МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Шафаревич Антон Андреевич

Орбиты группы автоморфизмов аффинных орисферических многообразий

Специальность 01.01.06 —
Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Гайфуллин Сергей Александрович**
кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Панов Тарас Евгеньевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии, профессор.

Петухов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, ФГБУН «Институт проблем управления передачи информации имени А.А. Харкевича РАН», и.о. старшего научного сотрудника.

Стукопин Владимир Алексеевич,
доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национально-исследовательский университет)», кафедра Высшей математики, профессор.

Защита диссертации состоится 6 декабря 2019 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/245080056/
Автореферат разослан 6 ноября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17 ФГБОУ МГУ
доктор физико-математических
наук, член-корреспондент РАН

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации изучаются группы автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, которое мы будем обозначать $\mathbb{K}$.

Несмотря на то, что сама группа автоморфизмов аффинного алгебраического многообразия может и не быть алгебраической группой, она содержит алгебраические подгруппы, то есть такие подгруппы, которые можно наделить структурой аффинной алгебраической группы так, чтобы действие подгруппы на многообразии было регулярным. Отдельный интерес представляют одномерные связные алгебраические подгруппы, которые бывают двух типов. Обозначим через $\mathbb{G}_a$ аддитивную группу поля $\mathbb{K}$, а через $\mathbb{G}_m$ обозначим мультипликативную группу этого поля. Известно, что каждая одномерная связная алгебраическая группа изоморфна либо $\mathbb{G}_a$, либо $\mathbb{G}_m$.

Одна из причин, по которой интересны группы $\mathbb{G}_a$ и $\mathbb{G}_m$, заключается в том, что действия этих групп на аффинном многообразии можно описать с помощью алгебраических терминов. Действиям группы $\mathbb{G}_m$ соответствуют градуировки группой $\mathbb{Z}$ на алгебре регулярных функций на многообразии. А действиям группы $\mathbb{G}_a$ соответствуют *локально нильпотентные дифференцирования* на той же алгебре. Это такие дифференцирования, для которых для любого элемента алгебры найдется достаточно большая степень дифференцирования, которая будет равна нулю на этом элементе.

Бывают случаи, когда изучение алгебраических подгрупп помогает описать типичные орбиты группы автоморфизмов или даже все орбиты.

Назовем точку на многообразии *гибкой*, если касательное пространство к многообразию в этой точке порождено касательными векторами к орбитам всевозможных $\mathbb{G}_a$-действий на многообразии. Многообразие называется *гибким*, если каждая его гладкая точка гибкая.

Оказывается, что из гибкости аффинного алгебраического многообразия размерности большей двух следует, что группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве гладких точек. Более того, имеет место следующий результат. Обозначим через $\mathrm{SAut}(X)$ подгруппу в группе автоморфизмов многообразия X, порожденную всеми одномерными подгруппами изоморфными $\mathbb{G}_a$. Как и вся группа автоморфизмов, эта группа не обязана быть алгебраической. Будем говорить, что действие некоторой группы на множестве является *бесконечно транзитивным*, если для любых двух конечных упорядочых наборов одинаковой длины, состоящих из попарно различных элементов множества, существует элемент группы, который переводит первый упорядочный набор во второй.

Теорема. *(Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch, Zaidenberg[1]). Пусть X неприводимое аффинное многообразие размерности не меньше чем 2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует транзитивно на множестве гладких точек.*
2. *Группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек.*
3. *Многообразие X гибкое.*

На данный момент было доказано, что многие известные многообразия являются гибкими. Например, невырожденные торические многообразия и аффинные конуса над многообразиями флагов[2]. В работе А.Ю. Перепечко[3] доказана гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5. Другие примеры гибких многообразий можно найти в работе «Flexible affine cones and flexible coverings[4]».

При изучении свойств группы автоморфизмов алгебраических многообразий можно ограничиться каким-либо широким классом многообразий. Например, многообразиями, у которых априори группа автоморфизмов достаточно большая. Такими многообразиями являются квазиоднородные пространства — это многообразия, на которых действует алгебраическая группа с открытой в топологии Зарисского орбитой. Если потребовать более сильное условие, чтобы борелевская подгруппа действовала с открытой орбитой, то такие многообразия допускает удобное описание. Эти многообразия называются сферическими. Информацию о сферических многообразий можно найти в работе Д.А. Тимашева[5]. Описание сферических многообразий становится особенно удобным, если группа, которая действует на многообразии, является тором. Такие многообразия называются торическими. Торическим многообразиям посвящена книга «Toric Varieties[6]».

[1] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M., *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal, **162**:4, (2013), 767-823.

[2] Аржанцев И.В., Зайденберг М.Г., Куюмжиян К.Г., *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Математический сборник, **203**:7 (2012), 3–30.

[3] Перепечко А. Ю., *Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5*, Функциональный анализ и его приложения, **47**:4 (2013), 45–52.

[4] Michalek M., Perepechko A., Hendrik S., *Flexible affine cones and flexible coverings*, Mathematische Zeitschrift, **209**:3-4, (2018), 1457-1478.

[5] Timashev D., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **138**, (2011).

[6] Cox D., Little J., Schenck H., *Toric Varieties*, American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics, **124**, (2011).

В диссертации изучаются аффинные орисферические многообразия сложности ноль, известные также как S-многообразия. Это многообразия, на которых действует алгебраическая группа с открытой орбитой, причем стабилизатор некоторой точки из открытой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу. Впервые они были введены в 1972 году Э.Б. Винбергом и В.Л. Поповым[7]. Далее мы будем называть аффинные орисферические многообразия сложности ноль просто аффинными орисферическими многообразиями.

Кратко опишем как устроено комбинаторное описане аффинных орисферических многообразий. Пусть X — аффинное орисферическое многообразие относительно действия алгебраической группы G. Легко видеть, что унипотентный радикал группы G действует тривиально на многообразии X. Поэтому можно считать, что группа G редуктивна. Пусть $x \in X$ — некоторая точка из открытой орбиты, стабилизатор которой содержит максимальную унипотентную подгруппу U в G. Зафиксируем борелевскую подгруппу B, содержащую U. Отображение $g \to g \cdot x$ определяет вложение алгебры регулярных функций на X в алгебру регулярных функций на G. Можно показать, что образ этого вложения распадется в прямую сумму весовых пространств относительно правого действия B на алгебре регулярных функций на G. Множество весов группы B, для которых соответствующее весовое пространство лежит в образе алгебры регулярных функций на X, образует полугруппу, которая содержится в полугруппе доминантных весов группы B. Отметим, что под полугруппой мы понимаем множество с ассоциативной бинарной операцией и с нейтральным элементом. Многообразие X однозначно определяется этой полугруппой с точностью до изоморфизма, перестановочного с действием группы G.

Обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ решетку характеров группы B. Тогда в пространстве $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ можно рассмотреть конус, порожденный элементами полугруппы, соответствующей многообразию X. Существует биекция между G-орбитами на многообразии X и гранями этого конуса. При этой биекции идеал регулярных функций на X, равных нулю на замыкании G-орбиты, порождается функциями, лежащими в тех весовых пространствах группы B, для которых вес B не лежит в соответствующей грани конуса.

Аффинные орисферические мноогообразия являются сферическими. Аффинные конуса над многообразиями флагов, а также торические многообразия являются примерами аффинных орисферических многообразий.

Диссертация посвящена изучению орбит группы автоморфизмов аффинных орисферических многообразий. В частности, в главе 2 доказывается гибкость аффинных орисферических многообразий полупростых групп. В главе 3 доказыва-

[7]Винберг Э.Б., Попов В.Л., *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Известия Академии Наук СССР. Серия математическая, **36** (1972), 749-764.

ется гибкость нормальных аффинных орисферических многообразий произвольных групп, а также формулируются достаточные условия для существования $\mathbb{G}_a$-действий на многообразии и существования гибких точек. В главе 4 дается описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов аффинных торических многообразий, используя размерности касательных пространств к точкам многообразия.

Цели диссертации

1. Исследовать аффинные орисферические многообразия полупростых групп на гибкость.

2. Исследовать аффинные орисферические многообразия произвольных групп на гибкость.

3. Найти достаточные условия для существования $\mathbb{G}_a$-действий на многообразии, а также достаточные условия гибкости многообразия.

4. Исследовать орбиты группы автоморфизмов торических многообразий.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Получено доказательство гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп.

2. Получено доказательство гибкости нормальных аффинных орисферических многообразий без обратимых функций отличных от констант произвольных групп.

3. Получено достаточное условие гибкости аффинного многообразия.

4. Получено достаточное условие существования $\mathbb{G}_a$-действия на многообразии.

5. Получено геометрическое описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов аффинных торических многообразий

Научная новизна

Автором диссертации впервые дан ответ на вопрос о гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп и гибкости нормальных аффинных орисферических многообразий без обратимых функций отличных от констант произвольных групп. Получены новые достаточные условия гибкости многообразия и существования $\mathbb{G}_a$-действия на многообразии. Получено новое геометрическое описание орбит группы автоморфизмов торических многообразий.

Методы исследования

В диссертации используются методы алгебры, теории инвариантов, теории представлений, алгебраической геометрии и комбинаторной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области теории инвариантов и алгебраических групп преобразований.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательском семинаре по алгебре (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018);
- на седьмой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (факультет математики Самарского университета, 2018);
- на научном семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А.Т. Фоменко (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019).

Публикации

Результаты данной диссертации опубликованы в 3 статьях [1, 2, 3], из них 3 работы [1, 2, 3] опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных

SCOPUS, Web of Science и RSCI. Работа [3] написана в соавторстве с С.А. Гайфуллиным. (Лично Шафаревичу А.А. принадлежит доказательство предложения 3 и лемма 3. С.А. Гайфуллину принадлежат предложение 4 и леммы 4 и 2. Теоремы 2 и 3, предложения 5,6,7 и следствия 1 и 2 получены совместно.)

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 21 наименований. Общий объем диссертации составляет 89 страниц.

Содержание работы

Диссертация разбита на главы, а главы — на разделы. В главе 1 изложены ранее известные факты. Остальные главы посвящены результатам диссертации. Нумерация лемм, теорем, предложений, следствий и замечаний сквозная. В конце введения приведен список наиболее часто встречающихся обозначений.

В **Главе 1** приведены различные факты, которые требуются в дальнейшем.

В *разделе 1.1* приводятся необходимые сведения о дифференцированиях алгебр, о связи дифференцирований алгебры регулярных функций аффинного многообразия и дифференцирований алгебры регулярных функций объемлющего аффинного пространства.

Раздел 1.2 посвящен локально нильпотентным дифференцированиям, связи локально нильпотентных дифференцирования и $\mathbb{G}_a$-действий, а также группе $\mathrm{SAut}(X)$ и гибкости.

Определение. *Дифференцирование ∂ называется* локально нильпотентным*, если для любого элемента $a \in A$ существует натуральное $n \in \mathbb{N}$, такое что $\partial^n(a) = 0$.*

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль. Пусть ∂ — локально нильпотентное дифференцирование на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$. Тогда ему соответствует автоморфизм φ_∂^* алгебры $\mathbb{K}[X]$, который определяется следующим образом:

$$\varphi_\partial^*(f) = \exp(\partial)(f) = f + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i(f)}{i!}.$$

В свою очередь, автоморфизму алгебры $\mathbb{K}[X]$ соответствует автоморфизм φ_∂ многообразия X. Каждому локально нильпотентному дифференцированию ∂ на алгебре $\mathbb{K}[X]$ соответствует действие аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ на многообразии X, которое задается следующим образом: результатом действия элемента $t \in \mathbb{G}_a$ на точку $x \in X$ есть точка $\varphi_{t\partial}(x)$. В работе Фрейденбурга[8] доказывается, что таким образом можно получить любое регулярное действие группы $\mathbb{G}_a$ на X.

Определение. *Группой* специальных автоморфизмов *многообразия X называется подгруппа в группе* $\mathrm{Aut}(X)$*, порожденная всеми возможными регулярными действиями группы $\mathbb{G}_a$ на многообразии X. Обозначается* $\mathrm{SAut}(X)$.

Определение. *Точка $x \in X^{reg}$ называется* гибкой*, если касательное пространство к многообразию X в точке x порождено касательными векторами к орбитам точки x при всевозможных действиях группы $\mathbb{G}_a$. Многообразие X называется* гибким*, если все его гладкие точки гибкие.*

Определение. *Пусть A — бесконечное множество и группа G действует на множестве A. Тогда действие группы G на A называется* бесконечно транзитивным*, если для любого натурального k и любых двух упорядоченных наборов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и $b_1, b_2, \ldots b_k$, состоящих из попарно различных элементов множества A, существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a_i = b_i$ для любого $i = 1, \ldots k$.*

Теорема. *(Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch, Zaidenberg[9]). Пусть X неприводимое аффинное многообразие размерности не меньше чем 2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует транзитивно на X^{reg}.*
2. *Группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует бесконечно транзитивно на X^{reg}.*
3. *Многообразие X гибкое.*

При изучении гибкости важную роль играют следующие объекты.

Определение. Инвариантом Макара-Лиманова $\mathrm{ML}(X)$ *аффинного алгебраического многообразия X называется пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[X]$. Иными словами,* $\mathrm{ML}(X)$ *— это подалгебра в $\mathbb{K}[X]$, состоящая из всех регулярных* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантов.*

Подполе $\mathrm{FML}(X)$ *в $\mathbb{K}(X)$, состоящее из всех рациональных* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантов, называется* инвариантом Макара-Лиманова в поле.

[8]Freudenburg G. *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Springer, **136**, (2006).

[9]Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M., *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal, **162**:4, (2013), 767-823.

Утверждение. *(Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch, Zaidenberg*[10]*) Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

1. *на X есть гибкая точка;*
2. *группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X с открытой орибитой;*
3. $\mathrm{FML}(X) = \mathbb{K}$.

В *разделе 1.3* дается определение и комбинаторное описание аффинных орисферических многообразий. В частности, обсуждается строение алгебры регулярных функций аффинных орисферических многообразий.

Все сведения приведенные в этом разделе можно найти в работе Э.Б. Винберга и В. Л. Попова[11].

Пусть G — произвольная связная линейная алгебраическая группа, B — фиксированная в ней борелевская подгруппа. Тогда для $\Lambda \in \mathfrak{X}(B)$ положим

$$S_\Lambda = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid f(gb) = \Lambda(b)f(g) \ \ \forall g \in G, \ b \in B\}.$$

Очевидно, что S_Λ является векторным пространством. Более того, представление группы G, индуцируемое в S_Λ, контрагредиентно неприводимому представлению со страшим весом Λ.

Известно, что множество

$$\mathfrak{X}^+(B) \doteqdot \{\Lambda \in \mathfrak{X}(B) \mid S_\Lambda \neq 0\}$$

совпадает с множеством старших весов неприводимых представлений группы G. Это множество также называют множеством доминантных весов группы G. Алгебра S группы G определяется так:

$$S = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{X}^+(B)} S_\Lambda.$$

При $\Lambda, M \in \mathfrak{X}^+(B)$ имеет место равенство $S_\Lambda \cdot S_M = S_{\Lambda+M}$.

Определение. *Неприводимое аффинное многообразие X с регулярным действием на нем группы G называется* аффинными орисферическим многообразием

[10] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M., *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal, **162**:4, (2013), 767-823.

[11] Винберг Э.Б., Попов В.Л., *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Известия Академии Наук СССР. Серия математическая, **36** (1972), 749-764.

сложности ноль *группы G, если одна из орбит этого действия открыта в X и стабилизатор любой точки этой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G. Аффинные орисферические многообразия также называются S-многообразиями.*

Далее в тексте мы будем называть аффинные орисферические многообразия сложности ноль просто аффинными орисферическими многообразиями.

Для любого набора $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k\}$ доминантных весов группы G можно рассмотреть неприводимые представления

$$R_i : G \times V_{\Lambda_i} \to V_{\Lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, k$$

со старшими весами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ соответственно. Обозначим через $v_1, \cdots, v_k$ старшие вектора этих представлений. Тогда для представления $R = \bigoplus R_i$ в пространстве $V = \bigoplus V_{\Lambda_i}$ возьмем вектор $v = v_1 + \ldots + v_k$. Замыкание орбиты O вектора v будет аффинным орисферическим многообразием группы G. Обозначим это многообразие $X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)$. Таким образом можно получить любое аффинное орисферическое многообразие группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое подмножество $\mathfrak{X}^+(B)$. Тогда положим

$$S_{\mathfrak{F}} = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F}} S_\Lambda.$$

Если $\mathfrak{F}$ — полугруппа с нулем, то $S_{\mathfrak{F}}$ — подалгебра в $\mathbb{K}[G]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *(Винберг, Попов[12]) Имеет место G-эквивариантный изоморфизм*

$$\mathbb{K}[X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)] \ \simeq \ S_{\mathfrak{F}},$$

где $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}^+(B)$ — полугруппа с нулем, порожденная $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$.

Определение. *Мы будем говорить, что аффинное орисферическое многообразие X соответствует полугруппе $\mathfrak{F}$, если $\mathbb{K}[X] = S_{\mathfrak{F}}$. В этом случае X будем обозначать $X_{\mathfrak{F}}$.*

Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Обозначим через $K = \mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$, конус в $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, порожденный элементами из $\mathfrak{X}$. Тогда K будет выпуклым полиэдральным конусом.

[12] Винберг Э.Б., Попов В.Л., *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Известия Академии Наук СССР. Серия математическая, **36** (1972), 749-764.

Орбиты группы G на многообразии X находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями конуса K. Более точно, для каждой грани F конуса K многообразие нулей идеала $S_{\mathfrak{F}\setminus(F\bigcap\mathfrak{F})} \lhd S_{\mathfrak{F}}$ является замыканием некоторой орбиты. Обозначим это многообразие X_F. Тогда X_F — это аффинное орисферическое многообразие, а $F\bigcap\mathfrak{F}$ — соответствующая ему полугруппа.

В *разделе 1.4* рассматривается частный случай аффинных орисферических многообразий — торические многообразия. Комбинаторное описание, имеющее место для всех аффинных орисферических многообразий, для торических многообразий принимает особенно удобную форму. Все сведения, приведенные в этом разделе, можно найти в работе «Toric Varietes[13]».

Обозначим через T тор $(\mathbb{K}^*)^n$, где n — натуральное число. Рассмотрим решетку $N \cong \mathbb{Z}^n$ одно-параметрических подгрупп в T и обозначим через M двойственную ей решетку характеров T. Скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ обозначим естественное спаривание элементов этих решеток. Обозначим $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N,\ M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Если m — элемент решетки M, то через χ^m будем обозначать соответствующий характер тора T. Тогда алгебра регулярных функций на торе T может быть отождественна с алгеброй

$$\mathbb{K}[M] = \bigoplus_{m\in M} \mathbb{K}\chi^m.$$

Предположим, что T действует эффективно на нормальном аффинном алгебраическом многообразии X. Тогда X называется *торическим многообразием*, если в X есть открытая орбита относительно этого действия.

Пусть σ — полиэдральный конус в $N_{\mathbb{Q}}$, причем аффинная оболчка σ совпадает с пространством $N_{\mathbb{Q}}$. Через $\sigma^\vee$ мы будем обозначать двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}$, а именно

$$\sigma^\vee = \{w \in M_{\mathbb{Q}} | \forall v \in \sigma\ \ \langle w, v\rangle \geq 0\}.$$

Рассмотрим аффинное многообразие

$$X_\sigma = \operatorname{Spec} \bigoplus_{m\in\sigma^\vee\cap M} k\chi^m.$$

Тогда X_σ — аффинное торическое многообразие и любое аффиное торическое многообразие можно получить таким образом.

В *разделе 1.5* дается определение дивизориальной алгебры и кольца Кокса, а также вводится поняте AMDS многообразий. Кольцам Кокса посвящена книга «Cox rings[14]».

[13] Cox D., Little J., Schenck H., *Toric Varieties*, American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics, **124**, (2011).

[14] Arzhantsev I., Derenthal U., Hausen J., Laface A., *Cox rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

Пусть X — нормальное аффинное неприводимое алгебраическое многообразие. Напомним, что *простым дивизором* на X называется неприводимое замкнутое подмножетсво коразмерности 1. Рассмотрим группу $\mathrm{WDiv}(X)$ *дивизоров Вейля*, которая является свободной абелевой группой с простыми дивизорами в качестве образующих. Дивизор E является эффективным (мы будем обозначать это $E \geq 0$), если все коэффициенты при простых дивизорах неотрицательны. Каждой ненулевой рациональной функции на X соответствует дивизор $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{WDiv}(X)$ — дивизор её нулей и полюсов. Такие дивизоры называются *главными*. Главные дивизоры образую подгруппу $\mathrm{PDiv}(X)$ в группе дивизоров Вейля. Фактор группа $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$ называется *группой классов дивизоров*.

Каждому дивизору Вейля D можно сопоставить векторное пространство ассоциированное с дивизором

$$H^0(X, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Заметим, что если взять функцию $f \in H^0\,(X, D)$ и умножить ее на регулярную функцию $g \in \mathbb{K}[X]$, то произведение также будет лежать в $H^0(X, D)$. Таким образом векторное пространство $H^0(X, D)$ являются $\mathbb{K}[X]$ модулем.

Для каждой подгруппы $K \subseteq \mathrm{WDiv}(X)$ можно рассмотреть внешнюю прямую сумму модулей

$$\mathcal{S}_K = \bigoplus_{D \in K} \mathcal{S}_D, \quad \mathcal{S}_D = H^0(X, D).$$

Если $f_1 \in \mathcal{S}_{D_1}$ и $f_2 \in \mathcal{S}_{D_2}$ (D_1, D_2 принадлежат K), то определим их произведение в $\mathcal{S}_K$ как обычное произведение $f_1 f_2$ в $\mathbb{K}(X)$, рассматриваемое как элемент модуля $\mathcal{S}_{D_1+D_2}$. Далее можно определить умножение произвольных элементов из $\mathcal{S}_K$ согласно закону дистрибутивности.

Определенное выше умножение, определяет на $\mathcal{S}_K$ структуру алгебры над кольцом $\mathbb{K}[X]$. Эта алгебра имеет естественную градуировку группой K.

Определение. *Алгебра $\mathcal{S}_K$ называется* дивизориальной алгеброй*, ассоциированной с подгруппой K.*

Градуировка конечно порожденной группой K на $\mathcal{S}_K$ определяет действие тора $T = \mathrm{Spec}\mathbb{K}[K]$ на $\mathcal{S}_K$. При этом действии множество неподвижных элементов алгебры $\mathcal{S}_K$ совпадает с $\mathcal{S}_0 \cong \mathbb{K}[X]$.

Пусть X — нормальное многообразие без обратимых функций кроме констант и с конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$. Пусть K – конечно

Cambridge University Press. **144**, New York, (2015).

порожденная подгруппа в $\mathrm{WDiv}(X)$, такая что отображение $\pi\colon K \to \mathrm{Cl}(X)$, переводящее каждый дивизор $D \in K$ в его класс в группе $\mathrm{Cl}(X)$, сюръективно. Обозначим через K^0 ядро отображения π. Можно выбрать характер $\chi\colon K^0 \to \mathbb{K}(X)^\times$, т.е. гомоморфизм из группы K^0 в мультипликативную группу поля $\mathbb{K}(X)$, удовлетворяющий равенству

$$\mathrm{div}(\chi(E)) = E,$$

для всех $E \in K^0$.

Пусть $\mathcal{S}_K$ — дивизориальная алгебра, ассоциированная с K. Обозначим через I идеал в $\mathcal{S}_K$, порожденный всеми функциями вида $1-\chi(E)$, где 1 рассматривается как элемент $\mathcal{S}_0$, E — произвольный элемент из K^0 и $\chi(E)$ рассматриваются как элементы $\mathcal{S}_{-E}$.

Определение. Кольцом Кокса *многообразия X называется факторкольцо $\mathcal{R}_{K,\chi} = \mathcal{S}_K/I$.*

Можно показать, что определение кольца Кокса не зависит от выбора группы K и характера χ. Поэтому мы будем обозначать колько Кокса многообразия X просто как $\mathcal{R}(X)$.

Так как на алгебре $\mathcal{S}_K$ есть градуировка группой K, то на ней есть и градуировка группой $\mathrm{Cl}(X)$. При этом идеал I однороден относительно этой градуировки. Поэтому кольцо Кокса $\mathcal{R}(X)$ также градуировано группой $\mathrm{Cl}(X)$.

Определение. *Прямое произведение тора и конечной абелевой группы называется* квазитором.

Пусть X — нормальное аффинное многообразие без обратимых функций кроме констант. Предположим также, что группа классов дивизоров и кольцо Кокса многообразия X конечно порождены. Тогда можно рассмотреть *тотальное координатное пространство* $\overline{X} = \mathrm{Spec}\mathcal{R}(X)$. Это будет нормальное неприводимое аффинное многообразие. Так как $\mathcal{R}(X)$ градуировано группой $\mathrm{Cl}(X)$, то на $\overline{X}$ определено действие *характеристического* квазитора $N(X) = \mathrm{Spec}\mathbb{K}[\mathrm{Cl}(X)]$, причем многообразие X изоморфно категорному фактору $\overline{X}/\!/N(X)$. Морфизм факторизации $\pi\colon \overline{X} \to X$ называется *реализацией Кокса* многообразия X.

Напомним, что нормальное проективное многообразие с конечно порожденным кольцом Кокса называется *пространством мечты Мори*. По аналогии, мы будем называть *аффинным пространством мечты Мори* нормальное аффинное многообразие без обратимых функций, отличных от констант, с конечно порожденным кольцом Кокса. Мы будем сокращенно обозначать такие пространства английской аббревиатурой *AMDS*.

Утверждение. *(Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch, Zaidenberg*[15]*) Путь G — связная редуктивная алгебраическая группа и X — нормальное аффинное неприводимое унирациональное G-многообразие сложности $c(X) \leq 1$ без обратимых функций отличных от констант. Тогда группа классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ и кольцо Кокса $\mathcal{R}(X)$ являются конечно порожденными.*

Любое аффинное орисферическое многообразие рационально. Следовательно, любое аффинное орисферическое многообразие без обратимых функций отличных от констант является AMDS.

В **главе 2** доказывается гибкость аффинных орисферических многообразий полупростых групп.

Результаты этой главы основаны на статье [1].

План доказательства следующий. Пусть G — полупростая группа и B — борелевская подгруппа в ней. Обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ решетку характеров группы B, а через $\mathfrak{X}^+(B)$ полугруппу доминантных весов. Зафиксируем некоторую полугруппу с нулем $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}^+(B)$. Обозначим через $X_{\mathfrak{F}}$ соответствующие ей аффинное орисферическое многообразие группы G, а через σ — конус $\mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$ в пространстве $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{F} = \mathbb{Q}\mathfrak{F}$.

Достаточно доказать, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек. Множество гладких точек разбивается в объединение G-орбит. Так как полупростая группа порождается своими одномерными корневыми подгруппами, которые унипотентны, то все автоморфизмы многообразия X, соответствующие действию элементов группы G, лежат в группе $\mathrm{SAut}(X)$. Отсюда следует, что точки многообразия X, лежащие в одной G-орбите, лежат в одной $\mathrm{SAut}(X)$-орбите. Поэтому достаточно доказать, что у каждой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть точка, которую можно перевести с помощью автоморфизма из $\mathrm{SAut}(X)$ в точку из открытой G-орбиты. Для этого показывается, что для каждой неоткрытой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть автоморфизм из $\mathrm{SAut}(X)$, который переводит некоторую точку из этой орбиты, в точку, принадлежащую орбите большей размерности.

В *разделе 2.1* дается определение алгебры, порожденной первым уровнем.

Зафиксируем собственную грань F конуса σ и обозначим через O_F соответствующую ей орбиту в $X_{\mathfrak{F}}$.

Алгебра $S_{\mathfrak{F}}$ имеет $\mathfrak{F}$-градуировку, и мы будем говорить об однородных функциях в смысле этой градуировки.

Зафиксируем в $\mathfrak{F}$ некоторую конечную систему порождающих.

[15] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M., *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal, **162**:4, (2013), 767-823.

Лемма. *В пространстве $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$ существует аффинная гиперплоскость P, удовлетворяющая следующим условиям.*

(1) P не пересекается с аффинной оболочкой грани F.

(2) P является аффинной оболочкой множества $\mathfrak{F} \cap P$.

(3) Все порождающие полугруппы $\mathfrak{F}$, принадлежащие грани F, лежат в одном открытом полупространстве относительно P, а все остальные — в дополнении к нему.

Определение. *Гиперплоскость P, удовлетворяющую условиям предыдущей леммы, будем называть* первым уровнем (относительно грани F)*. Про функции из алгебры $S_{\mathfrak{F}}$ мы будем говорить, что они лежат в* первом уровне, *если они принадлежат пространству* $\bigoplus\limits_{\Lambda \in \mathfrak{F} \cap P} S_\Lambda$.

Для грани F зафиксируем некоторую гиперплоскость P, которая является первым уровнем относительно этой грани. Пусть $\mathfrak{F}'$ — подполугруппа в $\mathfrak{F}$, порожденная всеми элементами, лежащими в P. Обозначим черер $X_{\mathfrak{F}'}$ соответствующее аффинное орисферическое многообразие. В *разделе 2.2* доказывается следующая теорема

Теорема. *Пусть орбита O_F состоит из гладких в $X_{\mathfrak{F}}$ точек. Тогда существует ненулевое дифференцирование ∂ на алгебре $S_{\mathfrak{F}'} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, удовлетворяющее следующим условиям.*

(1) $\partial(S_\Lambda) = 0$, при весах Λ, принадлежащих грани F.

(2) $\partial(S_\Lambda) \subset S_F = \mathbb{K}[\overline{O'_F}] = \mathbb{K}[\overline{O}_F]$, при весах Λ, принадлежащих первому уровню.

В *разделе 2.3* показывается, что это локально нильпотентное дифференцирование продолжается на всю алгебру регулярных функций на многообразии.

Теорема. *Предположим, что дифференцирование ∂ алгебры $S_{\mathfrak{F}'}$ удовлетворяет условиям:*

(1) $\partial(S_\Lambda) = 0$, при весах Λ, принадлежащих грани F.

(2) $\partial(S_\Lambda) \subseteq S_F$, при весах Λ, принадлежащих первому уровню, т.е $P \cap \mathfrak{F}$.

Тогда существует такой элемент $h \in S_F$, что дифференцирование $h\partial$ продолжается до дифференцирования алгебры $S_{\mathfrak{F}}$.

Причем это прдолжение локально нильпотентно.

Лемма. *Дифференцирование $h\tilde{\partial}$ из предыдущей теоремы является локально нильпотентным.*

Наконец, в *разделе 2.4* доказываются основные результаты этой главы.

Теорема. *Пусть $X_{\mathfrak{F}}$ — аффинное орисферическое многообразие связной полупростой группы G, и F — такая собственная грань соответствующего этому многообразию конуса, что орбита O_F состоит из гладких точек.*

Тогда существует автоморфизм из группы $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$*, переводящий некоторую точку из O_F в некоторую точку из O — открытой орбиты в многообразии $X_{\mathfrak{F}}$.*

Теорема. *Группа* $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$ *действует на множестве гладких точек* $(X_{\mathfrak{F}})^{\mathrm{reg}}$ *транзитивно.*

Теорема. *Аффинное орисферическое многообразие полупростой группы гибкое.*

В **главе 3** доказывается, что если X — нормальное аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G, и в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых функций отличных от констант, то X гибкое. В отличие от результата из предыдущей главы больше не требуется, чтобы группа G была полупростой, но зато требуется, чтобы многообразие X было нормальным.

Результаты этой главы опубликованы в статье [3].

Доказательство разбито на три части.

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное многообразие. Регулярное действие одномерного тора $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}^\times, \cdot)$ на X соответствует $\mathbb{Z}$-градуировке на алгебре $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i.$$

Действие группы $\mathbb{G}_m$ называется *гиперболическим*, если существует положительное целое i и отрицательное целое j, такие что однородные компоненты $\mathbb{K}[X]_i$ и $\mathbb{K}[X]_j$ ненулевые. Если $\mathbb{G}_m$-действие не является гиперболическим, то оно называется *негиперболическим*.

Пусть на многообразии X задано негиперболическое $\mathbb{G}_m$-действие. Можно считать, что все однородные компоненты $\mathbb{K}[X]_i$ с $i < 0$ равны нулю. Идеал $I = \bigoplus_{i>0} \mathbb{K}[X]_i$ в $\mathbb{K}[X]$ инвариантен относительно этого действия. Пусть Z — множество нулей идеала I. Тогда Z — это множество неподвижных точек для заданного $\mathbb{G}_m$-действия, и для каждой точки $x \in X$ существует предельная точка $\lim_{t \to 0} t \cdot x$, принадлежащая Z.

В *разделе 3.1* доказывается следующее предложение.

Предложение. *Пусть Z — множество неподвижных точек для некоторого негиперболического $\mathbb{G}_m$-действия на нормальном аффинном неприводимом многообразии X. Предположим, что $Z \cap X^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$. Тогда $Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ и для каждой* *точки* $z \in Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}}$ *касательное пространство* T_zX *порождено пространством* T_zZ *и касательными векторами к орбитам всевозможных регулярных* $\mathbb{G}_a$*-действий на* X.

Из этого предложения вытекают следующие следствия.

Следствие. *В условиях предыдущего предложения множество* Z *не является* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантным.*

Следствие. *В условиях предыдущего предложения, предположим, что* $z \in Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}}$. *Если касательное пространство* T_zZ *порождено касательными векторами к* $\mathbb{G}_a$*-орбитам для алгебраических* $\mathbb{G}_a$*-действий на* X, *то точка* z *гибкая в* X.

Далее, в *разделее 3.2* доказывается следующее утверждение.

Утверждение. *Предположим, что тор* T *действует на AMDS* X. *Обозначим через* H *подгруппу в* $\mathrm{Aut}(X)$, *порожденную* T *и* $\mathrm{SAut}(X)$. *Предположим, что на* X *нет гибких точек. Тогда существует* H*-инвариантный простой дивизор* $D \subseteq X$.

Из этого утверждения вытекает следствие.

Следствие. *Пусть* X *— AMDS. Предположим, что* H *действует транзитивно на* X^{reg}. *Тогда* X *гибкое.*

Наконец, в *разделе 3.3* с помощью результатов предыдущих параграфов доказывается основной результат этой главы. Пусть X — нормальное аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G и в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых функций отличных от констант.

Пусть T — максимальный тор в G. Правое действие тора T на $\mathbb{K}[G]$ индуцирует негиперболические $\mathbb{G}_m$-действия на X. Среди этих $\mathbb{G}_m$-действий можно выбрать такие, у которых неподвижные точки совпадают с замыканиями орбит группы G. Применяя результаты раздела 3.1 мы получаем, что подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденная T и $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на X^{reg}.

Нормальные аффинные орисферические многообразия без обратимых функций отличных от констант являются AMDS многообразиями. Поэтому мы можем применить результаты раздела 3.2. и получить основную теорему.

Теорема. *Пусть* X *— нормальное аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы* G *и в* $\mathbb{K}[X]$ *нет обратимых функций отличных от констант. Тогда* X *гибкое.*

В **главе 4** дается описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов аффинных торических многообразий, используя размерности касательных пространств к точкам многообразия.

Результаты этой главы опубликованны в статье [2].

Пусть T — тор, N — решетка однопараметрических подгрупп T, M — двойственная решетка характеров, X — аффинное торическое многообразие относительно эффективного действия тора T на X, σ — соответствующий конус в $N_{\mathbb{Q}}$ и $\sigma^{\vee}$ — двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ полугруппу $M \cap \sigma^{\vee}$.

Если F — грань конуса $\sigma^{\vee}$, то через $\langle F \rangle$ мы будем обозначать подгруппу в M, порожденную множеством $\mathfrak{F} \cap F$. Рассмотрим гомоморфизм факторизации $M \to M/\langle F \rangle$ и обозначим через $\mathfrak{F}/\langle F \rangle$ образ полугруппы $\mathfrak{F}$ при этом гомоморфизме.

Обозначим через $\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F \rangle)$ множество всех неприводимых элементов в полугруппе $\mathfrak{F}/\langle F \rangle$, а через $|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F \rangle)|$ количество элементов в этом множестве.

В *разделе 4.1* доказывается формула, позволяющая найти размерность касательного пространства в точке торического многообразия.

Предложение. *Пусть $T_F X$ — касательное пространство к X в произвольной точке обиты O_F. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\dim T_F X = \dim O_F + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F \rangle)|.$$

В *разделе 4.2* доказывается теорема, которая отвечает на вопрос, как устроены орбиты связной компоненты единицы группы автоморфизмов на аффинном торическом многообразии.

Пусть X аффинное торическое многообразие относительно действия тора T. Обозначим через $\mathrm{Aut}^0(X)$ связную компоненту единицы группы автоморфизмов в смысле определения, данного Рамануджамом[16].

Теорема. *Пусть O_1 и O_2 — орбиты тора T на многообразии X, и пусть $x_1 \in O_1$ и $x_2 \in O_2$. Тогда $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбиты точек x_1 и x_2 совпадают тогда и только тогда, когда существует последовательность орбит*

$$O_1 = O'_1, O'_2, \ldots O'_k, \ldots O'_m = O_2,$$

такая, что размерности соседних орбит отличаются на единицу, $O'_i \subseteq \overline{O'_{i+1}}$ при $i < k$ и $O'_{i+1} \subseteq \overline{O'_i}$ при $i \geq k$, и для любой пары соседних орбит O'_i и O'_{i+1} выполнены следующие условия:

(i) Есть только одна орбита коразмерности 1 в X, которая содержит в своем замыкании одну из орбит O'_i и O'_{i+1} и не содержит другую;

[16] Ramanujam C., *A note on automorphism groups of algebraic varieties,* Mathematische Annalen, **156**:1 (1964), 25–33.

(ii) Для каждой орбиты U тора T, которая содержит в своем замыкании одну из орбит O'_i и O'_{i+1}, существует орбита U', которая содержит в своем замыкании обе орбиты O'_i и O'_{i+1}, и размерность касательного пространства в произвольной точке орбиты U совпадает с размерностью касательного пространства в произвольной точке U'.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность С. А. Гайфуллину за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Автор благодарит Ивана Владимировича Аржанцева за полезные замечания и обсуждения.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за творческую и доброжелательную атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации.

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.06.

[1] Шафаревич А.А. Гибкость S-многообразий полупростых групп // Математический сборник. —2017 — Том 208, №2. — с. 121-148. Импакт-фактор: 0.966.

[2] Шафаревич А.А. Геометрическое описание орбит группы автоморфизмов аффинного торического многообразия // Вестник Московского Университета — 2019 —Том 79, №5 —с. 55-58. Импакт-фактор: 0.267.

[3] Gaifullin S., Shafarevich A. Flexibility of normal affine horospherical varities // Proceedings of American Mathematical Society — 2019 — Vol 147 —p. 3317-3330. Импакт-фактор: 0.891. (Лично Шафаревичу А.А. принадлежит доказательство предложения 3 и лемма 3. С.А. Гайфуллину принадлежат предложение 4 и леммы 4 и 2. Теоремы 2 и 3, предложения 5,6,7 и следствия 1 и 2 получены совместно.)