbb{N}} \min_{t\in[Q,H]} |\boldsymbol{\zeta}_i(t)| > 0. \tag{3.18}$$

Б. Для любого $t \in [0,Q]$ выполнены включения

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) \in [0,\pi/4], \quad \phi_{\boldsymbol{\zeta}_i}(t) = \pi/2,$$

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}_i}(t) - \phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) \in [\pi/4,\pi/2], \tag{3.19}$$

а для любого $t \in [Q, H]$, поскольку точка $\boldsymbol{\zeta}_i(H) = (-x+\theta_i F, -y)^\top$ лежит строго в III четверти, — включения

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) = \pi/4,$$

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}_i}(t) \in \left[\pi/2, \pi + \operatorname{arctg}\bigl(y/(x-\theta_i F)\bigr)\right] \subset \left[\pi/2, \pi + \operatorname{arctg}\bigl(y/(x-F)\bigr)\right],$$

$$\phi_{\boldsymbol{\zeta}_i}(t) - \phi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) \in \left(\pi/4, 3\pi/4 + \operatorname{arctg}\bigl(y/(x-F)\bigr)\right]. \tag{3.20}$$

Из (3.19), (3.20) и неравенств $y/(x-F) < 1$, $\operatorname{arctg}\bigl(y/(x-F)\bigr) < \pi/4$ следует оценка

$$\sin(\phi_{\boldsymbol{\zeta}_i} - \phi_{\boldsymbol{\zeta}}) \geq \varepsilon_2 \equiv \sin\left(3\pi/4 + \operatorname{arctg}\bigl(y/(x-F)\bigr)\right) > 0. \tag{3.21}$$

В. Требуемое в п. II.2 утверждение вытекает из оценок (3.18), (3.21) и равенства

$$\det(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_i) = |\boldsymbol{\zeta}||\boldsymbol{\zeta}_i| \sin(\phi_{\boldsymbol{\zeta}_i} - \phi_{\boldsymbol{\zeta}}).$$

3. Имеет место включение $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{B}_0(0, \pi/4)$.

4. Установим, что, если $c \in (0, y)$, то верны включения

$$c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_i \in \mathcal{B}'(\varphi_c), \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

где $\varphi_c \equiv \pi/2 - \operatorname{arctg} c$, а, если $c \in \mathbb{R} \setminus (0, y)$, то при некотором δ_c верны включения

$$c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_i \in \mathcal{B}_0(\varphi_c, \delta_c), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

А. Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $\zeta = c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_i$. Из построения в п. I следует включение $\zeta \in \mathrm{C}^1([0, T], \mathbb{R}^2)$, а из неравенства $\det(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_i) > \varepsilon$ и цепочки

$$\det(\boldsymbol{\zeta}, \zeta) = \det(\boldsymbol{\zeta}, c\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_i) = \det(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_i)$$

получаем, что функция ζ на отрезке $[0, T]$ не обращается в ноль, следовательно, для нее определена функция ϕ.

Б. Условие 1 множества $\mathcal{B}(\varphi_c) \equiv \mathcal{A}(2\pi, \varphi_c)$ вытекает из равенства $\zeta(0) = (c, 1)^\top$.

Функция ζ при $t \in [0, Q]$ и при $t \in [Q, H]$ движется по отрезкам в фазовой плоскости, и функции g и g' монотонны, поэтому выполнено условие 2.

Условие 3 верно в силу построения функций $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}_i$, а значит, выполнено включение $\zeta \in \mathcal{B}(\varphi_c)$.

В. Выпишем координаты точек

$$\zeta(H) = (c - x + \theta_i F, c - y), \quad \zeta(Q) = (c, c+1)^\top, \quad \zeta(0) = (c, 1)^\top.$$

Г. Пусть $(x_\zeta, y_\zeta)^\top$ — это координаты функции ζ. Если $c \in (0, y)$, то точки $\zeta(0)$ и $\zeta(Q)$ лежат в I четверти на вертикальной прямой, не совпадающей с осью ординат, причем $y_\zeta(Q) > y_\zeta(0)$, поэтому при всех $t \in (0, Q)$ неравенство $\dot{\phi}(t) > 0$ следует из неравенства $\dot{g}(t) > 0$. Точка $\zeta(H)$ лежит строго в III четверти и в силу неравенств $x_\zeta(H) < y_\zeta(H)$ и $x_\zeta(Q) < y_\zeta(Q)$ вместе с точкой $\zeta(Q)$ расположена над диагональю фазовой плоскости, проходящей через I и III четверть, поэтому при всех $t \in (Q, H)$ неравенство $\dot{\phi}(t) > 0$ снова следует из неравенства $\dot{g}(t) > 0$, откуда получаем условие 4.

Условие 5 также следует из расположение точек $\zeta(0)$ и $\zeta(Q)$.

Д. Если $c \in [y, \infty)$, то точки $\zeta(0)$, $\zeta(Q)$ и $\zeta(H)$ лежат в верхней полуплоскости, причем из соотношений $x_\zeta(0) = x_\zeta(Q)$ и $y_\zeta(Q) > y_\zeta(0)$ следует включение $\phi(Q) \in [\varphi_c, \pi]$. Если $c \in [y, x - \theta_i F]$, то $\zeta(H)$ лежит во II четверти, а $\zeta(0)$ — в I, поэтому $\phi(H) \in [\varphi_c, \pi]$, а если $c \in [x - \theta_i F, +\infty]$, то из неравенств

$$\frac{1}{c} < 1 < \frac{c - y}{c - x + \theta_i F}, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{c} < \operatorname{arctg}\frac{c - y}{c - x + \theta_i F},$$

снова получаем включение $\phi(H) \in [\varphi_c, \pi]$, а значит, при всех $c \in [y, \infty)$ имеем (3.23) при любом $\delta_c \in (0, \varphi_c)$.

Ж. Если $c \in (-\infty, 0]$, то точки $\zeta(0)$, $\zeta(Q)$ и $\zeta(H)$ расположены в левой полуплоскости, причем $\zeta(0)$ — во II четверти, а $\zeta(H)$ — в III, откуда получаем $\phi(H) > \phi(0)$. Из соотношений $x_\zeta(0) = x_\zeta(Q)$ и $y_\zeta(Q) \le y_\zeta(0)$ получаем $\phi(Q) \ge \phi(0)$, и из неравенств $\phi(Q), \phi(H) < \pi + \pi/4$ выводим включение (3.23) при любом $\delta_c \in (0, \pi/4]$.

III. Определим решения z_1, z_2 равенствами

$$\zeta^i_{z_1} \equiv \boldsymbol{\zeta}, \quad \zeta^i_{z_2} \equiv \boldsymbol{\zeta}_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

и для любого решения $z \in \mathcal{Z}$ найдем значение a, при котором выполнено включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(a)$.

1. Пусть $z = cz_1 + z_2$ и $c \in (0, y)$. При любом $\theta \in [0, 1]$ вектор-функция $\xi(\theta) = (-x + \theta F + c, -y + c)^\top$ принимает значения в III четверти, поэтому верно равенство

$$\phi_\xi(\theta) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y - c}{x - \theta F - c},$$

из которого вытекает, что функция ϕ_ξ возрастает на отрезке $[0, 1]$ и имеет место соотношение $[\phi_\xi(0), \phi_\xi(1)] \subset [\varphi_c, \varphi_c + 3\pi/2]$, откуда в совокупности с построением (3.24) решений z_1 и z_2 и включениями (3.22) следует, что решение z, угол $\varphi_0 = \varphi_c$, последовательность (θ_i) и вектор-функция ξ удовлетворяют условиям леммы 13.

Величина

$$\phi_\xi(\theta) - \breve{\varphi} = \phi_\xi(\theta) - \varphi_c - \pi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y - c}{x - \theta F - c} - \operatorname{arctg} \frac{1}{c} - \pi \quad (3.25)$$

того же знака, что и величина

$$\frac{y - c}{x - \theta F - c} - \frac{1}{c} = \frac{\theta F - f(c)}{c(x - \theta F - c)}, \quad (3.26)$$

$$\text{где} \quad f(c) \equiv c^2 - c(y + 1) + x.$$

Из неравенства $x \leq (y+1)^2/4$ следует, что уравнение $f(c) = 0$ имеет два корня c_1, c_2 (возможно совпадающих), а из неравенства $F > 0$ следует, что и уравнение $f(c) = F$ имеет два корня c_1', c_2', причем имеет место соотношение $[c_1, c_2] \subset (c_1', c_2')$. На краях исследуемого интервала $(0, y)$ из равенств $f(0) = x$ и $f(y) = x - y$ получаем оценки $f(0) > F$ и $f(y) > F$, из которых вытекает соотношение $[c_1', c_2'] \subset (0, y)$.

А. Если $c \in (0, y) \setminus [c_1', c_2']$, то $f(c) > F$, поэтому при $\theta = 1$ из равенства (3.26) и цепочки (3.25) следует неравенство $\phi_\xi(1) - \breve{\varphi} < 0$, из которого по лемме 13 получаем включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$.

Б. Если $c \in [c_1', c_2'] \setminus [c_1, c_2]$, то $f(c) \in (0, F]$. Подставляя в правую часть (3.26) значение $\theta = f(c)/F \in (0, 1]$ и учитывая (3.25), получим равенсвто $\phi_\xi(\theta) - \breve{\varphi} = 0$, из которого снова по лемме 13 выводим включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(1 - \theta)$.

При различных значениях параметра $c \in (c_2, c_2']$ функция $f(c)$ принимает все значения промежутка $(0, F]$, а значение θ, в свою очередь, принимает все значения из промежутка $(0, 1]$.

B. Если $c \in [c_1, c_2]$, то то $f(c) \leq 0$, поэтому при $\theta = 0$ из (3.26) и (3.25) следует неравенство $\phi_\xi(0) - \breve{\varphi} \geq 0$, из которого по лемме 13 получаем, что $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(1)$.

2. Если $z = cz_1 + z_2$ и $c \in \mathbb{R} \setminus (0, y)$, то, опираясь на включения (3.23) и построение (3.24) и применяя второе утверждение леммы 14 при $v = (c, c+1)^\top$, получим включение $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$, а если $z = z_1$, то из п. II.3 и первого утверждения леммы 14 при $v = (1, 1)^\top$ также получим, что $z \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}(0)$.

IV. Из построения (3.24) и результатов п. п. II.1, II.2 и III следует, что для решений z_1 и z_2 выполнены условия (a), (b) и (c) леммы 15 при $X = [0, 1]$, а из нее и соображений, аналогичных высказанным в замечании 3 — утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

Заключение

В первой главе настоящей работы удалось выяснить, что спектр показателей блуждаемости для двумерных ограниченных непрерывных систем, в отличие от автономных систем, может состоять из более чем одного значения. Кроме того, даже в классе периодических систем найдены такие, что их спектр совпадает со сколь угодно большим конечным множеством неотрицательных чисел, причем все значения в их спектре существенные. Этот результат говорит о том, что ожидать от спектров показателей блуждаемости такого же простого строения, каким обладают спектры показателей Ляпунова, не следует, т.е. спектры показателей блуждаемости устроены сложнее. В дальнейшем хотелось бы получить ответ на вопрос: всегда ли спектр периодической системы конечен?

Во второй главе получено, что спектр показателей блуждаемости может состоять из бесконечного (счетного) числа значений, а также выделено некоторое семейство счетных множеств, реализуемых, как спектр хотя бы одной двумерной ограниченной системы. Однако пока не известно, что из себя представляет класс всех таких счетных множеств.

В третьей главе установлено, что множество элементов в спектре показателей колеблемости и блуждаемости для ограниченной системы может иметь мощность континуума и даже совпадать с отрезком числовой прямой. Исходя из этого, логично предположить, что спектр указанных показателей может представлять собой и более сложно устроенное множество, чем просто отрезок или дискретное множество точек. Поэтому следующим шагом на пути к полному описанию спектров показателей колеблемости и блуждаемости в двумерном ограниченном случае могло бы быть отыскание класса каких-либо более сложно устроенных множеств, реализуемых спектрами.

В заключение отметим, что в настоящей работе автором был разработан некоторый специальный подход к построению дифференциальных систем с заданными свойствами. В дальнейшем он также может использоваться в аналогичных построениях и другими математиками, специализирующимися в качественной теории дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Bol P. Uber Differentialgleichungen // J. reine and angew. Math. 1913. Bd. 144. S. 284–318.

[2] Kneser A. J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Di erentialgleichungen beigrosser reclen // Wethen der Arguments I. J. Reine und angew. Math. 1898. T. 116 C. 173–112.

[3] Perron O. Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. Hft. 5. S. 703–728.

[4] Sturm J.C.F. Memoire sur les equations diferentielles lineaires du second ordre // J. Math. Pures Appl. 1836. T. 1. C. 106–186.

[5] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012.

[6] Асташова И.В. О задаче Н.А. Изобова для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2012. 48. №6. С. 898–899.

[7] Асташова И.В. О поведении на бесконечности решений квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. 45. №11. С. 1671.

[8] Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2005. С. 3–17.

[9] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №12. С. 1592–1600.

[10] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. 22. №11. С. 1843–1853.

[11] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №10. С. 1302–1320.

[12] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №12. С. 1595–1609.

[13] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. №1. С. 24–31.

[14] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс М. - Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований. 2009.

[15] Бурлаков Д.С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. №2 С. 49–53.

[16] Бурлаков Д.С., Сергеев И. Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. 48. №6. С. 899.

[17] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2014. Т. 30 С. 75–93.

[18] Быков В.В. Классификация Бэра σ-показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №11. С. 1574.

[19] Быков В.В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. 51. Вып. 5. С. 186.

[20] Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №4. С. 419Ц425.

[21] Быков В.В. Об измеримости некоторых характеристик колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №11. С.1574.

[22] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука. 1966.

[23] Былов Б.Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс... докт. физ. мат. наук. Мн.: АН БССР. 1966.

[24] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. 6. №2. С. 243–252.

[25] Ветохин А.Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. 31. №5. С. 909–910.

[26] Ветохин А.Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. 35. №11. С. 1578–1579.

[27] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. 91. №5. С. 999–1002.

[28] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. 42. 2. С. 207–222.

[29] Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. 41. №2. С. 268–273.

[30] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Матем. сб. 2014. 205. 6. С. 21–86.

[31] Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–486.

[32] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научный вестник МГТУ ГА. Серия Математика. 1999. №16. С. 5–10.

[33] Дементьев Ю.И. Подвижность показателей Ляпунова под действием бесконечно малых возмущений // Дифференц. уравнения. 2001. 37. 11. С. 1575.

[34] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967.

[35] Изобов Н.А. О кнезеровских решениях // Дифференц. уравнения. 1985. 21. №4. С. 581–588.

[36] Изобов Н.А. Об уравнениях Эмдена-Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Матем. заметки. 1984. 35. №2. С. 189–199.

[37] Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. 1969. 5. №7. С. 1186–1192.

[38] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ. 2006.

[39] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №12. С. 2034–2055.

[40] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.

[41] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. 12. №11. С. 1954–1966.

[42] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. 1. №4. С. 469–477.

[43] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. 26. №1. С. 5–8.

[44] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. 28. №6. С. 207–219.

[45] Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1962. 144. С. 33–36.

[46] Кигурадзе И.Т. Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. 10. №8. С. 1387–1398. и №9. С. 1586–1594.

[47] Кондратьев В.А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Докл. АН СССР. 1968. 118.№1. С. 22–24.69.

[48] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^n - p(x)y = 0$ // Тр. Моск. матем. об-ва. 1961. 10. С. 419–436.

[49] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1968.

[50] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. Равномерное распределение последовательностей // М. Наука. 1985.

[51] Левин А.Ю. Избранные труды. Ярославль, Рыбинск: Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова. 2010.

[52] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1(t)x^{n-1} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. 24. №2. С. 43–96.

[53] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. 46. №11. С. 1670–1671.

[54] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. 48. №6. С. 907.

[55] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС. 2000.

[56] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. 25. №2. С. 209–212.

[57] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. 32. №12. С. 1710–1711.

[58] Миллионщиков В.М. Вспомогательные логарифмические h-показатели // Дифференц. уравнения. 1992. 28. №6. С. 1087.

[59] Миллионщиков В.М. Вспомогательные степенные показатели // Дифференц. уравнения. 1992. 28. №6. С. 1085.

[60] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. 16. №8. С. 1408–1416.

[61] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. 5. №10. С. 1775–1784.

[62] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. 10. №1. С. 99–104.

[63] Миценко В.В. О блуждаемости решений двумерных диагональных и треугольных дифференциальных систем // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2014. С. 221–241.

[64] Миценко В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. 50. №10. С. 1347–1352.

[65] Морозов О.И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. 27. №11. С. 2012.

[66] Морозов О.И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. 26. №12. С. 2181.

[67] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. 43. №8. С. 1048–1054.

[68] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №2. С. 226–235.

[69] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. 31. №6. С. 925–931.

[70] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. 19. №2. С. 253–259.

[71] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 2012. Т. 204. №1. С. 119–138.

[72] Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2016. №31. С. 117–219.

[73] Сергеев И.Н. Класс Бэра старшей частоты корней линейного уравненя // Дифференц. уравнения. 2006. 42. №11. С. 1573.

[74] Сергеев И.Н. Неравенства между главными частотами нулей и знаков линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2006. 42. №6. С. 855.

[75] Сергеев И.Н. О классах Бэра характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. 41. №11. С. 852.

[76] Сергеев И.Н. О несуществовании ляпуновской частоты решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. 44. №11. С. 1579.

[77] Сергеев И.Н. О различной зависимоти от параметра главных частот нулей, знаков и корней линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2007. 43. №6. С. 853.

[78] Сергеев И.Н. Общие свойства главных частот линейного уравнения // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского: Тезисы докладов - М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 282–283.

[79] Сергеев И.Н. Подвижность характеристических частот линейного уравнения при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях // Дифференц. уравнения. 2004. 40. №11. С. 1576.

[80] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2013. 27. С. 413–440.

[81] Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

[82] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. 40. №11. С. 1576.

[83] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. №11. С. 1667–1668.

[84] Сергеев И.Н. Обобщенные характеристики блуждаемости решений дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. №11. С. 1498-1500.

[85] Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Академия. 2013.

[86] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[87] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[88] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. 47. №6. С. 906–907.

[89] Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. 47. №11. С. 1661–1662.

[90] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. 44. №11. С. 1577.

[91] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. 45. №6. С. 908.

[92] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. 46. №6. С. 902.

[93] Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. 48. №11. С. 1567–1568.

[94] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

[95] Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №10. С. 1353–1361.

[96] Смоленцев М.В. О спектрах частот периодического и непериодического линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. 48. №6. С. 909.

[97] Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1571–1572.

[98] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2015. 51. №6. С. 829–830.

[99] Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот// Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1–2.

[100] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений М.: КомКнига. 2007.

[101] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №11. С. 2011–2012.

[102] Фурсов А.С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. 49. Вып. 4. С. 143.

[103] Чантурия Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 1980. 16.№3. С. 470–482.

[104] Чантурия Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида // Дифференц. уравнения. 1986. 22. №11. С. 1905–1915.

[105] Шишлянников Е.М. О континуальных спектрах частот у линейных дифференциальных уравнений и систем // Дифференц. уравнения. 2017. 53. №6. С. 856–857.

[106] Шишлянников Е.М. О спектрах показателей колеблемости и блуждаемости двумерных линейных систем // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2017). Том 1. С. 40–41.

[107] Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2017. №5. С. 14–21. Англ. пер.: Shishlyannikov E.M. Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent // Moscow University Mathematics Bulletin. 2017. Vol 72. №5. P. 192–198.

[108] Шишлянников Е.М. Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2017. №1. С. 64–68. Англ. пер.: Shishlyannikov E.M. The example of a differential system with continual spectrum of wandering exponent // Moscow University Mathematics Bulletin. 2017. Vol 72. №1. P. 37–40.

[109] Шишлянников Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2016. 52. №11. С. 1586–1587.

[110] Шишлянников Е.М. Свойства характеристик блуждаемости // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016».

[111] Шишлянников Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Матем. сборник. 2018. Т. 209. №12. С. 149–164. Англ. пер.: E. M. Shishlyannikov. The existence of a two-dimensional bounded system with continual and coinciding spectra of frequencies and of wandering exponents // Sb. Math. 2018. Vol 209. №12. P. 1812–1826.