МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 517.926

ШИШЛЯННИКОВ Евгений Михайлович

СВОСТВА ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико-математического факультета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сергеев Игорь Николаевич.
Официальные оппоненты:	Фурсов Андрей Серафимович доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова;
	Попова Светлана Николаевна доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой дифференциальных уравнений Института математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет».
	Салова Татьяна Валентиновна кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится «6» ноября 2019 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 на базе МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМиК, комната 685.
E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте ИАС «ИСТИНА»:https://istina.msu.ru/dissertations/233101491/.

Автореферат разослан «   »   2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.09
доктор физико-математических наук,
профессор   Захаров Е.В.

Общая характеристика работы

Диссертация представляет собой исследование в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Актуальность темы исследования

Важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой при изучении нелинейных систем по их первому приближению. При изучении линейных систем возникают теоретические вопросы связанные с асимптотическими свойствами их решений: устойчивостью и колеблемостью.

Показатели Ляпунова. В 1892 году А.М. Ляпуновым была защищена докторская диссертация на тему «Общая задача об устойчивости движения». Этот момент можно считать начальным в истории развития теории устойчивости. За более чем вековой период было предложено и успешно использовано множество показателей, отвечающих за разные асимптотические свойства решений уравнений или систем. Их изучением занимались многие математики, в том числе: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, С.Н. Попова, Е.А. Барабанов, О.И. Морозов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Подробную библиографию можно найти в обзорах[1,2] и монографиях [3,4].

Теория колебаний. В теории колебаний важное место занимают вопросы связанные с колеблемостью решений, восходящие к фундаментальным работам Ж. Штурма и А. Кнезера. Исследованиями в этом наравлении занимались В.А. Кондратьев, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Н. Левин, Н.А. Изобов, И.В. Асташова, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов, и другие (подробные биографии см. в обзоре[5] и монографиях[6,7]). В данных работах в первую очередь исследуются вопросы существования и свойства колеблющихся решений дифференциальных уравнений (т.е. решений, имеющих бесконечное число нулей на полупрямой или на промежутке), а также возможность описать все множество таких решений. В этих работах

[1]Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[2]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристиче- ских показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №12. С. 2034–2055.

[3]Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[4]Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[5]Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1(t)x^{n-1} + \cdots + p(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. 24. №2. С. 43–96.

[6]Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой Ч М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

[7]Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Ассимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990.

немало усилий направлено на получение коэффициентных (т.е. опирающихся только на свойства коэффициентов уравнения) признаков существования или отсутствия колеблющихся решений, а также изучаются свойства промежутков неосциляции (т.е. отрезков, на которых решение имеет меньше нулей, чем порядок уравнения). В то же время почти не исследуются характеристики, позволяющие сравнивать колеблющиеся решения между собой.

Частоты решений уравнения. Первая попытка определить показатель, который бы являлся аналогом показателей Ляпунова и позволял бы судить о колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем, была предпринята И.Н. Сергеевым в 2004 г. в его докладе[8]: было дано определение *характеристической частоты* скалярной функции, геометрический смысл которой — среднее на всей полуоси количество нулей этой функции на отрезках длины π. Так, характеристическая частота позволяет измерять колеблемость решения, ставя в соответствие, например, функции $\sin \omega x$ ее частоту ω (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = e^{\lambda t}$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$). Впоследствии эти новые показатели решений были названы *частотами Сергеева.*

Показатели колеблемости и блуждаемости. Затем в докладе[9] были введены *полная частота* и *векторная частота* (или *показатели колеблемости*) для решений дифференциальных систем. Их подсчет происходит путем усреднения числа нулей проекции решения на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение нулей было минимальным: если указанная минимизация производится перед усреденением, то получается векторная частота, а если после — то полная частота. По своему геометрическому смыслу полная и векторная частоты отвечают за частоту вращения решения вокруг нуля. Таким образом, полная и векторная частоты являются обобщениями понятия характеристической частоты на случай решений систем. Эти характеристики можно вычислять и для решения линейного уравнения порядка n, полагая их равными полной и векторной частоте вектор-функции x, определенной равенствами $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

В работах[10,11] были определены *скорость блуждания* и *показатели блуждания* и *блуждаемости.* Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А показатели блуждаемости и блуждания — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае показателя блуждания минимизация производится в каждый момент времени. Таким образом, показатели блуждания и блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора x

[8]Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. 40. №11. С. 1576.

[9]Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. 45. №6. С. 908.

[10]Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. 46. №6. С. 902.

[11]Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. 47. №6. С. 906–907.

вокруг нуля, но не учитывают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора.

Изучением характеристических частот и показателей колеблемости и блуждаемости занимались также В.В. Быков, Е.А. Барабанов и А.С. Войделевич, А.Х. Сташ, Д.С. Бурлаков, С.В. Цой, М.Д. Лысак, В.В. Миценко и М.В. Смоленцев. В их работах исследовались *спектры* указанных характеристик (спектр — это множество всех значений показателя на различных решениях данного уравнения или системы) для различных типов уравнений и систем, связь между значениями показателей и коэффициентами уравнений и систем, а также связь этих характеристик друг с другом.

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости. Как показано в работе[12], спектр практически всех, к примеру, нижних характеристик колеблемости и блуждаемости для уравнений второго порядка состоит ровно из одного числа. Однако уже для уравнения третьего порядка, спектр, например, характеристической частоты может содержать сколь угодно много (и даже целый отрезок) значений[13].

В работе[14] показано, что спектр полной частоты для автономных систем совпадает со множеством модулей мнимых частей собственных чисел матрицы, соответствующей этой системе. Затем в работе[15] было установлено, что этот факт справедлив и в случае векторной частоты, более того на любом решении автономной системы значения полной и векторной частот совпадают. О показателе блуждаемости известно[14], что его спектр для любой автономной системы, так же как и у частот, совпадает со множеством модулей мнимых частей собственных чисел матрицы, соответствующей системе.

В случае линейных однородных неавтономных систем известно[16], что существует двумерная *неограниченная* система, у которой спектры частот содержат некоторый отрезок. При этом оставался открытым вопрос о том, какими могут быть спектры показателей колеблемости и блуждаемости в случае неавтономных *ограниченных* систем.

Изменение названий показателей. В 2017 году в статье[17] И.Н. Сергеевым были систематизированы все введенные им к настоящему времени показатели ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. Так, полная и векторная частоты теперь стали называться *сильным* и *слабым* показателями колеблемости, а показатели блуждаемости и блуждания — *сильным* и *слабым* показателя-

---

[12] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[13] Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №11. С. 1571–1572.

[14] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

[15] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2014, Т. 30 С. 75–93.

[16] Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот// Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №11. С. 1–2.

[17] Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2017. №31.

ми блуждаемости. Как в диссертации, так и в настоящем автореферате используются эти новые названия.

Цель работы

Целью диссертации является исследование спектров показателей колеблемости и блуждаемости в случае двумерных ограниченных неавтономных дифференциальных систем, а точнее нахождение такого класса множеств, что для каждого множества из этого класса, существует система, у которой спектр данного показателя совпадает с этим множеством.

Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты:

- для любого *конечного* множества неотрицательных *рациональных* чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная *периодическая* дифференциальная система, у которой спектр (множество значений показателей блуждаемости) совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *конечного* множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого замкнутого ограниченного *счетного* множества неотрицательных *рациональных* чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *отрезка*, левым концом которого является ноль, построена двумерная линейная *ограниченная* система, на каждом решении которой показатели колеблемости и блуждаемости равны, а множество всех их значений совпадает с этим отрезком.

Методы исследования

В диссертации применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, математического анализа, а также теории равномерно распределенных последовательностей.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

- для любого *конечного* множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, существует двумерная линейная однородная *ограниченная* система дифференциальная система (*периодическая*, если все элементы заданного множества *соизмеримы*), у которой спектр значений показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого замкнутого ограниченного *счетного* множества неотрицательных *рациональных* чисел с единственной нулевой предельной точкой, существует двумерная линейная *ограниченная* система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

- для любого *отрезка*, левым концом которого является ноль, существует двумерная линейная *ограниченная* система, на каждом решении которой показатели колеблемости и блуждаемости равны, а их общий спектр совпадает с этим отрезком.

Апробация работы

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на заседаниях

- семинара по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров И.В. Асташовой, А.В. Боровских, Н.Х. Розова, И.Н. Сергеева (2016–2017 гг.),

а также на следующих конференциях:

- XXIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 11–15 апреля 2016 г.);

- конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета по итогам года (г. Москва, 28 декабря 2016 г.);

- XVII международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017»(Минск, Белоруссия, 16–20 мая 2017 г.).

По теме диссертации опубликовано 7 работ, три из которых являются статьями в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, RSCI, Web of Science, SCOPUS. Работ в соавторстве нет. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора.

Все результаты, представленные в статьях автора и в диссертации, получены самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем диссертации составляет 79 страниц. Библиография включает 111 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении описана история вопроса, обосновывается актуальность темы исследования. Даются основные определения и излагаются результаты диссертации.

Основные обозначения

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, а $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — множество всех линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в себя. Будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис, порождающий стандартные нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$.

Каждую непрерывную оператор-функцию $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ отождествим с системой вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty), \tag{1}$$

и обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ класс всех таких систем. Пусть $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех *ненулевых* решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$.

Показатели колеблемости и блуждаемости будут определены на множестве всех решений вообще

$$\mathcal{S}^n_* \equiv \bigcup_{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A),$$

совпадающем со множеством $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$, где $\mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Обозначим через $\mathcal{M}^2_0$ класс, состоящий из систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$, у которых функция A ограничена, и каждое решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ ограничено и отделено от нуля. Все системы, существование которых доказано в диссертации, являются элементами класса $\mathcal{M}^2_0$.

Определение показателей колеблемости и блуждаемости

Показатели колеблемости и блуждаемости имеют схожее строение: сначала определяется некоторый функционал, а затем к этому функционалу применяются в разном порядке оператор усреднения и взятия нижней грани.

Зададим такой функционал для показателей колеблемости (строго говоря, в следующем определении будут заданы целых пять функционалов, и каждый из них будет порождать свой ряд показателей колеблемости).

Определение 1. Для скалярной функции $y \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ и положительного момента $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $\mathrm{N}_\alpha(y,t)$ количество на промежутке $(0,t]$:

а) ее *нулей* — при $\alpha = 0$;

б) ее *строгих смен знака* (т.е. нулей, в любой окрестности которых есть значения разных знаков) — при $\alpha = -$;

в) ее *нестрогих смен знака* (т.е. нулей, в любой окрестности которых есть как неположительные, так и неотрицательные значения) — при $\alpha =\sim$;

г) ее *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) — при $\alpha = +$;

д) ее *гиперкорней* (т.е. корней, при подсчете которых любой кратный корень берется бесконечно много раз) — при $\alpha = *$.

Замечание 1. Имеет место цепочка неравенств

$$\mathrm{N}_-(y,t) \le \mathrm{N}_\sim(y,t) \le \mathrm{N}_0(y,t) \le \mathrm{N}_+(y,t) \le \mathrm{N}_*(y,t).$$

Обозначим через S^{n-1} и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ соответственно единичную сферу и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Для любого решения $x \in \mathcal{S}^n_*$ зададим его *нижние сильный и слабый показатели колеблемости*

$$\check{\nu}^\bullet_\alpha(x) \equiv \inf_{m \in S^{n-1}} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \mathrm{N}_\alpha(\langle x, m\rangle, t), \quad \check{\nu}^\circ_\alpha(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in S^{n-1}} \mathrm{N}_\alpha(\langle x, m\rangle, t)$$

(галочка над показателем в записях $\check{\nu}^\bullet_\alpha$ и $\check{\nu}^\circ_\alpha$ означает, что показатель *нижний*, полный кружок $\check{\nu}^\bullet_\alpha$— что показатель *сильный*, пустой кружок $\check{\nu}^\circ_\alpha$ — что показатель *слабый*, а нижний индекс α в обеих записях $\check{\nu}^\bullet_\alpha$ и $\check{\nu}^\circ_\alpha$ всегда соответствует функционалу внутри определяющей формулы) *нулей, строгих* или *нестрогих смен знака, корней* или *гиперкорней* при $\alpha = 0, -, \sim, +, *$ соответственно.

Рассмотрим внимательно формулу, задающую показатель сильной частоты $\check{\nu}^\bullet_0(x)$ определения 2, в случае, когда, например, $\alpha = 0$. Сначала функционал $\mathrm{N}_0(\langle x, m\rangle, t)$ вычисляет число нулей проекции $\langle x, m\rangle$ решения x на вектор m на промежутке $(0,t]$. Затем оператор нижнего предела $\varliminf\limits_{t\to\infty}$ вычисляет среднее число нулей проекции $\langle x, m\rangle$ на всей полуоси $\mathbb{R}^+$. И наконец оператор $\inf\limits_{m \in S^{n-1}}$ нижней грани выбирает минимизирующее направление.

В формуле слабой частоты $\check{\nu}^\circ_0(x)$ наоборот: сначала для каждого момента t выбирается направление, а затем вычисляется среднее число нулей полученной функции $\inf\limits_{m \in S^{n-1}} \mathrm{N}_0(\langle x, m\rangle, t)$ (уже не зависящей от m).

Нормировочный множитель π в обеих формулах подобран так, чтобы для любой частоты ν из определения 2 в случае эталонного решения

$$x = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0, \ldots, 0)^\top$$

выполнялось равенство $\nu(x) = \omega$.

Теперь зададим функционал для показателей блуждаемости.

Определение 3. Для вектор-функции $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$ определим ее *след* (на единичной сфере) $e_u \equiv u/|u|$ и ее *вариацию следа* за время от 0 до $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{P}(u,t) \equiv \int_0^t |\dot{e}_u(\tau)|\,d\tau.$$

Вариация следа равна длине пути следа функции на единичной сфере за время от 0 до t.

Определение 4. Для решения $x \in \mathcal{S}^n_*$ его *нижние сильный* и *слабый показатели блуждаемости* зададим соответственно равенствами

$$\check{\rho}^\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t), \quad \check{\rho}^\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mathrm{P}(Lx,t)$$

($\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов из $\mathbb{R}^2$ в себя).

В формуле, задающей нижний сильный показатель блуждаемости $\check{\rho}^\bullet(x)$ из определения 4, сначала функционал $\frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t)$ вычисляет среднюю скорость движения следа решения x по единичной сфере на промежутке $(0,t]$ под действием оператора L. Затем оператор нижнего предела $\varliminf\limits_{t\to\infty}$ вычисляет среднюю скорость движения следа решения x по единичной сфере на всей полуоси $\mathbb{R}^+$ под действием оператора L. И наконец оператор $\inf\limits_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n}$ взятия нижней грани выбирает минимизирующий линейный оператор. Действие последнего оператора эквивалентно выбору минимизирующего базиса.

В формуле слабого показателя блуждаемости $\check{\rho}^\circ(x)$ обратный порядок: для каждого момента t выбирается минимизирующий базис, а затем вычисляется среднее значение полученной функции $\inf\limits_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mathrm{P}(Lx,t)$ (уже не зависящей от L) на всей полуоси.

Определение 5. *Верхние слабый, сильный показатели колеблемости* $\hat{\nu}^\circ_\alpha(x), \hat{\nu}^\bullet_\alpha(x)$ (для каждого α) и *верхние слабый, сильный показатели блуждаемости* $\hat{\rho}^\circ(x)$, $\hat{\rho}^\bullet(x)$ решения $x \in \mathcal{S}^n_*$ зададим теми же формулами, что и соответствующие нижние в определениях 2 и 4, но с заменой в них нижних пределов верхними.

Для каждого натурального $n \geq 2$ обозначим через $\mathcal{K}^n$ множество, состоящее из всех полученных в определениях 2, 4 и 5 двадцати четырех показателей.

Спектры показателей и вспомогательные обозначения

Для любого подмножества решений $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}_*^2$ обозначим через

$$\mathrm{In}(\mathcal{Z}) \equiv \{z(0) \mid z \in \mathcal{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

его *множество начальных значений.*

Определение 6. Назовем *спектром* показателя $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ для системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$ множество

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(z) \mid z \in \mathcal{S}_*(A)\},$$

причем значение $a \in \mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ будем называть *существенным*, если множество

$$\mathrm{In}\left(\varkappa_A^{-1}(a)\right), \quad \text{где} \quad \varkappa_A^{-1}(a) \equiv \{z \in \mathcal{S}_*(A) \mid \varkappa(z) = a\},$$

имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Через $\mathrm{ess}\,\mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ обозначим множество всех существенных значений показателя для системы A и назовем его *существенным спектром* системы A.

Для любого значения $a \in \mathbb{R}^+$ и любого подмножества показателей $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^2$ определим подмножество решений $\mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \subset \mathcal{S}_*^2$ равенством

$$\mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \equiv \{z \in \mathcal{S}_*^2 \mid \varkappa(z) = a \text{ сразу при всех } \varkappa \in \mathcal{K}\},$$

и положим

$$\mathcal{C}_\mathcal{K} \equiv \bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} \mathcal{C}_\mathcal{K}(a) \subset \mathcal{S}_*^2.$$

Получаем, что множество $\mathcal{C}_\mathcal{K}(a)$ состоит из решений, на которых все показатели из $\mathcal{K}$ принимают значение a, а множество $\mathcal{C}_\mathcal{K}$ состоит из всех решений, на каждом из которых все показатели из $\mathcal{K}$ принимают одинаковое значение.

Если для системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^2$ выполнено соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_\mathcal{K}$, то ее спектры всех показателей из $\mathcal{K}$ одинаковые, поэтому будем обозначать через $\mathrm{Sp}_\mathcal{K}(A)$ их общий спектр, т.е. спектр, которому все они равны (также и для существенных спектров введем обозначение $\mathrm{ess}\,\mathrm{Sp}_\mathcal{K}(A)$).

Глава I. Конечные спектры.

О показателях блуждаемости решений двумерных систем было известно[14], что спектр каждого из них в случае *автономной* системы состоит ровно из одного числа. В первой главе мы доказываем теорему 1, строя *неавтономную* ограниченную систему, для которой спектр любого из этих показателей совпадает с произвольным наперед заданным конечным множеством, объединенным с нулем.

В классе $\mathcal{F}$ всех *конечных* подмножеств $X \subset (0,\infty)$ выделим подкласс $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$, состоящий только из подмножеств с попарно *соизмеримыми* элементами (т.е. получающимися друг из друга домножением на некторое рациональное число). Пусть $\mathcal{K}_\rho \equiv \{\hat\rho^\bullet, \check\rho^\bullet, \hat\rho^\circ, \check\rho^\circ\}$.

Теорема 1. *Для любого множества $X \in \mathcal{F}$ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$ (периодичная, если $X \in \mathcal{F}_c$) такая, что верно соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X \cup 0.$$

Доказательство теоремы 1 состоит в явном построении системы A из формулировки теоремы для любого множества $X \in \mathcal{F}$. Перед самим доказательством, мы устанавливаем леммы для вычисления показателей блуждаемости решений, затем лемму, дающую возможность восстанавливать систему по паре ее фундаментальных решений, и лемму, позволяющую строить специальные вектор-функции, определенные на отрезке, из которых потом в доказательстве теоремы 1 с помощью некоторого алгоритма склеиваются фундаментальные решения искомой системы A.

Утверждение теоремы 1 является чуть более сильным, чем совокупность утверждений первых двух пунктов из раздела научная новизна: класс, состоящий из всех конечных множеств положительных чисел с соизмеримыми элементами, состоит не только из всех конечных подмножеств положительных рациональных чисел, но и из всех конечных множеств подобных им, т.е. получающихся домножением всех элементов множества на некоторое положительное иррациональное число.

Глава 2. Счетные спектры.

Вторая глава целиком посвящена доказательству теоремы 2, из которой следует, что спектр показателя блуждаемости для ограниченной системы может содержать и *бесконечное* число значений, в данном случае *счетное*.

Обозначим через $\mathcal{I}$ класс, состоящий из всех *счетных ограниченных* подмножеств $X \subset (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел), у каждого из которых точка 0 — *предельная*, а других предельных точек нет.

Теорема 2. *Для любого множества $X \in \mathcal{I}$ существует система $A \in \mathcal{M}_0^2$ такая, что верно соотношение $\mathcal{S}_*(A) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}_\rho}$ и выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = \mathrm{ess}\ \mathrm{Sp}_{\mathcal{K}_\rho}(A) = X \cup 0.$$

По своей структуре доказательство теоремы 2 такое же, как доказательство теоремы 1: для каждого множества $X \in \mathcal{I}$ мы строим систему A из формулировки теоремы 2. Но алгоритм склеивания решений усложняется: мы вводим понятие разбиения множества натуральных чисел и несколько адаптируем лемму о построении специальных функций из первой главы.

Определение 7. Семейство множеств $\mathcal{P} \equiv \{\Lambda_k \subseteq \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$, назовем *разбиением* множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, если выполнены соотношения

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k = \mathbb{N}, \qquad \Lambda_k \cap \Lambda_{k'} = \varnothing, \quad k \neq k', \quad k, k' \in \mathbb{N}.$$

В главе доказывается лемма, позволяющая для каждого множества $X \in \mathcal{I}$ построить разбиение, а потом разбиение служит при склеивании решений из вектор-функций, определенных на отрезке.

Замечание 2. Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, такой что $\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = X$ ($\varkappa$ — произвольный показатель из $\mathcal{K}^n$), и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$ система, определенная равенствами

$$A'(t) = A(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяет равенству $\mathrm{Sp}_\varkappa(A') = X'$, где

$$X' \equiv \left\{ \frac{a}{\lambda} \mid a \in X \right\},$$

поэтому результат теоремы 2 можно усилить, заменив класс $\mathcal{I}$, на класс $\mathcal{I}'$, состоящий из множеств класса $\mathcal{I}$ и всех подобных им (если имеет место включение $A \in \mathcal{M}^2_0$, то верно и включение $A' \in \mathcal{M}^2_0$).

Глава 3. Континуальные спектры.

В третьей главе мы устанавливаем, что у *ограниченной* двумерной системы может быть и континуальный спектр, причем на всех решениях построенной системы сразу все показатели имеют точные пределы.

Определение 8. Будем говорить, что показатель $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ имеет на решении $z \in \mathcal{S}^2_*$ *точный предел*, в случае, когда для величины $\varkappa(z)$ верно утверждение: если в формуле, определяющей величину $\varkappa(z)$, нижние или верхние пределы заменить на обычные (*точные*), то величина, задаваемая полученной формулой, определена и совпадает с $\varkappa(z)$.

В случае слабых показателей точность предела означает совпадение верхнего (нижнего) показателя с одноименным нижним (верхним). А в случае сильного — что существует такая последовательность элементов из множества, по которому берется инфимум, что на ней достигается нижняя грань, и для каждого ее элемента предел в определении показателя является точным. В частности, из этого следует, что, как и в слабом случае, верхний (нижний) показатель совпадает с одноименным нижним (верхним).

Обозначим через $\dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$ множество всех решений $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}^2}$, на которых каждый показатель $\varkappa \in \mathcal{K}^2$ имеет точный предел.

Теорема 3. *Для любого $\lambda > 0$ существует система $A \in \mathcal{M}^2_0$, для которой выполнены включение $\mathcal{S}_*(A) \subset \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}^2}$ и равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{K}^2}(A) = [0, \lambda].$$

В третьей главе мы снова проходим путь из подготовки к построению системы и самого построения.

В работе[18] проведено исследование частоты суммы двух гармонических колебаний с несоизмеримыми коэффициентами при аргументе, например, $\cos t + \cos\sqrt{2}t$, и с

[18]Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №4. С. 479–486.

его помощью доказано существование уравнения с континуальным спектром частот. В доказательстве теоремы 3 мы заимствуем у авторов работы[18] идею использовать для построения примера *уравнения* с континуальным спектром *эргодичность* иррациональной обмотки тора, только вместо обмотки тора для построения *системы* с континульным спектром мы применем *равномерность* распределения в отрезке $[0,1]$ дробных частей от чисел последовательности $i\theta, i \in \mathbb{N}$, где θ — это произвольное иррациональное число.

Определение 11. Последовательность дробных долей (θ_i) называется *равномерно распределенной по модулю* 1 (сокращенно р. р. мод 1), если для каждого интервала $[a,b) \subset [0,1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{[a,b)}(\theta_i) = b - a,$$

где $\chi_{[a,b)}$ — это характеристическая функция промежутка $[a,b)$.

Благодарность

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Игорю Николаевичу Сергееву за ценные советы и постоянное внимание к работе. Автор также благодарен Владимиру Владиславовичу Быкову за организационную и моральную поддержку.

Заключение

В первой главе диссертации удалось выяснить, что спектр показателей блуждаемости для двумерных ограниченных непрерывных систем, в отличие от автономных систем, может состоять из более чем одного значения. Кроме того, даже в классе периодических систем найдены такие, что их спектр совпадает со сколь угодно большим конечным множеством неотрицательных чисел, причем все значения в их спектре существенные. Этот результат говорит о том, что ожидать от спектров показателей блуждаемости такого же простого строения, каким обладают спектры показателей Ляпунова, не следует, т.е. спектры показателей блуждаемости устроены сложнее. В дальнейшем хотелось бы получить ответ на вопрос: всегда ли спектр периодической системы конечен?

Во второй главе получено, что спектр показателей блуждаемости может состоять из бесконечного (счетного) числа значений, а также выделено некоторое семейство счетных множеств, реализуемых, как спектр хотя бы одной двумерной ограниченной системы. Однако пока не известно, что из себя представляет класс всех таких счетных множеств.

В третьей главе установлено, что множество элементов в спектре показателей колеблемости и блуждаемости для ограниченной системы может иметь мощность континуума и даже совпадать с отрезком числовой прямой. Исходя из этого, логично предположить, что спектр указанных показателей может представлять собой и более сложно устроенное множество, чем просто отрезок или дискретное множество точек. Поэтому следующим шагом на пути к полному описанию спектров показателей колеблемости и блуждаемости в двумерном ограниченном случае могло бы быть отыскание класса каких-либо более сложно устроенных множеств, реализуемых спектрами.

В заключение отметим, что в диссертации автором был разработан некоторый специальный подход к построению дифференциальных систем с заданными свойствами. В дальнейшем он также может использоваться в аналогичных построениях и другими математиками, специализирующимися в качественной теории дифференциальных уравнений.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из списков ВАК, Scopus, WoS, RSCI.

1. Шишлянников Е.М. Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2017. №1. С. 64–68. Импакт-фактор (РИНЦ) 0.268. Англ. пер.: Shishlyannikov E.M. The example of a differential system with continual spectrum of wandering exponent // Moscow University Mathematics Bulletin. 2017. Vol 72. №1. P. 37–40.

2. Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2017. №5. С. 14–21. Импакт-фактор (РИНЦ) 0.268. Англ. пер.: Shishlyannikov E.M. Two-dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent // Moscow University Mathematics Bulletin. 2017. Vol 72. №5. P. 192–198.

3. Шишлянников Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сборник. 2018, том 209, №12, 149–164. Импакт-фактор (Web of Science) 1.057. Англ. пер.: Shishlyannikov E.M. The existence of a two-dimensional bounded system with continual and coinciding spectra of frequencies and of wandering exponents // Sb. Math. 2018. Vol 209. №12. P. 1812–1826.

Аннотации и тезисы докладов

1. Шишлянников Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №11. С. 1586–1587.

2. Шишлянников Е.М. Свойства характеристик блуждаемости // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2016".

3. Шишлянников Е.М. К вопросу о континуальности спектра частот у дифференциальных уравнений и систем // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №6. С. 856–857.

4. Шишлянников Е.М. О спектрах показателей колеблемости и блуждаемости двумерных линейных систем // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2017). Том 1.

Работ в соавторстве нет.