

ISSN 1608-845X

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 19 № 2 2019



Владивосток
Дальнаука
2019

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

2019

том 19

№ 2

В журнале печатаются материалы, содержащие результаты теоретических исследований и вычислительных экспериментов в математике и механике, проводимых в научных учреждениях Российской академии наук, отраслевых научно-исследовательских институтах, высших учебных заведениях России и стран Азиатско-Тихоокеанского Региона.

Главный редактор:

чл.-корр. РАН В.А. Быковский

Редакционная коллегия:

академик РАН М. А. Гузев (зам. гл. редактора),
чл.-корр. РАН В. Н. Дубинин (зам. гл. редактора),
к.ф.-м.н. М. О. Авдеева (отв. секретарь), д.ф.-м.н. Г. В. Алексеев,
д.т.н. И. Л. Артемьева, д.ф.-м.н. В. И. Берник, чл.-корр. РАН А. А. Буренин,
д.ф.-м.н. М. Вершигров, чл.-корр. РАН А. Е. Миронов,
чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко, д.ф.-м.н. К. В. Нефедев, д.ф.-м.н. Т. Е. Панов,
д.ф.-м.н. А. Г. Подгаев, д.ф.-м.н. И. В. Прохоров, чл.-корр. РАН С. И. Смагин,
д.ф.-м.н. А. В. Устинов, д.ф.-м.н. Ч. Ци, д.ф.-м.н. П. Цинтерхоф,
д.ф.-м.н. Г. Ш. Цициашвили, д.ф.-м.н. А. Ю. Чеботарев, д.ф.-м.н. К. А. Чехонин

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство ПИ № ФС 77–65566 от 4 мая 2016 г.

Учредители журнала:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
“Дальневосточное отделение Российской академии наук”,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной математики Дальневосточного отделения
Российской академии наук

FAR EASTERN MATHEMATICAL JOURNAL

2019

Volume 19

Number 2

Far Eastern Mathematical Journal is a halfyearly journal publishing the research papers in all areas of pure and applied mathematics and mechanics. In addition, reviews and notes in these and related fields are published.

УДК 514.112

MSC2010 52A38, 52A40

© Н. С. Астапов¹, И. С. Астапов²

Многообразие обобщений теоремы Птолемея

В статье исследуются метрические свойства общего четырехвершинника (тетрона), частными случаями которого являются треугольник, плоский и пространственный четырехугольники, а также тетраэдр. Доказана основная теорема о связи длин сторон, величин плоских углов и величины двугранного угла тетрона. Следствиями этой теоремы являются многие замечательные теоремы о треугольниках, четырехугольниках и тетраэдрах. Отдельное внимание уделено равногранным тетраэдрам.

Ключевые слова: *площадь произвольного четырехугольника, равногранный тетраэдр, теорема о четырехвершиннике, теорема Бретшнейдера, неравенство Птолемея, неравенство Брамгаупта.*

Теорема Птолемея. *В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон*

$$mn = ac + bd, \quad (1)$$

где $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ и $d = DA$ — последовательные стороны, $m = AC$ и $n = BD$ — диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Доказательства этой теоремы в литературе чаще всего повторяют доказательство самого Птолемея (ок. 100 – ок. 178), приведенное учёным в книге “Альмагест”. Существуют и другие доказательства, например, непосредственно с помощью выражения диагоналей через стороны четырехугольника, с помощью инверсии, с помощью прямой Симсона [1, с. 55], с применением теоремы косинусов, с помощью комплексных чисел и, наконец, как следствие теоремы Бретшнейдера.

Известно, что для теоремы Птолемея выполняется обратная теорема. Поэтому справедливо утверждение: для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы произведение диагоналей было равно сумме произведений противоположных сторон.

¹ Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1; Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

² НИИ механики МГУ, 119192, г. Москва, Мичуринский проспект, д. 1.

Электронная почта: nika@hydro.nsc.ru (Н. С. Астапов), velais@imec.msu.ru (И. С. Астапов).

Отметим, что для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, кроме равенства (1) выполняются также равенства

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad (2)$$

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}, \quad (3)$$

$$m(ab + cd) = n(ad + bc). \quad (4)$$

Оказывается, что и здесь справедливы обратные утверждения: выполнения всего лишь одного из равенств (2), (3) или (4) для плоского выпуклого четырехугольника достаточно, чтобы около него можно было описать окружность.

В [2, с. 278] с помощью комплексных чисел для произвольных четырех точек плоскости доказаны теорема Бретшнейдера, неравенство Птолемея

$$mn \leq ac + bd \quad (5)$$

и обобщение этого неравенства для произвольных шести точек плоскости. В [3, с. 283] с помощью кватернионов доказано неравенство (5) для любых четырех точек пространства и методами линейной алгебры дано обобщение теоремы Птолемея для k точек, расположенных на одной окружности [3, с. 77]. Подробное доказательство и обсуждение неравенства (5) для плоскости приведены в [1, с. 127-131]. В [4] неравенство Птолемея для любых четырех точек пространства доказано методом координат, причем полностью дан ответ на вопрос о взаимном расположении точек в случае выполнения равенства. Так, если в (5) выполняется равенство, то все точки лежат на одной прямой или на одной окружности, причем в последнем случае точки A, B, C и D расположены на окружности именно в этом порядке, то есть, если все они различны, то $ABCD$ является выпуклым четырехугольником. Интересно отметить, что выполнение любых двух из трех равенств (2)–(4) для четырех точек пространства также влечет за собой либо принадлежность всех точек одной прямой, либо выпуклость и вписанность в окружность пространственного четырехугольника $ABCD$.

Заметим, что в формулировках обобщенной обратной теоремы Птолемея для плоскости иногда встречаются ошибки, особенно при доказательствах с использованием инверсии. Например, в [2, с. 234, №28.24], [4, с. 44], [Квант, 1972, №4, с. 45, решение задачи М99], [5, с. 44], [6, с. 54] утверждается, что для произвольных четырех точек плоскости равенство $mn = ac + bd$ выполняется только в том случае, если все точки лежат на одной окружности. То есть не учитывается случай, когда все четыре точки расположены на одной прямой. Этой ошибки легко избежать, если пользоваться теоремой Бретшнейдера (второй теоремой косинусов для четырехугольника): произведение квадратов диагоналей четырехугольника равно сумме произведений квадратов противоположных сторон без удвоенного произведения всех четырех сторон на косинус суммы противоположных углов.

Дальнейшее обобщение теоремы Птолемея было сделано в [7, 8]. Приведем здесь улучшенное доказательство основной теоремы. Сначала напомним определение тетрона (четырёхвершинника).

Определение. Назовем тетроном $ABCD$ произвольные четыре точки A, B, C и D пространства, последовательно соединенные отрезками AB, BC, CD и DA .

Тетрон может быть пространственным четырехугольником (частью "каркаса" тетраэдра), четырехугольником с самопересечением сторон и вырожденным, часть или все вершины которого совпадают друг с другом или лежат на одной прямой. Тетрон — естественное обобщение понятия четырехугольника: произвольный выпуклый и вогнутый четырехугольники являются плоскими тетронами. Поэтому утверждения, верные для любых тетронов, справедливы также для любых четырехугольников и треугольников (вырожденных тетронов). Отрезки, соединяющие соседние вершины тетрона, назовем сторонами, а соединяющие не соседние — диагоналями. Далее будем считать, что тетрон $ABCD$ задан порядком обхода вершин A, B, C и D , причем $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=m, BD=n, \angle BAD=\angle A, \angle BCD=\angle C, \angle ADB=\angle \delta_1, \angle BDC=\angle \delta_2, \angle ADC=\angle \delta$ и $\hat{n}$ — величина двугранного угла при ребре n .

Теперь сформулируем и докажем теорему, следствиями которой являются теорема Бретшнейдера, теорема и неравенство Птолемея, неравенство Брахмагупты, формула Герона, формула для площади произвольного четырехугольника и много других полезных утверждений.

Теорема о тетроне. Для любого тетрона справедливо равенство

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd(\cos \angle A \cos \angle C + \sin \angle A \sin \angle C \cos \hat{n}). \quad (6)$$

Доказательство. Возможны следующие случаи взаимного расположения вершин тетрона в пространстве.

1) Часть вершин совпадает. В этом случае справедливость равенства (6) проверяется подстановкой длин сторон и величин углов непосредственно в равенство. Например, рассмотрим тетрон, у которого совпадают ровно две вершины A и C . Подставляя $b=a, d=c, m=0, \angle A=\angle C$ и $\hat{n}=0$ в равенство (6), убеждаемся в его справедливости. Если величины углов не определены, то их можно выбрать (доопределить) соответствующим образом, например, если $a=b=c=d=0$, то можно считать $\angle A=\angle C=\hat{n}=0$ или $\angle A=\angle C=\pi/2, \hat{n}=\pi$.

2) Все вершины различны. Запишем аналог теоремы косинусов для трехгранного угла при вершине D :

$$\cos \delta - \cos \delta_1 \cos \delta_2 = \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \hat{n}. \quad (7)$$

Заметим, что формула (7) справедлива для любого расположения лучей DA, DB и DC в пространстве. Так, если все три луча лежат в одной плоскости, то есть $\cos \hat{n} = \pm 1$, то формула (7) превращается в формулу сложения для косинусов. Пользуясь теоремой косинусов в левой части и теоремой синусов для треугольников ABD и BCD в правой части равенства (7), получим равенство

$$\frac{c^2 + d^2 - m^2}{2cd} - \frac{n^2 + d^2 - a^2}{2nd} \cdot \frac{n^2 + c^2 - b^2}{2nc} = \frac{ab}{n^2} \sin \angle A \sin \angle C \cos \hat{n},$$

которое после упрощений можно записать в виде

$$\begin{aligned} a^2c^2 + b^2d^2 - 2m^2n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) - a^2b^2 - c^2d^2 = \\ = 4abcd \sin \angle A \sin \angle C \cos \hat{n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C$, то

$$\begin{aligned} n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) &= n^2(a^2 + d^2 - n^2 + b^2 + c^2 - n^2 + n^2) = \\ &= n^2(2ad \cos \angle A + 2bc \cos \angle C + n^2) = (n^2 + 2ad \cos \angle A)(n^2 + 2bc \cos \angle C) - \\ &- 4abcd \cos \angle A \cos \angle C = (b^2 + c^2)(a^2 + d^2) - 4abcd \cos \angle A \cos \angle C. \end{aligned}$$

Подставив последнее выражение в (8), после сокращений получим требуемое равенство (6).

Для любого тетрона справедливо неравенство [8]

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(\angle A - \angle C) \leq m^2n^2 \leq a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(\angle A + \angle C), \quad (9)$$

где хотя бы одно из двух равенств выполняется тогда и только тогда, когда тетрон является плоским. Из неравенства (9) следует неравенство Птолемея

$$|ac - bd| \leq mn \leq ac + bd, \quad (10)$$

причем ровно одно равенство в этой цепочке достигается в том и только в том случае, если все вершины тетрона лежат на одной прямой или на одной окружности, а двойное равенство — когда совпадают по крайней мере две вершины тетрона. Поэтому из отрезков, длины которых численно равны ac , bd и mn всегда можно построить треугольник (возможно, вырожденный), в котором угол α , противолежащий стороне mn , вычисляется по формуле $\cos \alpha = \cos \angle A \cos \angle C + \sin \angle A \sin \angle C \cos \hat{n}$, что следует из равенства (6). Сравните полученное решение с чисто геометрическим решением задачи 159 в [9, с. 286]. $\square$

Векторным методом можно доказать следующую теорему [4, 10].

Теорема. Для любого тетрона выполняются равенства

$$\vec{m} \vec{n} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{d}, \quad (11)$$

$$\vec{m} \vec{n} = (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)/2, \quad (12)$$

где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{m} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{n} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{m} \vec{n}$ — скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

Так как $|\vec{m} \vec{n}| \leq mn$, то из равенства (12) с учетом неравенств (10) получим цепочку неравенств

$$|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/2 \leq mn \leq ac + bd, \quad (13)$$

причем двойное равенство выполняется в том и только в том случае, если все вершины лежат на одной прямой и длина какой-то одной стороны тетрона равна сумме длин остальных трех сторон тетрона. Заметим, что геометрически неравенство

$|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/2 \leq ac + bd$ означает следующее: длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не больше длины этого отрезка. Если представить тетрон с фиксированными длинами сторон в виде шарнирной стержневой модели, то равенство (12) можно интерпретировать так: как бы мы ни двигали вершины модели, величина $I = \vec{m} \vec{n} = mn \cos \varphi$ будет оставаться постоянной (несмотря на то, что длины диагоналей и угол между ними по отдельности будут изменяться). Это свойство тетрона может быть полезным при проектировании шарнирно-стержневых механизмов. Угол ψ между диагоналями m и n тетрона (и, следовательно, произвольного четырехугольника) находится из равенства (12) по формуле $\cos \psi = |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/(2mn)$. Отсюда следует, что угол между противоположными ребрами тетраэдра не меняется, если поменять местами два противоположных ребра тетраэдра. Оказывается [4], что площадь S произвольного, в том числе и невыпуклого, четырехугольника выражается через длины его сторон и диагоналей формулой $S = \sqrt{m^2 n^2 / 4 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 / 16}$ и тем самым характеризует разницу левого неравенства в (13). С помощью этой формулы легко доказать, что из всех четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность. Если диагонали m и n вписанного в окружность четырехугольника с противоположными сторонами a и c , b и d перпендикулярны, то длины диагоналей выражаются [4] формулами $m = (ad + bc)/\sqrt{a^2 + c^2}$, $n = (ab + cd)/\sqrt{a^2 + c^2}$, а площадь — формулой $S = (ac + bd)/2$. Из формулы для площади произвольного четырехугольника (в том числе и невыпуклого, но без пересечения сторон) получим, пользуясь теоремой Бретшнейдера $m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\angle A + \angle C)$, другое выражение площади $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2((\angle A + \angle C)/2)$, где $p = (a + b + c + d)/2$ — полупериметр четырехугольника [2, 7]. Следствиями этого равенства являются формула Герона и неравенство Брахмагупты.

Неравенство Брахмагупты. *Площадь любого четырехугольника удовлетворяет неравенству $S \leq \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$, причем если достигается равенство, то все вершины лежат на одной окружности или на одной прямой (в этом случае четырехугольник является вырожденным).*

Формулы (6)–(8) можно применять для вычисления двугранных углов в тетраэдре. Представим формулу (8) еще в двух различных видах

$$(a^2 - d^2)(c^2 - b^2) - 2m^2 n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) = 16S_{adn}S_{bcn} \cos \hat{n}, \quad (14)$$

$$2S_{adn}S_{bcn} \cos \hat{n} = S_{adn}^2 + S_{bcn}^2 - (m^2 n^2 / 4 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 / 16). \quad (15)$$

Отсюда находим, что косинус двугранного угла $\cos \hat{n}$ тетраэдра при ребре n полностью определяется, если задать длины шести ребер тетраэдра и порядок взаимного расположения ребер (в рассматриваемом случае ребра a и c , b и d , m и n — противоположные ребра тетраэдра, причем a , b , c и d — последовательные стороны соответствующего тетрона). Так, например, выражение $\cos \hat{n}$ для косинуса двугранного угла при ребре n равногранного тетраэдра, все грани которого являются равными остроугольными треугольниками со сторонами n , k , l , можно получить из симметричного относительно k и l соотношения

$$\sin^2 \hat{n} = \frac{8n^2(n^2 - k^2 + l^2)(n^2 + k^2 - l^2)(-n^2 + k^2 + l^2)}{(n + k + l)^2(n - k + l)^2(n + k - l)^2(-n + k + l)^2}.$$

Из формулы (14) получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы двугранный угол при ребре n произвольного тетраэдра был острым

$$(a^2 - d^2)(c^2 - b^2) - 2m^2n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) > 0.$$

Если отождествлять зеркальные отражения, то из трех отрезков различной длины можно построить единственный треугольник. Однако из шести отрезков различной длины можно построить до 30 различных тетраэдров и различить их можно с помощью порядка обхода вершин, который определяет пары противоположных ребер [11, с. 22]. Выполнение неравенства (13) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из шести отрезков можно было построить тетраэдр (возможно, вырожденный). Объем рассматриваемого тетраэдра равен $V = S_{adn}S_{bcn} \sin \hat{n} / (3n)$, и он также может быть выражен только через длины ребер. Так, из шести отрезков, длины которых равны 11, 12, 13, 14, 15 и 16, можно построить 30 (максимально возможное число) различных неравновеликих тетраэдров. Среди них максимальный объем $V \approx 288$ имеет тетраэдр, которому соответствует тетрон $a = 16, b = 13, c = 12, d = 14, m = 11, n = 15$, а минимальный объем $V \approx 213$ — у тетраэдра с ребрами $a = 11, b = 16, c = 14, d = 13, m = 12, n = 15$. Интересно отметить, что объем правильного тетраэдра с ребрами $a = b = c = d = m = n = 13,5$ равен $V \approx 290$. Для равногранного тетраэдра имеем выражение для объема $V^2 = (n^2 + k^2 - l^2)(n^2 - k^2 + l^2)(-n^2 + k^2 + l^2)/72$, симметричное относительно длин ребер n, k, l [11, с. 88-90]. Так, для равногранного тетраэдра, все грани которого являются равнобедренными треугольниками со сторонами $n = k = 13, l = 26/\sqrt{3}$, получим $V \approx 282$. Отметим, что у этого тетраэдра два двугранных угла при противоположных ребрах l прямые. Однако неравногранный тетраэдр с такими же ребрами $a = b = c = m = 13, d = n = 26/\sqrt{3}$ (средняя длина ребра равна $\approx 13,7$) имеет объем $V \approx 296$.

Интересно, какой из возможных тридцати различных тетраэдров, ребрами которого являются шесть заданных отрезков, обладает наибольшим объемом? Авторам не известно простое решение этой задачи, её можно назвать задачей о вигваме. Однако в частном случае определение наибольшего объема тетраэдра, у которого заданы длины a, b, c трех ребер, выходящих из одной вершины, очевидно. Плоские углы этого трехгранного угла должны быть прямыми и объем такого тетраэдра равен $V = abc/6$. Расстояние ρ между противоположными ребрами m и n произвольного тетраэдра (длину общего перпендикуляра) можно вычислить, пользуясь формулой для объема произвольного тетраэдра $V = \rho mn \sin \psi / 6$, где ψ — угол между ребрами m и n . Так, для расстояния между противоположными и равными l ребрами равногранного тетраэдра получим простое выражение $\rho^2 = (n^2 + k^2 - l^2)/2$.

Радиусы вписанной в тетраэдр и описанной около тетраэдра сфер выражаются формулами $r = 3V/S$ и $R = S_{mn}/(6V)$, где S — площадь поверхности тетраэдра, а S_{mn} — площадь треугольника со сторонами ac, bd и mn (формула Крелле [10, с. 101]). Например, для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l получим

$$r^2 = \frac{(n^2 + k^2 - l^2)(n^2 - k^2 + l^2)(-n^2 + k^2 + l^2)}{8(n + k + l)(n + k - l)(n - k + l)(-n + k + l)}, \quad R^2 = \frac{n^2 + k^2 + l^2}{8}.$$

Сравнивая выражения $\sin^2 \hat{n}$ и r^2 , находим, что для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l справедливо равенство $r = S_{nkl} \sin \hat{n} / (2n)$, из которого следует равенство

$n/\sin\hat{n}=k/\sin\hat{k}=l/\sin\hat{l}$ — частный случай теоремы синусов для тетраэдра [10, с. 100]. Кроме того, из формулы $r = S_{nkl}\sin\hat{n}/(2n)$ следует равенство $r = h\sin\hat{n}/4 = H/4$, где h — высота грани, проведенная к ребру n , а H — высота равногранного тетраэдра. То есть радиус сферы, вписанной в равногранный тетраэдр, равен одной четвертой высоты тетраэдра. Заметим, что этот вывод можно получить из формулы $r = 3V/S$ для произвольного тетраэдра или из следующего свойства: в равногранном тетраэдре центр масс, центр вписанной и центр описанной сфер совпадают.

С помощью теоремы о тетроне удалось провести классификацию различных четырехугольников, в том числе невыпуклых и с самопересечением сторон. Так, в [7] доказано следующее утверждение.

Для любого плоского тетрона, ни одна из сторон которого не равна нулю, выполняется равенство $\cos(\angle A \pm \angle C) = \cos(\angle B \pm \angle D)$, где надо выбрать один из двух знаков по одному из правил:

оба знака $+$ $\iff ABCD$ — выпуклый четырехугольник;

разные знаки $\iff ABCD$ — невыпуклый четырехугольник без самопересечения сторон;

оба знака $-$ $\iff$ тетрон $ABCD$ является плоским невыпуклым с пересечением сторон, причем если $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$, то пересекаются стороны AD и BC , а если $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$, то пересекаются стороны AB и CD .

Формула (6) оказалась богатой следствиями, поэтому естественно появляется желание воспользоваться другими формулами сферической тригонометрии для вывода метрических соотношений в тетроне. Или, например, для произвольного треугольника ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, лежащего в плоскости Лобачевского с радиусом кривизны r , применить теорему косинусов и теорему синусов

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{c}{r} &= \operatorname{ch} \frac{a}{r} \operatorname{ch} \frac{b}{r} - \operatorname{sh} \frac{a}{r} \operatorname{sh} \frac{b}{r} \cos \angle C, \\ \operatorname{sh} \frac{a}{r} / \sin \angle A &= \operatorname{sh} \frac{b}{r} / \sin \angle B = \operatorname{sh} \frac{c}{r} / \sin \angle C \end{aligned}$$

для доказательства аналога теоремы Бретшнейдера в гиперболической геометрии.

Другое обобщение теоремы Птолемея — теорема Кэзи (Casy) — подробно рассмотрено в [12, с. 243], [13, с. 101], [14, с. 285]: *если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются в том же порядке одной и той же пятой окружности (или прямой) S или все проходят через одну точку, то имеет место соотношение*

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = t_{13}t_{24}, \quad (16)$$

где t_{12} есть отрезок общей касательной окружностей S_1 и S_2 и аналогичный смысл имеют величины $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}$ и t_{34} . Если все окружности S_i заменить точками, то мы приходим к теореме Птолемея. В [12, с. 267] для этой теоремы приведена обратная: если касательные расстояния четырех окружностей связаны соотношением (16), то эти окружности или все касаются одной и той же пятой окружности, или касаются одной прямой, или проходят через одну точку. Приложение обобщенной таким образом теоремы Птолемея для решения остававшейся на протяжении 45 лет нерешенной проблемы бельгийского математика В. Тебольта (1882–1960) дано

в [15]. Отметим, что такое обобщение теоремы Птолемея сделано только для плоскости, поэтому возникает вопрос: а нельзя ли обобщить ее на пространство? Более того, нельзя ли объединить оба эти обобщения в одной теореме?

И, наконец, приведем некоторое обобщение теоремы о тетроне. Так как расстояние между центрами двух сфер с равными радиусами равно расстоянию между точками касания общей внешней касательной плоскости (в этом случае обе сферы лежат по одну сторону от плоскости), то справедливо следующее утверждение. *Для произвольно расположенных в пространстве четырех равных сфер S_1, S_2, S_3 и S_4 с центрами в точках A, B, C и D справедливо равенство (6), где $\angle BAD = \angle A$, $\angle BCD = \angle C$, $\hat{n}$ — величина двугранного угла между плоскостями BAD и BCD , a — расстояние между точками касания общей внешней касательной плоскости к сферам S_1 и S_2 ; такой же смысл имеют величины b, c, d, t и n .*

Заключение

Таким образом, с помощью теоремы о тетроне однотипно доказываются разнообразные, казалось бы, утверждения: теорема Бретшнейдера, обратная теорема Птолемея, формула для площади произвольного четырехугольника, неравенство Брахмагупты. Тетрон оказывается полезным инструментом для составления и решения различных геометрических задач. Теорема о тетроне позволяет единообразно отвечать на некоторые вопросы относительно треугольников, четырехугольников и тетраэдров и поэтому является еще одним связующим звеном между задачами планиметрии и стереометрии.

Список литературы

- [1] Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, Наука, М., 1978.
- [2] В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, Ч. II, Наука, М., 1986.
- [3] В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры*, Наука, Физматлит, М., 1996.
- [4] Н. С. Астапов, А. В. Жуков, “Замечательный четырехвершинник”, *Квант*, **1**, (1996), 45–47.
- [5] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, *Избранные задачи и теоремы планиметрии*, Наука, М., 1967.
- [6] И. Я. Бакельман, *Инверсия*, Наука, М., 1966.
- [7] Н. С. Астапов, “Теорема о четырехвершиннике”, *Математическое образование*, **2**, (2000), 22–28.
- [8] N. S. Astapov, N. C. Noland, “The Remarkable Tetron”, *American Mathematical Monthly*, **108**:4, (2001), 368–370.
- [9] С. Страшевич, Е. Бровкин, *Польские математические олимпиады*, Мир, М., 1978.
- [10] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, Физматлит, М., 1989.
- [11] Г. Штейнгауз, *Сто задач*, Наука, Физматлит, М., 1976.
- [12] И. М. Яглом, *Геометрические преобразования*, т. II, Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, М., 1956.
- [13] Д. Ефремов, *Новая геометрия треугольника*, Типография М. Шпенцера, Одесса, 1902.

- [14] *Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии*, ред. А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова, МЦНМО, М., 2018.
- [15] Shay Gueron, “Two Applications of the Generalized Ptolemy Theorem”, *American Mathematical Monthly*, **109**:4, (2002), 362–370.

Поступила в редакцию

11 октября 2019 г.

Astapov N. S., Astapov I. S. The variety of generalizations of the Ptolemy’s theorem. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 129–137.

ABSTRACT

The article examines the metric properties of a tetron. In particular case a tetron is a triangle, flat or spatial quadrangle, and also a tetrahedron. The main theorem is proved about the connection of the lengths of the sides, the magnitudes of the plane angles and the magnitude of the dihedral angle of the tetron is proved. Many remarkable theorems about triangles, quadrangles, and tetrahedra are the corollaries of this theorem. Special attention given to equihedral tetrahedra.

Key words: *area of an arbitrary quadrilateral, equihedral tetrahedron, tetron theorem, Bretschneider theorem, Ptolemy’s inequality, Brahmagupta’s inequality.*

УДК 517.923
MSC2010 44A20

© В. А. Быковский¹

Разложения по специальным функциям

В теории автоморфных функций возникают интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах. В работе развивается универсальный метод для построения формул обращения. Рассмотрены многочисленные примеры.

Ключевые слова: *специальные функции, формулы обращения, разложения по специальным функциям.*

Введение

В монографии Титчмарша [1] подробно рассмотрен универсальный метод построения формул обращения вида

$$f(y) = \int_0^{\infty} K(yu)g(u) du, \quad (1)$$

$$g(u) = \int_0^{\infty} K^*(uy)f(y) dy. \quad (2)$$

Он основан на следующем простом наблюдении. Выполнив преобразование Меллина (формально) в обеих частях (1) и (2), получим

$$\hat{f}(s) = \theta(s)\hat{g}(1-s), \quad \hat{g}(s) = \theta^*(s)\hat{f}(1-s),$$

где $\hat{f}, \hat{g}, \theta, \theta^*$ — преобразование Меллина f, g, K, K^* соответственно. Из этих равенств следует, что

$$\theta(s)\theta^*(1-s) \equiv 1.$$

Обратно, отправляясь от голоморфной достаточно быстро убывающей в некоторой вертикальной полосе функции $\theta(s)$, и полагая

$$K(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \theta(s)y^{-s} ds, \quad K^*(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{\theta(1-s)}y^{-s} ds,$$

¹ Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

приходим к формулам обращения (1), (2). Если $\theta(s)\theta(1-s) \equiv 1$, то $K = K^*$. В эту схему укладывается классическое разложение Ганкеля с $K(y) = K^*(y) = \sqrt{y}J_\nu(y)$ (при $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$ косинусное и синусное разложения Фурье). Разными авторами изучено большое количество других примеров, реализующих эту идею.

В работе [2] был предложен новый метод, позволяющий получить целую серию формул обращения вида

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y, r)g(r) dr, \quad g(r) = \int_0^{\infty} K^*(y, r)f(y) \frac{dy}{y},$$

не укладывающихся в вышеупомянутую схему. Он основан на формулах обращения голоморфных в некоторых полюсах $-\delta < \operatorname{Re}(s) < \delta$, $-\mu < \operatorname{Re}(\varkappa) < \mu$ функций $\psi(s)$ и $h(\varkappa)$ для $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha/2 < 2\delta$

$$\begin{aligned} h(\varkappa) &= -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \psi(-s) ds, \\ \psi(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (3)$$

Метод Уимпа позволяет с единой точки зрения рассмотреть преобразования Мелера–Фока и Канторовича–Лебедева (см. [1]), а также аналогичные интегральные преобразования из работ [3–5].

В работе [6] Н. В. Кузнецов построил формулу обращения для интегрального преобразования

$$h(\varkappa) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) J_{-2\varkappa}(y) - \cos(\pi k/2 + \pi \varkappa) J_{2\varkappa}(y)}{\sin(2\pi \varkappa)} \frac{\varphi(y)}{y} dy,$$

которое не укладывается в схему Уимпа. Для $-1 < k \leq 1$ формула обращения имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{4\pi J_{2\varkappa}(y)}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} \varkappa h(\varkappa) d\varkappa + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) 4J_{k-1+2m}(y) h\left(\frac{k-1}{2} + m \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(y)$ однозначно восстанавливается по h , если она ортогональна функциям Бесселя $J_{k-1+2m}(y)$ ($m=1, 2, \dots$) по мультипликативной мере $y^{-1}dy$. Если формально выполнять в обеих частях этих неравенств преобразование Меллина, то мы придем к следующей паре формул обращения голоморфных в некоторой полосе функций.

Для $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$ и $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha/2 < 2\delta$

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(\varkappa + s/2)}{\Gamma(1 + \varkappa - s/2)} \cdot \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} d\varkappa + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) h \left(\frac{k-1}{2} + m \right) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m - \frac{s}{2}\right)}, \\ h(\varkappa) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \cos(\pi k/2 - \pi s/2) \psi(-s) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Если в (4) задана четная $h(\varkappa)$ с $h(\varkappa)=0$ в точках $\varkappa$, для которых $\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) = 0$, то в определении $\psi(s)$ ряд отсутствует. С их помощью можно обратить много других интегральных преобразований. Вводя в $\psi(s)$ весовые множители из произведений гамма-функций и применяя обратное преобразование Меллина, получим формулы обращения для интегральных преобразований со специальными функциями, в некотором смысле подобные преобразованиям Мелера – Фока, Канторовича – Лебедева и др. Отметим, что эти вопросы можно изучать методами гармонического анализа на симметрических пространствах (см. обзор [7]).

Преобразования (3) и (4) исследуются в пп. 1, 2, 3. В п. 4 доказываются формулы обращения для функций Уиттекера, построенные Брюггеманом в [5]. В частном случае они соответствуют формулам обращения Канторовича – Лебедева. В п. 5 исследуется разложение по индексу функции Бесселя, построенное Н. В. Кузнецовым в [6]. В п. 6 и п. 7 строятся разложения по индексам гипергеометрических функций из [4], содержащие в частном случае преобразование Мелера – Фока. И, наконец, в п. 8 построены разложения по индексам произведений функций Бесселя, содержащие в качестве частного случая результат из [3]. Смешанное разложение по индексу произведения функций Бесселя позволяет обратить формулу следа из [8]. Отметим, что в п. 7 и п. 8 мы ограничились формальными выкладками при их выводе. В заключительном п. 9 построен интегральный оператор проектирования, позволяющий выделить из заданной функции компоненту, которая разлагается в ряд (смешанные разложения).

Мы придерживаемся обозначений для специальных функций, принятых в справочнике [9].

Автор благодарен Н. В. Кузнецову за дискуссии по рассматриваемому кругу вопросов и Р. Брюггеману за многочисленные замечания по тексту рукописи.

1. Разложение в ряд по гамма-функциям

Пусть $\mu, \delta \in (0, \infty)$. Через $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ обозначим линейное пространство голоморфных в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s) < \mu$ функций $\psi(s)$, таких что $\forall \mu' \in (0, \mu)$ и $\forall \delta' \in (0, \mu)$ в полосе $-\mu' < \operatorname{Re}(s) < \mu'$ справедлива оценка

$$\psi(s) \ll_{\mu', \delta'} (1 + |s|)^{-\delta'}. \quad (5)$$

Определим на $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ операторы $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$, положив

а) в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s) < \infty$ для $\alpha \in (-\mu, \mu)$ с $\alpha < \operatorname{Re}(s)$

$$\left(T^{(+)}\psi\right)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\psi(w)dw}{s-w} = \psi^{(+)}(s); \quad (6)$$

б) в полосе $-\infty < \operatorname{Re}(s) < \mu$ для $\alpha \in (-\mu, \mu)$ с $\operatorname{Re}(s) < \alpha$

$$\left(T^{(-)}\psi\right)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\psi(w)dw}{w-s} = \psi^{(-)}(s). \quad (7)$$

По теореме о вычетах

$$\psi(s) = \psi^{(+)}(s) + \psi^{(-)}(s). \quad (8)$$

То есть $T^{(+)} + T^{(-)} = E$, где E — тождественный оператор.

Лемма 1. Пусть $\delta \in (0, 1]$, $\psi \in \mathcal{B}_\mu(\delta)$. Тогда $\psi^{(+)}, \psi^{(-)} \in \mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\mu' \in (0, \mu)$, $2\varepsilon = \mu - \mu'$. Тогда в полосе $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s) \leq \mu'$ для $\delta' \in (0, \delta)$ и $\operatorname{Im}(s) = r$ находим

$$\psi^{(+)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=-\mu'-\varepsilon} \frac{\psi(w)dw}{s-w} \ll_{\mu', \delta'} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{-\delta'} (1+|t-r|)^{-1} dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

где I_1, I_2, I_3 — интегралы с тем же самым подынтегральным выражением. При этом интегрирование в I_1 ведется по отрезку $|t-r| \leq |r|/2$, в I_2 по $|t| \leq |r|/2$, а в I_3 по оставшейся части вещественной прямой. Очевидно, что

$$I_1 + I_2 + I_3 \ll_{\delta'} (1+|r|)^{-\delta'} \int_0^{|r|/2} \frac{du}{1+u} + (1+|r|)^{-1} \int_0^{|r|/2} \frac{du}{(1+u)^{\delta'}} + \int_{|r|/2}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{1+\delta'}}.$$

Поэтому в полосе $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s) \leq \mu'$

$$\psi^{(+)}(s) \ll_{\mu', \delta'} (1+|s|)^{-\delta'} \log(2+|s|). \quad (9)$$

Точно так же доказывается оценка

$$\psi^{(-)}(s) \ll_{\mu', \delta'} (1+|s|)^{-\delta'} \log(2+|s|). \quad (10)$$

Осталось только заметить, что $\forall \delta'' < \delta' < \delta$

$$(1+|s|)^{-\delta'} \log(2+|s|) \ll_{\delta''} (1+|s|)^{-\delta''}.$$

Лемма 1 доказана. □

Определим еще два пространства, положив

$$\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta) = T^{(+)}(\mathcal{B}_\mu(\delta)), \quad \mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta) = T^{(-)}(\mathcal{B}_\mu(\delta)).$$

Из леммы 1 следует, что для $\delta \in (0, 1]$ $\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)$ и $\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$ подпространства в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Лемма 2. Операторы $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ тождественны на подпространствах $\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)$ и $\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$ соответственно.

Доказательство. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{-1} (1 + |t_1 - t_2|)^{-1} (1 + |t_2|)^{-\delta} dt_1 dt_2$$

абсолютно сходится $\forall \delta \in (0, \infty)$. По теореме о вычетах в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s) < \infty$ для $\alpha, \beta \in (-\mu, \mu)$ с $\alpha < \beta < \operatorname{Re}(s)$ и $\operatorname{Re}(w_2) = \alpha$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=\beta} \frac{dw_1}{(w_1 - w_2)(s - w_1)} = \frac{1}{s - w_2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \psi^{(+)(+)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=\beta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_2)=\alpha} \frac{\psi(w_2) dw_2}{w_1 - w_2} \right) \frac{dw_1}{s - w_1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_2)=\alpha} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=\beta} \frac{dw_1}{(w_1 - w_2)(s - w_1)} \right) \psi(w_2) dw_2 = \psi^{(+)}(s). \end{aligned}$$

Точно так же доказывается равенство $\psi^{(-)(-)} = \psi^{(-)}$. Лемма 2 доказана. $\square$

Для $\delta \in (1/2, \infty)$ определим в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ скалярное произведение по формуле

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \psi_1(s) \psi_2(-s) ds. \quad (11)$$

Лемма 3. Для $\delta \in (1/2, 1]$ имеет место ортогональное разложение

$$\mathcal{B}_\mu(\delta) = \mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta) \oplus \mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$$

относительно скалярного произведения (11).

Доказательство. Так как $\forall \delta \in (1/2, \infty)$, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{-\delta} (1 + |t_2|)^{-\delta} (1 + |t - t_1|)^{-1} (1 + |t + t_2|)^{-1} dt dt_1 dt_2$$

абсолютно сходится, то для $\alpha \in (0, \mu)$ и $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_\mu(\delta)$ получим

$$\begin{aligned} \langle \psi_1^{(+)}, \psi_2^{(-)} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=-\alpha} \frac{\psi_1(w_1) dw_1}{s - w_1} \right) \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_2)=\alpha} \frac{\psi_2(w_2) dw_2}{w_2 + s} \right) ds = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \frac{ds}{(s-w_1)(w_2+s)} = 0.$$

Лемма 3 полностью доказана. $\square$

Пусть $\operatorname{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$. Для любого $m=0, 1, 2, \dots$ функция

$$\gamma_m(\varkappa; s) = \frac{\Gamma(\varkappa - s/2)}{\Gamma(\varkappa + s/2)} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa + m + s/2)}{\Gamma(1 + \varkappa + m - s/2)} \quad (12)$$

рациональна по s и

$$\gamma_m(\varkappa; s) = \frac{\mathcal{P}_m(\varkappa; s)}{\mathcal{P}_m(\varkappa; -s)} \cdot \frac{1}{(\varkappa + m - s/2)},$$

где

$$\mathcal{P}_m(\varkappa; s) = \frac{\Gamma(\varkappa + m + s/2)}{\Gamma(\varkappa + s/2)}$$

полином по s степени m . В частности,

$$\mathcal{P}_0(\varkappa; s) = 1, \quad \mathcal{P}_1(\varkappa; s) = (\varkappa + s/2), \quad \mathcal{P}_2(\varkappa; s) = (\varkappa + s/2)(1 + \varkappa + s/2).$$

Очевидно, что $\gamma_m(\varkappa; \dots) \in \mathcal{B}_\mu(1)$.

В полуплоскости $-\infty < \operatorname{Re}(s) < \mu$ у $\gamma_m(\varkappa; s)$ отсутствуют полюсы. Отсюда с помощью теоремы о вычетах получаем соотношение ортогональности

$$\langle \gamma_m(\varkappa; \dots), \gamma_n(\varkappa; \dots) \rangle = \delta_{m,n}(\varkappa + m)^{-1}. \quad (13)$$

Лемма 4. Пусть $\operatorname{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$. Тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$ $\gamma_m(\varkappa; \dots) \in \mathcal{B}_\mu^{(-)}(1)$.

Доказательство. По определению, для $\alpha \in (\mu/2, \mu)$ и $\operatorname{Re}(s) < \alpha$

$$\gamma_m^{(-)}(\varkappa; s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \gamma_m(\varkappa; w) \frac{dw}{w-s}.$$

Подынтегральное выражение слева от прямой $\operatorname{Re}(w) = \alpha$ оценивается как $O(|w|^{-2})$ при $|w| \rightarrow \infty$ и имеет единственный полюс в точке $w = s$ с вычетом $\gamma_m(\varkappa; s)$. Поэтому $\gamma_m^{(-)}(\varkappa; s) = \gamma_m(\varkappa; s)$. Лемма 4 доказана. $\square$

Для доказательства полноты ортогональной системы $\{\gamma_m(\varkappa; s)\}$ нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 5. Пусть $\mu, \delta \in (0, \infty)$ $\operatorname{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$ и $\eta(s)$ — интегрируемая по Лебегу комплекснозначная функция на прямой $\operatorname{Re}(s) = \mu$, для которой

$$\eta(s) \ll (1 + |s|^{-\delta}).$$

Тогда для $m \in [1, \infty)$ и $\operatorname{Re}(s) \neq \mu$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\mu} \frac{\Gamma(\varkappa + w/2)}{\Gamma(\varkappa - w/2)} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa + m - w/2)}{\Gamma(\varkappa + m + w/2)} \cdot \frac{\eta(w) dw}{s-w} \ll_s m^{-\delta} + m^{-\mu} \log(m).$$

Доказательство. В любом фиксированном угле $-\pi + \theta \leq \arg(s) \leq \pi - \theta$ (для $\theta \in (0, \pi)$) при $|s| \rightarrow \infty$

$$s^{-\alpha} \frac{\Gamma(s + \alpha)}{\Gamma(s)} \ll_{\alpha} 1. \quad (14)$$

Поэтому интересующий нас интеграл оценивается величиной

$$\begin{aligned} & c(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{\mu} (m + |t|)^{-\mu} (1 + |t|)^{-\delta} (1 + |t|)^{-1} dt \ll \\ & \ll \int_0^m m^{-\mu} (1 + t)^{-1 + \mu - \delta} dt + \int_m^{\infty} (1 + t)^{-1 - \delta} dt \ll m^{-\mu} \log(m) + m^{-\delta}. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана. $\square$

Теорема 1. Пусть $\mu, \delta \in (0, \infty)$, $\operatorname{Re}(\kappa) \in (\mu/2, \infty)$. Тогда $\forall \psi \in \mathcal{B}_{\mu}^{(-)}(\delta)$ в полосе $-\infty < \operatorname{Re}(s) < \min(\mu, \delta)$

$$\psi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (\kappa + m) \langle \psi, \gamma_m(\kappa_i, \dots) \rangle \gamma_m(\kappa; s). \quad (15)$$

Доказательство. Используя свойство гамма-функции $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(w_1 + m + 1)\Gamma(w_2 + m + 1)}{\Gamma(w_3 + m + 1)\Gamma(w_4 + m + 1)} - \frac{\Gamma(w_1 + m)\Gamma(w_2 + m)}{\Gamma(w_3 + m)\Gamma(w_4 + m)} = \\ & = [(w_1 w_2 - w_3 w_4) + (w_1 + w_2 - w_3 - w_4)m] \frac{\Gamma(w_1 + m)\Gamma(w_2 + m)}{\Gamma(1 + w_3 + m)\Gamma(1 + w_4 + m)}. \end{aligned}$$

Положим

$$w_1 = \kappa + s/2, \quad w_2 = \kappa - w/2, \quad w_3 = \kappa - s/2, \quad w_4 = \kappa + w/2$$

и просуммируем обе части этого равенства по m от 0 до $n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). В результате получим тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s - w} \cdot \frac{\Gamma(\kappa + n + s/2)\Gamma(\kappa + n - w/2)}{\Gamma(\kappa + n - s/2)\Gamma(\kappa + n + w/2)} - \frac{1}{s - w} \cdot \frac{\Gamma(\kappa + s/2)\Gamma(\kappa - w/2)}{\Gamma(\kappa - s/2)\Gamma(\kappa + w/2)} = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} (\kappa + m) \cdot \frac{\Gamma(\kappa + m + s/2)\Gamma(\kappa + m - w/2)}{\Gamma(1 + \kappa + m - s/2)\Gamma(1 + \kappa + m + w/2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w - s} = \sum_{m=0}^{n-1} (\kappa + m) \gamma_m(\kappa; s) \gamma_m(\kappa; -w) + \\ & + \frac{1}{w - s} \cdot \frac{\Gamma(\kappa - s/2)\Gamma(\kappa + n + s/2)}{\Gamma(\kappa + s/2)\Gamma(\kappa + n - w/2)} \cdot \frac{\Gamma(\kappa + w/2)\Gamma(\kappa + n - w/2)}{\Gamma(\kappa - w/2)\Gamma(\kappa + n + w/2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда для $\operatorname{Re}(s) < \alpha$ с $\alpha \in (-\mu, \mu)$ находим

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\psi(w) dw}{w-s} = \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa+m) \langle \psi, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle \gamma_m(\varkappa; s) + \\ &+ \frac{\Gamma(\varkappa - \frac{s}{2}) \Gamma(\varkappa + n + \frac{s}{2})}{\Gamma(\varkappa + \frac{s}{2}) \Gamma(\varkappa + n - \frac{s}{2})} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\Gamma(\varkappa + \frac{w}{2}) \Gamma(\varkappa + n - \frac{w}{2})}{\Gamma(\varkappa - \frac{w}{2}) \Gamma(\varkappa + n - \frac{w}{2})} \frac{\psi(w) dw}{w-s}. \end{aligned}$$

Последнее выражение, согласно (14) и лемме 5, оценивается как

$$O_{\varepsilon} \left(n^{-\delta+\operatorname{Re}(s)} + n^{-\mu+\operatorname{Re}(s)} \log(n) \right).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (15). Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Теперь получим оценку скалярных произведений в (15) при $m \rightarrow \infty$.

Лемма 6. Пусть $\mu, \delta \in (0, \infty)$, $\operatorname{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$ и $\psi \in \mathcal{B}_{\mu}(\delta)$. Тогда $\forall \mu' \in (0, \mu)$ и $\forall \delta' \in (0, \delta)$

$$\langle \psi, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle \ll_{\mu'} m^{-\delta'} + m^{-1-\mu'} \log(m). \quad (17)$$

Доказательство. Действуя точно так же, как при доказательстве леммы 5, получим

$$\begin{aligned} \langle \psi, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\mu'} \frac{\Gamma(\varkappa + w/2)}{\Gamma(\varkappa - w/2)} \frac{\Gamma(\varkappa + m - w/2)}{\Gamma(1 + \varkappa + m + w/2)} \psi(w) dw \ll \\ &\ll \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{\mu'} (m+|t|)^{-1-\mu'} (1+|t|)^{-\delta'} dt \ll \\ &\ll m^{-1-\mu'} \int_0^m (1+t)^{\mu'-\delta'} dt + \int_m^{\infty} (1+t)^{-1-\delta'} dt \ll m^{-1-\mu'} \log(m) + m^{-\delta'}. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана. $\square$

Замечание 1. Мы сознательно выбрали ψ в $\mathcal{B}_{\mu}(\delta)$, а не в $\mathcal{B}_{\mu}^{(-)}(\delta)$, поскольку во втором случае оценка (17) была бы хуже для $1 < \delta < \infty$. Поэтому, если $\psi \in \mathcal{B}_{\mu}(\delta)$, то для $\operatorname{Re}(s) < \min(\mu, \delta - 1)$ имеет место разложение

$$\psi^{(-)}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varkappa+m) \langle \psi, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle \gamma_m(\varkappa; s) \quad (18)$$

в абсолютно сходящийся ряд. При этом мы воспользовались очевидным равенством

$$\langle \psi, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle = \left\langle \psi^{(-)}, \gamma_m(\varkappa; \dots) \right\rangle.$$

Теорема 2 (Равенство Персеваля). Пусть $\mu \in (0, \infty)$, $\delta \in (1/2, \infty)$, $\operatorname{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$. Тогда $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_{\mu}(\delta)$

$$\left\langle \psi_1^{(-)}, \psi_2^{(-)} \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\varkappa+m) \langle \psi_1, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle \langle \gamma_m(\varkappa; \dots), \psi_2 \rangle. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < \min(\mu, \delta - 1/2)$. Тогда согласно (16) для натурального n

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa + m) \langle \psi_1, \gamma_m(\varkappa; \dots) \rangle \langle \gamma_m(\varkappa; \dots), \psi_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_2)=-\alpha} \frac{\psi_1(w_1) \psi_2(-w_2)}{w_1 - w_2} dw_1 dw_2 - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_1)=\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w_2)=-\alpha} \left(\varkappa + n + \frac{w_1}{2} \right) \left(\varkappa + n - \frac{w_2}{2} \right) \times \\ & \times \gamma_n(\varkappa; -w_1) \gamma_n(\varkappa; w_2) \frac{\psi_1(w_1) \psi_2(-w_2)}{w_1 - w_2} dw_1 dw_2. \end{aligned}$$

Оба интеграла абсолютно сходятся. Выполнив в первом интеграле интегрирование по w_1 , получим величину

$$\langle \psi_1^{(-)}, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1^{(-)}, \psi_2^{(-)} \rangle.$$

В соответствии с (14) второй интеграл $\forall \delta' \in (0, \delta)$ мажорируется абсолютно сходящимся интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_1|)^{-\alpha} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1 - t_2|)^{-1} dt_1 dt_2.$$

Можно считать, что $\delta' \in (1/2, 1)$. Тогда интеграл не превосходит (с точностью до константы) величины

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_1|)^{-\alpha} \left(\int_{|t_1 - t_2| \leq |t_1|/2} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1 - t_2|)^{-1} dt_2 + \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1| + |t_2|)^{-1} dt_2 \right) dt_1 \ll \\ & \ll \int_0^{\infty} (1 + t_1)^{2\alpha - 2\delta'} (n + t_1)^{-2\alpha} \log(2 + t_1) dt_1 + n^{-\alpha} \int_0^n (1 + t_1)^{\alpha - \delta'} \times \\ & \times \left(n^{-\alpha} (1 + t_1)^{-1} \int_0^{t_1} (1 + t_2)^{\alpha - \delta'} dt_2 + n^{-\alpha} \int_{t_1}^n (1 + t_2)^{-1 + \alpha - \delta'} dt_2 + \right. \\ & \quad \left. + \int_n^{\infty} (1 + t_2)^{-1 - \delta'} dt_2 \right) dt_1 + \int_n^{\infty} (1 + t_1)^{-\delta'} \left(n^{-\alpha} (1 + t_1)^{-1} \times \right. \\ & \times \int_0^n (1 + t_2)^{\alpha - \delta'} dt_2 + (1 + t_1)^{-1} \int_n^{t_1} (1 + t_2)^{-\delta'} dt_2 + \left. \int_{t_1}^{\infty} (1 + t_2)^{-1 - \delta'} dt_2 \right) dt_1 \ll \end{aligned}$$

$$\ll n^{-\alpha-\alpha} + n^{-\alpha-\delta'} + n^{1-2\delta'}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы 2. $\square$

2. Разложение в интеграл по гамма-функциям

Для $\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2) \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} B(s_1, s_2) &= \int_0^1 t^{s_1-1} (1-t)^{s_2-1} dt = \int_0^\infty y^{s_1-1} (1+y)^{-s_1-s_2} dy = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2s_1-1} (\cos \varphi)^{2s_2-1} d\varphi = \frac{\Gamma(s_1) \Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1 + s_2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Положив $s_1 = s$ и $s_1 + s_2 = w$, для $0 < \alpha < \operatorname{Re}(w)$ с помощью формулы обращения Меллина находим

$$\Gamma(w)(1+y)^{-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s) \Gamma(w-s) y^{-s} ds. \quad (21)$$

Отсюда для $\operatorname{Re}(w_j) \in (0, \infty)$ ($j=1, 2, 3, 4$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(w_1 + w_4) y^{w_1}}{(1+y)^{w_1+w_4}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \Gamma(w_1 + s) \Gamma(w_4 - s) y^{-s} ds, \\ \frac{\Gamma(w_2 + w_3) y^{w_3}}{(1+y)^{w_2+w_3}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \Gamma(w_3 + s) \Gamma(w_2 - s) y^{-s} ds. \end{aligned}$$

Применяя равенство Парсеваля для преобразования Меллина, приходим к интегралу Барнса

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_K \Gamma(w_1 + s) \Gamma(w_2 + s) \Gamma(w_3 - s) \Gamma(w_4 - s) ds &= \\ = \frac{\Gamma(w_1 + w_3) \Gamma(w_1 + w_4) \Gamma(w_2 + w_3) \Gamma(w_2 + w_4)}{\Gamma(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь K — любой кусочно-гладкий контур, разделяющий плоскость на две части и обходящий снизу вверх полюсы $\Gamma(w_1 + s) \Gamma(w_2 + s)$ справа, а полюсы $\Gamma(w_3 - s) \Gamma(w_4 - s)$ — слева. С помощью принципа аналитического продолжения равенство (22) распространяется на любые комплексные w_1, w_2, w_3, w_4 , для которых у функций $\Gamma(w_1 + s) \Gamma(w_2 + s)$ и $\Gamma(w_3 - s) \Gamma(w_4 - s)$ нет общих полюсов.

Лемма 7. Пусть $\psi(s)$ — голоморфная в полюсе $-\mu < \operatorname{Re}(s) < \mu$ функция, для которой при некотором $\theta \in (0, \pi/2)$ выполнена оценка

$$\psi(s) \ll \exp[(\pi/2 - \theta)|s|]$$

и на прямой $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0 \quad \forall \alpha \in (0, \mu)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \psi(-s) ds = 0. \quad (23)$$

Тогда $\psi(s) \equiv 0$ в области определения.

Доказательство. Согласно формуле Стирлинга при $|t| \rightarrow \infty$ равномерно по $\sigma \in (-\delta, \delta) \quad \forall \delta \in (0, \infty)$

$$|\Gamma(\sigma + it)| \asymp |t|^{\sigma-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|t|\right). \quad (24)$$

Умножив обе части (23) на $y^{-\varkappa}$ и проинтегрировав по контуру $\operatorname{Re}(\varkappa)=0$, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{y^{s/2}}{(1+y)^s} \Gamma(s) \psi(-s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \left(y^{1/2} + y^{-1/2}\right)^{-s} \Gamma(s) \psi(-s) ds.$$

Следовательно, для $z \in [2, \infty)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s) \psi(-s) z^{-s} ds = 0.$$

Из оценки на $\psi(s)$ и (24) следует, что $g(z)$ определена и голоморфна по z в угле $-\theta < \arg(z) < \theta$. Следовательно, $g(z) = 0 \quad \forall z \in (0, \infty)$. Поэтому $\Gamma(s) \psi(-s) \equiv 0 \Rightarrow \psi(-s) \equiv 0$. Лемма 7 доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть $\mu \in (0, 1/2)$ и $h(\varkappa)$ — чётная голоморфная функция из $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ с $\delta \in (2 + 2\mu, \infty)$. Тогда в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(\varkappa) < \mu$

$$h(\varkappa) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha'} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \psi(-s) ds \quad (25)$$

с $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha' < \mu$, где для $0 < \operatorname{Re}(s) < 1 + 2\mu$

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa) d\varkappa, \quad (26)$$

которая продолжается голоморфно в полосу $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ с оценкой

$$\psi(s) \ll_{\mu'} (1 + |s|)^{-1 + \operatorname{Re}(s)}, \quad \mu' \in (0, \mu), \quad (27)$$

$\forall -\mu' \leq \operatorname{Re}(s/2) \leq \mu'$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\mu + \mu')/2$. Тогда в полосе $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s/2) \leq \mu'$

$$\begin{aligned} -1 < -\mu' - \alpha \leq \operatorname{Re}(s/2) - \alpha \leq \mu' - \alpha < 0, \\ 0 < -\mu' + \alpha \leq \operatorname{Re}(s/2) + \alpha \leq \mu' + \alpha < 1. \end{aligned}$$

Далее для $\operatorname{Re}(\varkappa) = -\alpha$, $\operatorname{Im}(\varkappa) = r$, $\operatorname{Re}(s/2) = \sigma \in [-\mu', \mu']$, $\operatorname{Im}(s/2) = t$ из (24) получаем

$$\Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)\sin(\pi\varkappa) \ll_{\mu'} (1 + |t + r|)^{-1/2+\sigma-\alpha} (1 + |t - r|)^{-1/2+\sigma+\alpha}.$$

Поэтому для $2 + 2\mu < \delta' < \delta$ (переносим контур на прямую $\operatorname{Re}(\varkappa) = -\alpha$)

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1+s) h\left(\frac{s}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa) = -\alpha} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \varkappa \sin(\pi\varkappa) h(\varkappa) d\varkappa \ll (1 + |s|)^{\frac{1}{2}-\delta'+2\sigma} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t + r|)^{-\frac{1}{2}+\sigma-\alpha} (1 + |t - r|)^{-\frac{1}{2}+\sigma+\alpha} (1 + |r|)^{1-\delta'} dr \ll \\ &\ll (1 + |s|)^{-1+\operatorname{Re}(s)} + \int_{|r| \leq |t|/2} \dots dr + \int_{|t|/2 \leq |r+t| \leq 3|t|/2} \dots dr + \\ &+ \int_{|t|/2 \leq |r-t| \leq 3|t|/2} \dots dr + \int_{3|t|/2 \leq |r| < \infty} \dots dr \ll_{\mu'} (1 + |s|)^{-1+\operatorname{Re}(s)}. \end{aligned}$$

Оценка (27) доказана.

Пусть $\operatorname{Re}(w) = 0$, $0 < \operatorname{Re}(\varkappa) < \alpha < \mu$. Из (22) находим (справа от прямой $\operatorname{Re}(s) = -2\alpha$ располагаются полюсы $\Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)$ в точках $\pm 2\varkappa$)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s) = -2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)\Gamma(-s/2 + w)\Gamma(-s/2 - w) ds = \\ &= -\Gamma(2\varkappa)\Gamma(-\varkappa + w)\Gamma(-\varkappa - w) - \Gamma(-2\varkappa)\Gamma(\varkappa + w)\Gamma(\varkappa - w). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s) = 2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)\psi(-s) ds = \Gamma(2\varkappa)\psi(-2\varkappa) + \\ &+ \Gamma(-2\varkappa)\psi(2\varkappa) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s) = -2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)\psi(-s) ds. \end{aligned} \quad (29)$$

С помощью (26) интеграл в правой части можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s) = -2\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w) = 0} \Gamma(s/2 + \varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)\Gamma(-s/2 + w)\Gamma(-s/2 - w) \times \\ &\times w \sin(\pi w) h(w) dw ds. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по s в соответствии с (28) из (29), находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \psi(-s) ds = \\
 & = \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \psi(-2\varkappa) + \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(-2\varkappa) \psi(2\varkappa) - \\
 & - \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=0} \Gamma(-\varkappa + w) \Gamma(-\varkappa - w) w \sin(\pi w) h(w) dw - \\
 & - \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(-2\varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=0} \Gamma(\varkappa + w) \Gamma(\varkappa - w) w \sin(\pi w) h(w) dw = \\
 & = \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \psi(-2\varkappa) + \frac{4}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \Gamma(-2\varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa) - \\
 & - \frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-\varkappa + w) \Gamma(-\varkappa - w) w \sin(\pi w) h(w) dw.
 \end{aligned}$$

Половина слагаемого $\frac{4}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \Gamma(-2\varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa)$ возникла из ранее выписанного интегрального представления для $\psi(s)$ с интегрированием по контуру $\operatorname{Re}(\varkappa) = -\alpha$, а вторая половина — при деформации контура интегрирования в новый, обходящий точку $\varkappa$ справа, а точку $\varkappa -$ слева. Последний интеграл, в соответствии с (26), равен $\psi(-2\varkappa)$. Осталось только заметить, что

$$\frac{4}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \Gamma(2\varkappa) \Gamma(-2\varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa) = - \frac{\sin(2\pi \varkappa)}{\pi} \Gamma(2\varkappa) \Gamma(1 - 2\varkappa) h(\varkappa) = - h(\varkappa).$$

Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Теорема 4 (Обратная к теореме 3). Пусть $\mu \in (0, 1/2)$, $\delta \in (2 + 2\mu, \infty)$ и $\psi(s)$ — голоморфная в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < \mu$ функция, для которой

- а) выполнена оценка (27);
 - б) функция $h(\varkappa)$, определяемая преобразованием (25), лежит в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$.
- Тогда для $\psi(s)$ имеет место представление (26).

Доказательство. По h из (25) построим

$$\psi^*(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa) d\varkappa.$$

Согласно теореме 3

$$0 \equiv h(\varkappa) - h(\varkappa) = - \frac{1}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) (\psi(-s) - \psi^*(-s)) ds.$$

Применяя лемму 7, получим $\psi(s) = \psi^*(s)$. Теорема 4 доказана. $\square$

Замечание 2. Нетрудно показать, что если $\forall \mu' \in (0, \mu)$ функция $\psi(s)$ голоморфна в полосе $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s/2) \leq 1/2 + \mu'$ и при этом

$$\psi(s) \ll_{\mu'} (1 + |s|)^{-3/2-2\mu'},$$

то $h(\kappa)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mu'}(2 + 2\mu - 2\mu')$. Поэтому по теореме 4 в полосе $0 < \operatorname{Re}(s) < 1 + 2\mu$ справедливо представление (26) для ψ .

Формулам обращения (25) и (26) соответствует равенство Персеваля

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \psi_1(s) \psi_2(-s) ds = -\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} h_1(\kappa) h_2(\kappa) \kappa \operatorname{tg}(\pi \kappa) d\kappa. \quad (30)$$

Положим для $0 < \operatorname{Re}(w_j) < \infty$ ($j=0, 1, 2, 3$)

$$\psi_1(s) = \Gamma(w_0 + s/2) \Gamma(w_1 + s/2), \quad \psi_2(s) = \Gamma(w_2 + s/2) \Gamma(w_3 + s/2).$$

Вычисляя $h_1(\kappa)$ и $h_2(\kappa)$ по формуле (22) из (30) находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \prod_{j=0}^3 (\Gamma(w_j + \kappa) \Gamma(w_j - \kappa)) \cdot \kappa \sin(2\pi \kappa) d\kappa = \\ & = -\pi \cdot \frac{\Gamma(w_0 + w_1) \Gamma(w_0 + w_2) \Gamma(w_0 + w_3) \Gamma(w_1 + w_2) \Gamma(w_1 + w_3) \Gamma(w_2 + w_3)}{\Gamma(w_0 + w_1 + w_2 + w_3)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Обращая это равенство по переменной w_0 с помощью (25) и (26), получим еще один интеграл Барнса

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(s + w_1) \Gamma(s + w_2) \Gamma(s + w_3) \Gamma(-s + \kappa) \Gamma(-s - \kappa)}{\Gamma(s + w_1 + w_2 + w_3)} ds = \\ & = \frac{\Gamma(w_1 + \kappa) \Gamma(w_1 - \kappa) \Gamma(w_2 + \kappa) \Gamma(w_2 - \kappa) \Gamma(w_3 + \kappa) \Gamma(w_3 - \kappa)}{\Gamma(w_1 + w_2) \Gamma(w_1 + w_3) \Gamma(w_2 + w_3)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где контур обходит полюсы $\Gamma(s + w_1) \Gamma(s + w_2) \Gamma(s + w_3)$ справа, а полюсы $\Gamma(-s + \kappa) \Gamma(-s - \kappa)$ слева.

Из (22) по формулам обращения непосредственно находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \prod_{j=1}^3 (\Gamma(w_j + \kappa) \Gamma(w_j - \kappa)) \cdot \kappa \sin(2\pi \kappa) d\kappa = \\ & = -\pi \cdot \Gamma(w_1 + w_2) \Gamma(w_1 + w_3) \Gamma(w_2 + w_3). \end{aligned} \quad (33)$$

3. Смешанное разложение голоморфных в полосе функций

Теорема 5. Пусть $k \in \mathbb{C}$, $\mu \in (0, 1/2)$ и $h(\varkappa)$ — четная голоморфная функция из $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ с $\delta \in (2+2\mu, \infty)$, для которой $h(\varkappa) = 0$ в точках $\varkappa$ с $\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) = 0$. Тогда в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(\varkappa) < \mu$

$$h(\varkappa) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \cos(\pi k/2 - \pi s/2) \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \psi(-s) ds \quad (34)$$

с $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha < \mu$, где для $0 < \operatorname{Re}(s) < 1+2\mu$

$$\psi(s) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(s/2 + \varkappa)}{\Gamma(1 - s/2 + \varkappa)} \frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa \quad (35)$$

и $\forall \mu' \in (0, \mu)$ $\psi(s)$ продолжается голоморфно в полосу $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s/2) \leq \mu'$ с оценкой

$$\psi(s) \ll_{\mu'} (1 + |s|)^{-1 + \operatorname{Re}(s)}. \quad (36)$$

Доказательство. Оценка (36) устанавливается точно так же, как (27) в теореме 3. Поэтому остановимся только на доказательстве (34). Положим для $\varepsilon \in [0, 1)$

$$h_\varepsilon(\varkappa) = \exp(\varepsilon \varkappa^2) h(\varkappa).$$

Соответствующая ψ_ε удовлетворяет (36) равномерно по ε . Далее, ввиду четности $h_\varepsilon(\varkappa)$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(s) &= -\cos(\pi k/2 - \pi s/2) \times \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \frac{\varkappa \sin(2\pi \varkappa)}{\cos(\pi k) + \cos(2\pi \varkappa)} h_\varepsilon(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (37)$$

По формуле обращения из теоремы 3

$$h_\varepsilon(\varkappa) = \frac{\cos(\pi k) + \cos(2\pi \varkappa)}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \frac{\psi_\varepsilon(-s)}{\cos(\pi k/2 + \pi s/2)} ds. \quad (38)$$

Далее будем предполагать, что $\varepsilon \neq 0$. Так как

$$\frac{\Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa)}{\Gamma(s)} = \int_0^1 t^{s/2 + \varkappa - 1} (1 - t)^{s/2 - \varkappa - 1} dt,$$

то при $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ равномерно на прямой $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0$

$$\Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \ll 2^{-\operatorname{Re}(s)} |\Gamma(s)|. \quad (39)$$

С помощью этой оценки из (37) для $0 \leq \operatorname{Re} < \infty$ получаем

$$\frac{\psi_\varepsilon(s)}{\cos(\pi k/2 - \pi s/2)} \ll_\varepsilon 2^{-\operatorname{Re}(s)} |\Gamma(s)|. \quad (40)$$

Принимая во внимание эту оценку и подсчитывая вычеты подынтегрального выражения в (38) слева от прямой $\operatorname{Re}(s) = 2\alpha$, получим

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(\varkappa) &= \frac{1}{\pi} (\cos(\pi k) + \cos(2\pi \varkappa)) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma(2\varkappa - m) \frac{\psi_\varepsilon(-2\varkappa + 2m)}{\cos(\pi k/2 + \pi \varkappa - \pi m)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma(-2\varkappa - m) \frac{\psi_\varepsilon(2\varkappa + 2m)}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa - \pi m)} \right] = \\ &= \frac{2}{\sin(2\pi \varkappa)} \cdot \left[\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi_\varepsilon(-2\varkappa + 2m)}{m! \Gamma(1 - 2\varkappa + m)} - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\pi k/2 + \pi \varkappa) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi_\varepsilon(2\varkappa + 2m)}{m! \Gamma(1 + 2\varkappa + m)} \right]. \end{aligned}$$

Точно так же находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \cos(\pi k/2 - \pi s/2) \psi_\varepsilon(-s) ds = \\ &= \frac{2}{\sin(2\pi \varkappa)} \left[\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi_\varepsilon(-2\varkappa + 2m)}{m! \Gamma(1 - 2\varkappa + m)} - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\pi k/2 + \pi \varkappa) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \psi_\varepsilon(2\varkappa + 2m)}{m! \Gamma(1 + 2\varkappa + m)} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, для $h_\varepsilon(\varkappa)$ справедливо представление (34). Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим требуемое равенство. Теорема 5 доказана. $\square$

Лемма 8. Пусть $k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < \mu < n + (\operatorname{Re}(k) - 1)/2$, $h(\varkappa)$ — четная голоморфная функция из $\mathcal{B}(\delta)$ с $\delta \in (2 + 2\mu, \infty)$ и $h(\varkappa) = 0$ в точках $\varkappa$ с $\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa) = 0$. Тогда функция

$$\psi^*(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + n - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + n + \frac{s}{2}\right)} \psi(s)$$

с

$$\psi(s) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(s/2 + \varkappa)}{\Gamma(1 - s/2 + \varkappa)} \frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa$$

принадлежит $\mathcal{B}_{2\mu}^{(+)}(1)$ для $\mu \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Так как в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < \mu$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + n - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + n + \frac{s}{2}\right)} \ll (1 + |s|)^{-\operatorname{Re}(s)},$$

то в соответствии с оценкой (36) из теоремы 5 $\psi \in \mathcal{B}_{2\mu}(1)$. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $h_\varepsilon(\varkappa) = \exp(\varepsilon \varkappa^2) h(\varkappa)$. Этой функции соответствуют ψ_ε и ψ_ε^* . Для $m = 0, 1, 2, \dots$ (см. (12))

$$\left\langle \psi_\varepsilon^*, \gamma_m \left(\frac{k-1}{2} + n; \dots \right) \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + n + m - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + n + m + \frac{s}{2}\right)} \psi_\varepsilon(s) ds.$$

Согласно представлению (37), подынтегральное выражение — голоморфная в полуплоскости $0 \leq \operatorname{Re}(s) < \infty$ функция с оценкой (см. (40))

$$\ll \frac{|\Gamma(s)| 2^{-\operatorname{Re}(s)}}{\Gamma\left(\frac{3-k}{2} - n - m + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+k}{2} + n + m + \frac{s}{2}\right)} \ll (1 + |s|)^{-3/2}.$$

При этом мы воспользовались равенством $2\sqrt{\pi}\Gamma(s) = 2^s\Gamma(s/2)\Gamma(1/2 + s/2)$ и (14). Следовательно,

$$\left\langle \psi_\varepsilon^*, \gamma_m \left(\frac{k-1}{2} + n; \dots \right) \right\rangle = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим что ψ^* ортогональна к базису в $\mathcal{B}_{2\mu}^{(-)}(1)$. Поэтому, по теореме 1, $\psi^* \in \mathcal{B}_{2\mu}^{(+)}(1)$. Лемма 8 доказана. $\square$

Лемма 9. Пусть $k \in \mathbb{C}$ с $-1 < \operatorname{Re}(k) < \infty$, $\varphi \in \mathcal{B}_\mu(\delta)$ для некоторых $\mu, \delta \in (0, \infty)$. Тогда для $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha < \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \varphi^{(-)}(-s) ds = 0.$$

Доказательство. Функция $\varphi^{(-)}(s)$ голоморфна в полуплоскости $-\infty < \operatorname{Re}(s) \leq 0$ с оценкой

$$\varphi^{(-)}(s) \ll_{\delta'} (1 + |s|)^{-\min(1, \delta')}$$

$\forall \delta' \in (0, \delta)$ (см. доказательство леммы 1). Интересующий нас интеграл не зависит от α , и его можно записать в виде

$$\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+k}{2} + \frac{s}{2}\right)} \varphi^{(-)}(-s) ds.$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow +\infty$, получим утверждение леммы 9. $\square$

Теорема 6. Пусть $\mu \in (0, 1/2)$, $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$, $\delta \in (2 + 2\mu, \infty)$ и $\psi(s)$ — голоморфная в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ функция, для которой

а) выполнена оценка (36);

б) функция $h(\varkappa)$, определяемая преобразованием (34), принадлежит $\mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Тогда в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ для $\operatorname{Re}(s/2) < \alpha < \mu$

$$\begin{aligned} \psi(s) = & \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=\alpha} \frac{\Gamma(\varkappa + s/2)}{\Gamma(1 - s/2 + \varkappa)} \frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) h\left(\frac{k-1}{2} + m \right) \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + m - \frac{s}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + m - \frac{w}{2}\right)} \psi(-w) dw. \quad (42)$$

Доказательство. В дополнение к условию $\mu \in (0, 1/2)$ без ограничения общности можно добавить еще одно $\mu < 1/2 + \operatorname{Re}(k)/2$. Обозначим через $\tilde{\psi}(s)$ проекцию $\psi(s)\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)$ на $\mathcal{B}_{2\mu}^{(+)}(1)$. С помощью леммы 9, действуя точно так же, как при доказательстве теоремы 5, для $-1 < \operatorname{Re}(k) < 1$ находим

$$\begin{aligned} h(\varkappa) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \psi(-s) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \tilde{\psi}(-s) ds = \\ &= \frac{\cos(\pi k) + \cos(2\pi \varkappa)}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=2\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \tilde{\psi}(-s) ds. \end{aligned}$$

Здесь $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha < \mu$. По формуле обращения (26) из теоремы 4 получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \tilde{\psi}(s) = \\ &= -\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \frac{\varkappa \sin(2\pi \varkappa) h(\varkappa)}{\cos(\pi k) + \cos(2\pi \varkappa)} d\varkappa = \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2} + \varkappa\right)} \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} dx. \end{aligned}$$

Теперь осталось только воспользоваться теоремой 1. Случай $\operatorname{Re}(k)=1$ устанавливается с помощью перехода. Теорема 6 полностью доказана. $\square$

Замечание 3. Если $\forall \mu' \in (0, \mu)$ функция $\psi(s)$ голоморфна в полосе $-\mu' \leq \operatorname{Re}(s/2) \leq 1/2 + \mu'$ и при этом

$$\psi(s) \ll_{\mu'} (1 + |s|)^{-3/2-2\mu'},$$

то $h(\varkappa)$ из (34) принадлежит $\mathcal{B}_{\mu'}(2 + 2\mu - 2\mu')$. Поэтому для таких ψ в полосе $0 < \operatorname{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ справедливо разложение (41).

Замечание 4. Если в полосе $-\mu < \operatorname{Re}(s/2) < \mu$

$$\psi(s) \ll (1 + |s|)^{-1},$$

то ряд в (41) абсолютно сходится в полосе $-\infty < \operatorname{Re}(s/2) < \mu$.

4. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора Уиттекера

Решениями дифференциального уравнения Уиттекера

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + \left(\frac{1}{4} + \mu z - \frac{1}{4} z^2 \right) W = \varkappa^2 W$$

являются линейно независимые функции

$$M_{\mu, \varkappa}(z) = z^{1/2+\varkappa} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(1+2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa+m)}{\Gamma(1+2\varkappa+m)} \cdot \frac{z^m}{m!}, \quad (43)$$

$$W_{\mu, \varkappa}(z) = \frac{\Gamma(2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)} M_{\mu, -\varkappa}(z) + \frac{\Gamma(-2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)} M_{\mu, \varkappa}(z). \quad (44)$$

Функция $W_{\mu, \varkappa}(z)$ — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}$ по z , с особой точкой $z=0$. Она также голоморфна по μ и $\varkappa$ на всей плоскости комплексного переменного $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и чётна по $\varkappa$. Для $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0$ и $0 < \alpha < \infty$ с $1/2 - \operatorname{Re}(\mu) - \alpha \notin \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & z^{-1/2} \exp(z/2) W_{\mu, \varkappa}(z) = \\ &= \sum_{0 \leq m < -1/2 + \alpha + \operatorname{Re}(\mu)} \frac{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa+m) \Gamma(1/2-\mu-\varkappa+m)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa) \Gamma(1/2-\mu-\varkappa)} \frac{(-1)^m}{m!} z^{-1/2+\mu-m} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{\Gamma(s+\varkappa) \Gamma(s-\varkappa) \Gamma(1/2-\mu-s)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa) \Gamma(1/2-\mu-\varkappa)} z^{-s} ds. \end{aligned} \quad (45)$$

Теорема 7. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \in (0, \infty)$. Предположим, что $h(\varkappa)$ — чётная функция из $B_\delta(3/2 + \operatorname{Re}(\mu) + \delta)$. Тогда

$$\frac{h(\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa) \Gamma(1/2-\mu-\varkappa) \cos(\pi\varkappa)} = \frac{4}{\pi} \cos(\pi\varkappa/2) \cdot \int_0^\infty y^{-1/2} W_{\mu, \varkappa}(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy, \quad (46)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} y^{-1/2} M_{\mu, \varkappa}(y) \frac{\Gamma(1-2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)} \sin(\pi\varkappa/2) h(\varkappa) d\varkappa. \quad (47)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\delta \in (0, 1/2)$. Для оценки $\varphi(y)$ на интервале $(0, 1)$ перенесём контур в (47) на прямую $\operatorname{Re}(\varkappa) = \alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$. Тогда из (43) находим

$$\varphi(y) \ll_\alpha y^\alpha. \quad (48)$$

Теперь рассмотрим случай $y \in [1, \infty)$. Принимая во внимание чётность $h(\varkappa)$, из (44) получим

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} y^{-1/2} W_{\mu, \varkappa}(y) \varkappa \sin(\pi\varkappa/2) h(\varkappa) d\varkappa. \quad (49)$$

Из интегрального представления ($\alpha \in (0, \infty)$)

$$y^{-1/2} \exp(-y/2) W_{\mu, \kappa}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{\Gamma(s+\kappa)\Gamma(s-\kappa)}{\Gamma(1/2-\mu+s)} y^{-s} ds \quad (50)$$

с $\operatorname{Re}(\kappa)=0$ для $\operatorname{Im}(\kappa)=r$ находим

$$\begin{aligned} & y^{-1/2} \exp(-y/2) W_{\mu, \kappa}(y) \ll \\ & \ll \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(\alpha+i(t+r))\Gamma(\alpha+i(t-r))|}{|\Gamma(1/2-\mu+\alpha+it)|} y^{-\alpha} dt \ll_{\mu, \alpha} y^{-\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t+r|)^{\alpha-1/2} \times \\ & \times (1+|t-r|)^{\alpha-1/2} (1+|t|)^{-\alpha+\operatorname{Re}(\mu)} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|t+r|-\frac{\pi}{2}|t-r|+\frac{\pi}{2}|t|\right) dt \ll \\ & \ll y^{-\alpha} (1+|r|)^{-1/2+\operatorname{Re}(\mu)} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|r|\right). \end{aligned}$$

Поэтому на промежутке $y \in [1, \infty)$

$$\varphi(y) \ll_{\alpha} y^{-\alpha} \quad (51)$$

$\forall \alpha \in (0, \infty)$.

Умножим обе части (49) на $y^{s-1} \exp(-y/2)$ и проинтегрируем по y от 0 до ∞ . В соответствии с (50) получаем для $0 < \operatorname{Re}(s) < \delta$

$$\psi(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \frac{\Gamma(s+\kappa)\Gamma(s-\kappa)}{\Gamma(1/2-\mu+s)} \kappa \sin(\pi\kappa/2) h(\kappa) d\kappa,$$

где

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(y) \exp(-y/2) y^{s-1} dy.$$

С помощью формулы обращения (25) из теоремы 3 находим

$$h(\kappa) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \cos(\pi\kappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s+\kappa)\Gamma(s-\kappa)\Gamma(1/2-\mu-s) \psi(-s) ds.$$

Принимая во внимание (45), откуда получаем (46). Теорема 7 полностью доказана. $\square$

Обращая рассуждения в доказательстве теоремы 7, получим следующее утверждение.

Теорема 8 (Обратная к теореме 7). Пусть $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \in (0, \infty)$ и $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, для которой $\varphi(y) \ll_{\delta'} \min(y^{\delta'}, y^{-\delta'}) \quad \forall \delta' \in (0, \delta)$. Предполо-

жим также, что $h \in B_\delta(3/2 + \operatorname{Re}(\mu) + \delta)$, где

$$\begin{aligned} & \frac{h(\varkappa)}{\Gamma(1/2 - \mu + \varkappa)\Gamma(1/2 - \mu - \varkappa)\cos(\pi\varkappa)} = \\ & = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa/2) \cdot \sum_{0 \leq m \leq -1/2 + \operatorname{Re}(\mu)} \frac{\Gamma(1/2 - \mu + \varkappa + m)\Gamma(1/2 - \mu - \varkappa + m)}{\Gamma(1/2 - \mu + \varkappa)\Gamma(1/2 - \mu - \varkappa)} \times \\ & \times \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty y^{-1/2+\mu-m} \exp(-y/2) \frac{\varphi(y)}{y} dy + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty y^{-1/2} W_{\mu,\varkappa}(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy. \end{aligned}$$

Тогда для φ имеет место представление (47).

В частном случае ($\mu=0$)

$$M_{0,\varkappa}(z) = 4^\varkappa \Gamma(1 + \varkappa) \sqrt{z} I_\varkappa(z/2), \quad W_{0,\varkappa}(z) = \sqrt{z/\pi} K_\varkappa(z/2)$$

после очевидных преобразований, приходим к следующей паре формул обращения (Канторовича – Лебедева)

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{I_{2\varkappa}(y)}{\cos(\pi\varkappa)} \varkappa h(\varkappa) d\varkappa = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} K_{2\varkappa}(y) \varkappa \sin(\pi\varkappa) h(\varkappa) d\varkappa, \quad (52) \\ h(\varkappa) &= 8 \int_0^\infty \cos(\pi\varkappa) K_{2\varkappa}(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy. \quad (53) \end{aligned}$$

Условия, при которых они справедливы, содержатся в формулировках теорем 7 и 8.

Известно, что для $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha < \infty$

$$K_{2\varkappa}(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \left(\frac{y}{2}\right)^{-s} ds. \quad (54)$$

Выполнив преобразование Меллина в обеих частях равенств (52) и (53) для $\psi(s) = -2^{1-s} \hat{\varphi}(s)$, где $\hat{\varphi}(s)$ – преобразование Меллина φ , приходим к формулам обращения (25) и (26).

Отметим, что (52) и (53) можно рассматривать как разложение φ по непрерывному спектру модифицированного дифференциального оператора Бесселя

$$D = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - z^2,$$

для которого $DK_\varkappa = \varkappa^2 K_\varkappa$, где $K_\varkappa$ – функция Бесселя – Макдональда. При этом оператор действует на пространстве функций $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\infty \varphi_1(y) \varphi_2(y) \frac{dy}{y}.$$

5. Разложение функций по спектру дифференциального оператора Бесселя

Функция Бесселя первого рода

$$J_{\varkappa}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\varkappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\varkappa} \quad (55)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + z \frac{dW}{dz} + z^2 W = \varkappa^2 W.$$

Для $k \in \mathbb{C}$ положим

$$\Phi(k; \varkappa; z) = \frac{2}{\sin(2\pi\varkappa)} (\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa) J_{-2\varkappa}(z) - \cos(\pi k/2 + \pi\varkappa) J_{2\varkappa}(z)), \quad (56)$$

которая чётна и голоморфна по $\varkappa$ в полюсе $-1/2 < \operatorname{Re}(\varkappa) < 1/2$. Кроме того, она продолжается мероморфно (по $\varkappa$) на всю плоскость комплексного переменного и $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$\Phi(k; (k-1)/2 + m; z) = 2(-1)^m J_{k-1+2m}(z). \quad (57)$$

Функции (55) для $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0$ составляют непрерывный спектр оператора $z^2 d^2/dz^2 + z d/dz + z^2$ в $L_2^\times(0, \infty)$, а функции вида (57) для $0 < 1/2 + \operatorname{Re}(k/2) + m < \infty$ — дискретный спектр. При этом

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(k; (k-1)/2 + m_1; \dots), \Phi(k; (k-1)/2 + m_2; \dots) \rangle = \\ & = 4 \int_0^\infty J_{k-1+2m_1}(y) J_{k-1+2m_2}(y) \frac{dy}{y} = \delta_{m_1, m_2} \left(\frac{k-1}{2} + m \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Теорема 9. Пусть $k \in \mathbb{C}$, $\delta \in (0, \infty)$. Предположим, что $h(\varkappa)$ — чётная функция из $\mathcal{B}_\delta(3/2 + 2\delta)$ и $h(\varkappa) = 0$ в точках с $\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa) = 0$. Тогда

$$h(\varkappa) = 2 \int_0^\infty \Phi(k; \varkappa; y) \frac{\varphi(y)}{y} dy, \quad (59)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{J_{2\varkappa}(y)\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa. \quad (60)$$

Доказательство. Сдвигая в (60) контур на прямую $\operatorname{Re}(\varkappa) = \delta'$ с $\delta' \in (0, \delta)$, для $y \in (0, 1)$ из (55) получим

$$\varphi(y) \ll_{\delta'} y^{2\delta'}$$

Так как для $r \in \mathbb{R}$

$$J_{ir}(y) \ll (y + |r|)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|r|\right),$$

то на промежутке $1 \leq y < \infty$

$$\varphi(y) \ll \int_{-\infty}^{\infty} (y + |r|)^{-1/2} (1 + |r|)^{-1/2-2\delta} dr \ll y^{-2\delta}.$$

Выполнив в обеих частях (60) преобразование Меллина, для $0 < \operatorname{Re}(s) < \infty$ получим

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\pi}{2} \cdot 2^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(s/2 + \varkappa) \varkappa h(\varkappa)}{\Gamma(1 - s/2 + \varkappa) \cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} d\varkappa.$$

Отсюда по формулам обращения (34) из теоремы 5 находим

$$h(\varkappa) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \cos(\pi k/2 - \pi s/2) 2^s \hat{\varphi}(-s) ds.$$

Теперь осталось только заметить, что

$$\Phi(k; \varkappa; y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa) \cos(\pi k/2 - \pi s/2) (y/2)^{-s} ds$$

для $\alpha \in (0, \infty)$. При этом контур интегрирования обходит полюса $\Gamma(s/2 + \varkappa) \Gamma(s/2 - \varkappa)$ справа. Теорема 9 полностью доказана. $\square$

Обращая доказательство теоремы 9 и опираясь на результаты теоремы 6, получим ещё одно утверждение.

Теорема 10. Пусть $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$, $\delta \in (0, \infty)$, $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывная функция с оценкой $\varphi(y) \ll \min(y^{-\delta}, y^{\delta})$. Предположим также, что h из (59) принадлежит $\mathcal{B}_{\delta}(3/2 + 2\delta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{\pi}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{J_{2\varkappa}(y) \varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) h \left(\frac{k-1}{2} + m \right) J_{k-1+2m}(y). \end{aligned} \quad (61)$$

Замечание 5. Ряд в (61) абсолютно сходится, поскольку $J_{k-1+2m}(y)$ экспоненциально убывает по m .

Замечание 6. Интеграл в (61) и функции $J_{k-1+2m}(y)$ взаимно ортогональны по мере $\frac{dy}{y}$.

6. Интегральные разложения по гипергеометрическим функциям

Пусть $0 < \operatorname{Re}(\lambda)$, $\operatorname{Re}(\mu) < \infty$. Положим

$$\begin{aligned} T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s + \varkappa) \Gamma(s - \varkappa) \frac{\Gamma(\mu - s)}{\Gamma(\lambda + s)} y^{-s} ds = \\ &= \frac{\Gamma(\mu + \varkappa) \Gamma(\mu - \varkappa)}{\Gamma(\lambda + \mu)} y^{-\mu} {}_2F_1(\mu + \varkappa, \mu - \varkappa; \lambda + \mu; -1/y). \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь $|\operatorname{Re}(\varkappa)| < \alpha < \operatorname{Re}(\mu)$. Подсчитывая вычеты подынтегрального выражения слева от прямой $\operatorname{Re}(s) = \alpha$, получим

$$T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{\sin(\pi\lambda + \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} T(\lambda, \mu; -\varkappa; y) - \frac{\sin(\pi\lambda - \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} T(\lambda, \mu; \varkappa; y), \quad (63)$$

где

$$T(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{\Gamma(1 - \lambda + \varkappa) \Gamma(\mu + \varkappa)}{\Gamma(1 + 2\varkappa)} y^{\varkappa} {}_2F_1(1 - \lambda + \varkappa, \mu + \varkappa; 1 + 2\varkappa; -y). \quad (64)$$

Из соотношений Куммера для гипергеометрической функции следует, что

$$T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{\Gamma(\lambda + \varkappa) \Gamma(\lambda - \varkappa)}{\Gamma(\mu + \varkappa) \Gamma(\mu - \varkappa)} (1 + y)^{\lambda - \mu} T^*(\mu, \lambda; \varkappa; y). \quad (65)$$

Отметим, что T^* чётная по $\varkappa$.

Имеют место равномерные по y и $\varkappa$ оценки:

а) для $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0$

$$\begin{aligned} &T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \ll_{\lambda, \mu} \\ &\ll_{\lambda, \mu} \begin{cases} (1 + |\varkappa|)^{-1/2 + \operatorname{Re}(\mu - \lambda)} \exp(-\pi |\operatorname{Im}(\varkappa)|), & \text{если } 0 < y \leq 1 \\ (1 + |\varkappa|)^{-3/2 + \operatorname{Re}(\mu - \lambda)} \exp(-\pi |\operatorname{Im}(\varkappa)|) y^{1/4 + \operatorname{Re}(\lambda - \mu)/2}, & 1 < \sqrt{y} \leq 1 + |x| \\ (1 + |\varkappa|)^{-1 + 2\operatorname{Re}(\mu)} \exp(-\pi |\operatorname{Im}(\varkappa)|) y^{-\operatorname{Re}(\mu)}, & 1 + |\varkappa| \leq \sqrt{y} < \infty; \end{cases} \end{aligned} \quad (66)$$

б) для $0 < y \leq 1$ и $0 \leq \operatorname{Re}(\varkappa) \leq \sigma$

$$T(\lambda, \mu; \varkappa; y) \ll_{\lambda, \mu, \sigma} (1 + |\varkappa|)^{-1/2 + \operatorname{Re}(\mu - \lambda)} y^{\operatorname{Re}(\varkappa)}. \quad (67)$$

Для $\lambda = 1/2$ или $\mu = 1/2$ оценка (67) непосредственно следует из квадратичного преобразования

$${}_2F_1(a, b; 2a; -4z(1 - z)^{-2}) = (1 - z)^{2b} {}_2F_1(b, 1/2 + b - a; 1/2 + a; z^2).$$

Общий случай разбирается методами асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть $\delta, \sigma \in (0, \infty)$ и $h(\varkappa)$ — чётная голоморфная в полосе $-\sigma \leq \operatorname{Re}(\varkappa) \leq \sigma$ функция с оценкой

$$h(\varkappa) \ll (1 + |\varkappa|)^{-3/2 + \operatorname{Re}(\lambda - \mu) - \delta}. \quad (68)$$

Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $h_\varepsilon(\varkappa) = h(\varkappa) \exp(\varepsilon \varkappa^2)$. Определим функцию на $(0, \infty)$

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h_\varepsilon(\varkappa) d\varkappa = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} T(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varkappa \sin(\pi \lambda - \pi \varkappa)}{\cos(\pi \varkappa)} h_\varepsilon(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (69)$$

Выполнив в полосе $0 < \operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(\mu)$ преобразование Меллина, получим

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma(s + \varkappa) \Gamma(s - \varkappa) \frac{\Gamma(\mu - s)}{\Gamma(\lambda + s)} \varkappa \sin(\pi \varkappa) h_\varepsilon(\varkappa) dx.$$

Отсюда по формулам обращения (25) из теоремы 3 находим

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(y) &= -\frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s + \varkappa) \Gamma(s - \varkappa) \frac{\Gamma(\lambda - s)}{\Gamma(\mu + s)} \hat{\varphi}_\varepsilon(-s) ds = \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \cdot \int_0^\infty T^*(\mu, \lambda; \varkappa; y) \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y} dy = \\ &= -2 \cos(\pi \varkappa) \frac{\Gamma(\mu + \varkappa) \Gamma(\mu - \varkappa)}{\Gamma(\lambda + \varkappa) \Gamma(\lambda - \varkappa)} \cdot \int_0^\infty (1 + y)^{\mu - \lambda} T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y} dy. \end{aligned} \quad (70)$$

С помощью (67), двигая контур во втором интервале из (69) вправо, для $0 < y \leq 1$ получим равномерную по ε оценку

$$\varphi_\varepsilon \ll y^{\delta'}$$

с некоторым положительным δ' . В случае $y \in (1, \infty)$, опираясь на (66), также приходим к равномерной по ε оценке

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(y) &\ll y^{-\operatorname{Re}(\mu)} \int_0^{\sqrt{y}} (1 + |\varkappa|)^{-3/2 + \operatorname{Re}(\mu) + \operatorname{Re}(\lambda) - \delta} d|\varkappa| + \\ &+ y^{1/4 + \operatorname{Re}(\lambda - \mu)/2} \int_{\sqrt{y}}^\infty (1 + |\varkappa|)^{-2 - \delta} d|\varkappa| \ll y^{-1/4 + \operatorname{Re}(\lambda/2) - \operatorname{Re}(\mu/2) - \delta/2}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$T^*(\mu, \lambda; \varkappa; y) \underset{\mu, \lambda, \varkappa}{\ll} y^{-\operatorname{Re}(\lambda)},$$

то в (70) можно выполнить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 11. Пусть $\operatorname{Re}(\lambda), \operatorname{Re}(\mu), \delta, \sigma \in (0, \infty)$ и $h(\varkappa)$ — четная голоморфная в полосе $-\sigma \leq \operatorname{Re}(\varkappa) \leq \sigma$ функция с оценкой (68). Тогда

$$\begin{aligned} h(\varkappa) &= -\frac{2}{\pi} \cos(\pi \varkappa) \cdot \int_0^\infty T^*(\mu, \lambda; \varkappa; y) \frac{\varphi(y)}{y} dy = \\ &= -2 \cos(\pi \varkappa) \frac{\Gamma(\mu + \varkappa) \Gamma(\mu - \varkappa)}{\Gamma(\lambda + \varkappa) \Gamma(\lambda - \varkappa)} \cdot \int_0^\infty (1+y)^{\mu-\lambda} T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y} dy, \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} T^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \varkappa \sin(\pi \varkappa) h(\varkappa) d\varkappa = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} T(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varkappa \sin(\pi \lambda - \pi \varkappa)}{\cos(\pi \varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (72)$$

Опираясь на лемму 7 и только что доказанную теорему, получим обратный результат.

Теорема 12. Пусть $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, для которой $\varphi(y) \ll y^\delta$ с $0 < \delta < \operatorname{Re}(\lambda)$ и для $h(\varkappa)$ из (71) выполнены условия теоремы 11. Тогда $\varphi(y)$ представляется в виде (72).

Замечание 7. В частном случае $\lambda = \mu = 1/2$ утверждение теоремы 12 (после очевидных замен) превращается в формулу обращения Мелера–Фока

$$g(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} P_{-1/2+\varkappa}(y) \varkappa \operatorname{tg}(\pi \varkappa) h(\varkappa) d\varkappa = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} Q_{-1/2+\varkappa}(y) \varkappa h(\varkappa) d\varkappa, \quad (73)$$

где

$$h(\varkappa) = \int_1^\infty P_{-1/2+\varkappa}(y) g(y) dy, \quad (74)$$

а $P_{-1/2+\varkappa}(y)$ и $Q_{-1/2+\varkappa}(y)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

7. Смешанное разложение по гипергеометрическим функциям

В этом параграфе мы ограничимся формальными рассуждениями. Действуя по аналогии с п. 6, положим для $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$ и $0 < \operatorname{Re}(\lambda), \operatorname{Re}(\mu) < \infty$

$$S_k^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(s + \varkappa) \Gamma(s - \varkappa) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi s\right) \frac{\Gamma(\mu - s)}{\Gamma(\lambda + s)} y^{-s} ds, \quad (75)$$

$$S(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma(\varkappa + s)}{\Gamma(1 + \varkappa - s)} \frac{\Gamma(\lambda - s)}{\Gamma(\mu + s)} y^{-s} ds. \quad (76)$$

Для $y \in (1, \infty)$

$$S_k^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi\mu\right) \frac{\Gamma(\mu + \varkappa)\Gamma(\mu - \varkappa)}{\Gamma(\lambda + \mu)} y^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu + \varkappa, \mu - \varkappa; \lambda + \mu; \frac{1}{y}\right), \quad (77)$$

$$S(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{\Gamma(\lambda + \varkappa)}{\Gamma(\lambda + \mu)\Gamma(1 - \lambda + \varkappa)} y^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda + \varkappa, \lambda - \varkappa; \lambda + \mu; \frac{1}{y}\right), \quad (78)$$

$$S_k^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \pi \frac{\cos(\pi k/2 - \pi\mu)}{\sin(\pi\mu - \pi\varkappa)} S(\mu, \lambda; \varkappa; y). \quad (79)$$

Для $y \in (0, 1)$

$$S(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \frac{\Gamma(\lambda + \varkappa)}{\Gamma(\mu - 2\varkappa)\Gamma(1 + 2\varkappa)} y^{-\varkappa} {}_2F_1(\lambda + \varkappa, 1 - \mu + \varkappa; 1 + 2\varkappa; y), \quad (80)$$

$$S_k^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) = \pi \frac{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} S(\mu, \lambda; -\varkappa; y) - \pi \frac{\cos(\pi k/2 + \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} S(\mu, \lambda; \varkappa; y). \quad (81)$$

Определим интегральное преобразование функции $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^\infty S_k^*(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varphi(y)}{y} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(s + \varkappa)\Gamma(s - \varkappa) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi s\right) \frac{\Gamma(\mu - s)}{\Gamma(\lambda + s)} \widehat{\varphi}(-s) ds. \end{aligned} \quad (82)$$

По формуле обращения (34) из теоремы 5 получим

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(s) &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(\varkappa + s)}{\Gamma(1 + \varkappa - s)} \frac{\Gamma(\lambda - s)}{\Gamma(\mu + s)} \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} d\varkappa + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m\right) h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + s\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + m - s\right)} \frac{\Gamma(\lambda - s)}{\Gamma(\mu + s)}. \end{aligned} \quad (83)$$

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} S(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} d\varkappa + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m\right) h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) S\left(\lambda, \mu; \frac{k-1}{2} + m; y\right). \end{aligned} \quad (84)$$

Обратно, если $\varphi(y)$ по $h(\varkappa)$ определяется интегральным преобразованием

$$\varphi(y) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} S(\lambda, \mu; \varkappa; y) \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} d\varkappa, \quad (85)$$

то для $h(\varkappa)$ имеет место интегральное представление (82).

Если $k \equiv 1 + 2\mu \pmod{2}$ и $\varphi(y) = 0 \ \forall y \in (0, 1)$, то $h(\varkappa) \equiv 0$ на прямой $\operatorname{Re}(\varkappa) = 0$. Поэтому равенство (84) приобретает вид

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) h \left(\frac{k-1}{2} + m \right) S \left(\lambda, \mu; \frac{k-1}{2} + m; y \right), \quad (86)$$

где в соответствии с (82)

$$\begin{aligned} h \left(\frac{k-1}{2} + m \right) &= \frac{\pi(-1)^m}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{\Gamma(s + \frac{k-1}{2} + m) \Gamma(s + \frac{1-k}{2} - m) \Gamma(\mu - s)}{\Gamma(\frac{1+k}{2} + m - s) \Gamma(\frac{1-k}{2} - m + s) \Gamma(\lambda + s)} \widehat{\varphi}(-s) ds = \\ &= \pi(-1)^m \int_1^{\infty} S \left(\mu, \lambda; \frac{k-1}{2} + m; y \right) \frac{\varphi(y)}{y} dy. \end{aligned} \quad (87)$$

Разложение (86) представляет собой хорошо известное разложение по ортогональным полиномам Якоби, если выполнить соответствующую замену переменных.

8. Разложение по индексам произведений функций Бесселя

Опираясь на таблицу выражений G -функций Майера (в частных случаях) через специальные функции, можно построить целую серию формул обращения. Для иллюстрации остановимся на двух примерах, ограничившись формальными выкладками.

Воспользуемся интегральными представлениями $(-1/2 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1/2)$

$$K_{\lambda+\varkappa}(y) K_{-\lambda+\varkappa}(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \varkappa\right) \frac{\Gamma(s/2 - \lambda) \Gamma(s/2 + \lambda)}{\Gamma(s/2) \Gamma(1/2 + s/2)} y^{-s} ds, \quad (88)$$

$$J_{\lambda+\varkappa}(y) J_{-\lambda+\varkappa}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma(s/2 + \varkappa)}{\Gamma(1 + \varkappa - s/2)} \frac{\Gamma(1/2 - s/2) \Gamma(1 - s/2)}{\Gamma(1 + \lambda - s/2) \Gamma(1 - \lambda - s/2)} y^{-s} ds. \quad (89)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(y) &= -\frac{2i}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi i \nu}{2}\right) K_{\nu}(-iy), \quad H_{\nu}^{(2)}(y) = \frac{2i}{\pi} \exp\left(\frac{\pi i \nu}{2}\right) K_{\nu}(iy), \\ J_{\nu}(iy) &= \exp\left(\frac{\pi i \nu}{2}\right) I_{\nu}(y), \quad J_{\nu}(-iy) = \exp\left(-\frac{\pi i \nu}{2}\right) I_{\nu}(y). \end{aligned}$$

Из (88) находим

$$\begin{aligned}
 H_{\lambda+\kappa}^{(1)}(y)H_{-\lambda+\kappa}^{(1)}(y) &= -\frac{4}{\pi^2} \exp(-\pi i\kappa) K_{\lambda+\kappa}(-iy) K_{-\lambda+\kappa}(-iy) = \\
 &= \frac{\exp(-\pi i\kappa)}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right) y^{-s} ds, \\
 H_{\lambda+\kappa}^{(2)}(y)H_{-\lambda+\kappa}^{(2)}(y) &= -\frac{4}{\pi^2} \exp(\pi i\kappa) K_{\lambda+\kappa}(iy) K_{-\lambda+\kappa}(iy) = \\
 &= \frac{\exp(\pi i\kappa)}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\pi i s}{2}\right) y^{-s} ds.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 H_{\lambda+\kappa}^{(1)}(y)H_{-\lambda+\kappa}^{(1)}(y) - H_{\lambda+\kappa}^{(2)}(y)H_{-\lambda+\kappa}^{(2)}(y) &= \\
 &= \frac{-2i}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} y^{-s} ds. \quad (90)
 \end{aligned}$$

Эту формулу также можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 J_{\lambda+\kappa}(y)Y_{-\lambda+\kappa}(y) + J_{-\lambda+\kappa}(y)Y_{\lambda+\kappa}(y) &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} y^{-s} ds. \quad (91)
 \end{aligned}$$

Далее из (89) находим

$$\begin{aligned}
 J_{\lambda+\kappa}(y)J_{-\lambda+\kappa}(y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \times \\
 &\times \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \lambda - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda - \frac{s}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi s}{2} - \pi\kappa\right) y^{-s} ds = \\
 &= \left\{ \frac{\exp(-\pi i\kappa)}{4\pi i\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \lambda - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda - \frac{s}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right) y^{-s} ds - \right. \\
 &\left. - \frac{\exp(\pi i\kappa)}{4\pi i\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \lambda - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda - \frac{s}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\pi i s}{2}\right) y^{-s} ds \right\} = \\
 &= \frac{1}{4\pi i\sqrt{\pi}} \{\exp(-\pi i\kappa)Q(-iy) - \exp(\pi i\kappa)Q(iy)\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \lambda - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda - \frac{s}{2}\right)} z^{-s} ds = \\ &= \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sin(2\pi\kappa)} \{I_{\lambda-\kappa}(z)I_{-\lambda-\kappa}(z) - I_{\lambda+\kappa}(z)I_{-\lambda+\kappa}(z)\}. \end{aligned} \quad (92)$$

Пусть

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sin(\pi\kappa)} \cdot \int_0^\infty (I_{\lambda+\kappa}(y)I_{-\lambda+\kappa}(y) - I_{\lambda-\kappa}(y)I_{-\lambda-\kappa}(y)) \frac{\varphi(y)}{y} dy = \\ &= -\frac{\cos(\pi\kappa)}{\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \lambda - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda - \frac{s}{2}\right)} \widehat{\varphi}(-s) ds. \end{aligned} \quad (93)$$

По формулам обращения (26) из теоремы 4 находим

$$\widehat{\varphi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(1 + \lambda + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)} \kappa \sin(\pi\kappa) h(\kappa) d\kappa.$$

Следовательно, в соответствии с (92)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\varphi(y) &= \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \left(\int_y^\infty u^{2\lambda} \frac{d}{du} \left(u^{1-4\lambda} \frac{d}{du} (u^{2\lambda} K_{\lambda+\kappa}(u) K_{-\lambda+\kappa}(u)) \right) du \right) \kappa \sin(\pi\kappa) h(\kappa) d\kappa. \end{aligned} \quad (94)$$

При $\lambda=0$ формулы обращения (93) и (94) приобретают более простой вид

$$h(\kappa) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sin(\pi\kappa)} \cdot \int_0^\infty (I_\kappa^2(y) - I_{-\kappa}^2(y)) \frac{\varphi(y)}{y} dy, \quad (95)$$

$$2\sqrt{\pi}\varphi(y) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} y \frac{d}{dy} (K_\kappa^2(y)) \kappa \sin(\pi\kappa) h(\kappa) d\kappa. \quad (96)$$

Если положить

$$h(\kappa) = \cos(\pi\kappa) \int_0^\infty \left(\int_y^\infty u^{2\lambda} \frac{d}{du} \left(u^{1-4\lambda} \frac{d}{du} (u^{2\lambda} K_{\lambda+\kappa}(u) K_{-\lambda+\kappa}(u)) \right) du \right) \frac{\varphi(y)}{y} dy, \quad (97)$$

то

$$h(\kappa) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos(\pi\kappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right) \frac{\Gamma\left(1 + \lambda + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \lambda + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)} \widehat{\varphi}(-s) ds.$$

По формуле обращения (26) (теорема 4) находим

$$-\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(1+\lambda-\frac{s}{2})\Gamma(1-\lambda-\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} \widehat{\varphi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right) \varkappa \sin(\pi\varkappa) h(\varkappa) d\varkappa.$$

Следовательно, в соответствии с (92)

$$\varphi(y) = -2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} (I_{\lambda-\varkappa}(y)I_{-\lambda-\varkappa}(y) - I_{\lambda+\varkappa}(y)I_{-\lambda+\varkappa}(y)) \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)} d\varkappa. \quad (98)$$

В частном случае $\lambda=0$ (97) и (98) превращаются в пару

$$h(\varkappa) = -\cos(\pi\varkappa) \int_0^\infty \varphi(y) dK_\varkappa^2(y) \quad (99)$$

$$\varphi(y) = \frac{4}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} I_\varkappa^2(y) \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)} d\varkappa. \quad (100)$$

Пусть $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$. Положим

$$\begin{aligned} \Pi_k(\lambda; \varkappa; y) &= -\frac{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}{2i \sin(2\pi\varkappa)} \left(H_{\lambda-\varkappa}^{(1)}(y) H_{-\lambda-\varkappa}^{(1)}(y) - H_{\lambda-\varkappa}^{(2)}(y) H_{-\lambda-\varkappa}^{(2)}(y) \right) + \\ &+ \frac{\cos(\pi k/2 + \pi\varkappa)}{2i \sin(2\pi\varkappa)} \left(H_{\lambda+\varkappa}^{(1)}(y) H_{-\lambda+\varkappa}^{(1)}(y) - H_{\lambda+\varkappa}^{(2)}(y) H_{-\lambda+\varkappa}^{(2)}(y) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right) \frac{\Gamma(\frac{s}{2}-\lambda) \Gamma(\frac{s}{2}+\lambda)}{\Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{s}{2})} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) y^{-s} ds. \end{aligned}$$

Тогда для

$$h(\varkappa) = \int_0^\infty \left(\int_y^\infty u^{2\lambda} \frac{d}{du} \left(u^{1-4\lambda} \frac{d}{du} (u^{2\lambda} \Pi_k(\lambda; \varkappa; u)) \right) du \right) \frac{\varphi(y)}{y} dy \quad (101)$$

находим

$$\begin{aligned} h(\varkappa) &= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right) \frac{\Gamma(1-\lambda+\frac{s}{2}) \Gamma(1+\lambda+\frac{s}{2})}{\Gamma(1+\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{s}{2})} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \widehat{\varphi}(-s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле обращения (35) из теоремы 6 получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-\lambda-\frac{s}{2}) \Gamma(1+\lambda-\frac{s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})} \varphi(s) &= \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\varkappa)}{\Gamma(1+\varkappa-\frac{s}{2})} \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\frac{\pi k}{2} - \pi\varkappa)} d\varkappa + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m \right) h\left(\frac{k-1}{2} + m \right) \frac{\Gamma(\frac{k-1}{2} + m + \frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2} + m - \frac{s}{2})}. \end{aligned}$$

Поэтому, ввиду (89)

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \pi^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} J_{\lambda+\kappa}(y) J_{-\lambda+\kappa}(y) \frac{\kappa h(\kappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi \kappa\right)} d\kappa + \\ & + \pi \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m\right) h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) J_{\lambda+\frac{k-1}{2}+m}(y) J_{-\lambda+\frac{k-1}{2}+m}(y). \end{aligned}$$

Разумеется, что если по формуле (101) восстанавливаем h (заданное), то ряд отсутствует. Он известен в литературе как ряд Неймана второго рода. Таким образом, мы получили интегральное представление для разности функции и её ряда Неймана второго рода.

9. Оператор проектирования на дискретную компоненту в смешанных разложениях

С формальной точки зрения смешанные разложения из пп. 5, 7, 8 — частные случаи следующей конструкции. Пусть в некоторой полосе $-\delta < \operatorname{Re}(s) < \delta$ функция $\theta(s)$ голоморфна и отлична от нуля. Выберем в теореме 6 из п. 3 $\psi(s) = \theta(s)\widehat{\varphi}(s)$, где $\widehat{\varphi}(s)$ преобразование Меллина некоторой функции. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(s) = & \frac{\pi}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\kappa)=0} \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\theta(s)} \frac{\kappa h(\kappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi \kappa\right)} d\kappa + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m\right) h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + m - \frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\theta(s)} \end{aligned} \quad (102)$$

с

$$h(\kappa) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi \kappa\right)}{\sin(2\pi \kappa)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \kappa\right)}{\Gamma\left(1 - \kappa - \frac{s}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2} + \pi \kappa\right)}{\sin(2\pi \kappa)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \kappa\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \right\} \theta(-s) \widehat{\varphi}(s) ds \quad (103)$$

и

$$h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) = (-1)^m \int_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + m - \frac{s}{2}\right)} \theta(-s) \widehat{\varphi}(-s) ds. \quad (104)$$

Положим

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta}(\kappa; y) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\theta(s)} y^{-s} ds, \\ \Psi_{\theta}^*(\kappa; y) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \kappa - \frac{s}{2}\right)} \theta(-s) y^{-s} ds. \end{aligned}$$

Отметим, что если $\theta(s)\theta(-s) \equiv 1$, то $\Psi_\theta = \Psi_\theta^*$. В частности, это верно для $\theta(s)\xi(s)/\xi(-s)$. Возвращаясь к (102), получим разложение $-1 < \operatorname{Re}(k) \leq 1$

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \pi \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(\varkappa)=0} \Psi_\theta(\varkappa; y) \frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi \varkappa\right)} d\varkappa + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2} + m\right) h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2} + m; y\right), \end{aligned} \quad (105)$$

где

$$h(\varkappa) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi \varkappa\right)}{\sin(2\pi \varkappa)} \Psi_\theta^*(-\varkappa; y) - \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2} + \pi \varkappa\right)}{\sin(2\pi \varkappa)} \Psi_\theta^*(\varkappa; y) \right\} \frac{\varphi(y)}{y} dy \quad (106)$$

и

$$h\left(\frac{k-1}{2} + m\right) = (-1)^m \int_0^\infty \Psi_\theta^*\left(\frac{k-1}{2} + m; y\right) \frac{\varphi(y)}{y} dy. \quad (107)$$

Наборы функций ($m=1, 2, 3, \dots$)

$$\left\{ \Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2} + m; y\right) \right\}, \quad \left\{ \Psi_\theta^*\left(\frac{k-1}{2} + m; y\right) \right\}$$

можно рассматривать как два двойственных базиса, поскольку

$$\int_0^\infty \Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2} + m; y\right) \Psi_\theta^*\left(\frac{k-1}{2} + n; y\right) \frac{dy}{y} = \delta_{m,n} \left(\frac{k-1}{2} + m\right)^{-1}.$$

В случае $\theta(s)\theta(-s) \equiv 1$ оба базиса совпадают, и мы приходим к ортогональной системе функций на $(0, \infty)$ по мультипликативной мере $y^{-1}dy$. В соответствии со (105) имеет место разложение

$$\varphi(y) = \varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(y), \quad (108)$$

где $\varphi^{(+)}(y)$ интеграл, а сумма $\varphi^{(-)}(y)$ ряда. Напомним, что (см. п. 1)

$$\psi^{(-)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\psi(w)}{w-s} dw, \quad (\operatorname{Re}(s) < \alpha).$$

Поэтому

$$\hat{\varphi}^{(-)}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\theta(s)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \hat{\varphi}(w) \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{w}{2}\right)} \frac{\theta(w)}{-s+w} dw.$$

Положим

$$\tilde{\Psi}_\theta^*(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{w}{2}\right)} \theta(-w) y^{-w} dw, \quad (109)$$

$$\tilde{\Psi}_\theta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{w}{2}\right)} \frac{1}{\theta(w)} y^{-w} dw. \quad (110)$$

Так как для $\operatorname{Re}(s) < \alpha$

$$\int_0^1 y^{-s+w-1} dy = \frac{1}{-s+w},$$

то

$$\widehat{\varphi}^{(-)}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\theta(s)} \int_0^\infty \varphi(v) \left(\int_0^1 u^{-s} \widetilde{\Psi}_\theta(uv) \frac{du}{u} \right) \frac{dv}{v}.$$

Поэтому (оператор проектирования)

$$\varphi^{(-)}(y) = \int_0^\infty \varphi(v) \left(\int_0^1 \widetilde{\Psi}_\theta(uy) \widetilde{\Psi}_\theta^*(uv) \frac{du}{u} \right) \frac{dv}{v}. \quad (111)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} y^{-k} \frac{d}{dy} \left(y^{k+1} \Psi_\theta^* \left(\frac{k+1}{2}; y \right) \right) &= \widetilde{\Psi}_\theta(y), \\ y^{-k} \frac{d}{dy} \left(y^{k+1} \Psi_\theta \left(\frac{k+1}{2}; y \right) \right) &= \widetilde{\Psi}_\theta^*(y). \end{aligned}$$

Рассмотрим два примера.

I. Разложение (61) в теореме 10 соответствует случаю $\theta(s) = 2^{-s-1}$. Тогда

$$\widetilde{\Psi}_\theta(y) = 4\widetilde{\Psi}_\theta^*(y) = 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(w)=\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \frac{w}{2}\right)} \left(\frac{y}{2}\right)^w dy = 2yJ_k(y)$$

и

$$\varphi^{(-)}(y) = y \cdot \int_0^\infty \varphi(v) \left(\int_0^1 uJ_k(uy)J_k(uv)du \right) dv. \quad (112)$$

II. В разложении (84)

$$\theta(s) = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(\lambda-s)}$$

и

$$\varphi^{(-)}(y) = y \cdot \int_0^\infty \varphi(v) \left(\int_0^1 uS(\lambda+1, \mu-1; k/2; uy)S(\mu+1, \lambda+1; k/2; uv)du \right) dv. \quad (113)$$

Список литературы

- [1] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, The Clarendon Press, Oxford, 1937; Русский перевод: *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ, М.-Л., 1948.
- [2] J. Wimp, "A class of integral transforms", *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **14**:1, (1964), 33–40.

- [3] Н. Н. Лебедев, “О разложении произвольной функции в интеграл по квадратам функций Макдональда с мнимым значком”, *Сиб. матем. журн.*, **3**:2, (1962), 213–222.
- [4] М. Н. Олевский, “О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией”, *ДАН СССР*, **69**:1, (1949), 11–14.
- [5] R. W. Bruggeman, *Fourier Coefficients of Automorphic Forms*, v. 865, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.
- [6] Н. В. Кузнецов, “Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана”, *Матем. сб.*, **111(53)**:3, (1980), 334–383.
- [7] Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, “Представления групп Ли и специальные функции”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, т. 59, ВИНТИ, М., 1990, 145–264.
- [8] Y. Motohashi, “A trace formula for the Picard group, Γ ”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **72**:8, (1996), 183–186.
- [9] A. Erdélyi, et al., *Higher Transcendental Functions*, v. I and II, McGraw Hill, New York, 1953; Русский перевод: *Высшие трансцендентные функции, т. I (1973), т. II (1974)..*

Поступила в редакцию

1 октября 2019 г.

Bykovskii V.A. Decomposition in terms of special functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2019. V. 19. No 2. P. 138–172.

ABSTRACT

In the automorphic functions theory there arise integral transformations with the special functions in the kernels. In this work it is developed the universal method for constructing of the inverse formulas. The numerous examples are considered.

Key words: *special functions, inversion formulas, expansions in terms of special functions.*

УДК 519.853.2

MSC2010 5K05, 90C25, 49N15

© А. В. Жильцов¹, Р. В. Намм²

Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе

Рассматривается задача об одностороннем контакте двух упругих тел. Это статическая задача в перемещениях. Тела находятся под воздействием объемных и поверхностных сил, в области контакта присутствуют силы трения. Дано обоснование использования модифицированных функционалов Лагранжа. Для обеспечения сходимости применяется итеративная проксимальная регуляризация. Для решения конечномерного аналога задачи применяется метод поточечной релаксации. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: *контакт упругих тел, функционалы Лагранжа, метод конечных элементов, методы двойственности, метод последовательных приближений, контактное трение, итеративная проксимальная регуляризация.*

Введение

Важным приложением теории вариационных неравенств является задача об одностороннем контакте упругих тел. В данной работе рассматривается модель, для которой в области контакта тел задано условие взаимного непроникновения, причем учитывается действие силы трения между телами [1–3]. Использование функционалов Лагранжа позволяет снять ограничение на взаимное непроникание. Однако в полукоэрцитивных задачах использование классического функционала Лагранжа не гарантирует сходимость известных методов поиска седловых точек. Мы исследуем модифицированный функционал Лагранжа, позволяющий построить алгоритм, сходящийся к седловой точке как по прямой, так и по двойственной переменной.

В случае полукоэрцитивной постановки задачи конечно-элементная реализация алгоритма приводит к вырожденной матрице квадратичной формы соответствующей минимизируемой функции. Чтобы обеспечить сходимость метода Удзавы, мы строим устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.

¹ Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

² Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

Электронная почта: egrevid@gmail.com (А. В. Жильцов), rnamm@yandex.ru (Р. В. Намм).

1. Описание модели

Два плоских тела занимают области Ω', Ω'' . В дальнейшем один и два штриха используются для обозначения величин, относящихся к определённой области. Пусть $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$, $\alpha = ', ''$. Границы тел $\partial\Omega', \partial\Omega''$ являются липшицевыми. Их общую часть, представляющую собой область контакта, обозначим Γ_K . Оставшаяся часть границ $\partial\Omega^\alpha \setminus \Gamma_K$ разделена на Γ_τ^α и Γ_u^α , где, соответственно, заданы нагрузки и перемещения.

Обозначим через $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ вектор перемещений. Полагая перемещения малыми, определим компоненты тензора деформации $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(u) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$, где $i, j, k, l = 1, 2$. Для компонент тензора упругости c_{ijkl} выполняется свойство симметрии $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$, и существует константа $c_0 > 0$ такая, что всюду в $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ справедлива оценка $c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ для любых ε_{ij} .

Формулы (1)–(7) представляют краевую постановку задачи [3].

$$\sigma_{ij,j}(u) + F_i = 0 \text{ в } \Omega = \Omega' \cup \Omega'', \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(u)n_j = P_i \text{ на } \Gamma_\tau = \Gamma_\tau' \cup \Gamma_\tau'', \quad (2)$$

$$u' = 0 \text{ на } \Gamma_u' \subset \partial\Omega', \quad (3)$$

$$u'' = u''_i n''_i = 0 \text{ на } \Gamma_u'' \subset \partial\Omega'', \quad (4)$$

здесь $n = (n_1, n_2)$ — вектор внешней нормали для соответствующего тела.

В зоне контакта Γ_K выполняется условие взаимного непроникновения

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n(u) = \sigma''_n(u) = \sigma_n \leq 0, \quad (5)$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma_n = 0. \quad (6)$$

Конечное ненулевое трение на Γ_K выражается законом Кулона

$$\sigma'_\tau(u) = \sigma''_\tau(u) = \sigma_\tau, \quad |\sigma_\tau| \leq \mathcal{F}|\sigma_n|, \quad (|\sigma_\tau| - \mathcal{F}|\sigma_n|)(u'_\tau + u''_\tau) = 0, \quad (7)$$

$$u'_\tau + u''_\tau = \lambda\sigma_\tau \text{ на } \{x \in \Gamma_K : \mathcal{F}\sigma_n < 0\},$$

где $\mathcal{F}$ — коэффициент трения, $\mathcal{F} \geq 0$ на Γ_K , λ — неположительная функция на Γ_K . Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам. Нормальная составляющая тензора напряжений $\sigma_n^\alpha(u) = \sigma_{ij}(u)n_i^\alpha n_j^\alpha$, тангенциальная составляющая $\sigma_\tau^\alpha(u) = \{\sigma_{i\tau}^\alpha(u)\}$, где $\sigma_{i\tau}^\alpha(u) = \sigma_{ij}^\alpha(u)n_j^\alpha n_\tau^\alpha - \sigma_n^\alpha(u)n_i^\alpha$. В дальнейшем индексы n и τ у величин означают их нормальную и касательную составляющие. Причем в зоне контакта аналогичные векторы тел противоположно направлены: $n' = -n''$, $\tau' = -\tau''$.

Для записи вариационной формы задачи определяются пространства функций перемещений $\mathcal{H}^k(\Omega) = \{v : v = (v', v'') \in [H^k(\Omega')]^2 \times [H^k(\Omega'')]^2\}$, возможных перемещений $V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) : v' = 0 \text{ на } \Gamma_u', v'' = 0 \text{ на } \Gamma_u''\}$ и множество допустимых перемещений $K = \{v \in V : v'_n + v''_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_K\}$.

Предположим, что $c_{ijkl} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, 2$; $F \in [L_2(\Omega)]^2$; $P \in [L_2(\Gamma_\tau)]^2$. Пусть решение u краевой задачи существует и принадлежит пространству $\mathcal{H}^2(\Omega)$. Можно

показать, что u удовлетворяет квазивариационному неравенству [4]

$$A(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} \mathcal{F}|\sigma_n|(|v'_\tau + v''_\tau| - |u'_\tau + u''_\tau|) ds \geq FP(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega, \\ FP(v) &= \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} P_i v_i ds, \quad \Gamma_\tau = \Gamma'_\tau \cup \Gamma''_\tau. \end{aligned}$$

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения подобных задач является зависимость силы трения $\mathcal{F}|\sigma_n|$ от искомого решения. Для решения квазивариационного неравенства применим метод последовательных приближений [3, 5, 6].

Задаем начальную силу трения $g^0 \in L_2(\Gamma_K)$, $g^0 \geq 0$. На $(m+1)$ -ом шаге определяем u^{m+1} как решение неравенства

$$A(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} g^m(|v'_\tau + v''_\tau| - |u'_\tau + u''_\tau|) ds \geq FP(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (9)$$

где $g^m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^m)|$, $m = 1, 2, \dots$

Каждый итерационный шаг метода заключается в поиске решения вариационной задачи (9) при заданной силе трения $g^m \in L_2(\Gamma_K)$ и вычислении нового значения g^{m+1} . Вопрос о теоретической сходимости, насколько нам известно, до сих пор остается открытым [3, с. 184].

Задачу (9) будем называть задачей с заданным трением. Можно показать, что она аналогична задаче минимизации функционала

$$\mathcal{L}_m(v) = \frac{1}{2} A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds \rightarrow \min_{v \in K}. \quad (10)$$

2. Существование решения

Ядро билинейной формы $A(\cdot, \cdot)$ является нетривиальным в $\mathcal{H}^1(\Omega)$. В монографии [3] его называют пространством перемещений жестких тел и показывают, что для введенного тензора деформации это пространство определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), \quad z_1^\alpha &= a_1^\alpha - b^\alpha x_2, \quad z_2^\alpha = a_2^\alpha + b^\alpha x_1, \\ &a_1^\alpha, a_2^\alpha, b^\alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha = ', '' \}. \end{aligned}$$

С учётом условия закрепления одного из тел (3) ядро является трёхмерным ($z' = (0, 0)$ для элементов R). Для доказательства сходимости нам потребуется коэрцитивность функционала $\mathcal{L}_m(\cdot)$ на множестве допустимых перемещений K . Поэтому

далее ограничимся случаями, когда размерность пространства перемещений жестких тел не превосходит единицы. Это дает возможность определить контактную задачу с единственным решением и потребовать выполнения условия коэрцитивности.

Для задачи контакта двух тел без учета трения соответствующие теоремы описаны в [3]. Для задачи контакта упругого тела и абсолютно твердой опоры, с учетом трения, доказательство теорем о существовании и единственности решения приведено в [7].

Мы рассмотрим случай, когда Γ''_u и Γ_K — прямолинейные отрезки, не параллельные друг другу. Удобно считать, что Γ''_u параллельна одной из осей, к примеру, Ox_2 . В таком случае $R_v = R \cap V$ представляет собой одномерное пространство вида

$$R_v = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), \quad z' = (0, 0), z'' = (0, a), a \in \mathbb{R}^1\}.$$

При этом $K \cap R \subset R_v$. Выберем систему координат так, что число a для элементов K неотрицательно:

$$K \cap R = \{z \in V : z = (z', z''), \quad z' = (0, 0), z'' = (0, a), a \geq 0\}. \quad (11)$$

Используем скалярное произведение

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Gamma''_u} u''_2 ds \int_{\Gamma''_u} v''_2 ds. \quad (12)$$

Относительно него получаем ортогональное разложение $V = H \oplus R_v$. То есть любой элемент $v \in V$ можно представить в виде суммы $\tilde{v} + \bar{v}$ элементов пространств H и R_v , причем $(\tilde{v}, \bar{v})_V = 0$.

Возьмем, к примеру, произвольный элемент $v \in V$: $v = (v', v'')$, $v' = (v'_1, v'_2)$, $v'' = (v''_1, v''_2)$. Для одного тела перемещения как целого отсутствуют. А для второго тела $\tilde{v}'' = (v''_1, v''_2)$, $\bar{v} = (0, \bar{v}_2)$. Положим $\bar{v}_2'' = \frac{1}{\text{mes} \Gamma''_u} \int_{\Gamma''_u} v''_2 ds$ и определим соответствующее ему $\tilde{v}_2''$ как разность $\tilde{v}_2'' = v''_2 - \bar{v}_2''$, чтобы второе слагаемое в скалярном произведении (12) обращалось в ноль, если один из множителей $\tilde{v}$. Действительно,

$$\int_{\Gamma''_u} \tilde{v}_2'' ds = \int_{\Gamma''_u} (v''_2 - \bar{v}_2'') ds = \int_{\Gamma''_u} v''_2 ds - \frac{1}{\text{mes} \Gamma''_u} \int_{\Gamma''_u} \left(\int_{\Gamma''_u} v''_2 ds \right) ds = 0.$$

Таким образом, $H = \{v \in V : \int_{\Gamma''_u} v''_2 ds = 0\}$.

Теорема 1. Пусть справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma''_{\tau}} P_2'' ds < 0. \quad (13)$$

Тогда для $v \in K$ гарантируется сходимость

$$\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty, \quad \text{при } \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Для функций $\tilde{v} \in H$ справедливо неравенство типа неравенства Корна [3]

$$c_1 \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq |\tilde{v}| = \left(\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \right)^{1/2}.$$

Поэтому для всех $v \in K$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(v) &= \frac{1}{2} A(\tilde{v}, \tilde{v}) + \frac{1}{2} A(\bar{v}, \bar{v}) - FP(\tilde{v}) - FP(\bar{v}) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds = \\ &= \frac{1}{2} A(\tilde{v}, \tilde{v}) - FP(\tilde{v}) - \bar{v}_2'' \left(\int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma_\tau''} P_2'' ds \right) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds \geq \\ &\geq c_2 \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 - \|FP\| \cdot \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} - \bar{v}_2'' \left(\int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma_\tau''} P_2'' ds \right) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds. \end{aligned}$$

Если $\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$, то $\|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ или $\|\bar{v}_2''\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$. В правой части неравенства четвертое слагаемое неотрицательно. Третье слагаемое для элементов множества K тоже неотрицательно, в силу условия (13) и того, что если $v \in K$, то $\bar{v}_2'' = a \geq 0$ согласно (11).

Таким образом, в одном случае $\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty$ за счет первого слагаемого. В другом случае — за счет неограниченного возрастания третьего слагаемого. Получаем

$$\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty \quad \forall v \in K, \text{ при } \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

□

Из теоремы 1 следует, что задача (10) разрешима при любом $m=0,1,\dots$. Пусть u — решение задачи (10). Предположим, что $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, и пусть $\tilde{\Gamma}_K = \{x \in \Gamma_K : \sigma_n(u) < 0\}$. Так как любое другое решение задачи (10) может отличаться от u только на элемент $\rho \in R_v$, то все другие решения также принадлежат классу $\mathcal{H}^2(\Omega)$. Сделаем естественное предположение о том, что $\text{mes } \tilde{\Gamma}_K > 0$. Тогда решение u задачи (10) будет единственным. Далее предполагаем, что $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ и $\text{mes } \tilde{\Gamma}_K > 0$.

3. Метод множителей Лагранжа

Для решения задачи с заданным трением (10) применим метод множителей Лагранжа, как мы это сделали в [8] для аналогичной задачи, не учитывающей трение (для задачи контакта упругого тела с абсолютно жесткой опорой [9]). Этот метод двойственности позволяет снять ограничение $v'_n + v''_n \leq 0$ и вместо минимизации функционала $\mathcal{L}_m(\cdot)$ на K проводить минимизацию на всем пространстве V .

Модифицированный функционал Лагранжа для задачи (10) записывается так:

$$M_m(v, l) = \frac{1}{2} A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds,$$

здесь и далее $[v] = v'_n + v''_n$ — скачок функции.

Теоремы о сходимости метода к седловой точке функционала аналогичны имеющимся в [8]. Приведем одну из них.

Теорема 2. Если решение u задачи (10) принадлежит пространству $\mathcal{H}^2(\Omega)$, то модифицированный функционал Лагранжа $M_m(\cdot, \cdot)$ обладает на $V \times L_2(\Gamma_K)$ седловой точкой $(u, -\sigma_n(u))$, т. е.

$$M_m(u, l) \leq M_m(u, -\sigma_n(u)) \leq M_m(v, -\sigma_n(u)) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Таким образом, двойственная переменная в седловой точке совпадает с $-\sigma_n(u)$ на Γ_K . Фактически $-\sigma_n(u)$ определяет силу трения на следующем шаге метода последовательных приближений (9), так как $g^m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^m)|$.

Алгоритм Удзавы записывается следующим образом [7–9]:

$$\begin{aligned} (i) \quad u^{k+1} &= \arg \min_{v \in V} M_m(v, l), \\ (ii) \quad l^{k+1} &= l^k + r \max \left\{ [u^{k+1}], -\frac{l^k}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Проксимальная регуляризация

Непосредственная конечно-элементная реализация алгоритма Удзавы в полуконвективном случае приводит к вырожденной матрице квадратичной формы минимизируемого функционала. Для устранения этого недостатка мы строим устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа [6, 10, 11].

Выберем произвольную пару $(v^0, l^0) \in V \times L_2(\Gamma_K)$. На $(k+1)$ -ом шаге метода Удзавы находим пару (v^{k+1}, l^{k+1}) следующим образом:

$$\begin{aligned} (i) \quad &\text{Определяем } v^{k+1} \text{ исходя из критерия } \|v^{k+1} - \tilde{v}^{k+1}\|_{1,\Omega} \leq \delta_k, \text{ где} \\ &\tilde{v}^{k+1} = \arg \min_{v \in V} \left\{ M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \right\}, \delta_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \\ (ii) \quad &\text{Корректируем двойственную переменную по формуле} \\ &l^{k+1} = (l^k + r [v^{k+1}])^+. \end{aligned} \quad (15)$$

Регуляризирующая добавка $\frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2$ обеспечивает сильную выпуклость минимизируемого функционала, что гарантирует единственность решения вспомогательных задач

$$M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \rightarrow \min_{v \in V}. \quad (16)$$

Пусть v_h^k — конечно-элементное решение, полученное на k -й итерации метода

Удзавы. Перегруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}
 & M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v_h^k\|_{0,\Omega}^2 = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_{\tau} + v''_{\tau}| ds + \\
 & \quad + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v - v_h^k)^2 d\Omega = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} (F_i + v_h^k) v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \\
 & \quad + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_{\tau} + v''_{\tau}| ds + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_h^k)^2 d\Omega.
 \end{aligned}$$

Постоянное слагаемое не влияет на решение задачи минимизации, поэтому его можно отбросить.

5. Аппроксимация и решение

Рассмотрим решение задачи в случае, когда область Ω является единичным квадратом, а Ω' и Ω'' — одинаковыми прямоугольниками, соответствующими нижней и верхней половинам этого квадрата. Решение задачи будем искать на последовательности равномерных сеток, разбивающих область на равнобедренные прямоугольные треугольники. Шаг сеток $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ и $\frac{1}{64}$. Обозначим число узлов, приходящихся на сторону квадрата $n = 1/h + 1$. Конечный элемент j -го узла триангуляции представляет собой совокупность треугольников, для которых j -й узел является вершиной. В каждом конечном элементе используем кусочно-линейные базисные функции, на которых строим линейную оболочку V_h , аппроксимирующую пространство V .

Пусть I_K — множество индексов узлов, лежащих на Γ_K . Каждому такому узлу соответствуют два усеченных конечных элемента (для верхнего тела и для нижнего) (общее число конечных элементов обозначим $N = n^2 + n$). В каждом из этих конечных элементов своя пробная функция и свои значения $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$.

Выполним замену переменных $t_i = v_i'^{(2)} - v_i''^{(2)}$ (здесь для обоих тел нормаль на Γ_K считаем сонаправленной с осью Ox_2). Тогда $v_i''^{(2)} = v_i'^{(2)} - t_i$ для $i \in I_K$. Каждая переменная t_i в векторе $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ помещается на место $v_i''^{(2)}$. Последнее слагаемое в $M_m(v, l)$ аппроксимируем по формуле трапеций: $\frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} (((l + rt_i)^+)^2 - l^2)$. Здесь и далее для обозначения векторов из $\mathbb{R}^{2N}$ используется полужирный шрифт.

Аналогично выполним замену переменных $s_i = v_i'^{(1)} - v_i''^{(1)}$ (здесь для обоих тел касательный вектор на Γ_K считаем сонаправленным с осью Ox_1). Тогда $v_i''^{(1)} = v_i'^{(1)} - s_i$ для $i \in I_K$. Каждая переменная s_i в векторе $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ помещается на место $v_i''^{(1)}$. Слагаемое, учитывающее в $M_m(v, l)$ силу трения, аппроксимируем по формуле трапеций: $h \sum_{i \in I_K} g^m |s_i|$. Для упрощения обозначений далее будет использоваться запись

$h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle$, где под $|\mathbf{v}|$ подразумевается вектор, координатами которого являются модули координат вектора $\mathbf{v}$, а не его длина.

Получаем конечномерную задачу нахождения седловой точки функции

$$\widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}\mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle + h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle + \frac{h}{2r} (((1 + r\mathbf{v})^+)^2 - \mathbf{l}^2),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^{2N}$; $A_{2N \times 2N}$ — матрица жесткости, модифицированная с учетом замены переменных; $\mathbf{f}\mathbf{p}_{2N}$ — вектор нагрузки, получаемый путем численного интегрирования; $\mathbf{g}_{2N}^m$ — сила трения (в этом векторе отличными от нуля могут быть только компоненты, соответствующие s_i); $\mathbf{l}_{2N}$ — двойственная переменная, у которой отличны от нуля компоненты, соответствующие t_i .

При проксимальной регуляризации матрица $A_{2N \times 2N}$ и вектор $\mathbf{f}\mathbf{p}_{2N}$ изменяются для учета дополнительных слагаемых. Причем вектор $\mathbf{f}\mathbf{p}_{2N}$ необходимо пересчитывать на каждой итерации метода Удзавы, так как он зависит от v_h^k .

Полученную функцию можно записать в виде

$$\widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l}) + h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle,$$

где функция $J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l})$ при использовании регуляризации строго выпуклая, дифференцируемая и $J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l}) \rightarrow \infty$ при $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$, второе слагаемое не является дифференцируемым, $h\mathbf{g}^m \geq 0$ (компоненты вектора поэлементно неотрицательны). В монографии [12, с. 86] представлена теорема, утверждающая, что для подобного класса недифференцируемых функций метод поточечной релаксации будет сходиться к решению. Этот метод мы и применим для решения задачи минимизации на первом шаге метода Удзавы.

Далее на псевдокоде записан реализованный алгоритм. Строки 1-10 соответствуют методу последовательных приближений (МПП), на каждой итерации которого решается задача с заданным трением. В строке 9 происходит уточнение силы трения, причем для этого используется не численное дифференцирование, а приближенное значение двойственной переменной l , совпадающей с $-\sigma_n(u)$ в узлах Γ_K .

```

1 repeat
2   repeat
3     if  $h > 1/64$  then  $h = h \cdot \frac{1}{2}$ ;
4     repeat
5        $\mathbf{u}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}_h \in V_h} \widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}^k)$ ;
6        $\mathbf{l}^{k+1} = (\mathbf{l}^k + r\mathbf{v}^{k+1})^+$ ;
7     until  $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon$ ;
8   until  $h \leq 1/64$ ;
9    $\mathbf{g}^{m+1} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{l}^{k+1}$ ;
10 until  $\max_i |g_i^{m+1} - g_i^m| \leq \varepsilon$ ;
```

Алгоритм 1: Задача контакта двух тел с учетом трения.

Строки 2-8 описывают метод регуляризации (15). Внутри этого метода на последовательности триангуляций с шагом сетки $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ и $\frac{1}{64}$ происходит приближенное решение задачи поиска седловой точки. Если положить $\delta_k = h$, то при

дальнейшем уменьшении шага получим выполнение условия $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, что обеспечивает сходимость метода.

В строках 4-7 записан метод Удзавы (МУ), модифицированный с учетом регуляризации. В строке 6 происходит уточнение двойственной переменной. В строке 5 для решения задачи минимизации подразумевается использование метода поточечной релаксации (МПР). Поскольку в минимизируемой функции присутствует недифференцируемое слагаемое $h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle$, для узлов, принадлежащих Γ_K , используем сглаживание [9, 12, 13].

Условием остановки счета МПР является $\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-4} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{64}$. В качестве стартовой точки используются значения, найденные на предыдущих итерациях МУ. А в случае дробления сетки — линейная аппроксимация решения с предыдущей итерации.

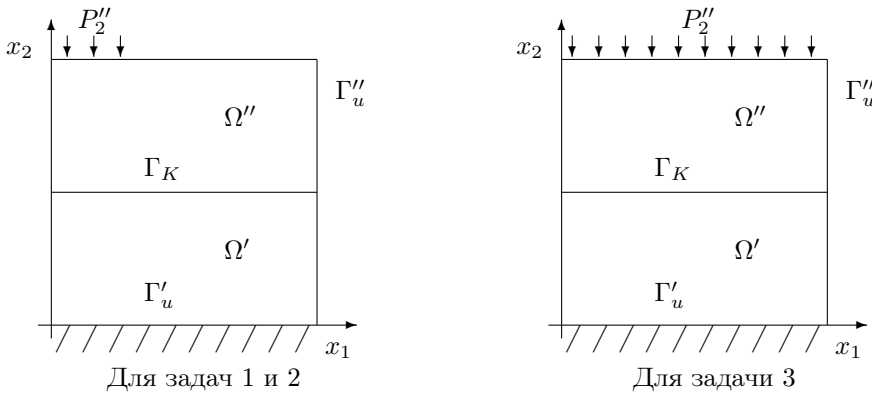


Рис. 1. Распределение поверхностной силы P_2''

Решим три задачи (рис. 1): когда на левую треть верхней стороны тела Ω'' воздействует сила $P_2'' = -60$, когда на том же участке воздействует сила $P_2'' = -120$ и когда на всю верхнюю сторону тела Ω'' воздействует сила $P_2'' = -60$. Объемные силы отсутствуют. Модуль упругости $E = 73 \cdot 10^3$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$, коэффициент трения $\mathcal{F} = 0.5$. $\Gamma''_u = \{(x, y) : x = 1, 0.5 < y \leq 1\}$. Расчеты проведены при $\varepsilon = 10^{-4}$, параметре $r = 10^{12}$.

Таблица 1. Число итераций для каждой из задач

Задача	МПП	МУ	МПР (суммарно)	МПР ($h=1/32$)	МПР ($h=1/64$)
1	6	48	87539	27550	46586
2	6	54	109089	31480	62812
3	7	62	91629	25104	52765

В таблице 1 для каждой из задач приведено количество итераций, выполняющихся до достижения заданной точности. Для решения задачи 1 выполняется 6 итераций МПП. На каждой из них по 8 итераций МУ и, в среднем, 14560 итераций

МПР. Большая часть итераций МПР приходится на мелкую сетку, когда каждая итерация является самой ресурсозатратной операцией в решении задачи, поэтому для наглядности в таблице указано и количество шагов на сетке с шагом $1/64$.

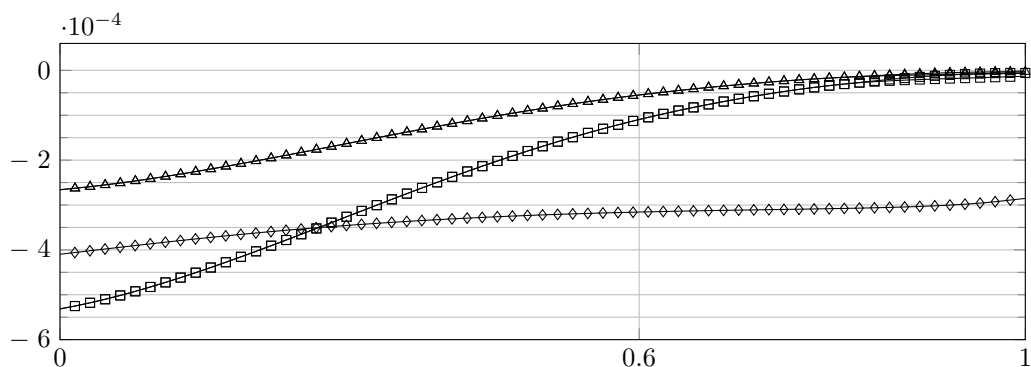


Рис. 2. Вид зоны контакта Γ_K

На рис. 2 изображены перемещения точек Γ_K . Ноль на оси Ox_2 соответствует положению границы Γ_K в случае, когда на тела действуют нулевые силы. По вертикальной оси используется масштаб увеличения $1:10^{-4}$, что подписано над верхним левым углом рисунка. Линиями с треугольными маркерами ($\triangleleft$ и $\triangleright$) изображено решение задачи 1, линиями с квадратными маркерами ($\squareleftarrow$ и $\rightarrow\square$) — решение задачи 2. На части границы произошло разлипание тел (см. рис. 3). Линией с маркерами в виде ромбов ($\diamondleftarrow$ и $\rightarrow\diamond$) изображено решение задачи 3, где тела остались слипшимися на всём протяжении области контакта.

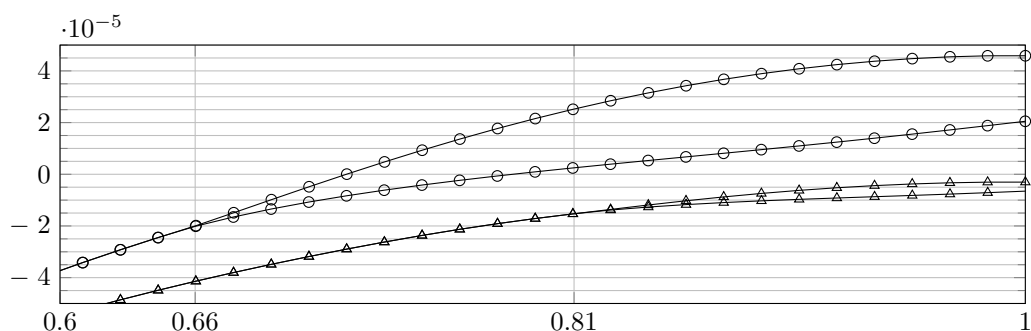
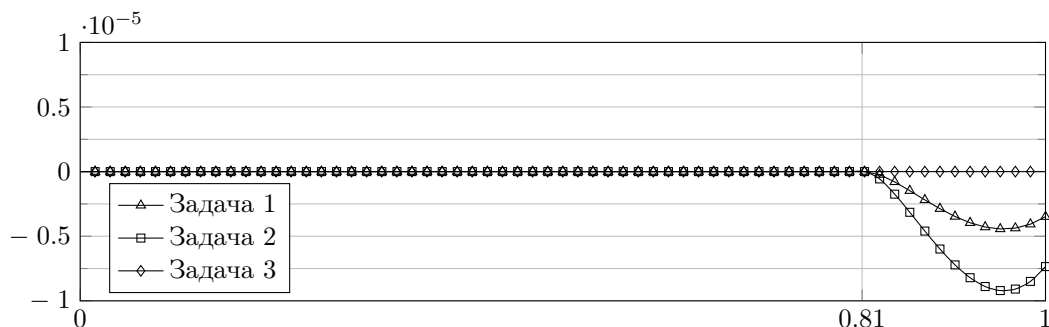


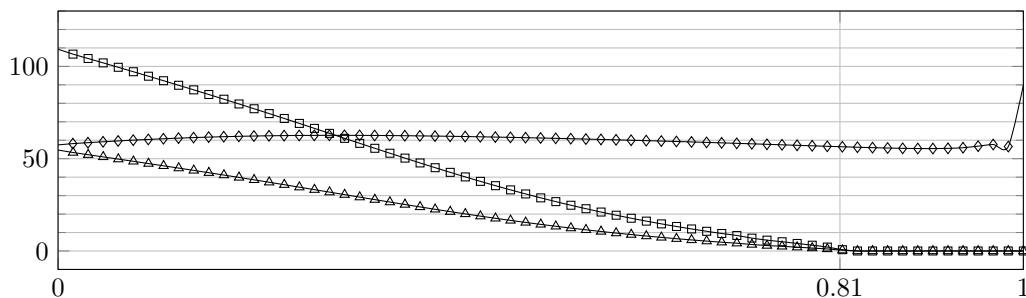
Рис. 3. Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел

На рис. 3 в масштабе $1:10^{-5}$ показана область, в которой произошло разлипание тел в задаче 1. Здесь же линиями с круглыми маркерами ($\circleftarrow$ и $\rightarrow\circ$) показано решение задачи 1 без учета сил трения. Как видно, перемещения точек границы контакта

Рис. 4. Значения скачка $[v]$

различаются незначительно для задач с трением и без него. Но разошлись тела в данных условиях по-разному: без трения на 34% границы, с трением на меньшем участке $[0.81, 1.00] \subset \Gamma_K$, что составляет 19% границы. Это, разумеется, очень зависит от геометрии тел и заданных нагрузок, но в любом случае учет силы трения в расчетах может значительно повлиять на результат.

На рис. 4 показано, как изменяется на протяжении Γ_K значение скачка $[u]$ для каждой из задач, а на рис. 5 показано изменение двойственной переменной l .

Рис. 5. Значения двойственной переменной l

Здесь видно, что для каждого решения выполняются условия (5) и (6), то есть для каждого узла произведение скачка на $-\sigma_n$ равно нулю.

Список литературы

- [1] J. Jarušek, "Contact problems with bounded friction. Coercive case", *Czechoslovak Mathematical Journal*, **33**:2, (1983), 237–261.
- [2] J. Jarušek, "Contact problems with bounded friction. Semicoercive case", *Czechoslovak Mathematical Journal*, **34**:4, (1984), 619–629.
- [3] И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986.

- [4] А. С. Кравчук, *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике*, МГАПИ, М., 1997.
- [5] N. Kikuchi, T. Oden, *Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, Philadelphia., 1988.
- [6] Р. В. Намм, Г. И. Цой, “Метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 7, 44–52.
- [7] Э. М. Вихтенко, Г. С. Ву, Р. В. Намм, “О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **10**:8, (2010), 1357–1366.
- [8] А. В. Жильцов, “Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта”, *Математические заметки СВФУ*, **23**:4, (2016), 99–113.
- [9] Э. М. Вихтенко, Н. Н. Максимова, Р. В. Намм, “Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики”, *Автомат. и телемех.*, 2012, № 4, 3–17.
- [10] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, “Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:9, (2008), 1571–1579.
- [11] I. Konnov, J. Gwinner, “A strongly convergent combined relaxation method in Hilbert spaces”, *Numerical Funct. Anal. Optim.*, **35**:(7–9), (2014), 1066–1077.
- [12] Р. Гловински, Ж.-Л. Гаслингер, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979.
- [13] А. Я. Золотухин, Р. В. Намм, А. В. Пачина, “Приближенное решение вариационной задачи Мосолова и Мясникова с трением на границе по закону Кулона”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **4**:2, (2001), 163–177.

Поступила в редакцию
10 апреля 2019 г.

Zhiltsov A. V., Namm R. V. Stable algorithm for solving the semicoercive problem of contact of two bodies with friction on the boundary. Far Eastern Mathematical Journal. 2019. V. 19. No 2. P. 173–184.

ABSTRACT

The problem of one-sided contact of two elastic bodies is considered. This is a static displacement problem. The bodies are influenced by bulk and surface forces, in the contact area there are friction forces. The substantiation of using the method of modified Lagrange functionals is given. The method of successive displacement is applied to the solution of a finite-dimensional analog of a task. To solve a finite-dimensional problem, the pointwise relaxation method is used. The results of numerical calculations are given.

Key words: *contact problem, augmented Lagrangian method, finite element method, duality methods, method of successive approximations, contact friction, iterative proximal regularization.*

УДК 519.719.2+517.965
MSC2010 94A60+11Bxx

© А. А. Илларионов¹

Асимметричные криптосистемы и гиперэллиптические последовательности

Исследуются последовательности $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ элементов произвольного поля $\mathbb{F}$, удовлетворяющие разложениям вида

$$A_{m+n}A_{m-n} = a_1(m)b_1(n) + a_2(m)b_2(n),$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$. Полученные результаты используются для построения аналогов алгоритмов Диффи – Хеллмана и Эль-Гамала, в которых задача дискретного логарифмирования ставится в группе $(S, +)$, где множество S состоит из четверок вида $S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$, $n \in \mathbb{Z}$, а $S(n) + S(m) = S(n + m)$.

Ключевые слова: гиперэллиптические последовательности, нелинейные рекуррентные последовательности, криптосистемы.

1. Введение

Быковский² предложил следующую конструкцию.

Определение. Пусть не равные тождественно нулю последовательности комплексных чисел

$$A = \{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad B = \{B_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

удовлетворяют (для любых целых m, n) разложениям

$$A_{m+n}B_{m-n} = \sum_{j=1}^{N_0} a_j(m)b_j(n), \quad (1)$$

$$A_{m+n+1}B_{m-n} = \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{a}_j(m)\tilde{b}_j(n) \quad (2)$$

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: illar_a@list.ru

²V. Bykovskii, Elliptic systems of sequences and functions, Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications February (16–21, 2015, Skolkovo institute of science and technology, Moscow, Russia)

с некоторыми $a_j, b_j, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ и минимально возможными $N_0, N_1 \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда пару (A, B) будем называть *гиперэллиптической системой последовательностей*, величину $R_0(A, B) = N_0$ — ее 0-рангом, а величину $R_1(A, B) = N_1$ — ее 1-рангом.

Эту конструкцию несложно распространить на случай, когда поле $\mathbb{C}$ заменяется на произвольное поле $\mathbb{F}$. Ограничимся случаем, когда $A = B$ и выполняется только уравнение (1).

Определение. Пусть не равная тождественно нулю последовательность $A = \{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{F}$ удовлетворяет (для любых целых m, n) разложению

$$A_{m+n}A_{m-n} = \sum_{j=1}^N a_j(m)b_j(n) \quad (3)$$

с некоторыми $a_j, b_j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$ и минимально возможным $N \in \mathbb{Z}_+$. Тогда последовательность A будем называть *полугиперэллиптической последовательностью*, а величину $R_0(A) = N$ — ее 0-рангом.

В настоящей работе рассматривается вопрос о построении асимметричных криптосистем с помощью полугиперэллиптических последовательностей в конечном поле. По сути речь идет об алгоритмах Диффи – Хеллмана и Эль-Гамала, в которых задача дискретного логарифмирования ставится в группе $(S, +)$, где множество S состоит из четверок вида

$$S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

а $S(n) + S(m) = S(n+m)$. Подобные идеи впервые появились в докладе [1], в котором вместо гиперэллиптических последовательностей рассматривалась последовательность Сомос-4 в поле вычетов по простому модулю p . Применение последовательностей Сомоса наталкивается на некоторые препятствия (см. замечание 2 ниже), которые можно обойти, используя (полу)гиперэллиптические последовательности.

В следующем разделе приводится детерминантное уравнение, эквивалентное (3). В § 3 строятся примеры полугиперэллиптических последовательностей в различных полях. В § 4 изучаются некоторые свойства последовательностей с $R_0(A) = 2$, а в § 5 формулируются аналоги алгоритмов Диффи – Хеллмана и Эль-Гамала для таких последовательностей. В последнем разделе обсуждаются нерешенные задачи и возможные обобщения.

2. Детерминантное уравнение

Пусть $A = \{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{F}$. Для любых целых $m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k$ определим

$$D_A \begin{pmatrix} m_0 & \dots & m_k \\ n_0 & \dots & n_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{m_0+n_0} A_{m_0-n_0} & \dots & A_{m_0+n_k} A_{m_0-n_k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m_k+n_0} A_{m_k-n_0} & \dots & A_{m_k+n_k} A_{m_k-n_k} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Неравенство $R_0(A) \leq k$ равносильно тому, что

$$D_A \begin{pmatrix} m_0 & \dots & m_k \\ n_0 & \dots & n_k \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

для всех $m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $R_0(A) = N \leq k$. Тогда выполняется разложение (3). Из него вытекает линейная зависимость строк (столбцов) определителя из левой части равенства (4). Значит, справедливо соотношение (4).

Пусть выполняется (4). Если $A_{m+n}A_{m-n} = 0$ при всех $m, n \in \mathbb{Z}$, то $A \equiv 0$. Поэтому существуют $N \in \mathbb{N}$ и целые $m_1, \dots, m_N, n_1, \dots, n_N$ такие, что

$$D_A \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_N \\ n_1 & \dots & n_N \end{pmatrix} \neq 0.$$

Пусть N — наибольшее натуральное, удовлетворяющее этому условию. Тогда $N \leq k$ в силу (4). Кроме того, для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$D_A \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_N & m \\ n_1 & \dots & n_N & n \end{pmatrix} = 0.$$

Раскладывая этот определитель по последнему столбцу (или последней строке), получаем разложение вида (3). Значит, $R_0(A, B) \leq N \leq k$. $\square$

Замечание 1. Утверждение, аналогичное лемме 1, приведено в [2, § 3] (см. также [3, 4]) для случая, когда A — функция $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

3. Примеры полугиперэллиптических последовательностей

1. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Положим

$$A_n = P_1(n)a_1^n + \dots + P_s(n)a_s^n,$$

где P_j — многочлены из $\mathbb{F}[X]$, а $a_j \in \mathbb{F}$. Нетрудно заметить, что тогда выполняется разложение вида (3). Такое же утверждение справедливо для последовательности

$$A_n = \begin{cases} P_1(n)a_1^n + \dots + P_s(n)a_s^n & \text{при четном } n \\ Q_1(n)b_1^n + \dots + Q_t(n)b_t^n & \text{при нечетном } n \end{cases},$$

где $P_j, Q_j \in \mathbb{F}[X]$, $a_j, b_j \in \mathbb{F}$.

2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Все известные на сегодняшний день гиперэллиптические системы последовательностей в поле $\mathbb{C}$ приведены в [3, § 9]. Все неэлементарные (отличные от указанных в п. 1) случаи описываются с помощью сужений производных многомерных тета-функций на пространство $\mathbb{C}$. Существуют и другие варианты *полугиперэллиптических* последовательностей. Например, пусть $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$, а σ_1, σ_2 — сигма-функции Вейерштрасса, ассоциированные с разными решетками. Положим

$$A_n = \begin{cases} \sigma_1(nu_1 + v_1) & \text{при четном } n \\ \sigma_2(nu_2 + v_2) & \text{при нечетном } n \end{cases}.$$

Тогда $R_0(A) \leq 4$. Для доказательства достаточно использовать формулу сложения (для сигма-функции) и учесть, что числа $m+n$ и $m-n$ имеют одинаковую четность.

3. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ — поле вычетов по простому модулю p . Пусть A — полугиперэллиптическая последовательность в поле $\mathbb{C}$, $R_0(A) = N$. Предположим, что последовательность A — целочисленная. Так как A удовлетворяет равенству (4) (в кольце $\mathbb{Z}$), то последовательность

$$\tilde{A}(n) = A(n) \pmod{p}$$

удовлетворяет этому же уравнению в поле $\mathbb{Z}_p$. Следовательно, $R_0(A) \leq N$. Целочисленные полугиперэллиптические последовательности небольшого ранга можно строить следующим образом.

Пусть b, c — рациональные положительные. Рассмотрим последовательность рациональных чисел, удовлетворяющую уравнению (последовательность Сомос-4)

$$A_{n+2}A_{n-2} = bA_{n+1}A_{n-1} + cA_n^2.$$

Так как $b, c > 0$, то она не имеет нулевых элементов и однозначно определяется начальными членами A_0, A_1, A_2, A_3 . В этом случае (см., например, [5] и ссылки там)

$$D_A \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_2 & n_2 \end{pmatrix} = 0$$

Поэтому $R_0(A) \leq 2$. При некоторых ограничениях, наложенных на исходные данные b, c, A_0, A_1, A_2, A_3 , последовательность A является целочисленной (см. [3, 6–9] и ссылки там).

4. Свойства полугиперэллиптических последовательностей при $R_0(A) = 2$

Всюду в этом разделе считаем, что $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$ и $R_0(A) = 2$. Мы рассмотрим два вопроса:

- 1) задание последовательности A конечным набором параметров из $\mathbb{F}$;
- 2) «быстрый» (полиномиальный по m) алгоритм вычисления A_{n+m} по заданным номеру m и элементу A_n (n — неизвестно).

Из леммы 1 вытекает равенство

$$D_A \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n+2}A_{n-2} & A_{n+1}A_{n-1} & A_n^2 \\ A_3A_{-1} & A_2A_0 & A_1^2 \\ A_2A_{-2} & A_1A_{-1} & A_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$aA_{n+2}A_{n-2} + bA_{n+1}A_{n-1} + cA_n^2 = 0, \tag{5}$$

где

$$a = \begin{vmatrix} A_2 A_0 & A_1^2 \\ A_1 A_{-1} & A_0^2 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} A_3 A_{-1} & A_1^2 \\ A_2 A_{-2} & A_0^2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} A_3 A_{-1} & A_2 A_0 \\ A_2 A_{-2} & A_1 A_{-1} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления a, b, c достаточно знать шесть (начальных) элементов

$$A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3. \quad (6)$$

Все остальные могут быть найдены из соотношения (5) при условии, что *последовательность A не имеет нулевых членов*. Если поле $\mathbb{F}$ конечное, то привести условия на начальные данные, гарантирующие выполнение этого предположения для достаточно широкого класса последовательностей, довольно проблематично. Поэтому нашей ближайшей целью является выяснение того, как могут быть расположены нулевые элементы последовательности A .

Замечание 2. Последовательность A , удовлетворяющая уравнению вида (5) (в котором $a \neq 0$) называется последовательностью Сомос-4. Если она содержит нулевые члены, то ее нельзя однозначно построить, используя только коэффициенты a, b, c и некоторый (конечный) набор начальных значений (см. [10]). На взгляд автора, это является основным препятствием на пути использования последовательностей Сомоса в криптографии.

Расположение нулевых элементов последовательности A . Пусть

$$Z_A = \{n \in \mathbb{Z} : A_n = 0\}.$$

Лемма 2. Пусть $abc \neq 0$ и $Z_A \neq \emptyset$. Тогда Z_A — арифметическая прогрессия с разностью ≥ 4 .

Доказательство. Пусть

$$h = \min\{n_0 - m_0 : A_{n_0} = A_{m_0} = 0, n_0 > m_0\}.$$

Не умаляя общности, считаем, что $A_0 = A_h = 0$. В противном случае следует перейти к рассмотрению последовательности $\tilde{A}_n = A_{n+n_0}$, где номер n_0 удовлетворяет условию $A_{n_0} = A_{n_0+h} = 0$, и учесть, что $R_0(A) = R_0(\tilde{A})$.

1. Пусть $h = 1$, т.е. $A_0 = A_1 = 0$. Рассматривая (5) при $n = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$, приходим к выводу, что все элементы последовательности A равны нулю. Это противоречит условиям.

2. Пусть $h = 2$, т.е. $A_0 = A_2 = 0$. Полагая в (5) $n = 0$, получаем, что $A_1 A_{-1} = 0$. Но тогда $h = 1$. Получили противоречие.

3. Пусть $h = 3$, т.е. $A_0 = A_3 = 0$. Полагая в (5) $n = 1$, получаем, что $A_1^2 = 0$. Но тогда $h = 1$. Получили противоречие.

4. Пусть $h \geq 4$. Докажем, что $A_{jh} = 0$ при $j = 1, 2, \dots$. Используем метод математической индукции по $j = 1, 2, \dots$. При $j = 1$ утверждение выполнено. Пусть $A_{jh} = 0$ при $j = 1, 2, \dots, n-1$, где $n \geq 2$. Согласно лемме 1

$$D_A \begin{pmatrix} h & nh & 1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{h+1} A_{h-1} \\ A_{nh}^2 & 0 & * \\ * & A_{1+h} A_{1-h} & * \end{vmatrix} = A_{nh}^2 A_{h+1} A_{h-1} A_{1+h} A_{1-h} = 0.$$

Здесь и далее символом $*$ обозначены элементы, значения которых не влияют на определитель. Так как $A_0 = A_h = 0$, то $A_{h+1}A_{h-1}A_{1-h} \neq 0$ по определению h . Значит, $A_{nh} = 0$. Поэтому $A_{jh} = 0$ при $j = 1, 2, \dots$

Аналогичным образом доказывается, что $A_{jh} = 0$ при $j = -1, -2, \dots$. Значит, $Z_A = \{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}$ согласно определению h . $\square$

Лемма 3. Пусть $a \neq 0$, $bc = 0$, причем

не более чем один элемент из $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3$ равен нулю. (7)

Тогда $Z_A = \emptyset$.

Доказательство. Согласно (5)

$$\begin{aligned} aA_{n+2}A_{n-2} &= -bA_{n+1}A_{n-1} && \text{при } c = 0, b \neq 0, \\ aA_{n+2}A_{n-2} &= -cA_n^2 && \text{при } c \neq 0, b = 0, \\ A_{n+2}A_{n-2} &= 0 && \text{при } c = b = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последний случай невозможен из-за условия (7). Если только один коэффициент из b, c равен нулю, то согласно (8) и условию (7) среди элементов $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3$ нет нулей. Тогда все другие члены последовательности находятся по соответствующей формуле из (8) и также являются ненулевыми. $\square$

Восстановление последовательности A по начальным данным.

Определение. Набор из восьми элементов $A_{-3}, \dots, A_4$ будем называть *расширенными начальными данными*.

Из леммы 1 вытекает равенство

$$D_A \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n+3}A_{n-3} & A_{n+1}A_{n-1} & A_n^2 \\ A_4A_{-2} & A_2A_0 & A_1^2 \\ A_3A_{-3} & A_1A_{-1} & A_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$aA_{n+3}A_{n-3} + \tilde{b}A_{n+1}A_{n-1} + \tilde{c}A_n^2 = 0, \quad (9)$$

где

$$\tilde{b} = - \begin{vmatrix} A_4A_{-2} & A_1^2 \\ A_3A_{-3} & A_0^2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{vmatrix} A_4A_{-2} & A_2A_0 \\ A_3A_{-3} & A_1A_{-1} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления $\tilde{b}, \tilde{c}$, a , b , c достаточно знать расширенные начальные данные.

Лемма 4. Пусть $a \neq 0$ и выполняется условие (7). Тогда последовательность A однозначно находится по расширенным начальным данным с помощью формул

$$A_{n+4} = \begin{cases} -\frac{bA_{n+3}A_{n+1} + cA_{n+2}^2}{aA_n} & \text{при } A_n \neq 0 \\ \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}} \frac{A_{n+2}A_{n+1}}{A_{n-1}} & \text{при } A_n = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

$$A_{n-1} = \begin{cases} -\frac{bA_nA_{n+2} + cA_{n+1}^2}{aA_{n+3}} & \text{при } A_{n+3} \neq 0, \\ \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}} \frac{A_{n+2}A_{n+1}}{A_{n+4}} & \text{при } A_{n+3} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство. Если $A_n = 0$ ($A_{n+3} = 0$), то $A_{n-1} \neq 0$ ($A_{n+4} \neq 0$) согласно леммам 2, 3. Кроме того, $b \neq 0$, если последовательность A имеет нулевые члены. Поэтому в формулах (10), (11) деления на ноль не происходит.

Если $A_n \neq 0$ ($A_{n+3} \neq 0$), то формула (10) (формула (11)) получается из (5) путем замены n на $n + 2$ (n на $n + 1$).

Докажем (10) при $A_n = 0$. В этом случае $A_{n+2} \neq 0$. Кроме того, согласно (5), (9)

$$aA_{n+2}A_{n-2} + bA_{n+1}A_{n-1} = 0, \quad aA_{n+4}A_{n-2} + \tilde{c}A_{n+1}^2 = 0.$$

Выражая из предпоследнего соотношения A_{n-2} и подставляя полученное значение в последнее соотношение, получаем

$$A_{n-2} = -\frac{bA_{n+1}A_{n-1}}{aA_{n+2}}, \quad -b\frac{A_{n+4}A_{n+1}A_{n-1}}{A_{n+2}} + \tilde{c}A_{n+1}^2 = 0.$$

Из последней формулы вытекает (10).

Докажем (11) при $A_{n+3} = 0$. В этом случае $A_{n+1} \neq 0$. Кроме того, согласно (5), (9)

$$aA_{n+5}A_{n+1} + bA_{n+4}A_{n+2} = 0, \quad aA_{n+5}A_{n-1} + \tilde{c}A_{n+2}^2 = 0.$$

Выражая из предпоследнего соотношения A_{n+5} и подставляя полученное значение в последнее соотношение, получаем

$$A_{n+5} = -\frac{bA_{n+4}A_{n+2}}{aA_{n+1}}, \quad -b\frac{A_{n+4}A_{n+2}A_{n-1}}{A_{n+1}} + \tilde{c}A_{n+2}^2 = 0.$$

Из последней формулы вытекает (11). □

Замечание 3. Пусть нам известен набор из шести элементов (6). Тогда мы можем найти a, b, c и вычислить A_4 при $A_0 \neq 0$, а также A_{-3} при $A_1 \neq 0$, используя формулу (5). Таким образом, при $A_0A_1 \neq 0$ для нахождения всей последовательности достаточно знать начальные данные (6). Однако если $A_0A_1 = 0$, то начальных данных (6) может быть недостаточно для однозначного восстановления всей последовательности (см. [10]).

Следствие 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ — конечное и состоит из r элементов. Пусть $a \neq 0$ и выполняется условие (7). Тогда последовательность A имеет период $\leq r^5$.

Доказательство. Согласно (10) существует функция $f: \mathbb{F}^5 \rightarrow \mathbb{F}$ такая, что

$$A_{n+4} = f(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}).$$

Требуемое утверждение вытекает из элементарных свойств рекуррентных последовательностей с элементами из конечного множества. □

Замечание 4. По-видимому, период последовательности A не больше, чем r^4 . Если, например, A_n не содержит нулевых членов, то это следует из формулы (10).

Алгоритм «быстрого» вычисления элементов последовательности A . Из леммы 1 вытекает равенство

$$D_A \begin{pmatrix} n+m & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n+2m}A_n & A_{n+m+1}A_{n+m-1} & A_{n+m}^2 \\ A_{1+m}A_{1-m} & A_2A_0 & A_1^2 \\ A_mA_{-m} & A_1A_{-1} & A_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель из этого равенства по первой строке, получаем формулу

$$A_{n+2m} = \frac{1}{aA_n} P(-m, -m+1, m, m+1, n+m-1, n+m, n+m+1), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P(-m, -m+1, m, m+1, n+m-1, n+m, n+m+1) = \\ = A_{n+m+1}A_{n+m-1} \begin{vmatrix} A_{1+m}A_{1-m} & A_1^2 \\ A_mA_{-m} & A_0^2 \end{vmatrix} - A_{n+m}^2 \begin{vmatrix} A_{1+m}A_{1-m} & A_2A_0 \\ A_mA_{-m} & A_1A_{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заменяя в (12) n на $n+1$, получаем еще одну формулу

$$A_{n+2m+1} = \frac{1}{aA_{n+1}} P(-m, -m+1, m, m+1, n+m, n+m+1, n+m+2). \quad (13)$$

Определение. Для любого целого n набор $S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$ будем называть *состоянием*.

Лемма 5. Пусть $a \neq 0$ и выполняется условие (7). Зная расширенные начальные данные, состояния $S(n), S(n+k)$ и $S(\pm k)$, а также номер $k \in \mathbb{Z}$ (номер n неизвестен) можно вычислить состояние $S(n+2k)$, используя $O(1)$ элементарных операций в поле $\mathbb{F}$.

Доказательство. Если $k = \pm 1$, то достаточно использовать одну из формул (10), (11). Пусть $|k| \geq 2$. Нам известны элементы последовательности A с номерами

$$\begin{array}{cccc} n-1, & n, & n+1, & n+2, \\ n+k-1, & n+k, & n+k+1, & n+k+2, \\ \pm k-1, & \pm k, & \pm k+1, & \pm k+2. \end{array}$$

Нужно найти элементы с номерами $n+2k-1, n+2k, n+2k+1, n+2k+2$.

1. Пусть $A_n A_{n+1} \neq 0$. Тогда, используя (12) при $m = k, k+1$, а также (13) при $m = k-1, k$, находим требуемые четыре элемента.

2. Пусть $A_n = 0$. Тогда $A_{n+1}A_{n+2} \neq 0$ согласно лемме 3. Элементы A_{n+2k-1} и A_{n+2k+1} вычисляются по формуле (13), в которой $m = k-1$ и $m = k$ соответственно. Осталось найти A_{n+2k} и A_{n+2k+2} . Используя формулу (10) при $k > 0$ и (11) при $k < 0$, вычисляем A_{n+k+2} . Заменяя в (12) n на $n+2$, получаем соотношение

$$A_{n+2m+2} = \frac{1}{aA_{n+2}} P(-m, -m+1, m, m+1, n+m+1, n+m+1, n+m+2).$$

Из него при $m = k-1$ и $m = k$ находим элементы A_{n+2k} и A_{n+2k+2} .

3. Случай, когда $A_{n+1} = 0$ рассматривается аналогично предыдущему. $\square$

На основании леммы 5 стандартным образом¹ строится алгоритм «быстрого» вычисления $S(n+m)$ при заданных $S(n)$ и m (и неизвестном n). Ограничимся случаем положительного m . Пусть $m = (\varepsilon_{s-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2$ — представление натурального m в двоичной системе исчисления, то есть

$$m = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \dots + 2^{s-1}\varepsilon_{s-1}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{s-2} \in \{0, 1\}$, а $\varepsilon_{s-1} = 1$. Определим $m_1, m_2, \dots, m_{s-1}$ по формулам

$$m_1 = 1, \quad m_{j+1} = 2m_j + \varepsilon_{s-1-j}, \quad j = 1, \dots, s-1.$$

Тогда $m_s = m$.

Алгоритм 1.

Данные: начальные элементы $A_{-3}, \dots, A_4$, номер $m = (\varepsilon_{s-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2 \in \mathbb{N}$ и состояние $S(n)$ (номер n неизвестен).

Найти: состояние $S(n+m)$.

- 1) Полагаем $j = 1$, $m_1 = 1$ и вычисляем $S(n \pm 1)$.
- 2) Вычисляем $S(\pm 2m_j)$ и $S(n + 2m_j)$.
- 3) Если $\varepsilon_{s-j-1} = 0$, то полагаем $m_{j+1} = 2m_j$ и вычисляем

$$S(\pm m_{j+1}) = S(\pm 2m_j), \quad S(n + m_{j+1}) = S(n + 2m_j).$$

- 4) Если $\varepsilon_{s-j-1} = 1$, то полагаем $m_{j+1} = 2m_j + 1$ и вычисляем

$$S(\pm m_{j+1}) = S(\pm(2m_j + 1)), \quad S(n + m_{j+1}) = S((n + 2m_j) + 1).$$

- 5) Если $j < s-1$, то увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 2.
- 6) Полагаем $S(n+m) = S(n + m_{j+1})$. Конец.

Количество шагов 2)–4) равно $s-1 = O(\log m)$. Поэтому из леммы 5 вытекает

Следствие 2. Сложность алгоритма 1 не больше, чем сложность выполнения $O(\log m)$ элементарных операций в поле $\mathbb{F}$.

5. Построение криптосистем с помощью полугиперэллиптических последовательностей

В этом параграфе считаем, что $\mathbb{F}$ — конечное поле, $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{F}$, $R_0(A) = 2$. Предполагаем, что расширенные начальные данные $A_{-3}, \dots, A_4$ находятся в открытом доступе.

¹по аналогии, например, с алгоритмом быстрого возведения в степень

Аналог алгоритма Диффи – Хеллмана. Абоненты B_1, B_2 , вырабатывают общий секретный ключ $K \in \mathbb{F}^4$, используя следующий алгоритм.

- 1) Абонент B_1 выбирает $k_1 \in \mathbb{Z}$, вычисляет $S(k_1)$, используя алгоритм 1, и посылает абоненту B_2 сообщение $S(k_1)$ (номер k_1 хранится в секрете).
- 2) Абонент B_2 выбирает $k_2 \in \mathbb{Z}$, вычисляет $S(k_2)$ и посылает абоненту B_1 сообщение $S(k_2)$ (номер k_2 хранится в секрете).
- 3) Абонент B_2 (абонент B_1), зная номер k_2 (номер k_1) и состояние $S(k_1)$ (состояние $S(k_2)$), вычисляет $S(k_1 + k_2)$, используя алгоритм 1.

Общим секретом является $K = S(k_1 + k_2)$.

Пассивный противник знает состояния $S(k_1)$ и $S(k_2)$. Для того чтобы найти секретный ключ $S(k_1 + k_2)$, ему достаточно определить номер k_1 (или номер k_2). Для этого нужно решить задачу определения номера k по заданному элементу $S(k)$. Она представляет собой задачу дискретного логарифмирования в группе $(S, +)$, где множество S состоит из четверок вида

$$S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

а $S(n) + S(m) = S(n + m)$.

Алгоритм шифрования (аналог алгоритма Эль-Гамала на эллиптической кривой). Пусть целое число n — это *общий параметр* всех пользователей. *Секретным ключом абонента В* является некое целое k , а *открытым ключом* — состояние $S(k)$.

Алгоритм шифрования сообщения $x = x_{-1}x_0x_1x_2 \in \mathbb{F}^4$, отправляемого абоненту В.

- 1) Выбираем сеансовый ключ $r \in \mathbb{Z}$.
- 2) Вычисляем состояния $S(n + r)$ и $S(n + k + r)$. Для этого можно использовать алгоритм 1, так как нам известны номера r, n и состояние $S(k)$.
- 3) Вычисляем $y = y_{-1}y_0y_1y_2 \in \mathbb{F}^4$ по формулам:

$$y_j = x_j \cdot A_{n+k+r+j}, \quad j = -1, 0, 1, 2.$$

- 4) Высылаем абоненту В шифртекст $(S(n + r), y)$.

Алгоритм расшифрования шифртекста $(S(n + r), y)$ абонентом В.

- 1) Абонент В вычисляет $S(n + k + r)$, используя алгоритм 1 (напомним, что В знает состояние $S(n + r)$ и номер k).
- 2) Находит открытый текст $x = x_{-1}x_0x_1x_2$ по формулам

$$x_j = y_j \cdot A_{n+k+r+j}^{-1}, \quad j = -1, 0, 1, 2.$$

Корректность алгоритма расшифровки очевидна.

Замечание 5. Аналогичным образом можно построить алгоритм электронный цифровой подписи (наподобие ГОСТ 34.10-2012), использующий полугиперэллиптические последовательности вместо группы точек на эллиптической кривой.

6. Заключение

В настоящей работе были рассмотрены только последовательности с $R_0(A) = 2$. Можно разработать криптографические алгоритмы, использующие последовательности более высокого 0-ранга, а также последовательности небольших конечных 1-рангов (последовательности, удовлетворяющие разложению вида (2)). Основная (и, возможно, единственная) проблема заключается в выяснении взаимного расположения нулевых элементов. Отметим, что даже в случае $R_0(A) = 2$ ряд важных вопросов остается нерешенным. Отметим некоторые из них.

1. Криптостойкость описанных в предыдущем разделе алгоритмов зависит от периода последовательности A . Поэтому очень важен вопрос о разработке алгоритмов вычисления искомого периода (аналог задачи о вычислении порядка группы точек эллиптической кривой над конечным полем), а также о способах построения полугиперэллиптических последовательностей, имеющих большой период.

2. Существует довольно мало примеров полугиперэллиптических последовательностей в конечных полях (см. § 3). Этот пробел можно было бы восполнить путем получения результатов следующего вида: для любых $a_{-2}, a_{-1}, \dots, a_3 \in \mathbb{F}$ существует последовательность $A_n \in \mathbb{F}$ такая, что

$$R_0(A) \leq 2, \quad A_j = a_j, \quad j = -2, -1, \dots, 3.$$

3. В [3] описаны все последовательности комплексных чисел, удовлетворяющие условию $R_0(A) + R_1(A) \leq 4$. Все неэлементарные случаи с точностью до некоторых простых преобразований имеют вид $A_n = \sigma(nu + v)$, где $u, v \in \mathbb{C}$, а σ — сигма-функция Вейерштрасса. Возникает вопрос об аналогичном описании множества всех (полу)гиперэллиптических систем в произвольном поле или хотя бы в поле вычетов $\mathbb{Z}_p$ по простому модулю p .

Список литературы

- [1] Richard Schroeppel, Hilarie Orman, R. Wm. Gosper, “Somos Sequences and Cryptographic Applications”, 2017, <https://www.osti.gov/servlets/purl/1483215>.
- [2] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.
- [3] А. А. Илларионов, “Гиперэллиптические системы последовательностей ранга 4”, *Матем. сб.*, **210**:9, (2019), 59–88.
- [4] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:4, (2016), 43–54.
- [5] А. В. Устинов, “Элементарный подход к изучению последовательностей Сомоса”, *Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, т. 305, МАИК, М., 2019.
- [6] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.
- [7] A. N. Hone, C. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **145**:1, (2008), 65–85.

-
- [8] A. N. Hone, “Analytic solutions and integrability for bilinear recurrences of order six”, *Applicable Analysis: An International Journal*, **89**:4, (2010), 473–492.
- [9] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “О лорановости последовательностей Сомос-4 и Сомос-5”, *Функц. анализ и его прил.*, **53**:3, (2019), 79–83.
- [10] А. А. Илларионов, “О последовательности Сомос-4”, *Дальневост. матем. журн.*, **18**:2, (2018), 183–188.
- [11] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел*, Тр. МИАН, т. 299, 2017, 105–117.

Поступила в редакцию

Illarionov A. A. Asymmetric cryptography and hyperelliptic sequences. Far Eastern Mathematical Journal. 2019. V. 19. No 2. P. 1–12.

ABSTRACT

We study sequences $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ of elements of a field $\mathbb{F}$ that satisfy decompositions of the form

$$A_{m+n}A_{m-n} = a_1(m)b_1(n) + a_2(m)b_2(n),$$

where $a_1, a_2, b_1, b_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$. The results are used to build analogues of the Diffie – Hellman and El-Gamal algorithms. The discrete logarithm problem is posed in the group $(S, +)$, where the set S consists of fours $S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$, $n \in \mathbb{Z}$, and $S(n) + S(m) = S(n + m)$.

Key words: *hyperelliptic sequences, nonlinear recurrence sequences, asymmetric cryptography.*

УДК 517.965, 517.583
MSC2010 39B32, 33E05

© А. А. Илларионов^{1,2}, Н. В. Маркова^{2,1}

Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. III

Решается функциональное уравнение

$$f_1(x_1 + z) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_1, \dots, x_{s-1}) \psi_j(z),$$

относительно неизвестных функций $f_1, \dots, f_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_j : \mathbb{C}^{s-1} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ в случаях, когда $s \geq 3$, а $m \leq 2s - 1$. Все неэлементарные решения имеют вид:

$$f_j(z) = \sigma(z + z_j) \exp(\alpha z^2 + \beta_j z + \gamma_j),$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса, а $z_j, \alpha, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{C}$. Ранее такие результаты были известны при $m \leq s + 1$. Рассматриваемое уравнение возникает при изучении полилинейных функционально-дифференциальных операторов и векторных теорем сложения.

Ключевые слова: *теоремы сложения, функциональные уравнения, сигма-функция Вейерштрасса, тета-функция, эллиптические функции.*

1. Введение

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f_1(x_1 + z) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_1, \dots, x_{s-1}) \psi_j(z) \quad (1)$$

относительно неизвестных целых функций $f_1, \dots, f_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m : \mathbb{C}^{s-1} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_1, \dots, \psi_m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Оно возникает при исследовании полилинейных функционально-дифференциальных уравнений и многомерных векторных теорем сложения (см. [1]–[3]). Уравнение (1) исследовалось в [4–13]. Его общее решение известно при

¹ Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.

² Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: illar_a@list.ru (А. А. Илларионов), nata_mark@mail.ru (Н. В. Маркова).

- 1) $m \leq s + 1$ (см. [4] при $s = m = 2$, [8] при $s = m = 3$, [10] при $m \leq s + 1$, $s = 2, 3$ и [13] во всех остальных случаях);
- 2) $m \leq 4s - 5$, $f_1 = f_2 = \dots = f_s$ (см. [12]);
- 3) $s = 2$, $m = 4$, $f_1 = f_2$ — периодическая функция (см. [14]).

В настоящей работе мы уточняем результаты [10, 13] и решаем уравнение (1) при $m \leq 2s - 1$.

Определение. Набор $(f_1, \dots, f_s)$, состоящий из целых не равных тождественно нулю функций, будем называть *решением функционального уравнения (1)*, если он удовлетворяет разложению (1) вместе с некоторыми функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_m : \mathbb{C}^{s-1} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_1, \dots, \psi_m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и минимально возможным $m \in \mathbb{N}$.

Нетрудно заметить, что любой набор $(Q_1, \dots, Q_s)$, состоящий из квазимногочленов, является решением уравнения (1) при некотором m .

Определение. Решение уравнения (1) будем называть *элементарным*, если оно имеет вид $(f_1, \dots, f_s)$, где $f_j(z) = Q_j(z)e^{\alpha_j z^2}$, где Q_j — квазимногочлены, а $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Основной результат настоящей работы заключается в следующем.

Теорема 1. Пусть $s \geq 3$ и $m \leq 2s - 1$. Тогда любое неэлементарное решение уравнения (1) имеет вид

$$f_j(z) = \sigma(z + z_j) \cdot e^{\alpha z^2 + \beta_j z + \gamma_j}, \quad j = \overline{1, s},$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с некоторой невырожденной решеткой, а $\alpha, \beta_j, \gamma_j, z_j$ — некоторые комплексные постоянные.

Замечание. Набор функций, указанный в теореме 1, является решением уравнения (1) при $m = s$ (см. [12, следствие 1] или [13, § 4]). Таким образом, уравнение (1) имеет только элементарные решения при $m \in \{1, \dots, 2s - 1\} \setminus \{s\}$. При $m = 2s$ неэлементарными решениями являются, например, $(\sigma', \sigma, \dots, \sigma)$, $(\sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2)$.

2. Вспомогательные сведения

Под решеткой L будем понимать дискретную аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$, т.е. множество одного из следующих трех видов

$$L = \{0\}, \quad L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}, \quad L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ω_1, ω_2 — линейно независимые над $\mathbb{R}$ комплексные числа. Решетки первых двух типов называют вырожденными.

Сигма-функция Вейерштрасса $\sigma_L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ассоциированная с решеткой L , определяется произведением

$$\sigma_L(z) = z \cdot \prod_{l \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{l}\right)^2\right).$$

При этом (в вырожденных случаях) $\sigma_L(z) = z$, если $L = \{0\}$ и

$$\sigma_L(z) = \frac{\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{26} \left(\frac{\pi z}{\omega}\right)^2\right), \text{ если } L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Функция σ_L — нечетная и целая (голоморфная на всем $\mathbb{C}$). Все ее нули простые и расположены в точках решетки L .

Пусть $f_1, \dots, f_s, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, причем набор $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ получен из набора $(f_1, \dots, f_s)$ путем применения композиции преобразований следующих четырех видов:

- 1) $(f_1, \dots, f_{s-1}, f_s) \rightarrow (f_{k_1}, \dots, f_{k_{s-1}}, f_s)$, где $(k_1, \dots, k_{s-1})$ — перестановка из $\{1, \dots, s-1\}$;
- 2) $(f_1, \dots, f_s) \rightarrow (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_s)$, где $\hat{f}_j(z) = f_j(z + z_j)$, $z_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, s}$;
- 3) $(f_1, \dots, f_s) \rightarrow (f_1 e^{L_1}, \dots, f_s e^{L_s})$, где $L_j(z) = \beta_j + \gamma_j$, $j = \overline{1, s}$;
- 4) $(f_1, \dots, f_s) \rightarrow (f_1 e^Q, \dots, f_s e^Q)$, где $Q(z) = e^{\alpha z^2}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что наборы $(f_1, \dots, f_s)$, $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ могут быть решениями уравнения (1) только одновременно.

Определение. Будем называть решения $(f_1, \dots, f_s)$ и $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ уравнения (1) *эквивалентными* и писать $(f_1, \dots, f_s) \sim (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$, если одно из них получено из другого путем применения композиции преобразований указанных выше четырех видов.

Определение. Пишем $R_s(f_1, \dots, f_s) = m_0$, если $(f_1, \dots, f_s)$ — решение уравнения (1) при $m = m_0$.

Лемма 1. Пусть $(f_1, \dots, f_s)$ — решение уравнения (1). Тогда

- а) функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, $\psi_1, \dots, \psi_m$ из разложения (1) являются целыми;
- б) системы функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ линейно независимы.

Доказательство. Утверждение а) при $s = 2$ доказано в [8]. Приведенное там доказательство легко распространяется и на случай произвольного s . Утверждение б) вытекает из определения решения. $\square$

Лемма 2 ([13, лемма 13]). Если $R_s(f_1, \dots, f_s) = m \in \mathbb{N}$, то существуют такие $c_1, c_2 \in (0, +\infty)$, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f_j(z)| \leq e^{c_1|z|^2 + c_2}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Лемма 3 ([10, замечание 3.3]). Пусть $R_2(f, g) \leq 3$, причем f и g имеют нули. Тогда $g(z) = f(z + z_0)e^{\beta z + \gamma}$, где $z_0, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Лемма 4. Пусть $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ — базис решетки $L \subset \mathbb{C}$, а f — целая функция, причем $f(0) = 0$ и $f \neq 0$. Пусть существуют постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ такие, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$f(z)\sigma_L(z) = C_j f(z + 2\omega_j)\sigma_L(z - 2\omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Тогда найдутся такие $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, что $f(z) = \sigma_L(z)e^{\beta z + \gamma}$.

Доказательство. Согласно свойству квазипериодичности

$$\sigma_L(z - 2\omega_j) = -e^{2\eta_j(-z+\omega_j)}\sigma_L(z), \text{ где } \eta_j = \left. \frac{\partial}{\partial z} \log \sigma_L(z) \right|_{z=\omega_j}, \quad j = 1, 2.$$

Поэтому

$$f(z + 2\omega_j) = -\frac{e^{2\eta_j z}}{C_j e^{\eta_j \omega_j}} f(z).$$

Отсюда согласно известным свойствам двояко квазипериодических функций вытекает утверждение леммы. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $s \geq 3$, $R_s(f_1, \dots, f_s) = m$. Выбирая в (1) $x_1 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} f_1(z)f_2(x_2 + z) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z)f_s(x_2 + \dots + x_{s-1} - z) = \\ = \sum_{j=1}^m \varphi_j(0, x_2, \dots, x_{s-1})\psi_j(z). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что

$$R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) \leq \text{rank}\{\varphi_j(0, x_2, \dots, x_{s-1})\}_{j=1}^m, \quad (3)$$

где rank – ранг соответствующей системы функций.

Лемма 5. Если $l \in \{1, \dots, s-1\}$, функция f_l имеет нуль кратности k , то

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) \leq R_s(f_1, f_2, \dots, f_s) - k. \quad (4)$$

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $l = 1$ и точка $z = 0$ является нулем кратности k функции f_1 . В противном случае нужно перейти к рассмотрению эквивалентного решения, удовлетворяющего этим условиям.

Пусть $R_s(f_1, \dots, f_s) = m$, а φ_j, ψ_j – функции из разложения (1). Для краткости, положим

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad \vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_m), \quad \vec{\varphi} \cdot \vec{\psi} = \varphi_1\psi_1 + \dots + \varphi_m\psi_m.$$

1. Докажем, что система векторов $\{\vec{\psi}^{(l)}(0)\}_{l=0}^{k-1}$ линейно независима. Действительно, пусть $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$, причем

$$c_0\vec{\psi}(0) + c_1\vec{\psi}'(0) + \dots + c_{k-1}\vec{\psi}^{(k-1)}(0) = 0.$$

Тогда из (1) вытекает равенство

$$\sum_{l=0}^{k-1} c_l \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(f_1(x_1 + z) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - z) \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

Предположим, что не все коэффициенты из $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ равны нулю. Пусть q – наибольший номер такой, что $c_q \neq 0$. Дифференцируя (5) $(k-q)$ раз по q и подставляя $x_1 = 0$, получаем

$$c_q f_1^{(k)}(0) f_2(x_2) \dots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_2 + \dots + x_{s-1}) = 0.$$

Т.к. $f_1^{(k)}(0) \neq 0$, то пришли к противоречию. Значит, $c_j = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, система $\{\vec{\psi}^{(l)}(0)\}_{l=0}^{k-1}$ линейно независима.

2. Дифференцируя уравнение (2) l раз по z и полагая $z=0$, имеем

$$\vec{\varphi}(0, x_2, \dots, x_{s-1}) \cdot \vec{\psi}^{(l)}(0), \quad l = \overline{0, k-1}.$$

Т.к. векторы $\vec{\psi}^{(l)}(0)$ линейно независимы, то $\text{rank}\{\varphi_j(0, x_2, \dots, x_{s-1})\}_{j=1}^m \leq m - k$. Используя (3), приходим к (4). $\square$

Для любой функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определим множество ее нулей:

$$Z(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0\}.$$

Лемма 6. *Предположим, что $R_s(f_1, \dots, f_s) = m$, $f_j(0) = 0$ при $j = 1, \dots, s$. Пусть $l \in \{1, \dots, s-1\}$, причем*

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) = m - 1.$$

Тогда

а) для любого $z_0 \in Z(f_l)$ существует такая постоянная $C \in \mathbb{C}$, что для всех комплексных $x_1, \dots, x_{s-1}$

$$\begin{aligned} f_1(x_1) \dots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1}) = \\ = C f_1(x_1 + z_0) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z_0) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - z_0); \end{aligned} \quad (6)$$

б) существует решетка $L \subset \mathbb{C}$ и постоянные α, β, γ такие, что

$$f_l(z) = \sigma_L(z) \cdot e^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma};$$

в) для любого j справедливо вложение: $L \subset Z(f_j)$.

Доказательство. Не умаляя общности, ограничимся случаем $l = 1$.

Докажем утверждение а). Возьмем любой $z_0 \in Z(f_1)$. Выбирая в (2) $z = 0$ и $z = z_0$, получаем равенства

$$\vec{\varphi}(0, x_2, \dots, x_{s-1}) \vec{\psi}(0) = 0, \quad \vec{\varphi}(0, x_2, \dots, x_{s-1}) \vec{\psi}(z_0) = 0.$$

Так как $R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) = m - 1$, то векторы $\vec{\psi}(0), \vec{\psi}(z_0)$ линейно зависимы в силу неравенства (3). Значит, существует постоянная $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такая, что $\vec{\psi}(0) = C \vec{\psi}(z_0)$. Согласно (1)

$$\begin{aligned} f_1(x_1) \dots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1}) &= \vec{\varphi}(0, x_2, \dots, x_{s-1}) \vec{\psi}(0), \\ f_1(x_1 + z_0) \dots f_{s-1}(x_{s-1} + z_0) f_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - z_0) &= \vec{\varphi}(0, x_2, \dots, x_{s-1}) \vec{\psi}(z_0). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (6).

Докажем утверждение б). Возьмем любой $z_1 \in Z(f_1)$. Подставляя в (6) $x_1 = z_1 - z_0$, заключаем, что $f_1(z_1 - z_0) = 0$, т.е. $z_1 - z_0 \in Z(f_1)$. Поэтому $Z(f_1)$ – подгруппа группы $(\mathbb{C}, +)$. Следовательно, $Z(f_1)$ – решетка. Так как $R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) = m - 1$, то согласно лемме 5 все нули функции f_1 простые. Значит, функции f_1 и σ_L (где $L = Z(f_1)$) имеют одинаковые множества нулей. Используя лемму 2, заключаем, что

$$f_1(z) = \sigma_L(z) e^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}.$$

Докажем утверждение в). Возьмем любой $j \in \{2, \dots, s-1\}$ и $z_0 \in L$. Полагая в (6) $x_j = 0$, приходим к выводу, что $f_j(z_0) = 0$. Следовательно, $L \subset Z(f_j)$, $j = \overline{1, s-1}$. Выбирая в (6) $x_1 + \dots + x_{s-1} = 0$, получаем $f_s(-z_0) = 0$. Поэтому $-L \subset Z(f_s)$. Так как $-L = L$, то $L \subset Z(f_s)$. $\square$

Лемма 7. Пусть $s = 3$ и $m \leq 5$. Тогда любое неэлементарное решение уравнения (1) эквивалентно набору (σ, σ, σ) , где σ – сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с некоторой невырожденной решеткой.

Доказательство. Случай $m \leq 4$ рассмотрен в [10]. Пусть $m = 5$.

Так как решение (f_1, f_2, f_3) не является элементарным, то функции f_1, f_2, f_3 имеют нули (см., например, [10]). Не умаляя общности, будем считать, что $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$ (иначе нужно перейти к рассмотрению эквивалентного решения, удовлетворяющему этому условию). Согласно лемме 5 $R_2(f_1, f_3) \leq 4$, $R_2(f_2, f_3) \leq 4$. Поэтому возможны следующие четыре случая.

1. Пусть $R_2(f_1, f_3) \leq 3$, $R_2(f_2, f_3) \leq 3$. Тогда $(f_1, f_2, f_3) \sim (f_1, f_1, f_1)$ согласно лемме 3. Требуемый результат вытекает из [12, лемма 8].

2. Пусть $R_2(f_1, f_3) \leq 3$, $R_2(f_2, f_3) = 4$. Так как $R_2(f_1, f_3) \leq 3$, то $(f_1, f_2, f_3) \sim (f, f_2, f)$ согласно лемме 3. Поскольку $R_2(f_2, f_3) = R_2(f_2, f) = 4$, по лемме 6 б) существует такая решетка $L \subset \mathbb{C}$, что

$$(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \hat{f}_2, \sigma_L).$$

Так как решение $(\sigma_L, \hat{f}_2, \sigma_L)$ не элементарное, то решетка L невырожденная. Пусть $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ – ее базис. Согласно лемме 6 из условий $R_2(\hat{f}_2, \sigma_L) = 4$, $\sigma_L(2\omega_j) = 0$, $j = 1, 2$ вытекает, что найдутся постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sigma_L(x) f_2(y) \sigma_L(x+y) = C_j \sigma_L(x+2\omega_j) f_2(y+2\omega_j) \sigma_L(x+y-2\omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Дифференцируя их по x и полагая $x = -y$, получаем

$$-\sigma_L(y) f_2(y) \sigma'_L(0) = C_j \sigma_L(2\omega_j - y) f_2(y+2\omega_j) \sigma'_L(-2\omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Из последнего равенства и леммы 4 следует, что $f_2(z) = e^{\beta z + \gamma} \sigma_L(z)$. Поэтому

$$(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \sigma_L, \sigma_L).$$

3. Случай $R_2(f_1, f_3) = 4$, $R_2(f_2, f_3) \leq 3$ сводится к предыдущему, поскольку $(f_1, f_2, f_3) \sim (f_2, f_1, f_3)$.

4. Пусть $R_2(f_1, f_3) = 4$, $R_2(f_2, f_3) = 4$. Поскольку $R_2(f_2, f_3) = 4$, применяя лемму 6, получаем, что $(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$, причем

$$\sigma_L(x)\hat{f}_2(y)\hat{f}_3(x+y) = C_j\sigma_L(x+2\omega_j)\hat{f}_2(y+2\omega_j)\hat{f}_3(x+y-2\omega_j), \quad j=1,2, \quad (7)$$

где $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ — базис решетки L , а C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Так как $R_2(\hat{f}_1, \hat{f}_3) = 4$, то согласно леммам 6, 5 точки $z=0$ и $z=2\omega_j$ являются простыми нулями функции $\hat{f}_2$. Поэтому, дифференцируя (7) по y и полагая $y=0$, получаем

$$\hat{f}_2'(0)\sigma_L(x)\hat{f}_3(x) = C_j\hat{f}_2'(2\omega_j)\sigma_L(x+2\omega_j)\hat{f}_3(x-2\omega_j).$$

Из последнего равенства и леммы 4 вытекает формула $\hat{f}_3(z) = e^{\beta_3 z + \gamma_3} \sigma_L(z)$. Поэтому $(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \hat{f}_2, \sigma_L)$. Повторяя приведенные выше рассуждения в которых меняем f_1 и f_2 местами, получаем, что $(f_1, f_2, f_3) \sim (\hat{f}_1, \sigma_L, \sigma_L)$. Значит, $(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \sigma_L, \sigma_L)$. $\square$

Доказательство. [Доказательство теоремы 1.] Нужно доказать, что $(f_1, \dots, f_s) \sim (\sigma, \dots, \sigma)$. Для этого используем метод математической индукции по $s = 3, 4, \dots$

База индукции вытекает из леммы 7.

Шаг индукции от $(s-1)$ к s . Так как решение $(f_1, \dots, f_s)$ неэлементарное, то функции $f_1, \dots, f_s$ имеют нули (см., например, [13]). Не умаляя общности, будем считать, что $f_1(0) = \dots = f_s(0) = 0$, иначе нужно рассмотреть эквивалентное решение, удовлетворяющему этому условию. Согласно лемме 5

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) \leq m-1, \quad l=1, \dots, s-1.$$

Поэтому возможны три случая.

1. Существуют два (разных) номера $l, j \in \{1, \dots, s-1\}$ такие, что

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) \leq m-2, \quad R_{s-1}(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_s) \leq m-2.$$

Так как $m-2 \leq 2(s-1)-1$, то по предположению индукции

$$(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) \sim (\sigma_1, \dots, \sigma_1), \quad (f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_s) \sim (\sigma_2, \dots, \sigma_2),$$

где σ_1, σ_2 — сигма-функции, ассоциированные с некоторыми решетками L_1 и L_2 соответственно. Нетрудно заметить, что $L_1 = L_2$, $(f_1, \dots, f_s) \sim (\sigma_1, \dots, \sigma_1)$.

2. Существует ровно один номер $l \in \{1, \dots, s-1\}$ такой, что

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_s) \leq m-2.$$

Не умаляя общности, считаем, что $l=1$. Тогда

$$R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) \leq 2(s-1)+1, \quad R_{s-1}(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_s) = m-1, \quad j=2, \dots, s-1.$$

Согласно предположению индукции $(f_1, f_2, \dots, f_s) \sim (\hat{f}_1, \sigma_L, \dots, \sigma_L)$. Так как рассматриваемое решение не является элементарным, то решетка L — невырожденная. Пусть

$2\omega_1, 2\omega_2$ — ее базис. Так как $R_{s-1}(f_1, f_3, f_4, \dots, f_s) = m - 1$, то согласно лемме 7 а) существуют такие постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, что

$$\begin{aligned} & \hat{f}_1(x_1)\sigma_L(x_2) \dots \sigma_L(x_{s-1})\sigma_L(x_1 + \dots + x_{s-1}) = \\ & = C_j \hat{f}_1(x_1 + 2\omega_j)\sigma_L(x_2 + 2\omega_j) \dots \sigma_L(x_{s-1} + 2\omega_j)\sigma_L(x_1 + \dots + x_{s-1} - 2\omega_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношение по $x_2, \dots, x_{s-1}$ и полагая $x_2 = \dots = x_{s-1} = 0$, получаем

$$(\sigma'_L(0))^{s-2} \hat{f}_1(x_1)\sigma_L(x_1) = C_j (\sigma'_L(2\omega_j))^{s-2} \hat{f}_1(x_1 + 2\omega_j)\sigma_L(x_1 - 2\omega_j).$$

Применяя лемму 4, заключаем, что $f_1(z) = \sigma_L(z)e^{\beta z + \gamma}$. Поэтому $(f_1, \dots, f_s) \sim (\sigma_L, \dots, \sigma_L)$.

3. Пусть

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_s) = m - 1, \quad j = 1, \dots, s - 1.$$

Докажем, что для всех $l \in \{1, \dots, s - 1\}$ существуют функции $f_{j,l}$ такие, что

$$(f_1, \dots, f_s) \sim (f_{1,l}, \dots, f_{l-1,l}, \sigma_L, f_{l+1,l}, \dots, f_{s-1,l}, \sigma_L). \quad (8)$$

Достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Так как $R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) = m - 1$, то $(f_1, f_2, \dots, f_s) \sim (\sigma_L, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_s)$, где L — некоторая решетка с базисом $2\omega_1, 2\omega_2$. Кроме того, согласно условиям и леммам 5, 7 точки $z = 0$ и $z = 2\omega_j$ являются простыми нулями функций $f_1, \dots, f_{s-1}$, а согласно лемме 7 существуют постоянные C_1, C_2 такие, что

$$\begin{aligned} & \sigma_L(x_1)\hat{f}_2(x_2) \dots \hat{f}_{s-1}(x_{s-1})\hat{f}_s(x_1 + \dots + x_{s-1}) = \\ & = C_j \sigma_L(x_1 + 2\omega_j)\hat{f}_2(x_2 + 2\omega_j) \dots \hat{f}_{s-1}(x_{s-1} + 2\omega_j)\hat{f}_s(x_1 + \dots + x_{s-1} - 2\omega_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношение по $x_2, \dots, x_{s-1}$ и полагая $x_2 = \dots = x_{s-1} = 0$, получаем

$$\left(\hat{f}'_2(0) \dots \hat{f}'_{s-1}(0) \right) \sigma_L(x_1)\hat{f}_s(x_1) = C_j \left(\hat{f}'_2(2\omega_j) \dots \hat{f}'_{s-1}(2\omega_j) \right) \sigma_L(x_1 + 2\omega_j)\hat{f}_s(x_1 - 2\omega_j).$$

Применяя лемму 4, заключаем, что $f_s(z) = \sigma_L(z)e^{\beta z + \gamma}$. Отсюда вытекает свойство (8) при $l = 1$.

Из (8) следует, что $(f_1, \dots, f_s) \sim (\sigma_L, \dots, \sigma_L)$. □

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Трилинейные функциональные уравнения”, *УМН*, **60**:2, (2005), 151–152.
- [2] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых”, *Тр. МИАН*, **251**, (2005), 54–126.
- [3] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана-Шоттки”, *УМН*, **61**:1, (2006), 25–84.
- [4] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.
- [5] M. Bonk, “The addition theorem of Weierstrass’s sigma function”, *Math. Ann.*, **298**:1, (1994), 591–610.

- [6] M. Bonk, “The Characterization of Theta Functions by Functional Equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65**, (1995), 29–55.
- [7] M. Bonk, “The addition formula for theta function”, *Aequationes Math.*, **53**:1–2, (1997), 54–72.
- [8] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:3, (2016), 34–46.
- [9] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4, (2016), 43–54.
- [10] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН*, **299**, (2017), 105–117.
- [11] А. А. Илларионов, М. А. Романов, “Гиперквазимногочлены для тэта-функции”, *Функц. анализ и его прил.*, **52**:3, (2018), 84–87.
- [12] А. А. Илларионов, “О полилинейном функциональном уравнении”, *Матем. заметки*, (в печати).
- [13] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. II”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16**, (2019), 481–492.
- [14] А. А. Илларионов, “Гиперэллиптические системы последовательностей ранга 4”, *Матем. сб.*, **210**:9, (2019), 59–88.

Поступила в редакцию
30 мая 2019 г.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (проект N 18-01-00638)

Illarionov A. A., Markova N. V. Solution of functional equations related to elliptic functions. III. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 197–205.

ABSTRACT

Let $s, m \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. We solve the functional equation

$$f_1(x_1+z) \dots f_{s-1}(x_{s-1}+z) f_s(x_1+\dots+x_{s-1}-z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_1, \dots, x_{s-1}) \psi_j(z),$$

for unknown entire functions $f_1, \dots, f_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_j : \mathbb{C}^{s-1} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in the case of $s \geq 3$, $m \leq 2s - 1$. All non-elementary solutions are described by the Weierstrass sigma-function. Previously, such results were known for $m \leq s + 1$. The considered equation arises in the study of polylinear functional-differential operators and multidimensional vector addition theorems.

Key words: *addition theorem, functional equation, Weierstrass sigma-function, theta function, elliptic function.*

УДК 517.958

MSC2010 35Q20 +35Q60

© Е. О. Коваленко^{1,2}; И. В. Прохоров^{1,2}

Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана

Рассмотрены математические проблемы построения гидролокационных изображений морского дна по данным измерений многолучевого гидролокатора бокового обзора. В рамках модели, основанной на нестационарном уравнении переноса излучения, исследована обратная задача, заключающаяся в нахождении коэффициента донного рассеяния. Предложен новый способ решения обратной задачи в предположении однократного рассеяния и импульсного режима зондирования. Проведен численный анализ качества изображений морского дна в зависимости от числа ракурсов зондирования, ширины диаграммы направленности приемных антенн и уровня объемного рассеяния в среде.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, обратная задача, донное и объемное рассеяние, многолучевое зондирование.*

1. Введение

Изучение глубин Мирового океана и мониторинг прибрежных акваторий на современном этапе развития человеческого общества является несомненно актуальной задачей не только в практическом и геополитическом аспектах, но и с научной точки зрения [1–5]. В этой области много интересных нерешенных задач, требующих как теоретического осмысления, так и разработки новых алгоритмов и программных комплексов для их численного решения. Одним из наиболее перспективных технических средств для организации обзорно-поисковых работ на водных акваториях являются автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА), снаряженные гидролокаторами бокового и кругового обзора. Применение АНПА для мониторинга водных акваторий является экономически выгодным и безопасным для человека [4, 5].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: kovalenko.eo@dvfu.ru (Е. О. Коваленко), prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

В работе рассматриваются проблемы построения и улучшения качества гидролокационных изображений морского дна по данным измерений, полученных с гидролокатора бокового обзора (ГБО), установленного на АНПА. Предполагается, что носитель приемо-передающей антенны, испускающей импульсный сигнал, движется с постоянной скоростью вдоль некоторой прямой. В качестве математической модели используется уравнение переноса высокочастотного акустического излучения [6–9] с граничным условием, описывающим диффузное отражение на донной поверхности [10–14]. Постановка обратной задачи заключается в нахождении коэффициента донного рассеяния при некотором условии переопределения решения уравнения переноса излучения. В рамках приближения однократного рассеяния для нахождения коэффициента диффузного отражения получено интегральное уравнение первого рода, которое для узкой диаграммы направленности приемной антенны имеет явное решение [10, 11]. При увеличении ширины диаграммы направленности применение явной формулы приводит к расфокусированию донных объектов на гидролокационных изображениях. Чтобы преодолеть этот дефект, можно решать интегральное уравнение для искомой функции, например, путем дискретизации непрерывной задачи и сведением ее к решению системы линейных алгебраических уравнений. Однако при традиционном способе зондирования с помощью двух однолучевых гидролокаторов бокового обзора, расположенных по разным бортам АНПА [8–12], мы получаем систему линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. Решение задачи становится чувствительным к ошибкам исходных данных, и, как следствие, приемлемое изображение морского дна даже при слабо зашумленных данных получить невозможно [12].

В последнее время широкое распространение при поисково-обзорных работах с помощью автономных подводных аппаратов получили многолучевые эхолоты [4, 5]. Как правило, многолучевые ГБО применяются для повышения разрешающей способности в направлении, перпендикулярном к траектории движения носителя антенны. Использование ГБО подобного типа позволяет существенно ослабить требования, налагаемые на длительность импульсов, без понижения разрешающей способности ГБО. В настоящей работе мы будем рассматривать несколько иной случай многолучевого сканирования. А именно тот, когда измерения осуществляются многолучевой антенной, принимающей эхолокационный сигнал с различных направлений в плоскости, содержащей прямую линию, вдоль которой движется носитель антенн. Отметим, что аналогичную схему измерения можно реализовать однолучевым локатором путем увеличения количества галсов АНПА, причем число галсов и их расположение зависит от выбранных в схеме сканирования направлений.

2. Прямая и обратная задачи для нестационарного уравнения переноса излучения

Рассматривается нестационарное уравнение переноса излучения [6–19]

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_r + \mu \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} \in G \subset \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной окружности $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c в момент времени t в точке $\mathbf{r}$. Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Область G представляет собой верхнее полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью $\gamma = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 = -l\}$, $l > 0$. Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия [13, 14]

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|_{t < 0} = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}', \quad (\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \Gamma^-. \quad (3)$$

В соотношениях (2), (3) использованы обозначения $I^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} I(\mathbf{y} \pm \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \varepsilon/c)$,

$$\Gamma^\pm = \{(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \gamma \times \Omega_\pm \times (0, T)\}, \quad \Omega_\pm = \{\mathbf{k} \in \Omega : \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G . Условие (2) означает, что излучение в среде в начальный момент времени отсутствует, а краевое условие (3) описывает диффузное отражение на морском дне по закону Ламберта с коэффициентом донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$.

Задача 1. Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных $\mu, \sigma, \sigma_d, J, c$ образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G \times \Omega \times (0, T)$.

Задачу 1 также называют прямой задачей для уравнения переноса излучения. Исследование корректности Задачи 1 и ей подобных проводилось в работах [13–19].

Будем предполагать, что функция J описывает точечный импульсный источник звука, перемещающийся с постоянной скоростью V в направлении оси r_2

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \sum_{i=1}^m \delta(t - t_i), \quad \mathbf{V} = (0, V, 0), \quad t_i > 0, \quad (4)$$

где δ — дельта-функция Дирака. Дополним систему соотношений (1)–(3) условиями

$$\int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_j(t), \quad j = 1, \dots, q, \quad (5)$$

где $S_j(\mathbf{k})$ отлична от нуля в некоторой подобласти $\Omega_j \subset \Omega$, и сформулируем обратную задачу.

Задача 2. Найти функцию $\sigma_d(\mathbf{y})$ из соотношений (1), (2), (3), (5) при заданных $\mu, \sigma, J, c, P_j, S_j$.

Обратная Задача 2 имеет различные физические приложения и возникает, например, при акустическом зондировании морского дна гидролокатором бокового обзора, который движется прямолинейно с постоянной скоростью V и озвучивает

окружающее пространство импульсными сигналами. На носителе расположены антенны, измеряющие суммарную интенсивность $P_j(t)$ в секторе Ω_j в момент времени t . Если $q=2$ и множества $\Omega_1 = \{\mathbf{k} \in \Omega: k_1 < 0\}$, $\Omega_2 = \{\mathbf{k} \in \Omega: k_1 > 0\}$, то мы имеем дело с простейшим случаем гидролокатора бокового обзора — с одной приемной антенной по каждому борту носителя [9].

3. Приближение однократного рассеяния. Вывод основных соотношений

Решение начально-краевой задачи (1)–(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа [8–12]:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \frac{\sigma_d(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \times \\ & \times \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+ \left(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} \right) d\mathbf{k}' + \\ & + \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c} \right) d\mathbf{k}' d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) J \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c} \right) d\tau, \quad (7)$$

$d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = \min\{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}), ct\}$, $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$ — расстояние от точки $\mathbf{r} \in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G . Если $\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k} \notin \partial G$, то второе слагаемое в уравнении (6) отсутствует. Учитывая простое строение области G для функции $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)$ в точках, принадлежащих плоскости $r_3 = 0$, можно выписать явное представление $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = \min\{l/k_3, ct\}$ при $k_3 > 0$ и $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = ct$ при $k_3 \leq 0$. Указанное представление для функции d неоднократно будет использовано в дальнейшем.

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (6) функцию I_0 из (7) и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1)–(3) получим так называемое приближение однократного рассеяния

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t),$$

где

$$\begin{aligned} I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \frac{\sigma_d(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \times \\ & \times \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I_0^+ \left(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} \right) d\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I_0 \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c} \right) d\mathbf{k}' d\tau. \quad (9)$$

Подставляя выражения для I_0 в (8), (9) и обозначая через $\mathbf{y} = \mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}$, получим

$$\begin{aligned}
 I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \\
 &\times \int_0^{d(\mathbf{y}, -\mathbf{k}', t)} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}', \\
 I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{d(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k}, -\mathbf{k}', t-\tau/c)} \exp(-\mu\tau') \times \\
 &\times J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau.
 \end{aligned}$$

Подставляя I_0, I_γ, I_G в (5), получим

$$P_j(t) = P_{j,0}(t) + P_{j,\gamma}(t) + P_{j,G}(t),$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{j,0}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_0^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \\
 P_{j,\gamma}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_\gamma^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \\
 P_{j,G}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_G^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим слагаемое $P_{j,0}(t)$, которое интерпретируется как суммарная мощность нерассеянного сигнала, измеряемого в точке $\mathbf{V}t$

$$\begin{aligned}
 P_{j,0}(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_{\epsilon}^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{G_\epsilon} S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}\right) \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|) J\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}, t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}{c}\right) d\tau d\mathbf{k},
 \end{aligned}$$

где $G_\epsilon = G \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq ct\} \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{V}t| < \epsilon\}$. Из представления (4), определяющего источник излучения, непосредственно вытекает, что носитель функции J не принадлежит множеству G_ϵ , поэтому $P_{j,0}(t) = 0$.

Так как $d(\mathbf{y}, -\mathbf{k}', t) = ct$ при $\mathbf{k}' \in \Omega_+$, то для функции $P_{j,\gamma}(t)$, определяющей вклад отраженного дном излучения, получаем представление

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \\
 &\times \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}' d\mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Проводя замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{V}t - d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})\mathbf{k}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \tau\mathbf{k}'$ и учитывая вид источника J , из соотношения (11) находим

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) &= \int_{\gamma} S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \\
 &\times \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) J \left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{\tau}{c} \right) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^3} \right| d\tau d\mathbf{k}' d\mathbf{y} = \\
 &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|) \int_{B(\mathbf{y}, ct)} \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \right| \times \\
 &\times \exp(-\mu|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{V} \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c} \right) \right) \times \\
 &\times \delta \left(t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c} \right) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^3} \right| d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

Как правило, параметры среды μ, c и периоды зондирования $t_{i+1} - t_i$ таковы, что $\exp(-\mu c|t - t_i|) \ll 1, t \notin (t_i, t_{i+1})$. Это дает основание пренебрегать на текущем интервале приема эхолокационными сигналами из других периодов зондирования. В таком случае в (12) вместо суммы при $t \in (t_i, t_{i+1})$ останется лишь одно i -ое слагаемое.

Разобьем интеграл в (12) по множеству γ на сумму двух интегралов по множеству $\gamma_+ = \{\mathbf{y} \in \gamma : y_1 > 0\}$ и $\gamma_- = \{\mathbf{y} \in \gamma : y_1 < 0\}$ соответственно и в каждом из интегралов осуществим замену переменных интегрирования. Якобиан перехода от переменных

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{V} \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c} \right), \\
 t' &= t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c},
 \end{aligned}$$

к переменным $\mathbf{x}, y_{1,\pm}$ при $\mathbf{x}' = 0, t' = 0$ равен

$$\frac{|y_1|(t - t_i)}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i||\mathbf{V}t - \mathbf{y}|},$$

где

$$|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \frac{V}{c}(Vt - y_2) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (13)$$

$$|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| = \frac{V}{c}(y_2 - Vt) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (14)$$

$$y_{1,\pm} = \pm \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - (Vt - y_2)^2 - l^2}, \quad \text{при } \mathbf{y} \in \gamma_{\pm}. \quad (15)$$

Уравнения (15) описывают в трехмерном пространстве линию, которая является результатом пересечения эллипсоида (с фокусами в точках $\mathbf{V}t$ и $\mathbf{V}t_i$)

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| = c(t - t_i)\} \quad (16)$$

и полуплоскости $\gamma_{\pm}$. Беря во внимание вышесказанное, из (12) получаем

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}_- - \mathbf{V}t_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2} \right| \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} \right| + \right. \\
 & + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}_+ - \mathbf{V}t_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2} \right| \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} \right| \Bigg) \times \\
 & \times \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} + \mathbf{V}t_i|))}{|y_1|(t - t_i)} dy_2,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $\mathbf{y}_{\pm} = (\pm|y_1|, y_2, -l)$ и $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|, |\mathbf{y} - \mathbf{V}t|$ определяются формулами (13), (14).

Так как $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ и справедливо уравнение (16), то из (17) получаем

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) = & \frac{l^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{\pi (t - t_i)} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \right) dy_2}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Возвращаясь к интегрированию по угловой переменной

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} = & (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta) = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \\
 \mathbf{k}_+ = & \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad 0 \leq \varphi < \pi, \quad \mathbf{k}_- = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad \pi \leq \varphi < 2\pi,
 \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = & \frac{c(t - t_i)}{2 \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \\
 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| = & c(t - t_i) \left(1 - \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{2 \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \right), \\
 \mathbf{y}_{\pm} = & \mathbf{V}t - \mathbf{k}_{\pm} |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \mathbf{V}t - \frac{c(t - t_i) \mathbf{k}}{2 \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \\
 dy_2 = & \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| dk_2}{1 - \frac{V}{c} k_2},
 \end{aligned}$$

из (18) получаем

$$P_{j,\gamma}(t) = \frac{l^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{\pi (t - t_i)} \int_{-1}^1 \frac{(S_j(\mathbf{k}_-) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j(\mathbf{k}_+) \sigma_d(\mathbf{y}_+)) dk_2}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)}. \tag{19}$$

Так как $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| + |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = c(t - t_i)$, то для всех $\mathbf{y}$, принадлежащих поверхности γ , выполнены неравенства $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| \geq l, |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| \geq l$, поэтому формула (19) справедлива только при $t > t_i + 2l/c$.

По аналогии с вышеприведенными для функции $P_{j,\gamma}(t)$ выкладками упростим выражение (10) для объемного рассеяния $P_{j,G}(t)$

$$\begin{aligned} P_{j,G}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_0^{d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{d(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}, -\mathbf{k}', t - \tau/c)} \exp(-\mu\tau') \times \\ &\quad \times J\left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau d\mathbf{k} = \\ &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_0^{\infty} \chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}) \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \chi_{G'}(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}') \exp(-\mu\tau') \times \\ &\quad \times J\left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau d\mathbf{k}, \end{aligned}$$

где $\chi_{G_t}(\mathbf{r})$ — характеристическая функция области $G_t = G \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq ct\}$ и $\chi_{G'}(\mathbf{r})$ — характеристическая функция области $G' = G \cap \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}'| \leq ct - \tau\}$.

В результате двух последовательных замен $\mathbf{x} = \mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \tau'\mathbf{k}'$ для всех значений t из промежутка (t_i, t_{i+1}) , получаем

$$\begin{aligned} P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}\right) \chi_{G_t}(\mathbf{x}) \chi_{G'}(\mathbf{x}') \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|))}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \\ &\quad \times \delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) \delta\left(t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислим Якобиан перехода от переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \mathbf{x}' - \mathbf{V}\left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|}{c}\right), \\ t' &= t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|}{c}, \end{aligned}$$

к переменным $\mathbf{x}', x_1$ при $\mathbf{x}'' = 0, t' = 0$. Он равен

$$\frac{|x_1|(t - t_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i||\mathbf{V}t - \mathbf{x}|},$$

где

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| &= \frac{V}{c}(Vt - x_2) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \\ |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| &= \frac{V}{c}(x_2 - Vt) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right), \\ x_1 &= \pm \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 - (Vt - x_2)^2 - x_3^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (21) описывают две части эллипсоида (с фокусами в точках $\mathbf{V}t$ и $\mathbf{V}t_i$)

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| = c(t - t_i)\},$$

в полупространствах $\mathbb{R}_+^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ и $\mathbb{R}_-^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 < 0\}$ соответственно.

Из представления (20) получаем

$$\begin{aligned} P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) \right) \times \\ &\times \chi_{G_t}(\mathbf{x}) \chi_{G'}(\mathbf{V}t_i) \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i|))}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| |x_1| (t - t_i)} dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Возвращаясь к интегрированию по сфере и учитывая соотношения ($0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|, \quad \mathbf{k} = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta) = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}, \\ |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| &= \frac{c(t - t_i)}{2 \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \\ |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| &= c(t - t_i) \left(1 - \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{2 \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \right), \\ dx_2 dx_3 &= \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 \sin^2 \theta |\sin \varphi| d\varphi d\theta}{1 - \frac{V}{c} \cos \varphi \sin \theta} = \frac{|x_1| |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| \sin \theta d\varphi d\theta}{1 - \frac{V}{c} \cos \varphi \sin \theta} = \frac{|x_1| |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| d\mathbf{k}}{1 - \frac{V}{c} k_2}, \end{aligned}$$

из равенства (22) получаем

$$\begin{aligned} P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\exp(-\mu c(t - t_i))}{t - t_i} \int_{\Omega} \frac{S_j(\mathbf{k}) \chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} d\mathbf{k} = \\ &= \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t - t_i))}{2\pi c^2 (t - t_i)^2} \int_{\Omega} \frac{\chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|) S_j(\mathbf{k})}{1 - 2\frac{V}{c} k_2 + \frac{V^2}{c^2}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как область G представляет собой верхнее полупространство ограниченное, плоскостью $x_3 = -l$, то интегрирование в соотношении (23) осуществляется на некоторой подобласти сферы Ω , определенной неравенством $k_3 |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| < l$, или, что то же самое,

$$k_3 = \cos \theta < l/|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| = \frac{2l \left(1 - \frac{V}{c} k_2 \right)}{c(t - t_i) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \Omega.$$

Суммируя выражения (19), (23), мы находим аппроксимацию функции $P_j(t) = P_{j,\gamma}(t) + P_{j,G}(t)$ в приближении однократного рассеяния.

При проведении гидролокации морского дна с помощью автономных необитаемых подводных аппаратов или надводных судов, как правило, носитель антенны имеет небольшую скорость в сравнении со скоростью распространения акустического сигнала [4, 5]. При $V/c \ll 1$ подынтегральные выражения в (19), (23) существенно упрощаются, что позволяет легко определить интервалы изменения углов в (23): θ меняется от $\theta_i = \arccos\left(\frac{2l}{c(t-t_i)}\right)$ до π , а угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. После таких упрощений выражения (19), (23) принимают вид

$$\begin{aligned} P_{j,\gamma}(t) &= \frac{l^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{\pi(t-t_i)} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{\left(S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-|}\right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+|}\right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \right) |\sin \varphi| \cos \theta_i d\varphi}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} = \\ &= \frac{l^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{\pi(t-t_i)} \int_0^{2\pi} \frac{S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_i)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_i)) d\varphi}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} = \\ &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{2\pi(c(t-t_i)/2)^5} \int_0^{2\pi} S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_i)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_i)) d\varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

$$P_{j,G}(t) = \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_i}^{\pi} S_j(\mathbf{k}(\theta, \varphi)) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (25)$$

Если диаграмма приемной антенны S_j является узконаправленной в плоскостях перпендикулярных донной поверхности $r_3 = -l$: $S_j(\mathbf{k}(\theta, \varphi)) = \delta(\varphi - \varphi_j)$, где $\delta(\varphi - \varphi_j)$ — дельта-функция Дирака, то формулы (24), (25) при $t \in (t_i + 2l/c, t_{i+1})$ принимают очень простой вид

$$\begin{aligned} P_{j,\gamma}(t) &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{2\pi(c(t-t_i)/2)^5} \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi_j, \theta_i)), \quad \theta_i(t) = \arccos\left(\frac{2l}{c(t-t_i)}\right), \\ P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \int_{\theta_i}^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \left(1 + \frac{2l}{c(t-t_i)}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим интересную особенность слагаемого $P_{j,G}(t)$ — оно не зависит от направления « j », в котором осуществляется прием сигнала. Нетрудно увидеть, что это свойство обусловлено однородностью коэффициента объемного рассеяния и в большинстве случаев сохраняется не только для узконаправленных приемных антенн.

Из (26) для определения функции σ_d при любом j получаем явную формулу

$$\sigma_{d,j}(\mathbf{y}) = \left(P_j(t) - \frac{\sigma c \exp(-2\mu|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|)}{8\pi|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|^2} \left(1 + \frac{l}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|} \right) \right) \times \left(\frac{cl^2 \exp(-2\mu|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|)}{2\pi|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|^5} \right)^{-1}, \quad (27)$$

где $t = (y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V$.

Очевидно, что при узкоколлимированной (по углу φ) диаграмме направленности для нахождения коэффициента донного рассеяния σ_d достаточно проводить измерения с помощью двух приемных антенн, расположенных по разным бортам носителя, например, когда $S_1 = \delta(\varphi - \pi/2)$ и $S_2 = \delta(\varphi - 3\pi/2)$. Этот случай соответствует широко распространенному способу построения гидролокационных изображений — последовательно полоса за полосой, перпендикулярно движению носителя антенн.

4. Численный алгоритм решения обратной задачи

При увеличении ширины диаграммы направленности расчет функции σ_d по формуле (27) приводит к росту погрешности. В частности, при восстановлении контрастных структур на гидролокационных изображениях имеет место так называемый эффект «размазывания», или дефокусировки, изображения (см. рис. 1, 2). Для устранения дефектов изображений применяют различные методы фокусировки, которые в математическом плане сводятся к решению интегрального уравнения первого рода. При дискретизации искомой функции решение интегрального уравнения эквивалентно решению системы линейных алгебраических уравнений, как правило, плохо обусловленной, что существенно затрудняет определение искомой функции [12].

В настоящем разделе мы опишем геометрический подход к решению обратной задачи. Для этого нам придется несколько видоизменить исходную формулировку Задачи 2. Отметим, что рассматриваемая задача в каком-то смысле близка к задачам малоракурсной томографии, для которых на сегодняшний день известно немало методов решения (см., например, [20]). Упомянем еще работы [21–23], в которых предложены оригинальные алгоритмы частичного определения границ неоднородностей при одно- и двулучевом рентгеновском облучении неоднородных сред.

Представим плоскость γ в виде объединения двумерных выпуклых подобластей γ_i , $i = 1, \dots, p$, $\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j = \emptyset$, $i \neq j$, и множества $\gamma_0 = \gamma \setminus \bigcup_{i=1}^p \gamma_i$. В каждой из областей γ_i функция $\sigma_d(\mathbf{y})$ постоянна, а в области γ_0 она принимает свое наименьшее значение. То есть коэффициент отражения внутри областей, описывающих неоднородности, больше, чем на остальной части донной поверхности. Задача состоит в определении подобластей γ_i , $i = 1, \dots, p$ по заданным значениям $P_j(t)$, $j = 1, \dots, q$ и известному значению функции σ_d в области γ_0 .

Для простоты изложения предположим, что диаграмма направленности $S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta))$ равна $1/2\beta$ при $\varphi \in (\varphi_j - \beta, \varphi_j + \beta)$ и нулю вне интервала $(\varphi_j - \beta, \varphi_j + \beta)$, причём носитель каждой из функций S_j сосредоточен либо в интервале $0 < \pi/2 - \delta/2 < \varphi < \pi/2 + \delta/2$, либо в интервале $0 < 3\pi/2 - \delta/2 < \varphi < 3\pi/2 + \delta/2$, где

$\delta < \pi$. Такие ограничения типичны при акустическом зондировании гидролокатором бокового обзора и позволяют восстанавливать функцию σ_d отдельно при $r_1 > 0$ и $r_1 < 0$ [8, 9]. Априорная информация о структуре коэффициента донного рассеяния и ограничения, налагаемые на диаграммы направленности приемных антенн, будут учтены при построении алгоритма определения контрастных структур.

Беря во внимание сформулированные ограничения, перепишем выражение для $P_{j,\gamma}$ в несколько ином виде:

$$P_{j,\gamma}(t) = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^5} \times \\ \times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(\sin \varphi \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}, Vt - \cos \varphi \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}) d\varphi.$$

Так как в точке $t = (y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V$ справедливо $|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 = y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2$, то выражения для $P_{j,\gamma}(t)$ и $P_{j,G}(t)$ в этой точке можно записать в виде

$$P_{j,\gamma}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V) = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{(y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \times \\ \times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(|y_1| \sin \varphi / |\sin \varphi_j|, y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j - |y_1| \cos \varphi / |\sin \varphi_j|) d\varphi = \\ = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{(y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \times \\ \times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(|y_1| \sin \varphi / |\sin \varphi_j|, y_2 + |y_1|(\cos \varphi_j - \cos \varphi) / |\sin \varphi_j|) d\varphi, \quad (28)$$

$$P_{j,G}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V) = \\ = \frac{c\sigma}{8\pi} \frac{\exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{(y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)} \left(1 + \frac{l}{\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2}} \right). \quad (29)$$

Обозначим через

$$\hat{P}_{j,\gamma}(\mathbf{y}) \equiv P_{j,\gamma}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V), \quad \hat{P}_{j,G}(\mathbf{y}) \equiv P_{j,G}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V),$$

где функции $P_{j,\gamma}$, $P_{j,G}$ определены в (28), (29), и схематично запишем алгоритм определения γ_i :

1. для каждого номера $j = 1, \dots, q$ вычисляются функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$ по формулам

$$\sigma_{d,j}(\mathbf{y}) = \left(\hat{P}_j(\mathbf{y}) - \hat{P}_{j,G}(\mathbf{y}) \right) \left(\frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{(y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \right)^{-1}, \quad (30)$$

2. строится функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ путем выбора минимального значения из набора $\sigma_{d,1}(\mathbf{y}), \dots, \sigma_{d,q}(\mathbf{y})$, то есть

$$\hat{\sigma}_d(\mathbf{y}) = \min_{j=1, \dots, q} \sigma_{d,j}(\mathbf{y}).$$

При узкой диаграмме направленности приемных антенн все функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$ совпадают с $\sigma_d(\mathbf{y})$, следовательно, функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ в этом случае также совпадает с $\sigma_d(\mathbf{y})$. Как мы покажем далее на серии вычислительных экспериментов, при увеличении ширины диаграммы направленности графическое изображение функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ достаточно хорошо передает строение областей γ_i .

5. Численные эксперименты

Для демонстрации работоспособности алгоритма решения обратной задачи были проведены несколько серий экспериментов. Тестирование алгоритма осуществлялось на функции $\sigma_d(r)$, графическое представление которой при $r_1 > 0$ дано на рис. 1а. Функция σ_d принимает значение 0.9 во всех включениях $\gamma_i, i=1, \dots, 7$

$$\gamma_1 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 62)^2 + (y_2 - 160)^2} < 6\},$$

$$\gamma_2 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 25)^2 + (y_2 - 150)^2} < 4\},$$

$$\gamma_3 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 29)^2 + (y_2 - 170)^2} < 4\},$$

$$\gamma_4 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 70)^2 + (y_2 - 170)^2} < 4\},$$

$$\gamma_5 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 25)^2 + (y_2 - 160)^2} < 4\},$$

$$\gamma_6 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 57)^2 + (y_2 - 145)^2} < 5\},$$

$$\gamma_7 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 40)^2 + ((y_2 - 160)/2.7)^2} < 8\},$$

а в дополнении: γ_0 имеет значение 0.1. Остальные величины имели следующие характерные для акустического зондирования в океанической среде значения [5, 9, 11]: $l = 12\text{м}$, $\mu = 0.018\text{м}^{-1}$, $\sigma = 0.1\mu$, $t_{i+1} - t_i = 0.4\text{с}$ для любого i , $V = 1\text{м/с}$, $c = 1500\text{м/с}$.

На рис. 1б - 1г представлены изображения функций $\sigma_{d,j}$, рассчитанные по формулам (56) в случае, когда углы $\varphi_j, j=1, \dots, 7$ распределены равномерно в интервале $\pi/6 < \varphi_j < 5\pi/6$, то есть $\delta/2 = \pi/3$. При этом ширина каждой j -ой диаграммы направленности S_j составляла 5 градусов. На рисунке 2 представлены результаты аналогичного эксперимента с шириной диаграммы направленности 10 градусов.

На рисунке 3 представлено изображение функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$, построенное на основании применения алгоритма фокусировки путем обработки функций $\sigma_{d,j}$ при ширине диаграммы направленности 5 градусов. Как видно на рисунке, восстановленное изображение значительно лучше, чем при однолучевой реконструкции.

На рисунке 4 представлены результаты серии экспериментов, иллюстрирующие качество изображений морского дна в зависимости от ширины диаграммы направленности. В верхнем ряду (рис. 4а - 4д) представлены результаты восстановления функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при ширине диаграммы направленности $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 10^\circ$. В нижнем ряду (рис. 4е - 4г) для сравнения приведены изображения функции $\sigma_{d,4}(\mathbf{y})$, соответствующие реконструкции морского дна без фокусировки при однолучевом зондировании перпендикулярно движению носителя антенн $\varphi = \pi/2$.

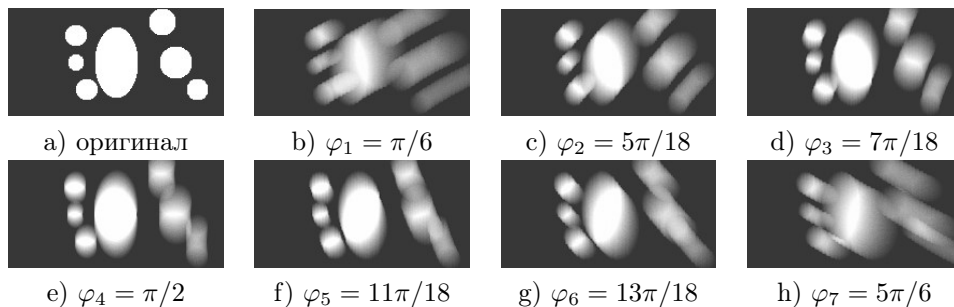


Рис. 1. Графическое представление коэффициента донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$ (оригинал) и восстановленных функций $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$, $j=1, \dots, 7$ при однолучевом зондировании с шириной диаграмм направленности 5 градусов.

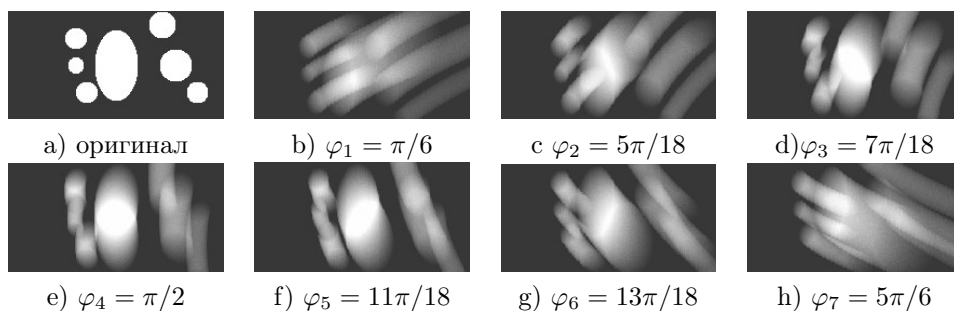


Рис. 2. Коэффициент донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$ (оригинал) и функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$, при однолучевом зондировании с шириной диаграмм направленности 10 градусов.

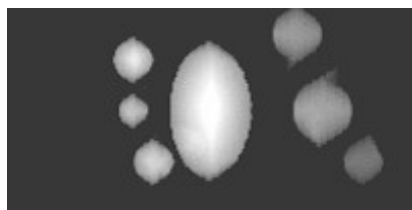


Рис. 3. Графическое представление функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ (обработанное изображение морского дна)

В четвертом эксперименте демонстрируется влияние числа ракурсов зондирования q на качество реконструкции. На рис. 5 приведены изображения функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при $q = 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25$. На рис. 5а приведена реконструкция морского дна при однолучевом зондировании $q=1$ — в этом случае фокусировка почти полностью отсутствует. Анализ других изображений показывает, что с увеличением количества приемных антенн повышается и качество восстанавливаемых изображений. Однако, начиная с $q = 15$ изображения практически не изменяются.

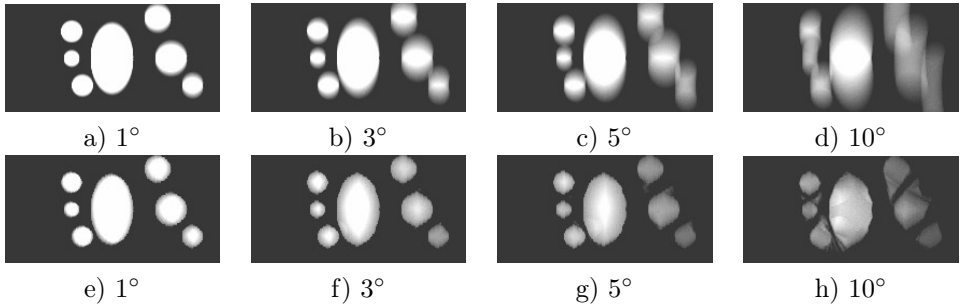


Рис. 4. На рисунках a,b,c,d приведено графическое изображение функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при изменении ширины диаграммы направленности. На рисунках e,f,g,h изображена функция $\sigma_{d,4}(\mathbf{y})$ при аналогичных характеристиках диаграммы направленности.

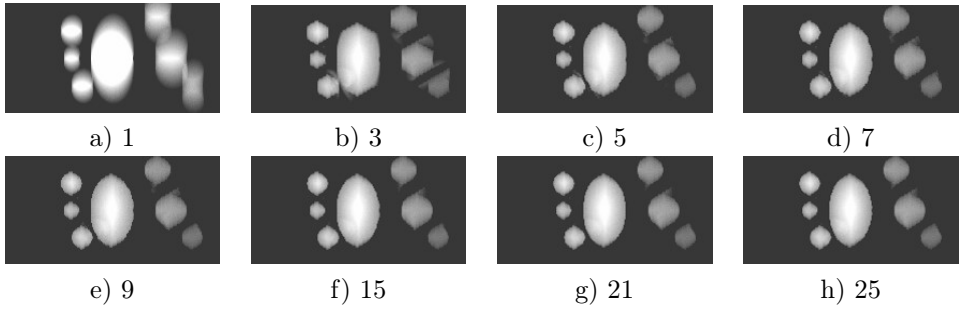


Рис. 5. Функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при различных значениях параметра q .

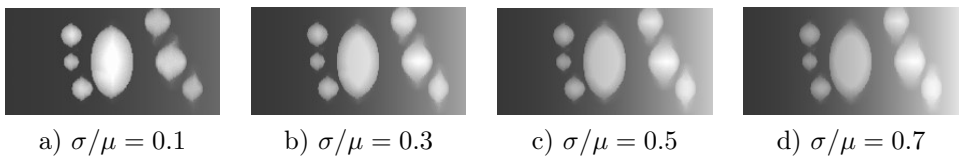


Рис. 6. Функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при различном уровне объемного рассеяния σ/μ .

В заключительном эксперименте анализируется влияние объемного рассеяния на качество реконструкции донных объектов. Чтобы проиллюстрировать влияние объемного рассеяния при расчете функций $\sigma_{d,j}$, в формуле (56) мы полагали $\hat{P}_{j,G}(\mathbf{y})=0$ для всех ракурсов зондирования j . Анализ полученных изображений показывает, что качество фокусировки падает незначительно. Тем не менее количественные значения функций $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ и σ_d отличаются достаточно сильно, и эта разница растёт с увеличением дальности зондирования.

6. Заключение

Исследована обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения применительно к проблеме акустического зондирования морского дна многолучевым гидролокатором бокового обзора. В приближении однократного рассеяния и на ряде априорных предположений о коэффициенте донного рассеяния предложен новый способ решения обратной задачи, продемонстрировано влияние разного числа ракурсов зондирования, ширины диаграммы приемных антенн и доли объемного рассеяния на качество реконструкции морского дна.

Список литературы

- [1] Р. Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.
- [2] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, 1978.
- [3] А. В. Богородский, Г. В. Яковлев, Е. А. Корепин, А. К. Должиков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеиздат, Л., 1984.
- [4] G. Griffiths, *Technology and Applications of Autonomous Underwater Vehicles*, CRC Press, London, 2002.
- [5] Ю. В. Матвиенко, В. А. Воронин, С. П. Тарасов, А. В. Скнурия, Е. В. Тутынин, “Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов”, *Подводные исследования и робототехника*, **8:2**, (2009), 4–15.
- [6] J. A. Turner, R. L. Weaver, “Radiative transfer of ultrasound”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **96:6**, (1994), 3654–3674.
- [7] J. E. Quijano, L. M. Zurk, “Radiative transfer theory applied to ocean bottom modeling”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **126:4**, (2009), 1711–1723.
- [8] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневосточный математический журнал*, **11:1**, (2011), 76–87.
- [9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61:3**, (2015), 400–408.
- [10] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, “Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18:2**, (2015), 99–110.
- [11] E. O. Kovalenko, A. A. Sushchenko, I. V. Prokhorov, “Processing of the information from side-scan sonar”, *Proceedings of SPIE*, **10035**, (2016), 100352C.
- [12] E. O. Kovalenko, A. A. Sushchenko, V. A. Kan, “Focusing of sonar images as an inverse problem for radiative transfer equation”, *Proceedings of SPIE*, **10833**, (2018), 108336D.
- [13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20:1**, (2017), 75–85.
- [14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневосточный математический журнал*, **18:1**, (2018), 101–111.
- [15] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **231:3**, (2018), 279–337.

- [16] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-stationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **235**:2, (2018), 117–137.
- [17] A. A. Amosov, “Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**:17, (2018), 8115–8135.
- [18] И. В. Прохоров, “Задача Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими и ламбертовскими условиями сопряжения”, *Матем. заметки*, **105**:1, (2019), 95–107.
- [19] A. Kim, I. V. Prokhorov, “Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **16**, (2019), 1036–1056.
- [20] О. В. Филонин, *Малоракурсная томография*, СНЦ РАН, Самара, 2006.
- [21] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, “Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **18**:8, (2011), 885–893.
- [22] Д. С. Аниконов, В. Г. Назаров, “Задача двуракурсной томографии”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:3, (2012), 372–378.
- [23] Д. С. Аниконов, В. Г. Назаров, И. В. Прохоров, “Задача одноракурсного зондирования неизвестной среды”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **14**:2, (2011), 21–27.

Поступила в редакцию
3 октября 2019 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке
ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект
№ 18-5-050)

Kovalenko E. O., Prokhorov I. V. Determination of the coefficient of bottom scattering during multi-beam sounding of the ocean. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 206–222.

ABSTRACT

Mathematical problems of constructing sonar images of the seabed according to measurements of a multi-beam side-scan sonar are considered. In the framework of the model based on the non-stationary equation of radiation transfer, the inverse problem of finding the bottom scattering coefficient is investigated. A new method is proposed for solving the inverse problem under the assumption of single scattering and pulsed sounding mode. A numerical analysis of the quality of the images of the seabed is carried out depending on the number of sensing angles, the width of the radiation pattern of the receiving antennas and the level of volume scattering in the medium.

Key words: *radiative transfer equation, inverse problem, bottom and volume scattering, multi-beam sounding.*

УДК 334.7.01+51-77+519.83

MSC2010 91A10 + 91A40 + 91B24

© М. А. Настыч¹

Сильное равновесие по Нэшу в олигополиях с конкуренцией по объему и по цене

Данная статья исследует вопрос существования сильного равновесия по Нэшу в рамках моделей олигополии с конкуренцией по объему и по цене с гладкими функциями общего вида для рыночного спроса и издержек фирм как достаточного условия отсутствия у фирм стимулов к образованию сговоров или слияний. Концепция сильного равновесия по Нэшу, в отличие от концепции равновесия по Нэшу, учитывает возможность совместного отклонения игроков, что интуитивно обосновывает ее применение к анализу прибыльности образования коалиций фирм. В статье сформулированы необходимые и достаточные условия существования сильного равновесия по Нэшу в условиях существования в модели равновесия по Нэшу в модели с конкуренцией по объему. Так, равновесие по Нэшу в олигополии с конкуренцией по объемам производства является сильным тогда и только тогда, когда оно является седловой точкой функции спроса или, эквивалентно, когда оно является конкурентным равновесием. Также в работе получен результат об отсутствии сильного равновесия по Нэшу в моделях конкуренции по цене. Специфичность полученных условий дает основание предполагать, что в большинстве случаев у фирм есть стимулы к образованию коалиций. Данное обстоятельство объясняет рост количества международных сделок слияний и поглощений, несмотря на широко известную статистику, говорящую о том, что большая часть из них является неудачной.

Ключевые слова: *некооперативная игра, сильное равновесие по Нэшу, Курно, Бертран, конкуренция по объемам производства, конкуренция по цене.*

Введение

В статье исследуется вопрос о прибыльности образования коалиций фирм в отраслях с конкуренцией по объему производства и по цене. Как хорошо известно, основным стимулом коалиционного поведения фирм является рыночная власть, подразумевающая наличие положительного спроса при поднятии цены выше значения предельных затрат на рынках несовершенной конкуренции.

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 194100, г. Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3А корпус 1. Электронная почта: manastych@hse.ru

Коалиционное поведение фирм может проявляться в виде различного рода объединений, сговоров, слияний и поглощений. В случае сговора фирмы назначают объемы производства или цены с учетом интересов всех участников данного сговора. В соответствии с российским законодательством слиянием фирм признается создание новой фирмы с передачей ей всех прав и обязанностей двух или нескольких фирм и прекращением последних, а поглощением фирм признается прекращение одной или нескольких фирм с передачей всех прав и обязанностей другой фирме. Во всех случаях коалиционного поведения фирм происходит формальное или неформальное усиление концентрации отрасли, и, как результат, рыночная власть возрастает. Этим объясняется и то, что, например, монополистическая конкуренция (Neary, 2007, [1]), как и предположение о континууме производителей (Shitovitz, 1973, [2]), оказываются неспособной объяснить феномен слияния фирм.

Наиболее интересные результаты в данной предметной области были получены в рамках моделей олигополии в различных постановках. В статье рассматривается базовая модель олигополии с конкуренцией по объемам производства, предложенная впервые Курно (Cournot, 1838, [3]). Выгодность слияния фирм принято устанавливать за счет сопоставления в условиях равновесия по Нэшу прибыли объединенной фирмы с суммой прибылей фирм — участников сговора до объединения. Так, в работе (Farrel, Shapiro, 1990, [4]) авторы приводят условия выгодности слияния и его последствий для фирм-аутсайдеров. В работе (Perry, Porter, 1985, [5]) авторы исследуют стимулы горизонтального слияния и приходят к выводу о том, что участие в картеле или в слиянии часто является неэффективным для фирм, максимизирующих прибыль. Причем фирмы-аутсайдеры всегда получают выгоду от слияния за счет усиления концентрации отрасли. Авторы статьи (Salant et al., 1983, [6]) оценивают потери от слияния с помощью сравнительной статистики. Таким образом, лишь при специфических условиях в олигополии могут существовать взаимно выгодные стимулы к кооперативному поведению фирм. При этом даже при выгодности слияния еще более выгодной оказывается позиция фирмы-аутсайдера, а именно, в большинстве моделей есть стимулы поодиночке отклоняться от кооперативного соглашения.

В то же время, концепция равновесия по Нэшу не учитывает возможности совместного отклонения игроков и, как результат, не является в этом смысле устойчивой. Мы видим, что даже при выгодности слияния еще более выгодной оказывается позиция фирмы-аутсайдера. Устойчивость к совместным отклонениям обеспечивает концепция сильного равновесия по Нэшу (СРН), определяемая как профиль стратегий, для которого не существует такого подмножества игроков, что их совместное отклонение при неизменности равновесных стратегий остальных игроков было бы строго более выгодным для них (Aumann, 1959, [7]). Иными словами, существование СРН является достаточным условием невыгодности слияния фирм. Отметим также, что недостатком здесь является то, что СРН предполагает независимость функции прибыли от структуры рынка, что делает невозможным рассмотрение оптимизации затрат при объединении фирм.

Несмотря на интуитивную применимость концепции СРН к исследованию слияний фирм, мало исследований было посвящено данной предметной области. В статье (Bernheim, Whinston, 1987, [8]) было приведено утверждение, что СРН не существу-

ет в модели олигополии по Курно с линейным спросом, так как равновесие по Нэшу здесь не совпадает со слабым Парето эффективным распределением. В исследовании модели олигополии с ценовой конкуренцией по Бертранию (Dastidar, 1995, [9]) с выпуском, определяемым спросом, авторы работы (Chowdhury, 2004, [10]) приводят необходимое и достаточное условие существования СРН. Необходимые и достаточные условия для экономических некооперативных игр общего вида были получены в работе (Nessah, Tian, 2014, [11]) для множества стратегий, являющегося компактным. Авторы также описывают алгоритм вычисления СРН и приводят специфический пример олигополии по Курно с существующим в ней СРН в недифференцируемой точке функции спроса. Данная статья дополняет литературу, посвященную существованию СРН, для моделей олигополии по Курно и Бертранию с дифференцируемыми функциями спроса и издержек общего вида и некомпактным множеством стратегий игроков.

В следующем разделе даются вводные сведения, касающиеся обозначений и определений, используемых в статье. В третьем разделе описана постановка модели олигополии с конкуренцией по объемам производства и гладкими функциями спроса и издержек общего вида, приводятся необходимые и достаточные условия для существования СРН и даются несколько примеров существования СРН. Далее в четвертом разделе описана постановка модели олигополии с конкуренцией по цене и гладкими функциями спроса и издержек общего вида, приводится результат о невозможности существования СРН в таких моделях. Основные выводы приведены в заключении.

1. Обозначения и определения

Будем рассматривать игру в нормальной форме $G = (X_i, u_i)_{i \in I}$, где $I = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков, X_i — множество стратегий игрока i и $u_i: X = \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \mathbb{R}$ — функция выигрышей игрока i .

Пусть $\mathbf{S}$ — множество всех коалиций, т.е. множество непустых подмножеств I . Для каждой коалиции $S \in \mathbf{S}$ будем обозначать через $X_S = \prod_{i \in S} X_i$ множество стратегий игроков в коалиции S и через $-S = \{i \in I: i \notin S\}$ игроков-аутсайдеров. В частности, под $-i$ будем подразумевать всех игроков, кроме игрока i .

Будем говорить, что игра $G = (X_i, u_i)_{i \in I}$ является компактной, вогнутой и непрерывной, если соответственно $\forall i \in I$ X_i компактно и выпукло, а u_i вогнута и непрерывна на X .

Определение 1. Профиль стратегий $x^* \in X$ игры G является равновесием по Нэшу, если $\forall i \in I$ и $\forall y_i \in X_i$

$$u_i(x^*) \geq u_i(y_i, x_{-i}^*).$$

Определение 2. Профиль стратегий $\bar{x} \in X$ игры G является сильным равновесием по Нэшу (СРН), если $\forall S \in \mathbf{S} \forall i \in S \nexists y_S \in X_S :$

$$u_i(y_S, \bar{x}_{-S}) > u_i(\bar{x}).$$

Определение 3. Профиль стратегий $\bar{x} \in X$ игры G является слабо Парето оптимальным, если $\forall i \in I \nexists y \in X : u_i(y) > u_i(\bar{x})$.

Определение СРН подразумевает, что оно является равновесием по Нэшу, а также оно является слабо Парето эффективным, так как отклоняющаяся коалиция может быть единичным игроком или всем множеством игроков соответственно.

2. СРН в олигополии с конкуренцией по объемам производства

Пусть фирмы $I = \{1, \dots, n\}$ производят однородный продукт и конкурируют по неотрицательным объемам производства $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i \geq 0 \forall i$ на рынке с обратной функцией спроса $P(q) \geq 0$ общего вида (определим ее далее в предположениях).

Пусть прибыль каждой фирмы i определяется равенством

$$v_i(q) = P(q)q_i - C_i(q_i), \quad (1)$$

где $C_i(q_i)$ — суммарные издержки фирмы i .

Сделаем далее следующие предположения:

- 1) $P(q) \in C^2$, то есть на производимый продукт со стороны потребителей предъявляется спрос, функция которого принадлежит пространству непрерывно дифференцируемых функций с порядком гладкости 2;
- 2) $C_i(q_i) \in C^2 \forall i \in I$, то есть издержки фирм принадлежат пространству непрерывно дифференцируемых функций с порядком гладкости 2;
- 3) в игре $G = (q_i, v_i(q))_{i \in I}$ существует равновесие по Нэшу $\hat{q}$:

$$\hat{q} = \arg \max_{q_i} (P(q)q_i - C_i(q_i)) \quad \forall i \in I; \quad (2)$$

- 4) $q_i \geq 0 \forall i \in I$ и $\exists i, j: i \neq j, q_i q_j > 0$, то есть по крайней мере две фирмы в равновесии выпускают положительное количество товара.

Таким образом, в настоящей работе функция выигрышей (прибылей) игроков в игре $G = (q_i, v_i(q))_{i \in I}$ не обязательно является вогнутой, а множество стратегий не замкнуто, а значит, и не компактно, что отличает данную постановку от рассмотренной в работе (Nessah, Tian, 2014, [11]).

Заметим, что если предположение 4 не выполняется, то есть если в игре n фирм равновесием по Нэшу является вектор $\hat{q}: q_i \geq 0 \forall i \in I, \exists j: q_j > 0$, то данное равновесие будет сильным. В этом случае положительный объем производит лишь одна фирма в отрасли, то есть отрасль оказывается фактически монополизированной. Равновесие является сильным, так как данная ситуация возможна лишь при относительно высоких издержках остальных фирм, что делает их неконкурентоспособными. В таком случае объединение в равновесии недействующих фирм с действующими не может привести к изменению равновесных объемов производства и цены, а значит, не может привести к увеличению их прибыли. Объединение же недействующих фирм также не сможет быть конкурентоспособным относительно фирмы-монополиста.

При выполнении предположений 1–4 верно следующее утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое и достаточное условие существования СРН в игре $G = (q_i, v_i)_{i \in I}$). Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда в игре $G = (q_i, v_i(q))_{i \in I}$ профиль равновесных по Нэшу стратегий $\hat{q}$ является СРН тогда и только тогда, когда $\forall i \frac{\partial P(q)}{\partial q_i}(\hat{q}) = 0$.

Докажем далее утверждение 1.

Отметим сначала, что профиль стратегий $\hat{q}$ является глобальным максимумом прибылей игроков, то есть решением следующей системы как необходимого условия:

$$P(q) + \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} q_i = C'_i(q_i), \quad \forall i. \quad (3)$$

Достаточность. Определим через $v_S = \sum_{i \in S} v_i$ совокупную прибыль фирм для каждой коалиции $S \subseteq I$.

В силу предположений 1–4 $\exists \varepsilon > 0$ такой, что функции прибылей (выигрышей) $u_i = v_i(q)$ являются вогнутыми на компакте $\{q: |q - \hat{q}| \leq \varepsilon\}$ и достигают на нем своего глобального максимума $\forall i \in I$. На данном интервале сумма вогнутых функций будет также вогнутой, а значит, по теореме Вейерштрасса функция v_S также достигает максимума для каждой коалиции $S \subseteq I$. Определим через q^S профиль стратегий, максимизирующий совокупную прибыль коалиции S при сохранении равновесных по Нэшу стратегий фирм-аутсайдеров (в соответствии с определением 2)¹, то есть q^S — решение системы:

$$\begin{cases} \hat{q} = \arg \max_q \left(P(q) \sum_{i \in S} q_i - \sum_{i \in S} C_i(q_i) \right), & \forall i \in S \\ q_i^S = \hat{q}_i, & \forall i \notin S \end{cases} \quad (4)$$

или

$$\begin{cases} P(q) + \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} \sum_{j \in S} q_j = C'_i(q_i), & \forall i \in S \\ q_i^S = \hat{q}_i, & \forall i \notin S. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть далее для $\hat{q}$, решения системы (3), выполняется $\frac{\partial P(q)}{\partial q_i}(\hat{q}) = 0 \quad \forall i \in I$. Тогда $\hat{q}$ также является решением системы (5) для любой возможной коалиции, то есть $\forall i \forall S \hat{q} = q^S$. А значит, $\forall S \in \mathbf{S} \quad \forall i \in S \quad \nexists q^S: v_i(q^S, q_{-S}^S) > v_i(\hat{q})$ и $\hat{q}$ — СРН в игре $G = (q_i, v_i)_{i \in I}$, причем $P(q^S) = C'_i(q_i^S)$.

Необходимость. Пусть $\hat{q}$ — СРН в игре $G = (q_i, v_i)_{i \in I}$. Тогда по определению СРН $\forall S \quad \forall i \in S \quad \nexists q^S:$

$$v_i(q^S, \hat{q}_{-S}) > v_i(\hat{q}).$$

¹Стоит отметить, что в микроэкономике при моделировании слияний фирм принято считать, что равновесные по Нэшу стратегии фирм-аутсайдеров меняются в ответ на объединение. В этом состоит ключевое отличие классического анализа слияний от концепции сильного равновесия по Нэшу.

Отсюда в силу предположений 1–3 получаем систему уравнений условия первого порядка $\forall S \forall i \in S$:

$$\begin{cases} P(q) = C'_i(q_i) - \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} \sum_{j \in S} q_j, \\ P(q) = C'_i(q_i) - \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} q_i. \end{cases} \quad (6)$$

В силу предположения 4 система (6) имеет решение, только если $n=1$ или если $\frac{\partial P(q)}{\partial q_i}(\hat{q})=0$, причем $\forall i \ P(q)=C'_i(q_i)$.

Стоит обратить особое внимание на условие теоремы о том, что СРН является седловой точкой функции спроса, то есть $\forall i \ \frac{\partial P(q)}{\partial q_i}(\hat{q})=0$, эквивалентно условию $P(q)=C'_i(q_i) \ \forall i$, а значит, в данной постановке СРН является **конкурентным равновесием**.

Иными словами, для того чтобы у фирм в отрасли с конкуренцией по объему производства отсутствовали стимулы к образованию экономической интеграции, необходимо выполнение достаточно специфического требования на функцию спроса с учетом закона о ее убывании, а именно требование неизменности невозрастающей функции спроса в точке равновесия. В содержательном плане необходимое и достаточное условие существования СРН может быть интерпретировано как нецелесообразность объединения компаний в случае отсутствия изменения спроса при малых приращениях в зависимости от цены в равновесном некооперативном состоянии.

В силу предположений 1–2 утверждение 1 может быть применено к функциям спроса из класса $\mathbf{C}^2$. Недифференцируемые функции спроса или функции спроса класса $\mathbf{C}^1$ нуждаются в дополнительных исследованиях и также могут порождать СРН. Так, пример первого случая можно найти в (Nessah, Tian, 2014, [11]), когда СРН в игре достигается в точке, где производная спроса не существует.

Пример 1. В качестве примера можно привести отрасль с непрерывно дифференцируемой функцией спроса $P(q) = 100 - (\sum_{i \in I} q_i - 4)^3$. Пусть функции издержек²

фирм записываются как $C_i(q_i) = \frac{25}{2} \theta_i q_i^2$. Тогда прибыль объединения всех фирм в отрасли $v_I = P(q) \sum_{i \in I} q_i - \frac{25}{2} \sum_{i \in I} \theta_i q_i^2$.

Легко проверить, что все вторые частные производные отрицательны и максимумы как индивидуальных прибылей фирм, так и прибыли любых их объединений достигаются при $\sum_{i \in I} q_i = 4$. Таким образом, СРН для такой олигополии является вектор

$q = (\frac{4}{\theta_1}, \dots, \frac{4}{\theta_n})$, и параметр функций затрат θ_i определяет долю i -той фирмы от общего выпуска. Для случая $n=3$ прибыли отдельных фирм и общая прибыль большой коалиции показаны на рис. 1 при $\theta_1=2, \theta_2=3, \theta_3=6$.

Стоит отметить, что в игре с невозрастающей функцией спроса ее седловые точки могут не являться равновесными по Нэшу и, как следствие, не являться СРН.

Пример 2. Примером игры с несколькими седловыми точками является олигополистический рынок со спросом, задаваемым как $P(q) = 15 - \sum_{i \in I} q_i + \cos(\sum_{i \in I} q_i)$ (рис. 2).

²Приведенный вид функции издержек фирм обеспечивает выполнение предположения 3.

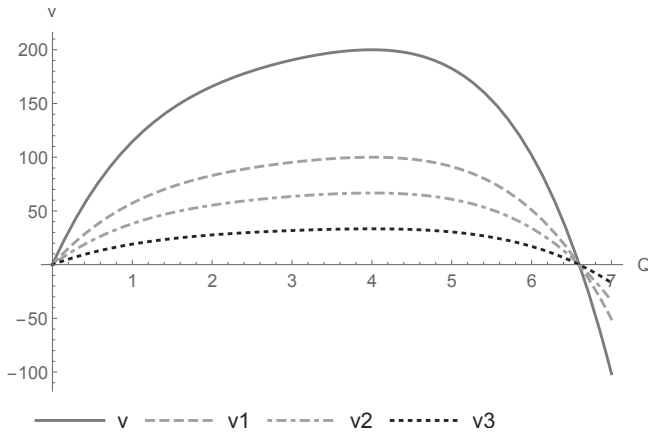


Рис. 1. Пример 1: прибыли фирм и прибыль их полного объединения для отрасли из 3 фирм.

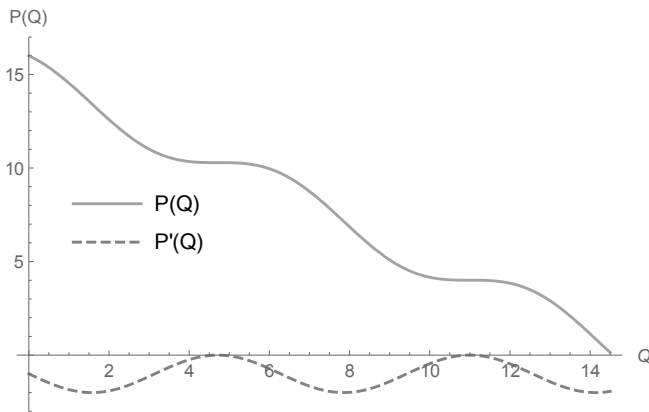


Рис. 2. Пример 2: обратная функция спроса с несколькими седловыми точками.

Пусть функция суммарных издержек³ всех фирм данной отрасли записывается как $\sum_{i \in I} C_i(q_i) = 15 \cos(\sum_{i \in I} q_i) - \frac{1}{2} (\sum_{i \in I} q_i)^2 + 2 \sin(\sum_{i \in I} q_i)$. Суммарная прибыль всех фирм в отрасли проиллюстрирована рис. 3.

В данной игре у функции спроса существуют две седловые точки — $\hat{q}_1 : \sum_{i \in I} q_i = 3\pi/2$ и $\hat{q}_2 : \sum_{i \in I} q_i = 7\pi/2$. Но так как равновесием по Нэшу является лишь профиль $\hat{q}_2$, гарантирующий получение большей прибыли, чем при профиле выпусков $\hat{q}_1$,

³Приведенный вид функции издержек фирм обеспечивает в том числе выполнение предположения 3.

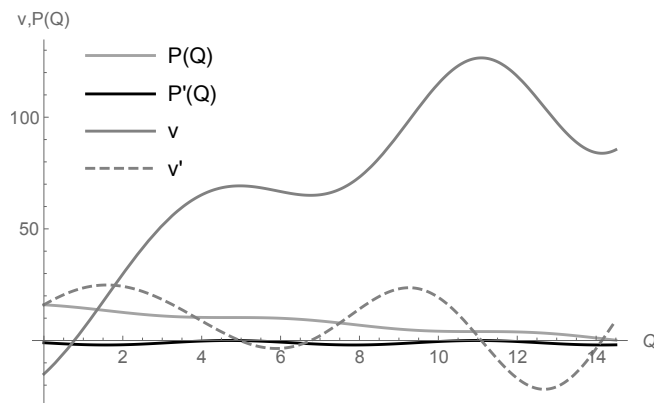


Рис. 3. Пример 2: обратная функция спроса и прибыль коалиции из всех фирм.

профиль стратегий $\hat{q}_2$ является СРН.

Следствием утверждения 1 является отсутствие СРН в моделях Курно и Штакельберга с линейным спросом.

Следствие 1. Пусть фирмы $I = \{1, \dots, n\}$ производят однородный продукт, на который со стороны потребителей предъявляется линейный спрос $P(Q) = a - bQ$, где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$, и $a, b > 0$. Тогда в игре $G = (q_i, v_i(q))_{i \in I}$ не существует СРН.

Таким образом, в моделях с линейным спросом и конкуренцией по объему производства у фирм всегда есть стимулы к образованию слияний, несмотря на то, что существуют стимулы к их отклонению и от данной стратегии по отдельности.

3. СРН в олигополии с конкуренцией по цене

Утверждение 2. В модели Бертрана с однородным продуктом не существует СРН.

Данное утверждение верно, так как равновесие по Нэшу не совпадает с Парето-оптимумом в такой игре в силу известного «парадокса Бертрана». Данный результат представлен также в работе (Loertscher, Marx, 2018, [13]). Рассмотрим далее модель ценовой конкуренции с дифференцированным продуктом.

Пусть фирмы $I = \{1, \dots, n\}$ производят дифференцированный продукт и конкурируют по ценам $p = (p_1, \dots, p_n)$, ограниченным снизу $\forall i \ p_i \geq 0$ и ограниченным сверху в виду неотрицательности рыночного предложения $q_i(p) \geq 0 \ \forall i \in I$ и закона спроса. Значит, множество стратегий X_i не пусто, выпукло и компактно, как в работе (Nessah, Tian, 2014, [11]).

Как и в случае с конкуренцией по объемам производства ситуация, когда в игре n фирм равновесием по Нэшу является вектор p , при котором положительный объем производит лишь одна фирма в отрасли, является СРН, но отрасль олигополистической не является. Будем далее рассматривать множество $X_i: q_i \geq 0 \ \forall i \in I$ и $\exists i, j: i \neq j$,

$q_i q_j > 0$, которое теперь не будет являться замкнутым, а значит, и компактным, что отличает данную постановку от рассмотренной в работе (Nessah, Tian, 2014, [11]).

Сделаем далее следующие предположения:

- 1) на производимый продукт со стороны потребителей предъявляется спрос, функция которого принадлежит пространству непрерывно дифференцированных функций с порядком гладкости 2, то есть $q_i(p) \in C^2(p)$;
- 2) издержки фирм принадлежат пространству непрерывно дифференцированных функций с порядком гладкости 2, то есть $C_i(q_i) \in C^2(q) \forall i \in I$;
- 3) $q_i \geq 0 \forall i \in I$ и $\exists i, j : i \neq j, \hat{q}_i \hat{q}_j > 0$.

При выполнении предположений 1–3 верно следующее утверждение, полученное в ходе диссертационного исследования.

Утверждение 3 (О несуществовании СРН в игре $G = (p_i, \pi_i)_{i \in I}$). Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда в игре $G = (p_i, \pi_i(p))_{i \in I}$ не существует СРН.

Иными словами, у фирм в отрасли с ценовой конкуренцией при предположениях 1–3 всегда есть стимулы к образованию экономической интеграции. Докажем утверждение 3 от обратного.

Пусть существует $\hat{p}$ — СРН в игре $G = (p_i, \pi_i)_{i \in I}$. Тогда по определению СРН $\hat{p}$ эффективен по Парето

$$\hat{p} = \arg \max_p \left(\sum_{i \in I} q_i(p) p_i - \sum_{i \in I} C_i(q_i(p)) \right)$$

и равновесен по Нэшу

$$\hat{p} = \arg \max_p (q_i(p) p_i - C_i(q_i(p))).$$

Отсюда в силу предположений 1–3 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} q_i(p) = \sum_{j \in I} C'_j(q_j) \frac{\partial q_j(p)}{\partial p_i} - \sum_{j \in I} \frac{\partial q_j(p)}{\partial p_i} p_j, & \forall i \in I \\ q_i(p) = C'_i(q_i) \frac{\partial q_i(p)}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i(p)}{\partial p_i} p_i, & \forall i \in I. \end{cases} \quad (7)$$

В силу предположения 3 система (7) имеет решение только при $n = 1$. Получили противоречие.

Иными словами, в условиях олигополии фирмам практически всегда имеет смысл кооперироваться. Более того, для ценовой конкуренции и для случая линейного спроса в конкуренции по объемам производства это верно всегда. Это объясняется тем, что СРН является сужением множества равновесий по Нэшу до равновесий, являющихся оптимальными по Парето.

СРН предполагает также независимость функции прибыли от структуры рынка, что делает невозможным рассмотрение оптимизации затрат при объединении фирм.

Поэтому, несмотря на наличие у фирм стимулов к кооперированию, при линейно-квадратичных функциях полезности потребителей слияние, сопровождающееся усилением концентрации рынка, должно удовлетворять определенным условиям по доле участвующих в нем фирм и достигаемой эффективности затрат. Таким образом, у фирм в большинстве случаев есть стимулы к слиянию и есть стимулы к индивидуальным отклонениям от слияний. Такой вывод перекликается с идеями несостоятельности и необходимости пересмотра антимонопольной политики (Armentano, Brozen, 1990, [12]).

4. Заключение

В статье приводятся (i) необходимые и достаточные условия существования сильного равновесия по Нэшу для олигополии с конкуренцией по объему производства с гладкими функциями спроса и издержек общего вида и (ii) обоснование отсутствия СРН для олигополии с конкуренцией по цене также с гладкими функциями спроса и издержек общего вида. Необходимое и достаточное условие существования СРН в олигополии с конкуренцией по объемам производства заключается в том, что для рассматриваемой игры существует равновесие по Нэшу, которое является также конкурентным равновесием. Эквивалентно данное равновесие по Нэшу должно быть точкой перегиба функции спроса. Для олигополии с конкуренцией по цене СРН не существует в описанной постановке модели, что говорит о наличии у фирм в такой отрасли стимулов к образованию коалиций.

Так как существование СРН является достаточным условием для того, чтобы слияние было неприбыльным для фирм в отрасли, и так как в моделях олигополии по Курно такое равновесие существует при весьма специфических условиях, а в олигополии Бертрана не существует никогда, можно сделать вывод о том, что в большинстве случаев у фирм существуют стимулы к слияниям, что подтверждается большим объемом подобных сделок в различных отраслях экономики. Более того, для классической олигополии с линейным спросом это верно всегда. Данный вывод может быть объяснен тем, что СРН является сужением множества равновесий по Нэшу и при этом является слабо Парето оптимальным. Стоит отметить также, что несмотря на вероятное наличие стимулов к созданию фирмами коалиций, во-первых, СРН не учитывает возможность изменения стратегии игры фирмами-аутсайдерами в ответ на образование такой коалиции, а во-вторых, из многочисленных исследований теории организации промышленности в области слияний образование коалиций является более выгодным для фирм, которые в них не участвуют.

Список литературы

- [1] J. P. Neary, “Cross-border mergers as instruments of comparative advantage”, *The Review of Economic Studies*, **74**:4, (2007), 1229–1257. doi 10.1111/j.1467-937X.2007.00466.x.
- [2] B. Shitovitz, “Oligopoly in markets with a continuum of traders”, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **41**:3, (1973), 467–501. doi 10.2307/1913371.
- [3] A. A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot*, L. Hachette, 1838.

- [4] J. Farrell, C. Shapiro, “Horizontal mergers: an equilibrium analysis”, *The American Economic Review*, **80**:1, (1990), 107–126.
- [5] M. K. Perry, R. H. Porter, “Oligopoly and the incentive for horizontal merger”, *The American Economic Review*, **75**:1, (1985), 219–227.
- [6] S. W. Salant, S. Switzer, R. J. Reynolds, “Losses from horizontal merger: the effects of an exogenous change in industry structure on Cournot–Nash equilibrium”, *The Quarterly Journal of Economics*, **98**:2, (1983), 185–199.
- [7] R. J. Aumann, “Acceptable points in general cooperative n-person games”, *Contributions to the Theory of Games*, v. IV, Annals of mathematics studies 40, Princeton University Press, 1959, 287–324.
- [8] B. D. Bernheim, M. D. Whinston, “Coalition–proof Nash equilibria II. Applications”, *Journal of Economic Theory*, **42**:1, (1987), 13–29. doi 10.1016/0022-0531(87)90100-1.
- [9] K. G. Dastidar, “On the existence of pure strategy Bertrand equilibrium”, *Economic Theory*, **5**:1, (1995), 19–32. doi 10.1007/BF01213642.
- [10] P. R. Chowdhury, “Strong Bertrand Equilibria”, *Keio economic studies*, **41**:1, (2004), 59–64.
- [11] R. Nessah, G. Tian, “On the existence of strong Nash equilibria”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **414**:2, (2014), 871–885. doi 10.1016/j.jmaa.2014.01.030.
- [12] D. T. Armentano, Y. Brozen, *Antitrust and Monopoly. Anatomy of a Policy Failure*, Independent Institute, 1990, 312 pp.
- [13] S. Loertscher, L. M. Marx, “Merger Review for Markets with Buyer Power”, *Journal of Political Economy*, **0(ja)**, (2018), 1–53.

Nastych M. A. Strong Nash equilibrium for oligopoly with quantity and price settings. Far Eastern Mathematical Journal. 2019. V. 19. No 2. P. 223–234.

ABSTRACT

This paper investigates the existence of strong Nash equilibrium in Cournot and Bertrand oligopoly models with smooth general functions of demand and costs. Strong Nash equilibrium can be considered as the sufficient conditions for firms not to have incentives to collude or to merge. Unlike the concept of Nash equilibrium, the concept of strong Nash equilibrium takes into account the possibility of joint deviations of the players. It gives an intuition of its applicability to the analysis of profitability of coalitions formations. Given the existence of Nash equilibrium in the model, I derive the necessary and sufficient condition for this equilibrium to be SNE in quantity setting model. Thus, Nash equilibrium in the quantity setting oligopoly is strong iff it is a saddle point of demand function or, equivalently, it is a competitive equilibrium. I obtain non-existence result for SNE in price settings oligopoly. The peculiarity of derived conditions leads to the proposition that firms do have incentives to collude or to merge in the most cases. It explains the growth of a number of international M&A deals with the well-known statistics of wide-spread failures among them.

Key words: *non-cooperative game, strong Nash equilibrium, Cournot, Bertrand, quantity setting, price setting.*

УДК 517.5

MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© М. А. Падалко^{1,2}, П. Д. Андриященко¹, К. С. Солдатов¹,
К. В. Нефедев^{1,2}

Ускоренный алгоритм исчерпывающего перечисления в модели Изинга

Приводится ускоренный алгоритм точного расчета решеток спинов в модели Изинга. Он позволяет рассчитывать на обычных персональных компьютерах двумерные решетки спинов вплоть до размеров 8×8 с периодическими граничными условиями. В свою очередь, точное решение, полученное предлагаемым методом, дает возможность проверять эффективность различных вероятностных подходов, в частности методов Монте-Карло. Алгоритм может применяться к различным типам решеток.

Ключевые слова: *модель Изинга, полный перебор, метод Монте-Карло.*

Введение

Модель Изинга представляет собой набор спинов, каждый из которых может принимать одно из двух состояний: $+1$ или -1 . Энергия взаимодействия спинов друг с другом, а также с внешним магнитным полем рассчитывается по формуле

$$E = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j - H \sum_{i=1}^n s_i, \quad (1)$$

где J_{ij} — константа обменного взаимодействия (для ферромагнетика положительная, для антиферромагнетика отрицательная), символ суммы с индексом $\langle i,j \rangle$ обозначает суммирование по всем соседним узлам решетки, s_i и s_j — значения спинов, H — проекция напряженности внешнего магнитного поля [1]. Каждая конфигурация спинов обладает определенной энергией и намагниченностью. Статистическая сумма системы спинов, находящейся в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре T , вычисляется по формуле

$$Z(T, H) = \sum_{E, M} g(E, M) \cdot \exp(-E/T - M \cdot H/T), \quad (2)$$

¹ Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: mihhl108@mail.ru (М. А. Падалко), pitandmind@gmail.com (П. Д. Андриященко), konstantin.soldatov@bk.ru (К. С. Солдатов), nefedev.kv@dvfu.ru (К. В. Нефедев).

где $g(E, M)$ — кратность вырождения состояний по энергии E и намагниченности M , E — энергия взаимодействия всех пар соседних спинов, суммирование идет по всем возможным парам значений E и M [2]. Зная статистическую сумму, можно вычислить все основные термодинамические характеристики, такие как внутренняя энергия, свободная энергия, магнитная восприимчивость, теплоемкость и др. [2] В модели Изинга $g(E, M)$ будет дискретной функцией переменных E и M [3], поэтому $g(E, M)$ можно представить в виде матрицы. Для большинства систем единственным точным способом определения $g(E, M)$ является метод исчерпывающего перечисления. Сложность такого подхода заключается в том, что необходимо перебрать все конфигурации системы, число которых равно 2^N , где N — количество спинов в системе. Время расчета методом полного перебора растет экспоненциально с увеличением числа спинов. Было проверено, что методом исчерпывающего перечисления можно рассчитать $g(E, M)$ у решеток размером 6×6 спинов (2^{36} конфигураций) за время порядка нескольких часов с использованием CPU обычных персональных компьютеров. Например, на четырехъядерном процессоре AMD Phenom(tm) II X4 970 с максимальной частотой до 3.6 ГГц с использованием распараллеливания по четырем потокам время расчета равно 1 ч 32 мин. Однако на расчет решетки 7×7 потребуется уже около полутора лет.

В работе предлагается оптимизированный метод точного расчета, позволяющий значительно сократить время вычисления дискретной функции $g(E, M)$. С использованием этого метода время вычисления решетки 6×6 для модели Изинга составляет 0.875 с при распараллеливании на четыре потока на тех же вычислительных мощностях. Метод делает доступными вычисления решеток размером 10×10 за время, приблизительно равное 1,5 ч

Знание статистической суммы позволяет тестировать эффективность различных вероятностных алгоритмов: Метрополиса [4], Свендсена – Ванга [5], Вольфа [6], Ванга – Ландау [7] и др.

1. Описание алгоритма

Идея метода заключается в выделении малой подсистемы, расчете всех ее возможных состояний и последовательном расширении ее до исходной системы. В случае прямоугольных решеток целесообразно выбрать один любой спин. На каждом шаге к подсистеме будет добавляться спин исходной системы. Процесс необходимо продолжать до тех пор, пока не будет получена исходная система.

Введем понятия открытого и закрытого спина. Будем называть спин подсистемы открытым, если число его соседей в подсистеме меньше числа его соседей в исходной системе. Т.е. спин граничит со спином, еще не включенным в рассматриваемую подсистему. В противном случае будем называть его закрытым. В процессе расчета функцию $g(E, M)$ удобно представлять в виде таблицы или матрицы, по одной оси которой отложены все возможные значения намагниченности системы, а по другой отложены все возможные значения энергии. Значение каждого элемента такой матрицы равно количеству конфигураций с соответствующими значениями энергии и намагниченности. Если конфигураций с определенными значениями энергии

и намагниченности не существует, то значение элемента матрицы будет равно нулю (рис. 1).

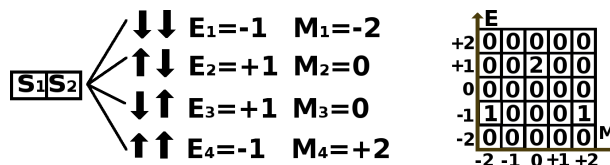


Рис. 1. Составление матрицы кратности вырождения по энергии и намагниченности для системы двух спинов: s_1 и s_2 . E и M — значения энергии и намагниченности соответственно.

Алгоритм применим только для случая, когда константа обменного взаимодействия одинакова для всех пар взаимодействующих спинов. Метод применим для систем любых размерностей.

Алгоритм состоит из 9 шагов.

- 1) Выберем малую подсистему (например, 1 спин).
- 2) Составим список открытых спинов подсистемы: $L = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, n — количество открытых спинов и $s_1, s_2, \dots, s_n$ — их номера.
- 3) Методом исчерпывающего перечисления составим матрицы вырождений по энергии и намагниченности для каждой конфигурации открытых спинов.
- 4) Расширим подсистему, включив в нее спин исходной системы.
- 5) Сделаем копию всех имеющихся матриц вырождений. Имеем теперь 2 набора матриц.
- 6) Пусть значение добавленного спина равно -1 . Для каждой конфигурации спинов из списка L рассчитаем изменения энергии и намагниченности ΔE и ΔM и сместим в соответствующих матрицах первого набора все элементы на величину ΔE по вертикали и ΔM по горизонтали. ΔE равно энергии взаимодействия добавляемого спина и спинов списка L , $\Delta M = -1$.
- 7) Пусть значение добавленного спина равно $+1$. Для каждой конфигурации спинов из списка L рассчитаем изменения энергии и намагниченности ΔE и ΔM и сместим в соответствующих матрицах второго набора все элементы на величину ΔE по вертикали и ΔM по горизонтали. ΔE равно энергии взаимодействия добавляемого спина и спинов списка L , $\Delta M = +1$.
- 8) Обновим список L , включив в него все открытые спины подсистемы и удалив закрытые.
- 9) Если расширенная подсистема равна исходной системе, то искомую матрицу $g(E, M)$ получаем алгебраическим сложением всех матриц вырождений. Завершаем расчет. Если расширенная подсистема не равна исходной системе, в

обоих наборах осуществим алгебраическое сложение матриц вырождений, соответствующих одинаковым конфигурациям спинов списка L , обновленного на шаге 8. Возвращаемся к шагу 4.

2. Работа алгоритма на примере решетки 2×2

Рассмотрим ферромагнитную 2D модель Изинга размером 2×2 с непериодическими граничными условиями. На данном примере можно детально проследить все шаги описанного выше алгоритма. Задача — получить матрицу вырождения состояний по энергии и намагниченности. Для удобства пронумеруем спины (рис. 2).



Рис. 2. Схема нумерации спинов в решетке 2×2 модели Изинга.

Выберем в качестве начальной подсистемы спин s_1 . Схема расширения до исходной системы приведена на рис. 3. Там же введены обозначения для подсистем A, B и C. Исходная система обозначена как D. На рисунке открытые спины каждой из подсистем заштрихованы.

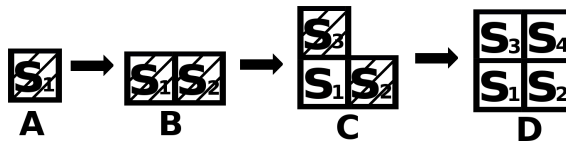


Рис. 3. Схема расширения подсистемы A, состоящей из одного спина, до исходной системы D. Заштрихованная клетка означает, что спин подсистемы является открытым.

Рис. 4 иллюстрирует первые 9 шагов алгоритма. На нем можно увидеть, как осуществляется исчерпывающее перечисление конфигураций подсистемы A на шаге 3. Далее, после добавления спина копируем набор матриц вырождений, полученных на шаге 3. Таким образом, получаем два одинаковых набора матриц. На шестом, а затем и на седьмом шаге осуществляется расчет изменений значений намагниченности и энергии ΔE и ΔM для каждой конфигурации спинов списка L и добавляемого спина. Стоит отметить, что на шаге 9 каждой конфигурации спинов обновленного списка L соответствует только одна матрица. Полученные на данном шаге матрицы вырождений полностью описывают подсистему B. Т.к. $B \neq D$, возвращаемся к шагу 4.

На момент построения подсистемы C на шаге 4 в списке L содержится 2 спина: s_1, s_2 . На рис. 5 показана дальнейшая работа алгоритма. К подсистеме B добавляем спин s_3 . Копируем 4 матрицы вырождений во второй набор. Рассчитываем изменения энергии ΔE и намагниченности ΔM для каждой конфигурации спинов списка

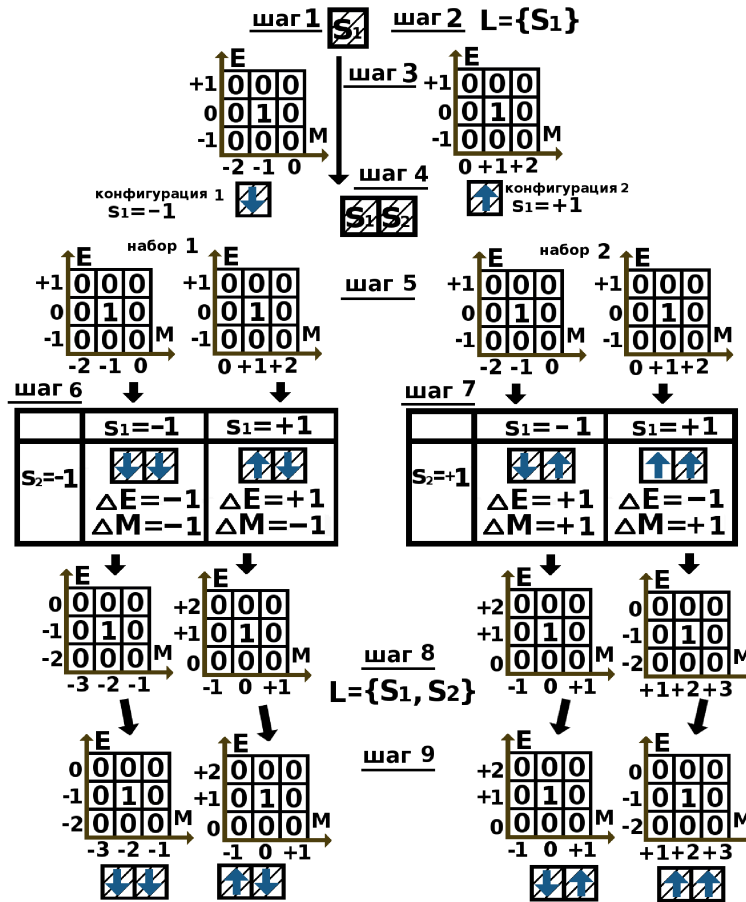


Рис. 4. Визуализация первых 9 шагов алгоритма. На схеме можно видеть расчет ΔE и ΔM , смещение элементов матриц в момент добавления спина.

$L = \{s_1, s_2\}$ для случаев $s_3 = -1$ и $s_3 = +1$. Сдвигаем элементы матриц на значения ΔE и ΔM по вертикали и горизонтали соответственно. Далее обновляем список открытых спинов L . Спин s_1 становится закрытым для подсистемы C , т.к. число его соседей в B равно 2, как и в исходной системе. Таким образом, в L войдут s_2 и s_3 . Далее осуществляем алгебраическое сложение матриц, соответствующих одинаковым конфигурациям спинов списка L . Т.к. система D все еще не построена, снова возвращаемся к шагу 4.

Расширим подсистему C , добавив к ней спин s_4 на шаге 4. Шаги 5–7 аналогичны предыдущим, будут лишь отличаться значения элементов матриц. На шаге 8 в список L не войдет ни один спин, т.к. все они станут закрытыми. К моменту выполнения шага 9 система D будет полностью построена. Т.к. мы достигли исходной системы D , необходимо алгебраически сложить получившиеся 8 матриц вырождений. Полученная матрица и есть искомая (рис. 6).

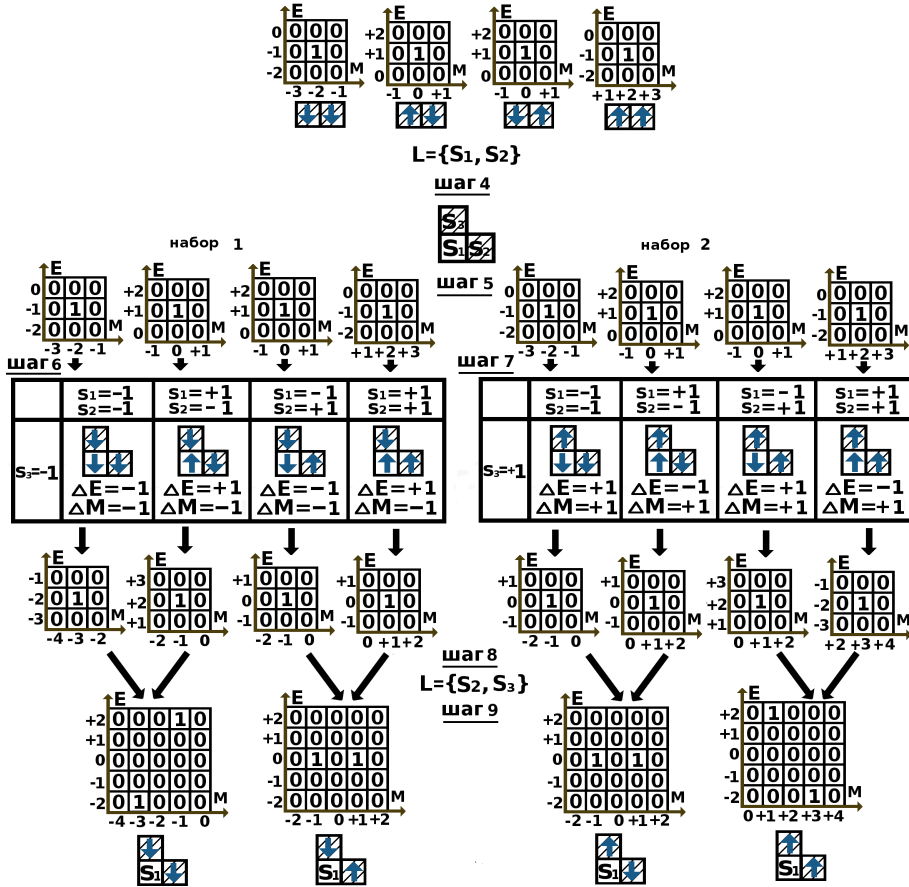


Рис. 5. Визуализация работы алгоритма для подсистемы С.

3. Анализ производительности алгоритма

В таблице 1 приведены параметры работы метода исчерпывающего перечисления на примере расчета прямоугольной решетки спинов размером $K \times K$ с периодическими граничными условиями с распараллеливанием по четырем потокам на процессоре AMD Phenom(tm) II X4 970.

Т.к. количество возможных конфигураций спинов в квадратной решетке размерами $K \times K$ равно $2^{K \cdot K}$, время расчета будет вычисляться по формуле

$$t(K) = C_1 \cdot 2^{K \cdot K}, \quad (3)$$

где C_1 — некоторая константа, определяемая реализацией алгоритма и особенностями архитектуры компьютера. С увеличением линейного размера решетки с K на $K+1$ время расчета увеличится как

$$t(K+1)/t(K) = 2^{2 \cdot K + 1}. \quad (4)$$

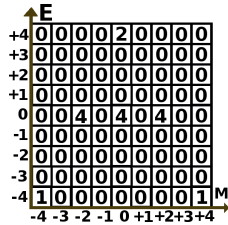


Рис. 6. Результирующая матрица вырождений состояний по энергии и намагниченности для системы D.

Таблица 1. Производительность параллельного алгоритма расчета (на CPU) решетки спинов $K \times K$ модели Изинга с периодическими граничными условиями на процессоре AMD Phenom(tm) II X4 970.

номер рас- чета i	решетка	время рас- чета t	отношение t_i к t_{i-1} факти- ческое	отношение t_i к t_{i-1} теоре- тическое
1	4×4	4.7 мс		
2	5×5	2400 мс	511	512
3	6×6	5580000 мс	2291	2048

В таблице 1 в пятой колонке приведены отношения времен, вычисленные по формуле (4). Можно увидеть, что они приблизительно согласуются с фактическими значениями, указанными в четвертой колонке. По приведенной формуле можно вычислить приблизительное время расчета решетки 7×7 : оно будет больше, чем у 6×6 в 2^{13} раз и составит 529 суток при тех же вычислительных мощностях.

Для сравнения в таблице 2 приведены параметры работы оптимизированного метода исчерпывающего перечисления на примере расчета квадратной решетки размером $K \times K$ с периодическими граничными условиями

Начальной подсистемой являлся нижний спин. Достройка до исходной системы осуществлялась ряд за рядом, снизу вверх. Каждый ряд достраивался последовательно слева направо. В соответствии с алгоритмом после каждого добавления спина осуществлялся перерасчет матриц вырождений.

Оценим быстродействие алгоритма. Всего следует осуществить K^2 шагов, пока не будет воссоздана исходная система $K \times K$. При указанном способе достройки число открытых спинов на каждом шаге примерно равно $2 \cdot K$. Открытыми спинами являются верхние и нижние граничные спины. В соответствии с алгоритмом при добавлении очередного спина осуществляется перебор всех возможных $2^{2 \cdot K}$ конфигураций открытых спинов. Каждой конфигурации соответствует матрица вырождения состояний по энергии и намагниченности. Для изменения матрицы вырождений надо осуществить двойной цикл по строкам и столбцам. Число элементов матрицы равно произведению всех возможных значений энергии $(4K^2 + 1)$ и намагниченно-

сти $(2K^2 + 1)$. Таким образом, время расчета будет пропорционально количеству спинов решетки, количеству возможных конфигураций граничных спинов и числу элементов матрицы вырождений:

$$t(K) = C_2 \cdot K^2 \cdot 2^{2 \cdot K} (2K^2 + 1)(4K^2 + 1), \quad (5)$$

где C_2 некоторая константа, определяемая реализацией алгоритма и особенностями архитектуры компьютера. Тогда, с увеличением линейного размера решетки с K на $K + 1$ время расчета увеличится как

$$t_{op}(K + 1)/t_{op}(K) = 4 \cdot \frac{(K + 1)^2(2(K + 1)^2 + 1)(4(K + 1)^2 + 1)}{K^2(2K^2 + 1)(4K^2 + 1)}. \quad (6)$$

В таблице 2 в пятой колонке приведены отношения времен, вычисленные по формуле (6). В целом, они также согласуются с фактическими значениями, приведенными в таблице 2 в четвертой колонке. Можно заметить, что в пределе при бесконечно больших значениях K отношение времен в формуле (6) равно 4. Из формулы (6) следует, что время расчета для решетки 9×9 возрастет примерно в 8.09 раз по сравнению с 8×8 и составит около 11 минут.

Таблица 2. Производительность оптимизированного алгоритма расчета решетки спинов $K \times K$ модели Изинга с периодическими граничными условиями на процессоре AMD Phenom(tm) II X4 970 без распараллеливания.

номер расчета i	решетка	время расчета t	отношение t_i к t_{i-1} фактическое	отношение t_i к t_{i-1} теоретическое
1	4×4	8 мс		
2	5×5	77 мс	9.6	15.01
3	6×6	875 мс	11.36	11.84
4	7×7	8902 мс	10.17	10.03
5	8×8	82145 мс	9.22	8.88

4. Заключение

В работе представлен ускоренный алгоритм исчерпывающего перечисления, а также результаты тестирования его на квадратной решетке с периодическими условиями. Время расчета метода исчерпывающего перечисления растет с увеличением размера решетки в основном как $2^{K \cdot K}$, в оптимизированном варианте алгоритма, представленном в статье, оно растет в основном как $2^{2 \cdot K}$. Алгоритм легко изменить под различные граничные условия. Есть возможность модификации, в которой учитывается взаимодействие соседей второго порядка.

Существует большое количество работ, например, [8, 9], посвященных различным вероятностным методам расчетов моделей Изинга, но вопрос качества полученных с их помощью результатов остается открытым [10]. Предлагаемый оптимизированный алгоритм точного расчета позволяет осуществить проверку вероятностных подходов. В дальнейшем его можно улучшить путем сокращения объема памяти, используемой для хранения матриц вырождений, а также использования симметрий матриц по отношению к перестановкам спинов. Ожидается, что улучшенный распараллеленный алгоритм даст возможность осуществить расчет решеток спинов вплоть до размеров 15×15 .

Расчет был осуществлен с использованием суперкомпьютера Вычислительного центра ДВО РАН.

Список литературы

- [1] J. H. Van Vleck, *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Oxford University Press, London, 1932.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика В 10 т. Т. 5 (В 2 ч. Ч.1) Статистическая физика*, Физматлит, М., 2013.
- [3] Р. Д. Бакстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [4] N. A. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. H. Teller, "Equation of state calculation by fast computing machines", *J. Chem. Phys.*, **21**:6, (1953), 1087–1092.
- [5] R. H. Swendsen, J. S. Wang, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. H. Teller, "Nonuniversal critical dynamics in Monte-Carlo simulations", *Phys. Rev. Lett.*, **58**:2, (1987), 86–88.
- [6] U. Wolff, "Collective Monte-Carlo Updating for Spin Systems", *Phys. Rev. Lett.*, **2**:4, (1989), 361–364.
- [7] F. Wang, D. P. Landau, "Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States.", *Phys. Rev. Lett.*, **86**:10, (2001), 2050–2053.
- [8] M. E. J. Newman, G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [9] D. P. Landau, K. Binder, *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics, 4th ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [10] L. Yu. Barash, M. A. Fadeeva, L. N. Shchur, "Control of accuracy in the Wang-Landau algorithm", *Phys. Rev. Lett.*, **E 96**, **043307**, (2017), 2050–2053.

Поступила в редакцию
17 июля 2019 г.

Работы выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования. Государственное задание номер 075-00400-19-01.

Padalko M. A., Andriushchenko P. D., Soldatov K. S., Nefedev K. V. An accelerated exhaustive enumeration algorithm in the Ising model. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 235–244.

ABSTRACT

An accelerated algorithm for the precise calculation of the lattice Ising model is presented. The algorithm makes it possible to calculate two-dimensional 10x10 lattices for periodic boundary conditions on ordinary personal computers. In turn, the exact solution obtained by the proposed method makes it possible to check the effectiveness of various probabilistic approaches, in particular the Monte Carlo methods. The algorithm is applicable to various types of lattices.

Key words: *Ising model, complete enumeration, Monte-Carlo method.*

УДК 51-73+536.758

MSC2010 70F10

© Ю. Н. Харченко¹

Решение одномерных моделей решеточного газа

В настоящей работе показано, что термодинамический предел статистической суммы рассматриваемых статистических моделей на одномерной решётке с произвольным конечным числом взаимодействующих соседей выражается через главное собственное значение матрицы конечного размера. Высокая разреженность таких матриц для любого числа взаимодействий позволяет производить эффективный численный анализ макрохарактеристик моделей.

Ключевые слова: *модель Изинга, трансфер-матрица, статистическая сумма, свободная энергия, сингулярные кривые, фазовые переходы.*

Введение

Под решёточным газом здесь понимается множество атомов, которые могут располагаться только в узлах регулярной решётки. При построении модели решёточного газа используется большой канонический ансамбль, в статистической сумме которого производится суммирование по всем наборам атомов, которые можно разместить в узлах решётки при условии, что любой узел может быть занят не более чем одним атомом. Эта модель допускает представление в виде модели Изинга [1, 2], в которой одному направлению спина сопоставляется занятый атомом узел, а другому направлению — пустой узел и тогда суммирование по наборам атомов заменяется суммированием по наборам состояний спинов. После преобразования параметров исходной модели получаются модели, одномерные варианты которых будут рассмотрены ниже.

Вообще говоря, одномерные модели не привлекают большого внимания, поскольку в них отсутствуют фазовые переходы [2, 3]. Но результаты исследований систем [4, 5], которые приближённо можно считать состоящими из одномерных цепочек атомов, дают основание полагать что даже небольшое взаимодействие этих цепочек между собой может привести к появлению фаз и, как следствие, к появлению сингулярности в свободной энергии такой системы. Однако введение такого взаимодействия уже делает модель многомерной, со всеми известными в этом случае [2, 6, 7]

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: har@iam.dvo.ru

сложностями теоретического анализа. Только в некоторых случаях удаётся получить точное решение модели, поэтому важное значение приобретают численные методы [8,9]. Недостаток численных методов решения многочастичных задач состоит в невозможности, в общем случае, проводить вычисления для большого числа частиц. Это приводит к неопределённости вопроса о близости данных вычислений величин к термодинамическому пределу данных величин. Полученное здесь решение задачи вычисления свободной энергии для трансляционно инвариантных статистических моделей с бинарным взаимодействием спинов (моделей Изинга), с произвольным конечным числом спинов взаимодействующих с каждым спином, может прояснить некоторые аспекты этих проблем. В этом решении свободная энергия модели спинов (расположенных в узлах одномерной решётки) в термодинамическом пределе выражается через главное собственное значение матрицы конечной размерности, которая определяется радиусом взаимодействия между спинами. Таким образом задача вычисления термодинамических величин данных моделей сводится к вычислению главного собственного значения соответствующей матрицы. Для небольшого размера матрицы это не вызывает проблем. При больших размерах произвести вычисления позволяет метод степенных итераций матрицы, в котором эффективно используется специфическая форма этих матриц [9].

1. Статистическая сумма

Пусть σ_n^m , $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N + M$ — бинарные переменные (спины), которые принимают два значения ± 1 , а $M, N, M < N$ — некоторые натуральные числа. Рассмотрим статистическую модель на одномерной решётке с узлами, пронумерованными натуральными числами $1, \dots, N + M$, статистическая сумма которой имеет вид

$$Z_N^{(1)}(M) = Z_N^{(1)}(M, \{K_i\}, H) = \sum_{\sigma^1} \prod_{j=1}^N \exp\left(\sum_{i=1}^M K_i \sigma_j^1 \sigma_{j+i}^1 + H \sigma_j^1\right). \quad (1)$$

Здесь суммирование по $\sigma^1 = (\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_N^1)$ означает суммирование по всем состояниям спинов, K_i , $i = 1, \dots, M$, — некоторые вещественные параметры межспинового взаимодействия, H — параметр взаимодействия с внешним полем, и выполняется краевое условие $\sigma_{N+j}^1 = \sigma_j^1$ $j = 1, \dots, M$. Нас будет интересовать свободная энергия $F^{(1)}(M)$, которая для конкретного значения M вычисляется по формуле

$$F^{(1)}(M) = F^{(1)}(M, \{K_i\}, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N^{(1)}(M, \{K_i\}, H)}{N}. \quad (2)$$

При $M=1$ формула (1) даёт статистическую сумму одномерной модели Изинга со взаимодействием между ближайшими спинами, которая имеет точное решение. Свободная энергия этой модели вычисляется через главное собственное значение (ГСЗ) — (положительное, однократное и максимальное по модулю собственное значение) матрицы размером 2×2 [6,7] (решение Изинга). Мы покажем, что свободная энергия модели с произвольным значением M вычисляется через ГСЗ некоторой матрицы

размером $2^M \times 2^M$ (это собственное значение для конечных значений M существует по теореме Перрона–Фробениуса). Будем называть такие модели одномерными моделями Изинга.

Пусть $\mu_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^M)$ — наборы бинарных переменных. Будем полагать, что множество этих наборов упорядочено. Тогда след N -ой степени матрицы $A(M)$, элементы которой имеют вид $g(\mu_j, \mu_{j+1})$, равен

$$\text{tr}(A^N(M)) = \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \dots \sum_{\mu_N} \prod_{j=1}^N g(\mu_j, \mu_{j+1}). \quad (3)$$

Положим теперь, что элементы $g(\mu_j, \mu_{j+1})$ удовлетворяют равенствам

$$g(\mu_j, \mu_{j+1}) = \exp\left(\sum_{i=1}^M K_i \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^i + H \sigma_j^1\right) \delta(\sigma_j^2, \sigma_{j+1}^1) \dots \delta(\sigma_j^M, \sigma_{j+1}^{M-1}), \quad (4)$$

где $\delta(\sigma_j^i, \sigma_{j+1}^{i-1})$ — символы Кронекера, $\delta(x, y) = 0, x \neq y, \delta(x, y) = 1, x = y$, а x, y — целые числа. Для этого случая вычислим сумму с правой стороны равенства (3)

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \dots \sum_{\mu_N} \prod_{j=1}^N g(\mu_j, \mu_{j+1}) = \\ &= \sum_{\sigma^1} \sum_{\sigma^2} \dots \sum_{\sigma^M} \prod_{j=1}^N \exp\left(\sum_{i=1}^M K_i \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^i + H \sigma_j^1\right) \delta(\sigma_j^2, \sigma_{j+1}^1) \dots \delta(\sigma_j^M, \sigma_{j+1}^{M-1}) = \\ &= \sum_{\sigma^1, \dots, \sigma^{M-1}} \prod_{j=1}^N \exp\left(\sum_{i=1}^{M-1} K_i \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^i + K_M \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^{M-1} + H \sigma_j^1\right) \delta(\sigma_j^2, \sigma_{j+1}^1) \dots \delta(\sigma_j^{M-1}, \sigma_{j+1}^{M-2}) = \\ &= \sum_{\sigma^1, \dots, \sigma^{M-2}} \prod_{j=1}^N \exp\left(\sum_{i=1}^{M-2} K_i \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^i + K_{M-1} \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^{M-2} + K_M \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^{M-2} + H \sigma_j^1\right) \\ & \quad \delta(\sigma_j^2, \sigma_{j+1}^1) \dots \delta(\sigma_j^{M-2}, \sigma_{j+1}^{M-3}) = \dots = Z_N^{(1)}(M). \end{aligned}$$

Отсюда получим равенство, которое выполняется при условии (4)

$$Z_N^{(1)}(M) = \text{tr}(A^N(M)). \quad (5)$$

Преобразование подобия не меняет следа матрицы и любую матрицу преобразованием подобия можно привести к треугольному виду [10]. Поэтому статистическая сумма равна сумме N -х степеней всех собственных значений матрицы $A(M)$. Матрица $A(M)$ называется трансфер-матрицей, свободная энергия $F^{(1)}(M)$ (2) выражается через ГСЗ $\lambda(A(M))$ трансфер-матрицы $A(M)$ формулой [2, 9]

$$F^{(1)}(M) = \ln(\lambda(A(M))).$$

Далее будет дано выражение трансфер-матрицы $A(M)$ в форме удобной для приложений. Для этого изложим некоторые сведения из теории индексированных матриц.

2. Индексированные матрицы

Теория индексированных матриц для решёточных моделей представлена в монографии [9]. Определим одноиндексные матрицы, операторы перестановок индексов и формулы, которые понадобятся в дальнейшем.

Оператором перестановок индексов будем называть оператор переставляющий векторы канонического базиса евклидова пространства $\mathbb{R}^{2^J}$ $\delta^j = [\delta(j, 1), \dots, \delta(j, 2^J)]^T$ (здесь J — некоторое натуральное число и T — знак транспонирования) в следующем порядке:

$$\delta^j \rightarrow \delta^{2j-1} \quad \text{и} \quad \delta^{2^{J-1}+j} \rightarrow \delta^{2j}, \quad j = 1, \dots, 2^{J-1}.$$

Его матрицу размером $2^J \times 2^J$ в этом базисе будем обозначать символом P_J .

Пусть q — числовая матрица размером 2×2 , тогда через $q_{[1]}$ будем обозначать блочно-диагональную матрицу размером $2^J \times 2^J$, блоками которой служит матрица q . Индексированную матрицу $q_{[j]}$ определим формулой $q_{[j]} = P_J^j q_{[1]} P_J^{-j}$. Матрица $q_{[j]}$ — это блочно-диагональная матрица. Её блоками служат матрицы, получающиеся, если на место каждого элемента матрицы q подставить единичные матрицы размером $2^{(j-1)} \times 2^{(j-1)}$, умноженные на значение этого элемента.

Для конкретных матриц размером 2×2 будем применять обозначение $\{(*, *), (*, *)\}$, где в круглых скобках будем записывать элементы строк.

Из блочной структуры индексированных матриц следует, что матрицы q и w с разными индексами коммутируют

$$q_{[i]} w_{[j]} = w_{[j]} q_{[i]}, \quad i \neq j, \quad (6)$$

а из определения индексированных матриц следует равенство

$$q_{[i]} w_{[i]} = (qw)_{[i]}. \quad (7)$$

Введём обозначения для базисных матриц размером 2×2 :

$$e = e(+1, +1) = \{(1, 0), (0, 0)\}, \quad f = e(+1, -1) = \{(0, 1), (0, 0)\},$$

$$g = e(-1, +1) = \{(0, 0), (1, 0)\}, \quad h = e(-1, -1) = \{(0, 0), (0, 1)\}. \quad (8)$$

Тогда любая матрица B размером $2^J \times 2^J$ может быть записана в виде

$$B = \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \beta(\sigma^1, \sigma^2) \prod_{j=1}^J e(\sigma_j^1, \sigma_j^2)_{[j]} \equiv B_{[J, \dots, 1]}, \quad (9)$$

где $\beta(\sigma^1, \sigma^2)$ — числовые коэффициенты и выполняются равенства

$$e(\sigma_j^1, \sigma_j^2)_{[j]} e(\sigma_j^3, \sigma_j^4)_{[j]} = \delta(\sigma_j^2, \sigma_j^3) e(\sigma_j^1, \sigma_j^4)_{[j]}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (10)$$

След матрицы B вычисляется так:

$$\begin{aligned} tr(B) &= \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \beta(\sigma^1, \sigma^2) tr \left(\prod_{j=1}^J e(\sigma_j^1, \sigma_j^2)_{[j]} \right) = \\ &= \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \beta(\sigma^1, \sigma^2) \prod_{j=1}^J \delta(\sigma_j^1, \sigma_j^2) = \sum_{\sigma^1} \beta(\sigma^1, \sigma^1). \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме оператора P_J , введём ещё перестановочные операторы, матрицы которых $P_{[i,j]}$ имеют вид

$$P_{[i,j]} = e_{[i]}e_{[j]} + f_{[i]}g_{[j]} + g_{[i]}f_{[j]} + h_{[i]}h_{[j]}, i \neq j.$$

Они обладают свойствами

$$q_{[i]}P_{[i,j]} = P_{[i,j]}q_{[j]}, \quad P_{[i,j]}P_{[i,m]} = P_{[j,m]}P_{[i,j]}, \quad P_J = P_{[J,1]}P_{[J-1,1]} \dots P_{[2,1]}, \quad (12)$$

в частности, выполняются равенства

$$P_{[J,j]}P_{[J,m]} = P_{[j,m]}P_{[J,j]}, \quad q_{[j]}P_{[J,j]} = P_{[J,j]}q_{[J]} \quad (13)$$

Заметим, что из формулы (9) следует, что матрицу B можно записать в виде

$$B = e_{[J]}C_{[J-1,\dots,1]} + f_{[J]}D_{[J-1,\dots,1]} + g_{[J]}E_{[J-1,\dots,1]} + h_{[J]}F_{[J-1,\dots,1]},$$

где все индексированные матрицы имеют размер $2^J \times 2^J$. Но, исходя из блочной структуры индексированных матриц, матрице B можно придать вид

$$B = \{(C_{[J-1,\dots,1]}, D_{[J-1,\dots,1]}), (E_{[J-1,\dots,1]}, F_{[J-1,\dots,1]})\},$$

где элементы матрицы размером 2×2 следует понимать как матрицы размером $2^{(J-1)} \times 2^{(J-1)}$. Так, полезные для наших дальнейших вычислений равенства (13) в этих обозначениях примут вид

$$\{(e_{[j]}, g_{[j]}), (f_{[j]}, h_{[j]})\} \{(e_{[m]}, g_{[m]}), (f_{[m]}, h_{[m]})\} = P_{[j,m]} \{(e_{[j]}, g_{[j]}), (f_{[j]}, h_{[j]})\}, \quad (14)$$

$$q_{[j]} \{(e_{[j]}, g_{[j]}), (f_{[j]}, h_{[j]})\} = \{(e_{[j]}, g_{[j]}), (f_{[j]}, h_{[j]})\} q,$$

где все индексированные матрицы имеют размер $2^{(J-1)} \times 2^{(J-1)}$.

3. Трансфер-матрица

Для заданного значения M конкретная форма трансфер — матрицы $A(M)$ определяется соответствием между наборами бинарных переменных и натуральными числами, которыми нумеруются элементы матрицы. Рассмотрим матрицу, которая определяется формулой

$$A(M) = \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} g(\mu_1, \mu_2) e(\sigma_1^1, \sigma_2^1)_{[1]} e(\sigma_1^2, \sigma_2^2)_{[2]} \dots e(\sigma_1^M, \sigma_2^M)_{[M]}, \quad (15)$$

где величина $g(\mu_1, \mu_2)$ согласно (4) имеет вид

$$g(\mu_1, \mu_2) = \exp\left(\sum_{i=1}^M K_i \sigma_1^1 \sigma_2^i + H \sigma_1^1\right) \delta(\sigma_1^2, \sigma_2^1) \dots \delta(\sigma_1^M, \sigma_2^{M-1}),$$

и все индексированные матрицы имеют размер $2^M \times 2^M$. Покажем, что эта матрица является трансфер-матрицей модели (1). Для этого вычислим статистическую

сумму по формуле (5). В этих вычислениях будем использовать наборы бинарных переменных $\nu_n = (\nu_n^1, \nu_n^2, \dots, \nu_n^M)$, аналогичные μ_n . Сначала вычислим $A^2(M)$, для этого запишем $A^2(M)$ в виде

$$A^2(M) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1} g(\mu_1, \mu_2) e(\sigma_1^1, \sigma_2^1)_{[1]} \dots e(\sigma_1^M, \sigma_2^M)_{[M]} g(\nu_1, \mu_3) e(\nu_1^1, \sigma_3^1)_{[1]} \dots e(\nu_1^M, \sigma_3^M)_{[M]}.$$

С учётом перестановочных соотношений (6) и равенств (10) это произведение запишем в виде

$$\begin{aligned} A^2(M) &= \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1} g(\mu_1, \mu_2) g(\nu_1, \mu_3) \delta(\sigma_2^1, \nu_1^1) e(\sigma_1^1, \sigma_3^1)_{[1]} \dots \delta(\sigma_2^M, \nu_1^M) e(\sigma_1^M, \sigma_3^M)_{[M]} = \\ &= \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} g(\mu_1, \mu_2) g(\mu_2, \mu_3) e(\sigma_1^1, \sigma_3^1)_{[1]} \dots e(\sigma_1^M, \sigma_3^M)_{[M]}. \end{aligned}$$

Продолжив процесс умножения на $A(M)$, получим

$$A^{(N-1)}(M) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \prod_{j=1}^{(N-1)} g(\mu_j, \mu_{(j+1)}) e(\sigma_1^1, \sigma_N^1)_{[1]} \dots e(\sigma_1^M, \sigma_N^M)_{[M]}.$$

Это выражение для $A^{(N-1)}(M)$ умножим на матрицу $A(M)$, которую запишем, используя наборы бинарных переменных ν_1 и ν_2 :

$$A(M) = \sum_{\nu_2} \sum_{\nu_1} g(\nu_2, \nu_1) e(\nu_2^1, \nu_1^1)_{[1]} e(\nu_2^2, \nu_1^2)_{[2]} \dots e(\nu_2^M, \nu_1^M)_{[M]}.$$

В результате получим выражение для $A^N(M)$

$$A^N(M) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1} \prod_{j=1}^{N-1} g(\mu_j, \mu_{(j+1)}) e_{[1]} g(\mu_N, \nu_1) e(\sigma_1^1, \nu_1^1)_{[1]} \dots e(\sigma_1^M, \nu_1^M)_{[M]}.$$

Вычислив след правой части этого равенства по формуле (11), получим статистическую сумму (1) в форме (5).

Теперь вычислим трансфер-матрицу $A(M)$ (15). Сумму по всем значениям набора μ_1 трансфер-матрицы (15) запишем в виде $A(M) = Q + W$, где

$$\begin{aligned} Q &= \exp(H) \sum_{\mu_2} e(1, \sigma_2^1)_{[1]} \exp(K_1 \sigma_2^1) \prod_{i=1}^{M-1} e(\sigma_2^i, \sigma_2^{i+1})_{[i+1]} \exp(K_{i+1} \sigma_2^{i+1}), \\ W &= \exp(-H) \sum_{\mu_2} e(1, \sigma_2^1)_{[1]} \exp(-K_1 \sigma_2^1) \prod_{i=1}^{M-1} e(\sigma_2^i, \sigma_2^{i+1})_{[i+1]} \exp(-K_{i+1} \sigma_2^{i+1}). \end{aligned}$$

Выражение для Q может быть представлено в виде произведения матриц размером 2×2 с элементами из индексированных матриц. Распишем его более подробно

$$\begin{aligned} Q &= \exp(H) \sum_{\sigma_2^1} e(1, \sigma_2^1)_{[1]} \exp(K_1 \sigma_2^1) \sum_{\sigma_2^2} e(1, \sigma_2^1)_{[2]} \exp(K_2 \sigma_2^2) \dots \\ &\sum_{\sigma_2^{M-1}} e(\sigma_2^{M-2}, \sigma_2^{M-1})_{[M-1]} \exp(K_{M-1} \sigma_2^{M-1}) \sum_{\sigma_2^M} e(\sigma_2^{M-1}, \sigma_2^M)_{[M]} \exp(K_M \sigma_2^M). \end{aligned}$$

Введём теперь следующие величины

$$S^i = \{(e_{[i]} \exp(K_i), f_{[i]} \exp(-K_i)), (g_{[i]} \exp(K_i), h_{[i]} \exp(-K_i))\}$$

и обозначим символами u и v векторы $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$. Тогда Q примет вид

$$Q = \exp(H)u \prod_{i=1}^M S^i(u^T + v^T).$$

Осуществим транспонирование этого полинома от индексированных матриц. Для этого транспонируем индексированные матрицы без изменения их прежних мест в полиноме. Это возможно ввиду коммутации данных матриц (6). Тогда получим выражение для Q^T

$$Q^T = \exp(H)u \prod_{i=1}^M r_i(K_i) \{(e_{[i]}, g_{[i]}), (f_{[i]}, h_{[i]})\}(u^T + v^T),$$

где символом $r(K_i)$ обозначена матрица, которая имеет вид

$$r(K_i) = \{(\exp(K_i), 0), (0, \exp(-K_i))\}.$$

Используя перестановочные соотношения (14), запишем выражение для Q^T в виде

$$\begin{aligned} Q^T &= \exp(H) \prod_{i=1}^M r_{[i]}(K_i) \prod_{i=1}^{M-1} P_{[i+1,1]} u \{(e_{[1]}, g_{[1]}), (f_{[1]}, h_{[1]})\}(u^T + v^T) = \\ &= \exp(H) \prod_{i=1}^M r_{[i]}(K_i) \prod_{i=1}^{M-1} P_{[i+1,1]} (e_{[1]} + g_{[1]}). \end{aligned}$$

Введём новые обозначения

$$\begin{aligned} t(K_i) &= \{(\exp(-K_i), 0), (0, \exp(K_i))\}, \quad c(H) = \{(\exp(H), 0), (0, \exp(-H))\}, \\ b_{[i,1]}(K_i) &= e_{[1]} r_{[i]}(K_i) + h_{[1]} t_{[i]}(K_i) \end{aligned}$$

и, используя коммутационные соотношения и формулы (6), (7), (12), получим

$$Q^T = P_M^{-1} r_{[1]}(K_M) (e_{[1]} + g_{[1]}) c_{[1]}(H) \prod_{i=1}^{M-1} b_{[i+1,1]}(K_i).$$

Таким же способом получим выражение для W^T

$$W^T = P_M^{-1} t_{[1]}(K_M) (f_{[1]} + h_{[1]}) c_{[1]}(H) \prod_{i=1}^{M-1} b_{[i+1,1]}(K_i).$$

Тогда для $A^T(M) = Q^T + W^T$ получим формулу

$$A^T(M) = P_M^{-1} a_{[1]}(K_M) c_{[1]}(H) \prod_{i=1}^{M-1} b_{[i+1,1]}(K_i),$$

где матрица $a(K_M)$ имеет вид

$$a(K_M) = \{(\exp(K_M), \exp(-K_M)), (\exp(-K_M), \exp(K_M))\}.$$

Отсюда получим искомое выражение для трансфер-матрицы $A(M)$ одномерной модели Изинга (1)

$$A(M) = \prod_{i=1}^{M-1} b_{[i+1,1]}(K_i) c_{[1]}(H) a_{[1]}(K_M) P_M. \quad (16)$$

4. Некоторые вопросы численного анализа моделей

Полученная трансфер-матрица имеет структуру, которая позволяет весьма эффективно использовать известный метод степенных итераций матрицы для вычисления её ГСЗ. Эффективность этого метода обусловлена чрезвычайной разреженностью трансфер-матрицы и существованием ГСЗ. Для любого M матрица оператора перестановки индексов имеет только один ненулевой элемент, равный единице в каждой строке и каждом столбце, а матрица, стоящая перед матрицей оператора перестановки индексов, является блочно-диагональной с блоками размером 2×2 . С другой стороны, M -я степень трансфер-матрицы является матрицей с положительными элементами, и поэтому, для неё выполняется теорема Перрона – Фробениуса [10], согласно которой ГСЗ матрицы существует и аналитично зависит от параметров матрицы $A(M)$. Существование ГСЗ критично для применения метода, а разреженность трансфер-матрицы позволяет построить экономный быстродействующий алгоритм для вычисления ГСЗ [9].

Такого вида матрицы были использованы для вычисления макрохарактеристик двумерных моделей типа Изинга с взаимодействием между ближайшими соседями [9, 11], где эти матрицы назывались корневыми трансфер-матрицами (КТМ). Свободная энергия $F^{(2)}$ этих двумерных моделей с КТМ $A^{(2)}(M)$ определялась формулой

$$F^{(2)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda(A^{(2)}(M)),$$

где $\lambda(A^{(2)}(M))$ — это ГСЗ матрицы $A^{(2)}(M)$.

Существуют по крайней мере три случая, в которых трансфер-матрица (16) по форме в точности совпадает с КТМ соответствующих многомерных моделей со взаимодействием между ближайшими соседями. Отличие состоит в том, что в одномерных моделях параметр M определяет в некотором смысле расстояние между взаимодействующими спинами, а параметр M в многомерных моделях равен числу узлов двумерной решётки по горизонтали, в то время как число узлов по вертикали является бесконечным. Рассмотрим эти случаи.

1) Выберем для параметров K_i в трансфер-матрице (16) значения $K_2 = \dots = K_{M-1} = 0, K_1 = K, K_M = L$. При этом трансфер-матрица $A(M)$ модели примет вид

$$A(M) = b_{[2,1]}(K) c_{[1]}(H) a_{[1]}(L) P_M.$$

Эта трансфер-матрица с точностью до обозначений совпадает с КТМ двумерной модели Изинга на квадратной решётке со взаимодействием между ближайшими соседями [9, с. 128].

2) Пусть параметры K_i принимают значения $K_2 = \dots = 0, K_{M-1} = J, K_1 = K, K_M = L$. Тогда трансфер-матрица $B(M)$ модели примет вид

$$B(M) = b_{[M,1]}(J) b_{[2,1]}(K) c_{[1]}(H) a_{[1]}(L) P_M,$$

и она с точностью до преобразования подобия совпадает с КТМ двумерной модели Изинга на треугольной решётке [9].

3) Для параметров K_i , которые принимают значения $K_2 = \dots = 0, K_{R-1} = 0, K_R = J, K_{R+1} = 0, K_{M-1} = 0, K_1 = K, K_M = L$, трансфер-матрица $C(M)$ одномерной модели примет вид

$$C(M) = b_{[R+1,1]}(U) b_{[2,1]}(K) c_{[1]}(H) a_{[1]}(L) P_M.$$

Эта трансфер-матрица при $M = RN$ совпадает с КТМ трёхмерной модели Изинга на кубической решётке со взаимодействием между ближайшими соседями [9, с. 147].

Ни для одной из этих моделей не существует аналитического решения при H не равном нулю. Что обращает внимание на использование возможностей численного анализа для одномерных моделей Изинга. Такие связи между одномерными и многомерными моделями могут быть использованы для решения проблем в исследованиях разнообразных моделей [12–14] методом численного анализа. В итерационном методе на скорость сходимости к пределу существенным образом влияет величина отношения ГСЗ к другому ближайшему по абсолютной величине собственному значению этой трансфер-матрицы. Было замечено [9], что это отношение достигает своего минимального значения вблизи точек, которые в пределе, при M стремящемся к бесконечности, стремятся к сингулярным точкам модели. Таким образом, изучение одномерных моделей может дать представление о картине расположения сингулярных линий в соответствующих многомерных моделях. Стоит отметить, что изучение одномерных моделей интересно и само по себе, а поскольку их свободная энергия определяется ГСЗ матрицы конечного размера, их термодинамические свойства в принципе могут быть исследованы численными методами с требуемой точностью.

Заключение

В работе было получено точное решение проблемы вычисления свободной энергии (2) одномерной статистической модели взаимодействующих спинов, в которой каждый спин взаимодействует с $2M$ ближайшими соседями (1). Проблема сведена к вычислению ГСЗ матрицы размером $2^M \times 2^M$ (16). В общем случае это ГСЗ не может быть вычислено точно, но специфическая форма матрицы позволяет использовать эффективный алгоритм для его численного вычисления. Кроме того форма матрицы позволила установить связь некоторых одномерных моделей Изинга с

многомерными моделями Изинга со взаимодействием между ближайшими соседями. Это позволяет использовать уже известные свойства многомерных моделей для прогнозирования свойств систем, состоящих из длинных цепочек атомов.

Список литературы

- [1] T. D. Lee, C. N. Yang, “Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation”, *Phys. Rev.*, **87**, (1952), 404–410.
- [2] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1982.
- [3] E. H. Lieb, D. C. Mfttis, *Mathematical Physics in One Dimension*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [4] P. Cambardella, A. Dallmeyer, K. Maiti, M. Malagoli, W. Eberhard, K. Karn, and C. Carbone, “Ferromagnetism in one-dimensional monatomic metal chains”, *Nature*, **416**:6878, (2002), 301–304.
- [5] P. D. Andriushchenko and K. V. Nefedev, “Magnetic phase transition in the lattice Ising model”, *Advanced Material Research*, **718**, (2013), 166–171.
- [6] R. Huang, “Ising spins on randomly multy-branched Hustmi square lattice: Thermodynamics and phase transition in cross-dimensional range”, *Physics Letters*, **A 380**, (2016), 3333–3339.
- [7] S. Shabnam, S. DasGupta, S. K. Roy, “Existence of a line of critical points in a two-dimensional Lebwohl Lasher model”, *Physics Letters*, **A 380**, (2016), 667–671.
- [8] F. Wang and D. P. Landau, “Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States”, *Physics Letters*, **86**:2050, (2001).
- [9] А. А. Дмитриев, В. В. Катрахов, Ю. Н. Харченко, *Корневые трансфер-матрицы в моделях Изинга.*, Наука, М., 2004.
- [10] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [11] V. V. Katrakhov, Yu. N. Kharchenko, “Two-dimensional four-line models of the Ising model type”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **149**:2, (2006), 1545–1558.
- [12] U. B. Arnalds, J. Cyico, Y. Stopfel, V. Kapaklis, O. Barenbold, M. A. Verschuren, U. Volf, V. Neu, A. Bergman and B. Hjorvarsson, “A new look on the two-dimensional Ising model: thermal artificial spins”, *New Journal of Physics*, **18**:2, (2016), 023008.
- [13] Y. Fan, “One-dimensional Ising model with k-spin interactions”, *European Journal of Physics*, **32**:6, (2011), 1643.
- [14] Y. Shevchenko, A. Makarov, K. Nefedev, “Effect of long- and shot-range interactions on the thermodynamics of dipolar spin ice”, *Physics Letters*, **A 381**, (2017), 428–434.

Поступила в редакцию
16 сентября 2019 г.

Kharchenko Yu. N. Solution of one-dimensional lattice gas models. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 245–255.

ABSTRACT

In this paper it is shown that the thermodynamic limit of the partition function of the statistical models under consideration on a one-dimensional lattice with an arbitrary finite number of interacting neighbors is expressed in terms of the principal eigenvalue of a matrix of finite size. The high sparseness of these matrices for any number of interactions makes it possible to perform an effective numerical analysis of the macro characteristics of these models.

Key words: *Ising model, transfer matrix, statistical sum, free energy, singular curves, phase transitions.*

УДК 519.248+519.87
MSC2010 62P10+92B15

© Г. Ш. Цициашвили¹

Эргодичность статистических оценок интенсивности пуассоновского потока

В настоящей работе ставится вопрос, как преобразовать процедуру статистических наблюдений, чтобы заменить длинный ряд наблюдений на несколько коротких и, наоборот, несколько коротких рядов на один длинный. Этот вопрос решается для оценки интенсивности стационарного пуассоновского потока и для оценки среднего времени безотказной работы технической системы с помощью понятия эргодичности процесса наблюдения.

Ключевые слова: *эргодичность, пуассоновский поток, показательное распределение, время наработки на отказ.*

1. Постановка задачи

При статистической обработке данных возникают задачи о замене длинного ряда наблюдений на несколько более коротких и несколько коротких рядов наблюдений на один более длинный. Задача замены длинного ряда наблюдений на короткие носит во многом технический характер, поскольку проведение длительных наблюдений затруднительно по техническим причинам. Такие задачи появляются, например, в оптоэлектронике [1], при статистической оценке времени наработки на отказ у технических систем [2] и т.д.

Задача замены нескольких коротких рядов наблюдений на один более длинный ряд тесно связана с задачей о малых выборках. Эта задача возникает при обработке наблюдений за поведением экологических, социологических, биоценотических, технических систем, наблюдений за потоками в системах массового обслуживания [3–5]. Трудности появляются при получении статистически достоверных оценок: несмещенных, состоятельных, эффективных и асимптотически нормальных. Переход к более длинному ряду наблюдений позволяет в некоторых случаях преодолеть эти трудности.

В настоящей работе ставится вопрос, можно ли заменить длинный ряд наблюдений на несколько более коротких и, наоборот, несколько коротких рядов на один

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru

более длинный. Важно знать, как такие замены отразятся на качестве получаемых статистических оценок. Оказывается, что этот вопрос упирается в понятие эргодичности процесса наблюдений: “среднее по ансамблю совпадает со средним по траектории”. Эргодической теории динамических систем посвящено большое количество как теоретических, так и прикладных работ, см., например, [6–8].

Однако, чтобы использовать понятие эргодичности для решения задач о малых выборках и о длинных рядах наблюдений, необходимо подобрать удобную вероятностную модель наблюдений. В настоящей работе для этой цели выбраны модель стационарного пуассоновского потока и модель последовательности времен наработки технических систем на отказ с показательным распределением, имеющим большое среднее значение. Построены статистические оценки интенсивности пуассоновского потока и параметра показательного распределения, для получения которых на основе свойства эргодичности выбраны удобные способы проведения наблюдений.

2. Оценка интенсивности пуассоновского потока

Рассмотрим стационарный пуассоновский поток Λ с интенсивностью θ . Пусть $A = [a, b)$, $a < b$, $B = [b, c)$, $b < c$, – непересекающиеся полуинтервалы на вещественной оси, $C = A \cup B$. Известно, что случайные величины $n(A)$, $n(B)$, определяющие число точек стационарного пуассоновского потока на непересекающихся полуинтервалах A , B , независимы [9, с. 12, свойство 2^0 отсутствия последействия]. Тогда случайные величины $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ имеют пуассоновское распределение с параметрами $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$. Из центральной предельной теоремы (см., например, [10, глава 7, теорема 2]) следует равномерная по t , $-\infty < t < \infty$, сходимости

$$P\left(\frac{n(C)/\gamma - \theta}{\sqrt{\theta/\gamma}} < t\right) = P\left(\frac{n(C) - \theta\gamma}{\sqrt{\theta\gamma}} < t\right) \rightarrow \Phi(t), \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\Phi(t)$ – стандартное нормальное распределение (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

В качестве оценки параметра θ возьмем $\hat{\theta} = \frac{n(C)}{\gamma}$. Среднее и дисперсия этой оценки удовлетворяют равенствам

$$M\hat{\theta} = \theta, \quad D\hat{\theta} = \frac{\theta}{\gamma}. \quad (2)$$

Первое равенство в (2) означает несмещенность, соотношения (1), (2) влекут за собой состоятельность и асимптотическую нормальность оценки $\hat{\theta}$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

Пусть полуинтервалы $C_1, \dots, C_m$ попарно не пересекаются, имеют длину $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и пусть выполняется равенство $\gamma = \sum_{k=1}^m \gamma_k$. Положим $n(C_1), \dots, n(C_m)$ – число точек пуассоновского потока Λ на этих полуинтервалах и построим статистическую оценку $\hat{\theta}'$ параметра θ :

$$\hat{\theta}' = \frac{\sum_{k=1}^m n(C_k)}{\sum_{k=1}^m \gamma_k}. \quad (3)$$

Т.к. $n(C)$ совпадает по распределению с $\sum_{k=1}^m n(C_k)$, то статистика $\hat{\theta}'$, определяемая

равенством (3), совпадает по распределению со статистикой $\hat{\theta}$.

Таким образом, параметр θ можно оценивать как по наблюдениям за числом точек потока Λ на объединении непересекающихся полуинтервалов $C_1, \dots, C_m$, так и по наблюдениям за числом точек потока Λ на полуинтервале C длиной $\gamma \gg 1$. Причем число m может быть небольшим. Из формулы (3) следует, что оценку $\hat{\theta}'$ параметра θ можно рассматривать как медианту [11, с. 23], [12, с. 631], введенную для пары дробей, но допускающую обобщение для конечного числа дробей.

Эти свойства оценки $\hat{\theta}'$ интенсивности θ пуассоновского потока Λ близки к понятию эргодичности, что позволяет найти решение задачи о малых выборках, состоящих из числа точек пуассоновского потока на непересекающихся полуинтервалах с большой суммарной длиной.

3. Оценка большого параметра показательного распределения

Предположим, что имеется n технических систем, времена наработки на отказ которых $y_1, \dots, y_n$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением $P(y_1 > t) = \exp(-t/T)$, $t \geq 0$. Пусть параметр $T = My_1$ является большим: $T \gg 1$. Нашей задачей является построение такого способа организации испытаний и процедуры оценивания параметра T , при которых увеличение числа испытуемых систем в m раз приводит к уменьшению среднего времени проведения испытаний в $m - 1$ раз.

Обозначим $\hat{T}_n = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$, при построении оценки $\hat{T}_n$ суммарное время испытаний U_n с вероятностью единица удовлетворяет неравенству $U_n \geq \max(y_1, \dots, y_n)$. Следовательно, выполняются следующие соотношения

$$M\hat{T}_n = T, \quad D\hat{T}_n = \frac{T^2}{n}, \quad MU_n \geq M \max(y_1, \dots, y_n) \geq My_1 = T \gg 1. \quad (4)$$

Чтобы сократить суммарное время проведения испытаний, сконструируем следующую процедуру. Пусть nm систем начинают работу в момент времени 0. Испытания заканчиваются, когда откажут первые n систем. Предположим, что моменты отказа этих систем удовлетворяют соотношениям $0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n$. Тогда независимые случайные величины $z_1 = T_1$, $z_2 = T_2 - T_1, \dots, z_n = T_n - T_{n-1}$ имеют показательные распределения с параметрами nmT , $(nm-1)T, \dots, (nm-n+1)T$. Следовательно, независимые случайные величины nmz_1 , $(nm-1)z_2, \dots, (nm-n+1)z_n$ имеют показательное распределение с параметром T . Используя наблюдения $z_1, \dots, z_n$, построим оценку $\bar{T}_n$ параметра T :

$$\bar{T}_n = \frac{nmz_1 + (nm-1)z_2 + \dots + (nm-n+1)z_n}{n}.$$

Таким образом, случайная величина $\bar{T}_n$ совпадает по распределению со случайной величиной $\hat{T}_n$ и, значит, выполняются соотношения

$$M\bar{T}_n = T, \quad D\bar{T}_n = \frac{T^2}{n}. \quad (5)$$

В свою очередь, полное время проведения испытаний $V_n = z_1 + \dots + z_n$ состоит из слагаемых z_k таких, что $Mz_k = \frac{T}{mn - k + 1}$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяет соотношениям

$$\frac{T}{m} = \frac{T}{mn} n < MV_n = \sum_{k=1}^n \frac{T}{mn - k + 1} < \frac{T}{mn - n} n = \frac{T}{m - 1}.$$

И значит, для величины $S(m, n) = MV_n$ справедливы неравенства

$$\frac{T}{m} < S(m, n) < \frac{T}{m - 1}. \quad (6)$$

Сравнение формулы (4) с формулами (5), (6) показывает, что увеличение числа испытываемых систем в m раз позволяет путем построения статистической оценки $\bar{T}_n$ сократить среднее время проведения испытаний с MU_n до $MV_n = S(m, n)$ примерно в $m - 1$ раз. Такой способ организации испытаний и обработки их результатов может оказаться полезным при оценке параметра $T \gg 1$, характеризующего большое среднее время наработки на отказ. Этот прием близок к применению эргодичности при оценке интенсивности пуассоновского потока.

Список литературы

- [1] Ю. Н. Кульчин, “Фотоника самоорганизующихся биоминеральных наноструктур”, *УФН*, **181**:8, (2011), 891–896.
- [2] В. Б. Монсик, А. А. Скрынников, “Оценивание параметра показательного распределения по усеченной выборке”, *Научный вестник МГТУ ГА. Серия прикладная математика. Информатика*, **105**, (2006), 134–139.
- [3] Ф. Н. Ильясов, “Обратная задача выборки и мотивация на рынке Форекс”, *Социологические исследования*, **3**, (2011), 112–116.
- [4] Ф. Н. Ильясов, “Репрезентативность результатов опроса в маркетинговом исследовании”, *Социальные исследования*, **2**, (2016), 49–59.
- [5] Б. И. Семкин, “Об инвариантности средних отношений величин (на примере некоторых морфологических признаков слоевищ ламинарии японской (*Laminaria japonica* Aresh.) из сублиторали Северного Приморья”, *Известия ТИНРО*, **171**, (2012), 313–320.
- [6] J. von Neumann, “Physical Applications of the Ergodic Hypothesis”, *Proc Natl Acad Sci USA*, **18**, (1932), 263–266.
- [7] А. Я. Хинчин, *Математические основы статистической механики*, ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., Москва, 1943.
- [8] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, Москва, 1980.
- [9] А. Я. Хинчин, *Работы по теории математической теории массового обслуживания*, Физматлит, Москва, 1963.
- [10] А. А. Боровков, *Курс теории вероятностей*, Наука, Москва, 1972.
- [11] А. Я. Хинчин, *Ценные дроби*, Физматлит, Москва – Ленинград, 1949.

- [12] *Математическая энциклопедия*, т. 3, ред. И. М. Виноградов, Советская энциклопедия, Москва, 1982.

Поступила в редакцию
26 июня 2019 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-00177, программы «Дальний Восток» ДВО РАН, проект № 18-5-056).

Tsitsiashvili G. Sh. Ergodicity of statistical estimates of Poisson flow intensity. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 1–5.

ABSTRACT

This paper raises the question of how to transform the observation procedure to replace a long series of observations by several short and, conversely, several short series by one long. This problem is solved to assess the intensity of the stationary Poisson flow and to estimate the average time of operation of technical systems for failure using the concept of ergodicity of the observation process.

Key words: *ergodicity, Poisson flow, exponential distribution, mean failure time.*

К сведению авторов

Полугодовой «Дальневосточный математический журнал» (ДВМЖ) издается Дальневосточным отделением Российской Академии наук. В ДВМЖ на русском и английском языках публикуются статьи по всем разделам теоретической и прикладной математики, механики, содержащие изложение оригинальных результатов, не опубликованных ранее и не предназначенных к публикации в другом месте. По согласованию с главным редактором, ДВМЖ печатает и обзоры, а также краткие сообщения — небольшие рукописи, содержащие принципиально новые результаты.

Правила оформления рукописей

Редколлегия журнала просит руководствоваться приведенными ниже правилами. Статьи оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются.

Общие положения

- 1) Все материалы представляются в редакцию в одном экземпляре.
- 2) Статья должна быть подписана всеми авторами «В печать». Рукопись должна быть тщательно выверена, так как корректура авторам не высылается.
- 3) Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в учреждениях, должны иметь направления от соответствующих учреждений.
- 4) Текст статьи начинается с индекса УДК и кода классификатора MSC2010, затем следуют инициалы и фамилии авторов, заглавие статьи, краткая аннотация (не более 20 строк, использование сложных формул нежелательно). После аннотации обязательно указать ключевые слова.
- 5) В конце статьи (после списка литературы) печатаются фамилии и инициалы авторов в английской транскрипции, перевод на английский язык заглавия, аннотации и ключевых слов.
- 6) На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: фамилия, имя, отчество, полное название учреждения, в котором работает автор, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.
- 7) Объем статьи, как правило, не должен превышать 25 журнальных страниц. Статьи, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии. Тематика и объем обзоров согласовываются с главным редактором. Краткие сообщения — 3–5 журнальных страниц.
- 8) Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.
- 9) Просьба редакции о доработке статьи не означает, что статья принята к печати, так как она вновь будет рассматриваться рецензентами, а затем Редколлекцией. Доработанный вариант текста отправляется в Редакцию вместе с ответом на замечания рецензентов и редколлегии.
- 10) Редколлегия ДВМЖ оставляет за собой право не возвращать автору экземпляр отклоненной статьи и не вести дискуссию по мотивам отклонения.

Требования к оформлению рукописей

- 1) При подготовке рукописи на компьютере предпочтительным является использование издательского пакета $\text{\LaTeX}$, который применяется для подготовки оригинал-макета журнала. Редакция настоятельно рекомендует авторам ознакомиться с информацией о требованиях к подготовке файла статьи. Несоблюдение этих правил, предоставление только машинописного текста статьи или файла на ином диалекте $\text{\TeX}$ может сильно замедлить процесс прохождения статьи.
- 2) Загрузите стилевой файл `femj_ru.sty` (или `femj_en.sty` для статьи на английском языке) с сайта <http://www.mathnet.ru/dvmg> или <http://www.iam.khv.ru/FEMJ.php> и поместите его в каталог, в котором находится текст Вашей статьи. На этих же сайтах имеется образец заполнения $\text{\TeX}$ -файла статьи и полученного из него pdf-файла.

- 3) Статьи в $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ желательно оформлять в соответствии с правилами и рекомендациями, приведенными в книге: С. М. Львовский, *Набор и верстка в системе $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$* , 2-е или 3-е изд., М., МЦНМО. Электронная версия книги распространяется свободно, её можно найти на сайте <http://www.mccme.ru/free-books/>.
- 4) Не допускается переопределение стандартных команд $\text{\TeX}$ и $\text{\LaTeX}$, исключая случаи, когда это необходимо для замены стандартов AMS их русскими аналогами, например $\text{\Re}$ или $\text{\leq}$. Не допускается определение новых однобуквенных и односимвольных макрокоманд. Для определения новых макрокоманд следует использовать команду $\text{\newcommand}$ а не $\text{\def}$. В тексте $\text{\TeX}$ -файла желательно минимизировать количество нестандартных макроопределений. Не допускается использование макроопределений для кодирования текстовых включений.
- 5) Рисунки к работе могут быть выполнены средствами $\text{\LaTeX}$. Также допускаются рисунки в формате Encapsulated Post Script, созданные с помощью любого графического пакета, имеющего масштабируемый (векторный) формат графических файлов: Adobe Illustrator, CorelDraw и т.д. Не следует использовать немасштабируемые (растровые) форматы (bmp, psx, tiff, jpg и т.п.). Если в редакции не удастся воспользоваться прилагаемым файлом, то авторам необходимо будет согласовывать с редакцией технические детали. Рисунки, подготовленные иными способами, допускаются в порядке исключения.
- 6) Фамилии и инициалы иностранных авторов указываются в русской транскрипции. Статья не должна содержать терминологии на иностранных языках, если существует общепринятый перевод терминов на русский язык.
- 7) Крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. Тонкий знак пробела ставится в интеграле перед дифференциалом: $\int \limits_0^1 f(x) dx$. Многоточие всегда набирается командой $\text{\dots}$. Текстовое тире (длинное тире) набирается так: ---, а тире между числами — в виде -- (например, 75--80). Тире между фамилиями в названиях вроде “теорема Хана – Банаха” набирается в виде **теорема Хана** \, -- \, **Банаха**, но для разделения частей одной фамилии (например, как в фамилии Гарин-Михайловский) следует использовать дефис -.
- 8) Список литературы должен быть составлен с соблюдением оформления, принятого в журнале. Порядок ссылок — по мере упоминания в тексте. Ссылки на неопубликованные работы (кроме диссертаций) не допускаются. На все работы указанные в списке литературы, должны быть ссылки в тексте.
- 9) Список цитируемой литературы должен быть оформлен в стиле AMSBIB. Подробности смотрите в документе <http://www.mathnet.ru/poffice/amsbib.pdf>. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл **amsbib.sty** (<http://www.mathnet.ru/poffice/amsbib.sty>). Редакция настоятельно просит авторов придерживаться указанного стиля оформления литературы.
- 10) Подготовленная к печати статья отправляется по e-mail: **FEMJ@iam.khv.ru** или **femjpublish@gmail.com** и, одновременно, статья в отпечатанном виде, подписанная автором (авторами), с соответствующим распечатанным файлом высылаются в адрес редакции журнала:

690041, Приморский край, г. Владивосток, ул. Радио, 7, каб. 305
 Институт прикладной математики ДВО РАН
 Редакция «Дальневосточного математического журнала»
 тел./факс: +7(4212)324676,
 e-mail: **FEMJ@iam.khv.ru** или **femjpublish@gmail.com**

CONTENTS

ASTAPOV N. S., ASTAPOV I. S. The variety of generalizations of the Ptolemy's theorem	129
BYKOVSKII V. A. Decomposition in terms of special functions	138
ZHILTSOV A. V., NAMM R. V. Stable algorithm for solving the semicoercive problem of contact of two bodies with friction on the boundary	173
ILLARIONOV A. A. Asymmetric cryptography and hyperelliptic sequences	185
ILLARIONOV A. A., MARKOVA N. V. Solution of functional equations related to elliptic functions. III	197
KOVALENKO E. O., PROKHOROV I. V. Determination of the coefficient of bottom scattering during multi-beam sounding of the ocean	206
NASTYCH M. A. Strong Nash equilibrium for oligopoly with quantity and price settings	223
PADALKO M. A., ANDRIUSHCHENKO P. D., SOLDATOV K. S., NEFEDEV K. V. An accelerated exhaustive enumeration algorithm in the Ising model	235
KHARCHENKO YU. N. Solution of one-dimensional lattice gas models	245
TSITSIASHVILI G. SH. Ergodicity of statistical estimates of Poisson flow intensity	256

Отпечатано с оригинал-макета, изготовленного в Институте прикладной математики ДВО РАН, минуя редподготовку, с помощью пакета $\text{\LaTeX}$.
Компьютерная верстка и оригинал-макет М. О. Авдеевой.

Адрес редакции: 690041, Приморский край, г. Владивосток, ул. Радио, 7
Институт прикладной математики ДВО РАН
Тел./Факс +7(4212)324676 E-mail: FEMJ@iam.khv.ru

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
2019 том 19 № 2

СОДЕРЖАНИЕ

Астапов Н. С., Астапов И. С. Многообразие обобщений теоремы Птолемея	129
Быковский В. А. Разложения по специальным функциям	138
Жильцов А. В., Намм Р. В. Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе	173
Илларионов А. А. Асимметричные криптосистемы и гиперэллиптические последовательности	185
Илларионов А. А., Маркова Н. В. Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. III	197
Коваленко Е. О., Прохоров И. В. Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана	206
Настыч М. А. Сильное равновесие по Нэшу в олигополиях с конкуренцией по объему и по цене	223
Падалко М. А., Андрющенко П. Д., Солдатов К. С., Нефедев К. В. Ускоренный алгоритм исчерпывающего перечисления в модели Изинга	235
Харченко Ю. Н. Решение одномерных моделей решеточного газа	245
Цициашвили Г. Ш. Эргодичность статистических оценок интенсивности пуассоновского потока	256
К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ	261

Д Владивосток

М Редакция журнала

Ж Дальневосточный Математический Журнал