УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ
по научной работе

к.э.н. М.М.Юдкевич
20 ноября 2019 года

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Руховича Филиппа Дмитриевича
«Внешние биллиарды вне правильных многоугольников:
множества полной меры, апериодические точки и множества периодов»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Автор рассматривает дискретные динамические системы на плоских поверхностях, и исследует их методами геометрии и дискретной математики. Кроме того, автор применяет разработанные специально для этой задачи алгоритмы компьютерных вычислений для получения доказательных результатов (computer-assisted proofs).

Самый стандартный пример дискретной динамической системы на множестве X — это отображение $f : X \to X$. Рассматривать отображение f как динамическую систему — значит, изучать *итерации* $f^{\circ n}$ этого отображения и *орбиты* $\{f^{\circ n}(x)\}$ различных точек $x \in X$. Автор рассматривает динамические системы $f : X \to X$, в которых X — плоская поверхность (в диссертации всегда являющаяся подмножеством евклидовой плоскости), а f — кусочно-аффинное отображение (в диссертации всегда кусочная изометрия). Примером такой динамической системы является *внешний бильярд* в выпуклом многоугольнике, определяемый как отражение относительно подходящей вершины (в разных частях плоскости — относительно разных вершин). Внешние бильярды были предложены Ю. Мозером в качестве упрощенной модели для задач небесной механики.

К наиболее общим и мощным методам теории динамических систем принадлежит метод *ренормализации*. (Терминология пришла из физики, и сам метод отчасти мотивирован физическими задачами). Как правило, ренормализация включает в себя два шага — ограничение и масштабирование. Ограничение — это переход к динамической системе, определенной на меньшем пространстве. Во многих случаях эта операция сводится к рассмотрению *отображения первого возвращения*. Пусть $Y \subset X$ — подмножество. Для каждого $y \in Y$ определим n_y как минимальное положительное целое число, такое, что

$f^{n_y}(y) \in Y$. Если такого числа не существует, положим $n_y = \infty$. Отображение первого возвращения в Y — это отображение $y \mapsto f^{n_y}(y)$. Оно определено для тех точек y, для которых $n_y < \infty$. Операция масштабирования — это, как правило, сопряжение отображения первого возвращения с некоторым отображением Rf, определенном на бОльшем множестве (часто — на всем множестве X). Таким образом, *ренормализация* — это переход от отображения f к отображению Rf. Бывает важно также итерировать процесс ренормализации, т.е. рассматривать последовательность f, Rf, R^2f, ...

Важность метода ренормализации подтверждается тем, что несколько медалей Филдса (например, медали Йоккоза, Смирнова и Авилы). были присуждены за работы, в которых ренормализация играет ключевую роль.

У автора $f : X \to X$ является кусочной изометрией, а $Y \subset X$ — некоторой многоугольной фигурой в X. В рассматриваемых случаях Rf оказывается сопряженным отображению f, или, несколько более общим образом, рассматривается конечное множество отображений $f_1, \ldots, f_k$, стабильное относительно ренормализации, то есть, $Rf_i = f_{j(i)}$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. Такое простое ренормализационное поведение по существу дает символическую модель для рассматриваемых отображений, в частности (но не только!), описание множетва всех возможных периодов периодических циклов. В таком простом варианте ренормализация работает для внешних бильярдах в некоторых правильных n-угольниках, например, для $n = 5$, 8, 10, 12 (но известно, что НЕ работает для многих других значений числа n; заметим также, что случаи $n = 3$, 4, 6 допускают полное элементарное описание, основанное на том, что соответствующие многоугольники порождают решеточное замощение плоскости). Хотя явление и было замечено относительно давно в работах С. Табачникова и Р. Шварца, автор впервые довел рассуждения до конца в случаях $n = 8$, 10, 12. Кроме того, автор применил ренормализацию для выявления связи между внешними бильярдами в правильных n- и $2n$-угольниках, при нечетном n. Полученные в диссертации результаты представляют существенный интерес и открывают пути дальнейшего прогресса.

Мне представляется, что имеет смысл обратить внимание на следующее направление исследований, в перспективе продолжающее и обобщающее методы данной диссертации. Важно рассматривать конечномерные (сначала одномерные и двумерные) семейства внешних бильярдов. Для этого, разумеется, нужно ослабить требование о том, чтобы бильярдный стол был правильным многоугольником. Далее, интересно увидеть действие ренормализации в *пространстве параметров*. Для этого нужно подобрать конечномерное семейство отображений таким образом, чтобы для каждого (или для многих) f из этого семейства, отображение Rf можно было бы выбрать в том же семействе. Данная стратегия доказала свою эффективность при рассмотрении одномерных вещественно отображений комплексных многочленов от одной переменной.

К замеченным (мелким) недочетам изложения в диссертации Ф.Д. Руховича относятся следующие:

- Умножение целых чисел не принято обозначать звездочкой (за исключением языков программирования);

- в теоремах 3, 4 и 5 были бы предпочтительны более качественные формулировки (например, описание характера тех операций, с помощью которых можно получить множество всех периодов); точное описание множеств мало о чем говорит читателю, кроме того, что такое описание в самом деле получено.

- Опечатка в строчке 3 раздела 3.2: $\mathrm{int}(j)$.
- В строчке 2 на стр. 23 лучше говорить о равенстве длин, чем о равенстве отрезков — последнее может привести к путанице.
- Опечатки в определении 17: в трех местах стоит $beta_i$ вместо β_i.
- В определение 25 не следует включать определение равенства отображений (данное определение не поясняет, а запутывает; в то же время принятое в математике понятие равенства, т.е. совпадение, не нуждается в определении);

Конечно, эти недочеты не влияют на полноту результатов и на общую оценку диссертации.

Автор имеет четыре статьи по теме диссертации, из них три опубликованных в журналах из центрального перечня ВАК. Результаты докладывались автором на международных конференциях, семинарах, коллоквиумах, на семинарах МГУ, МФТИ, МИАН, СПбГУ.

Тема диссертации соответствует специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Я считаю, что диссертация Ф.Д. Руховича «Внешние биллиарды вне правильных многоугольников: множества полной меры, апериодические точки и множества периодов» удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Рухович Филипп Дмитриевич безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Оппонент от ведущей организации,
PhD, доктор физико-математических наук,
профессор базовой кафедры МИАН факультета математики НИУ ВШЭ,
декан факультета математики НИУ ВШЭ
В.А.Тиморин

Почтовый адрес: 119048, г.Москва, ул. Усачева, д.6
Телефон: +7(495) 772–9590 доб. 12726
E-mail: vtimorin@hse.ru