Метод Райса для гауссовских случайных полей.[1]

В. И. ПИТЕРБАРГ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова.

Аннотация

Получены оценки сверху для второго факториального момента числа стационарных точек траекторий гауссовского случайного поля, лежащих выше некоторого уровня. Приводится несколько следствий из этой оценки - сверхэкспоненциально точные асимптотики для вероятностей больших выбросов гауссовских полей с гладкими таекториями.

Abstract

V. I. Piterbarg, Rice method for Gaussian random fields. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **1***(1996), 000-000*

Upper estimates for the second factorial moment of the number of stationary points of paths of a Gaussian random field which are placed above some level have been obtained. Several concequences from them are given, that are superexponentially exact asymptotics of large excursions probabilities for Gaussian smooth fields.

1 Введение

Задачей вычисления вероятности достижения уровня случайным сигналом на заданном отрезке времени впервые занялись специалисты в области теоретической радиотехники. В 1942 году Райс [10] вывел свою знаменитую формулу для среднего числа выходов (т.е., пересечений снизу вверх) случайным сигналом за уровень как раз с целью аппроксимации вероятности достижения сигналом этого уровня. Если имеется случайный процесс с достаточно гладкими траекториями, про который известно, что его траектории не касаются прямой $y = u$, то множество траеторий, которые превышают в какой-нибудь точке значение u, можно разбить на несколько непересекающихся подмножеств: траетории, графики которых пересекают прямую $y = u$ снизу вверх ровно один раз, ровно два раза, и так далее. Если добавить еще предположение, что уровень u достаточно высок в том смысле, что траеторий

[1]Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Проекты 93-011-1437 и 95-01-01232.

с двумя и более пересечениями снизу вверх много меньше, чем траекторий, пересекающих снизу вверх ровно один раз, то мы приходим к идее Райса, как можно хорошо приблизить вероятность выхода случайного процесса за уровень при помощи первых двух моментов числа пересечений. Опишем этот подход несколько более точно.

Пусть случайный процесс $X(t)$, $t \in [0,T]$, почти наверное непрерывно дифференцируем и все его одномерные плотности распределения ограничены. Тогда имеет место теорема Булинской [3], в силу которой с вероятностью единица отсуствуют касания любого неслучайного уровня. Обозначим через $N_u([0,T]$ ($L_u([0,T])$ число точек $t \in [0,T]$ таких, что $X(t) = u$, $X'(t) > 0$ ($X(t) = u$, $X'(t) < 0$). Случайные величины $N_u([0,T]$ и $L_u([0,T]$ будем называть соответственно числом выходов за уровень u и числом входов под уровень u. При некоторых дополнительных ограничениях эти величины конечны, конечны их математические ожидания и дисперсии. Точные общие утверждения можно найти например в [4], [8], [9]. Поскольку касания отсуствуют с вероятностью единица, то можно выполнить следуюшие преобразования,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(X(0) < u,\ \max\nolimits_{t\in[0,T]} X(t) > u\big) = \\
&\quad = \mathsf{P}(X(0) < u,\ N_u([0,T] = 1) + \mathsf{P}(X(0) < u,\ N_u([0,T] \geq 2) = \\
&\quad = \mathsf{P}(N_u([0,T] = 1) - \mathsf{P}(N_u([0,T] = 1,\ X(0) \geq u) + \\
&\quad\quad + \mathsf{P}(X(0) < u, N_u([0,T] \geq 2) = \\
&\quad = \mathsf{P}(N_u([0,T] = 1) + \mathsf{P}(N_u([0,T] \geq 2) - \\
&\quad\quad - \mathsf{P}(N_u([0,T] = 1,\ X(0) \geq u) - \mathsf{P}(N_u([0,T] \geq 2,\ X(0) \geq u) = \\
&\quad = \mathsf{P}(N_u([0,T] = 1) + \mathsf{P}(N_u([0,T] \geq 2) - \mathsf{P}(N_u([0,T] \geq 1, X(0) \geq u).
\end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда видно, что простой путь формализации вышеприведенной идеи о малости вероятности двух и более пересечений снизу вверх уровня - оценить второй слагаемое в правой части половиной второго факториального момента числа $N_u([0,T]$, для которого существует относительно простое интегральное представление. Что же касается третьего слагаемого в правой части, то событие под знаком вероятности может произойти лишь в случае, когда либо одновременно $X(0) \geq u$, $X(T) \geq u$, либо имеется более одного входа, то есть, следует также оценить второй факториальный момент числа $L_u([0,T])$ входов. Действуя таким образом, можно получить следующее простое комбинаторное двустороннее неравенство,

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq\ \mathbf{E}N_u([0,T] + \mathsf{P}(X(0) \geq u) - \mathsf{P}\big(\max_{t\in[0,T]} X(t) \geq u\big) \leq \\
&\leq\ \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}N_u([0,T](N_u([0,T] - 1) + \mathbf{E}L_u([0,T](L_u([0,T] - 1)\big) + \\
&\qquad\qquad + \mathsf{P}(X(0) \geq u, X(T) \geq u).
\end{aligned} \tag{2}$$

Это неравенство можно использовать всегда, когда есть возможность работать с совместными плотностями распределений процесса X и его первой производной в одной или двух точках, через которые выражаются первый и второй факториальные моменты чисел N и L. Такая возможность имеется, конечно, в случае гауссовских процессов, или же когда мы имеем сумму одинаково распределенных независимых случайных процессов, тогда можно попытаться воспользоваться локальными предельными теоремами. Так, в случае гауссовского стационарного дважды дифференцируемого в среднем квадратическом случайного процесса такого, что его вторая производная удовлетворяет условию Гельдера в среднем квадратическом, а корреляционная функция не обращается в единицу нигде кроме нуля, оценки (2) асимптотически сверхэкспоненциально точны. А именно, нормируя для простоты записи процесс $X(t)$ так, чтобы

$$\mathbf{E}X(t) = 0, \quad \mathbf{E}X(t)^2 = \mathbf{E}X'(t)^2 = 1,$$

из (2) следжует, что

$$\mathsf{P}\big(\max_{t\in[0,T]} X(t) \geq u\big) = \frac{T}{2\pi}e^{-u^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-x^2/2}dx + O(e^{-au^2}),$$

где $a > 1/2$. Подробное доказательство этого результата и ряда других, основанных на идее Райса, можно найти в [9] и [8].

Только на первый взгляд кажется, что рассуждения типа (1), приводящие к неравенствам (2), годятся лишь в одномерном случае. Совсем простое соображение, что точечный случайный процесс пересечений снизу вверх можно заменить на точечный случайный процесс стационарных точек траекторий, лежащих выше прямой $y = u$, делает рассуждения, подобные вышеприведенным, независмыми от размерности. Правда, приходится платить ужесточением требований на гладкость случайного поля. Принципиальная же трудность, связанная с увеличением размерности параметрического множества, состоит в другом, а именно в том, что граница параметрического множества устроена для размерностей, больших единицы, гораздо менее приятно, чем множество из двух точек.

Мы рассматриваем задачу использования идеи Райса для случайных полей. В случае гауссовских полей мы приводим некоторые конкретные результаты. Прежде всего - это оценка второго факториального момента числа локальных максимумов (Леммы 3, 5), для доказательства которой развит локальный анализ условных распределений гладкого гауссовского поля. Далее мы приводим несколько важных следствий из этой оценки.

Основные результаты этой заметки часто обсуждались с В. Д. Конаковым, работа над совмествой статьей [7] убедила в необходимости приведенных здесь доказательств. Мне существенно помогли также беседы с Д. М. Чибисовым, Ю. Н. Тюриным и А. Цыбаковым. Всем им выражаю сердечную признательность.

2 Моменты числа стационарных точек и многомерный метод Райса.

Пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ - случайное поле (случайный процесс от нескольких переменных), заданное на некотором открытом подмножестве $\mathbf{T}$ евклидова пространства. Пусть $\mathbf{S}$ - замкнутое подмножество множества $\mathbf{T}$ с непустой внутренностью. Обозначим через $C_u^+(\mathbf{S})$ число стационарных точек траекторий поля X, лежащих выше уровня u и расположенных внутри множества $S \subset T$:

$$C_u^+(\mathbf{S}) = \mathbf{card}\{\mathbf{t} \in \mathbf{S} \setminus \partial\mathbf{S} \,:\, X(\mathbf{t}) \geq u,\, \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0}\},$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots \frac{\partial}{\partial t_d})^\top$ - оператор взятия градиента. Мы предположим, что эта случайная величина конечна с вероятностью единица, ниже мы приведем условия, в которых это выполнено для гауссовских полей. Подобно одномерному методу Райса, описанному во введении, можно использовать первые два момента этих величин для аппроксимации вероятности $\mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u)$ когда u большое.

Обозначая $p_k = \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = k)$, имеем

$$\mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u) = \mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) + \mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u).$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) = \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) \geq 1, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) = \\ = \ &\mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 1, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) + \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) \geq 2, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u). \end{aligned}$$

Учитывая также очевидные равенства

$$\mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 1, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) = \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 1) - \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 1, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u),$$

$$\mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} k p_k = \mathbf{E} Cu^+(\mathbf{S})$$

и

$$\mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S} \geq 2, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) < u) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k - \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) \geq 2, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u),$$

легко получаем, что

$$\mathsf{P}(\max_{b\theta\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u) + R = \mathbf{E} C_u^+(\mathbf{S}) + \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) = 0, \max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u), \tag{3}$$

где

$$R = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) p_k \leq 2^{-1} \mathbf{E} C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S}) - 1).$$

Итак, мы доказали следующее увержение:

Лемма 1 *Пусть для случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, с непрерывными почти наверное траекториями, $\mathbf{T}$ - открытое множество в R^d, случайная величина $C_u^+(\mathbf{T})$ конечна с вероятностью единица. Тогда для замкнутого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ с непустой внутренностью имеют место неравенства*

$$-2^{-1} \mathbf{E} C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S}) - 1) \leq \mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u) - \mathbf{E} C_u^+(\mathbf{S}) \leq \mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\partial\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u).$$

Доказательство следующей леммы основано на той же идее, что и предыдущее, но значительно проще, поскольку мы предположим, что множество $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ является гладким многообразием без края. Соответственно этому предположению под стационарной точкой $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$ поля X мы понимаем стационарную точку сужения этого поля на $\mathbf{S}$, то есть, случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$. В этих предположениях имеет место очевидное тождество

$$\mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u) = \mathsf{P}(C_u^+(\mathbf{S}) \geq 1),$$

откуда немедленно получаем следующее утверждение.

Лемма 2 *Пусть для случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$, с непрерывными почти наверное траекториями, $\mathbf{S}$ - замкнутое гладкое многообразие в R^d, случайная величина $C_u^+(\mathbf{S})$ конечна с вероятностью единица. Тогда имеет место неравенство*

$$0 \leq \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S}) - \mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) \geq u) \leq 2^{-1}\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S}) - 1).$$

3 Гауссовские поля: основная оценка

Предположим теперь дополнительно, что $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, - гауссовское случайное поле, заданное на открытом множестве $\mathbf{T} \in \mathrm{R}^d$ и обладающее почти наверное непрерывными частными производными до второго порядка включительно. Мы предполагаем также, что ковариационная матрица гауссовского вектора

$$(X(\mathbf{t}),\, X_i(\mathbf{t}),\ i = 1, ..., d,\, X_{ij}(\mathbf{t}),\, j \geq i,\ i, j = 1, ..., d),$$

где

$$X_i(\mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial t_i} X(\mathbf{t}), \qquad X_{ij}(\mathbf{t}) = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} X(\mathbf{t}),$$

невырождена и непрерывна для всех $\mathbf{t}$ из $\mathbf{T}$. При выполнении этих условий будем говорить, что гауссовское поле $X(\mathbf{t})$ удовлетворяет условию регулярности SR (suitably regular, см. [1], стр. 40). У таких полей с вероятностью единица отсуствуют касания траекториями любого неслучайного уровня:

$$\forall u,\ \mathsf{P}(\exists \mathbf{t} \in \mathbf{T} :\ \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0},\ X(\mathbf{t}) = u) = 0.$$

Кроме того, для любого замкнутого подмножества $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ число стационарных точек поля $X(\mathbf{t})$, лежащих внутри этого множества, конечно с вероятностью единица. Далее, если размерность множества $\mathbf{S}$ меньше d, то с вероятностью единица оно не содержит стационарных точек поля X. Доказательство первых двух утверждений можно найти в [1], стр. 80, последнее доказано в [5], стр. 19.

Нижеприведенные формулы (4) и (5) для моментов числа стационарных точек выведены для случайных полей, не обязательно гауссовских, Ю. К. Беляевым, [2]. При этом предполагались выполненными некторые требования на локальное поведение траекторий, которые в случае гауссовских полей не вполне естественны, поскольку не выражаются непосредственно в терминах ковариации и среднего. Случай гауссовских однородных полей независимо рассмотрел Хасофер [6], требуя лишь выполнения естественных условий SR. Для общих гауссовских полей, удовлетворяющих условию SR, эти формулы также верны, их вывод аналогичен однородному случаю. Имеем

$$\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S}) = \int_{\mathbf{S}} d\mathbf{t} \int_u^\infty dx E(\mathbf{t}) p_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \tag{4}$$

где

$$E(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\left(|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top| \mid X(\mathbf{t}) = x,\, \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0}\right),$$

$p_{\mathbf{t}}(x,\mathbf{y})$ - плотность распределения вектора $(X(\mathbf{t}),\,\nabla X(\mathbf{t}))$. Далее,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S})-1)= \\ = \quad &\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} d\mathbf{t}d\mathbf{s}\int_u^\infty\int_u^\infty dx_1dx_2E(\mathbf{t},\mathbf{s})p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2,\mathbf{0},\mathbf{0}), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$E(\mathbf{t},\mathbf{s})=\mathbf{E}\left(|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top||\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^\top|\;\middle|\;\begin{array}{l} X(\mathbf{t})=x_1,\,X(\mathbf{s})=x_2, \\ \nabla X(\mathbf{t})=\nabla X(\mathbf{s})=\mathbf{0}\end{array}\right), \tag{6}$$

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2,\mathbf{y_1},\mathbf{y_2})$ - плотность распределения вектора

$$(X(\mathbf{t}),\,X(\mathbf{s}),\,\nabla X(\mathbf{t}),\,\nabla X(\mathbf{s}))\,.$$

Обозначим через S^{d-1} множество всех единичных векторов пространства R^d. Для произвольной $f\in C^2(\mathbf{S})$, $\mathbf{S}$ - замкнутое множество с непустой внутренностью, введем норму

$$||f||_{\mathbf{S}}=\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S},\mathbf{e}\in S^{d-1}}\left(\max\{|f(\mathbf{t})|,\,|f_{\mathbf{e}}(\mathbf{t})|,\,|f_{\mathbf{ee}}(\mathbf{t})|\}\right),$$

где $f_{\mathbf{e}}$, $f_{\mathbf{ee}}$ - первая и вторая производные функции f по направлению $\mathbf{e}$.

Условимся под объемом $V(\mathbf{S})$ измеримого множества $\mathbf{S}\subset\mathrm{R}^d$ понимать обьем, соответсвующий размерности множества $\mathbf{S}$. Так, если $\mathbf{S}$ имеет непустую внутренность, то $V(\mathbf{S})$ - его лебегова мера, если $\mathbf{S}$ - жорданово множество, то $V(\partial\mathbf{S})$ - $d-1$-мерная мера Лебега его границы, если $\mathbf{S}$ состоит из одной точки, то $V(\mathbf{S})$ равен единице. Никаких недоразумений при этом не возникнет.

Лемма 3 *Пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}\subset\mathrm{R}^d$, - гауссовское случайное поле, удовлетворяющее условиям SR. Предположим дополнительно, что вторые производные в среднем квадратическом этого поля удовлетворяют равномерному среднеквадратическому условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$ и константой L:*

$$\forall\mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{T},\;\forall i,j=1,...,d,\;\mathbf{E}(X_{ij}(\mathbf{t})-X_{ij}(\mathbf{s}))^2\le L^2||\mathbf{t}-\mathbf{s}||^{2\alpha}.$$

Тогда существуют положительные числа C и c такие, что для любого $\epsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого замкнутого множества $\mathbf{K}\subset\mathbf{T}$ с диаметром, не превосходящим δ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K})(C_u^+(\mathbf{K})-1)\le CV(\mathbf{K})u^{2d+1}\exp\left(-\frac{(u-c||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}})^2}{2\gamma^2(\mathbf{K})+\epsilon}\right), \tag{7}$$

где

$$\gamma^2(\mathbf{K})=\sup_{t\in\mathbf{K}}\sup_{\mathbf{e}\in\mathbf{S^{d-1}}}\mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{t}),\,X''_{\mathbf{ee}}(\mathbf{t})). \tag{8}$$

Доказательство Заменяя один из пределов интегрирования в (5) на $-\infty$, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K})(C_u^+(\mathbf{K})-1)&\le\int_{\mathbf{K}}\int_{\mathbf{K}}d\mathbf{t}d\mathbf{s}\int_u^\infty dx\,E_1(\mathbf{t},\mathbf{s})p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x,\mathbf{0},\mathbf{0})= \\ &=\int_{\mathbf{K}}\int_{\mathbf{K}}d\mathbf{t}d\mathbf{s}\,p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(\mathbf{0},\mathbf{0})\int_u^\infty dx\,E_1(\mathbf{t},\mathbf{s})p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x\,|\,\mathbf{0},\mathbf{0}),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$E_1(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \mathbf{E}\left(|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top||\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^\top| \;\middle|\; \begin{array}{c} X(\mathbf{t}) = x, \\ \nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \end{array}\right),$$

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$ - плотность распределения вектора $(X(\mathbf{t}),\, \nabla X(\mathbf{t}),\, \nabla X(\mathbf{s}))$,

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$ - плотность распределения вектора $(\nabla X(\mathbf{t}),\, \nabla X(\mathbf{s}))$,

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x \,|\, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ - условная плотность распределения случайной величины $X(\mathbf{t})$ при условии $(\nabla X(\mathbf{t}),\, \nabla X(\mathbf{s})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

По формуле Тейлора

$$\nabla X(\mathbf{s}) = \nabla X(\mathbf{t}) + \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top(\mathbf{s}-\mathbf{t}) + ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{1+\alpha}\mathbf{Y}_{\mathbf{t},\mathbf{s}},$$

где $Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}}$ - гауссовский векторный процесс, причем в силу условий леммы

$$\mathbf{E}||Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}}|| \le dL.$$

Подставим это в условное математическое ожидание, получаем

$$E_1(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \mathbf{E}\left(|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top||\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^\top| \;\middle|\; \begin{array}{l} X(\mathbf{t}) = x,\, \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0}, \\ \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top(\mathbf{s}-\mathbf{t}) = -||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{1+\alpha}Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}} \end{array}\right).$$

Определитель матрицы $\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top$ равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -(s_1-t_1) & & & \\ \dots & & \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top & \\ -(s_d-t_d) & & & \end{pmatrix}.$$

Для всех $i = 2, 3, ...d+1$ умножим i-ю строку этой матрицы на $(s_i - t_i)/||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^2$, просуммируем все эти строки и результат добавим к первой строке. Мы получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{-1+\alpha}Y^1_{\mathbf{t},\mathbf{s}} & \dots & -||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{-1+\alpha}Y^d_{\mathbf{t},\mathbf{s}} \\ -(s_1-t_1) & & & \\ \dots & & \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top & \\ -(s_d-t_d) & & & \end{pmatrix},$$

определитнель которого остается равным определителю матирцы $\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top$. Пользуясь свойствами определителя, получаем

$$|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top| = |\max_i |s_i - t_i|||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{-1+\alpha}\mathbf{det}A_t| \le \|\mathbf{s}-\mathbf{t}\|^\alpha|\mathbf{det}A_t|,$$

где

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & Y^1_{\mathbf{t},\mathbf{s}} & \dots & Y^d_{\mathbf{t},\mathbf{s}} \\ -(s_1-t_1)/r & & & \\ \dots & & \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top & \\ -(s_d-t_d)/r & & & \end{pmatrix},$$

и $r=\max_{1\le i\le d}|s_i-t_i|$. Таким образом,

$$E_1(\mathbf{t},\mathbf{s})\le||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{\alpha}E_2(\mathbf{t},\mathbf{s}), \tag{10}$$

где

$$E_2(\mathbf{t},\mathbf{s})=\mathbf{E}\left(|\mathbf{det}A_{\mathbf{t}}\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^{\top}|\;\middle|\;\begin{array}{l}X(\mathbf{t})=x,\,\nabla X(\mathbf{t})=\mathbf{0},\\ \nabla X(\mathbf{t})\nabla^{\top}(\mathbf{s}-\mathbf{t})=-||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{1+\alpha}\mathbf{Y}_{\mathbf{t},\mathbf{s}}\end{array}\right).$$

Оценим сверху это математическое ожидание, используя ограниченность в среднем квадратическом всех компонент матриц $A_{\mathbf{t}}$ и $\nabla X(\mathbf{s})\nabla^{\top}$. Используя элементарное неравенство

$$|a_1...a_m|\le\frac{|a_1|^m+...+|a_m|^m}{m},$$

получаем

$$|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^{\top}|\le d^{2d-2}\sum_{i,j}|X_{ij}(\mathbf{s})|^d$$

и

$$|\mathbf{det}A_{\mathbf{t}}|\le(d+1)^{2d}\sum_{i,j}|a_{ij}|^{d+1},$$

где

$$a_{ij}=\begin{cases}X_{ij}(\mathbf{t}) & \text{для}\quad i>1,\,j>1\\ Y^{i-1}_{\mathbf{t},\mathbf{s}} & \text{для}\quad i>1,\,j>1\\ (t_{j-1}-s_{j-1})/r & \text{для}\quad i=1\,j>1\\ 0 & \text{для}\quad i=1,\,j=1.\end{cases}$$

Далее, используя другое неравенство,

$$\sum_{i=1,j=1}^{d+1\,d+1}a_i^d b_j^{d+1}\le\frac{d+1}{2}\sum_{i=1}^{d+1}(a_i^{2d}+b_i^{2d+2}),$$

получаем

$$|\mathbf{det}\nabla X(\mathbf{s})\nabla^{\top}\mathbf{det}A_t|\le\frac{1}{2}\,d^{2d-2}(d+1)^{2d+1}\left(\sum_{i=1,j=1}^{d,\,d}|X_{ij}(\mathbf{s})|^{2d}+\sum_{i=1,j=1}^{d+1,\,d+1}|a_{ij}|^{2d+2}\right). \tag{11}$$

Для произвольной гауссовской случайной величины ξ и любого натурального m имет место оценка

$$\mathbf{E}\xi^{2m}\le 2^{2m}((\mathbf{E}\xi)^{2m}+\mathbf{E}(\xi-\mathbf{E}\xi)^{2m})\le 2^{2m}((\mathbf{E}\xi)^{2m}+C_m(\mathbf{Var}\xi)^{2m}),$$

где константа C_m зависит только от m. Кроме того, поскольку гауссовская условная дисперсия не превосходит соответствующую безусловную, мы имеем

$$\mathbf{Var}\left(X_{ij}(\mathbf{t})\;\middle|\;\begin{array}{l}X(\mathbf{t})=x,\,\nabla X(\mathbf{t})=\mathbf{0},\\ \nabla X(\mathbf{t})\nabla^{\top}(\mathbf{s}-\mathbf{t})=-||(\mathbf{s}-\mathbf{t})||^{1+\alpha}Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}}\end{array}\right)\le$$
$$\le\mathbf{Var}\,(X_{ij}(\mathbf{t}))\le C_{var}<\infty. \tag{12}$$

Существование константы C_{var} гарантируется предположениями леммы. Кроме того,

$$\mathbf{Var}\left(X_{ij}(\mathbf{s}) \mid X(\mathbf{t}) = x,\ \nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0}\right) \le \mathbf{Var}\left(X_{ij}(\mathbf{s})\right) \le C_{var}. \qquad (13)$$

Далее, в силу предположений леммы для некоторой константы $C_Y < \infty$

$$\mathbf{Var}(Y^i_{\mathbf{t},\mathbf{s}}) \le C_Y, \quad i = 1, ..., d. \qquad (14)$$

Теперь изучим условные математические ожидания случайных величин $X_{ij}(\mathbf{t})$, $X_{ij}(\mathbf{s})$. Воспользуемся следующей хорошо известной формулой для условного математического ожидания гауссовского вектора при невырожденных условиях:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \mathbf{E}\mathbf{X} + \qquad (15)\\ +\mathbf{E}(\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X})(\mathbf{Y} - \mathbf{E}\mathbf{Y})^\top(\mathbf{E}(\mathbf{Y} - \mathbf{E}\mathbf{Y})(\mathbf{Y} - \mathbf{E}\mathbf{Y})^\top)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{E}\mathbf{Y}).\end{aligned}$$

Положим в этой формуле

$$\mathbf{Y} = \left(X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{\mathbf{s} - \mathbf{t}}{||\mathbf{s} - \mathbf{t}||} - \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|^\alpha \mathbf{Y}_{\mathbf{t},\mathbf{s}}\right),$$

$$\mathbf{y} = (x, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{X} = X_{ij}(\mathbf{t}).$$

Для вектора

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \left(X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{\mathbf{s} - \mathbf{t}}{||\mathbf{s} - \mathbf{t}||}\right)$$

имеем

$$\min_{\mathbf{x} \in S^{2d}} \mathbf{Var}(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{x}) = \kappa > 0.$$

Действительно, равенство этого минимума нулю противоречило бы условию SR.

Таким образом, матрица ковариаций вектора $\mathbf{Y}$ невырождена для всех достаточно малых $\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|$, более точно, найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$ таких, что $\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\| \le \delta$, ее минимальное собственное значение не меньше чем $\kappa/2$, поэтому для множества $\mathbf{K}$ достаточно малого диаметра из (14) следует, что

$$\begin{aligned}&|\mathbf{E}\left(X_{ij}(\mathbf{t})\ |X(\mathbf{t}) = x,\ \nabla X(\mathbf{t}) = X(\mathbf{s}) = \mathbf{0},\right)| = \\ &= \left|\mathbf{E}\left(X_{ij}(\mathbf{t})\ \middle|\ \begin{array}{l} X(\mathbf{t}) = x,\ \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0}, \\ \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top(\mathbf{s} - \mathbf{t}) + ||\mathbf{s} - \mathbf{t}||^{1+\alpha} Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}} = \mathbf{0} \end{array}\right)\right| = \\ &= \left|\mathbf{E}\left(X_{ij}(\mathbf{t})\ \middle|\ \begin{array}{l} X(\mathbf{t}) = x,\ \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0}, \\ \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{t})}{||\mathbf{s} - \mathbf{t}||} + ||\mathbf{s} - \mathbf{t}||^{\alpha} Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}} = \mathbf{0} \end{array}\right)\right| \le \\ &\le \sup_{\mathbf{t} \in \mathbf{K}}\left(|\mathbf{E}X_{ij}(\mathbf{t})| + C_1 2^d \kappa^{-d}(|x| + |\mathbf{E}X(\mathbf{t})| + \sum_{k=1}^{d} |\mathbf{E}X_k(\mathbf{t})| + + \sum_{k=1,l=1}^{d,d} |\mathbf{E}X_{kl}(\mathbf{t})|\right) \le \\ &\qquad \le C(|x| + ||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}}), \qquad (16)\end{aligned}$$

для некоторой C, где C_1 - константа, ограничивающая ковариации поля X и его производных, а векторный процесс $\mathbf{Y}_{\mathbf{t},\mathbf{s}}$ заменен обратно на его выражение через произволные поля X. Наконец, собирая все оценки (11), (12), (13), (14) и (16), для некоторых констант A и B мы получаем, что

$$|E_2(\mathbf{t},\mathbf{s})| \le A||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}}^{2d+2} + Bx^{2d+2}. \tag{17}$$

Теперь мы оценим среднее и дисперсию, соответствующие одномерной условной гауссовской плотности распределения

$$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x\,|\,\mathbf{0},\mathbf{0}) = p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x\,|\,\nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0})$$

случайной величины $X(\mathbf{t})$.

Для среднего, по аналогии с (16), имеем

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}(X(\mathbf{t})\,|\,\nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0})| = \qquad (18)\\
&= |\mathbf{E}\left(X(\mathbf{t}) \ \middle|\le \ \nabla X(\mathbf{t}) = \mathbf{0} - \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{\mathbf{s}-\mathbf{t}}{||(\mathbf{s}-\mathbf{t})||} - ||(\mathbf{s}-\mathbf{t})||^\alpha Y_{\mathbf{t},\mathbf{s}} = \mathbf{0})\right|\\
&\le \max_{\mathbf{t}\in\mathbf{K}}\left(|\mathbf{E}X(\mathbf{t})| + C_1 2^d \kappa^{-d}\sum_{k=1}^{d}|\mathbf{E}X_k(\mathbf{t}) + \sum_{k=1,l=1}^{d,d}|\mathbf{E}X_{kl}(\mathbf{t})|)\right)\\
&\le c||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}}) \qquad (19)
\end{aligned}$$

для некоторой c. Для дисперсии, обозначая $\mathbf{e} = (\mathbf{s}-\mathbf{t})/||\mathbf{s}-\mathbf{t}||$ и пользуясь тем же свойством, что условная дисперсия не превосходит безусловную, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,\nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0}) =\\
= \quad &\mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{s}) = 0, \nabla X(\mathbf{t}) = \nabla X(\mathbf{s}) = \mathbf{0}) \le\\
&\le \mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{s}) = 0) =\\
&\quad \text{(по формуле Тейлора для функций одной переменной)}\\
&= \mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = 0, X''_{\mathbf{ee}}(\mathbf{t}) - ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^\alpha Y_{\mathbf{e},\mathbf{t},\mathbf{s}} = 0) =\\
&= \mathbf{Var}(X(\mathbf{t})\,|\,X'_{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = 0, X''_{\mathbf{ee}}(\mathbf{t}) = 0)(1+o(1))
\end{aligned} \tag{20}$$

при $||\mathbf{s}-\mathbf{t}|| \to 0$, где $Y_{\mathbf{e},\mathbf{t},\mathbf{s}}$ - гауссовский процесс, обладающий теми же свойствами, что и компоненты векторного процесса $\mathbf{Y}_{\mathbf{t},\mathbf{s}}$. Теперь, после оценивания среднего и дисперсии легко проверить, что для некоторой абсолютной константы C, произвольного $\epsilon > 0$ и всех достаточно малых $||\mathbf{s}-\mathbf{t}||$ имеют место неравенства

$$\int_u^\infty x^{2d+2} p(x\,|\,\mathbf{0},\mathbf{0})dx \le Cu^{2d+1}\exp\left(-\frac{(u - ||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}})^2}{2\gamma^2+\epsilon}\right), \tag{21}$$

и

$$\int_u^\infty p(x\,|\,\mathbf{0},\mathbf{0})dx \le Cu^{-1}\exp\left(-\frac{(u - c||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{K}})^2}{2\gamma^2+\epsilon}\right). \tag{22}$$

Наконец, получим оценку степени вырождения в нуле плотности распределения $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ вектора $(\nabla X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{s}))$, если $||\mathbf{s}-\mathbf{t}|| \to 0$. Имеем

$$p(\mathbf{0},\mathbf{0}) \le \frac{1}{(2\pi)^d\sqrt{\mathbf{det}\,\mathbf{cov}(\nabla X(\mathbf{t})^\top, \nabla X(\mathbf{s})^\top)^\top}},$$

где

$$\mathbf{cov}(\nabla X(\mathbf{t})^\top, \nabla X(\mathbf{s})^\top)\top$$

- ковариационная матрица $2d$-мерного вектора $(\nabla X(\mathbf{t})^\top, \nabla X(\mathbf{s})^\top)\top$.

Пусть $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ - пара случайных векторов одной размерности d. Вычитая из $(d+i)$-й строки ковариационной матрицы вектора $(\mathbf{U}^\top, (\mathbf{U}+\mathbf{V})^\top)^\top$ i-ю и записывая ее на $(d+i$-е место, $i = 1, ..., d$, а затем вычитая из $d+j$-го столбца получившейся матрицы j-й столбец, и записывая его на j-е место, мы получим следующее важное тождество для определителей ковариационных матриц:

$$\mathbf{det\,cov}(\mathbf{U}^\top, (\mathbf{U}+\mathbf{V})^\top)^\top = \mathbf{det\,cov}(\mathbf{U}^\top, \mathbf{V}^\top)^\top.$$

Приименяя это тождество и формулу Тейлора, мы получаем

$$\mathbf{cov}(\nabla X(\mathbf{t})^\top, \nabla X(\mathbf{s})^\top)\top =$$

$$\mathbf{det\,cov}(\nabla^\top X(\mathbf{t}), \nabla^\top X(\mathbf{t}) + \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top(\mathbf{s}-\mathbf{t}) + ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{1+\alpha}\mathbf{Y_{t,s}}^\top)^\top =$$
$$= \mathbf{det\,cov}(\nabla^\top X(\mathbf{t}), \nabla^\top X(\mathbf{t})\nabla^\top(\mathbf{s}-\mathbf{t}) + ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{1+\alpha}\mathbf{Y}^\top_{\mathbf{t},\mathbf{s}})^\top =$$
$$= ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{2d}\mathbf{det\,cov}\left(\nabla^\top X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{\mathbf{s}-\mathbf{t}}{||\mathbf{s}-\mathbf{t}||} + ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{\alpha}\mathbf{Y}^\top_{\mathbf{t},\mathbf{s}}\right)^\top =$$
$$= ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{2d}\mathbf{det\,cov}\left(\nabla^\top X(\mathbf{t}), \nabla X(\mathbf{t})\nabla^\top \frac{\mathbf{s}-\mathbf{t}}{||\mathbf{s}-\mathbf{t}||}\right)^\top (1+o(1)),$$

при $||\mathbf{s}-\mathbf{t}|| \to 0$, где мы снова использовали хорошо известные свойства определителя. Последний определитель равномерно по $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$ отделен от нуля, поскольку противное противоречило бы свойству SR. Таким образом, с учетом (10), порядок вырождения подинтегрального выражения в (9) не более чем $||\mathbf{s}-\mathbf{t}||^{\alpha-d}$, то есть оно интегрируемо по модулю на $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$. Утверждение леммы следует теперь из оценок (21), (22) одномерного условного распределения.

Замечание 4 *Мы видели, что показатель экспоненты в оценке (7) формируется в цепочке (20), где произошло некоторое огрубление этого показателя. Это сделано во-первых потому, что имеется интуитивная уверенность, что частные производные по направлениям, отличным от* $\mathbf{e}$*, не столь сильно влияют на значение условной дисперсии, а во вторых, мы получили простое выражение для этого показателя, которое фигурирует в условии* $\mathbf{r}(\mathbf{S})$ *и делает это условие легко проверяемым. Надо однако признать, что интуиция основана на определенных свойствах однородности поля.*

Еще одно, видимо достаточно сильное, загрубление оценки произошло ранее, в (9). Это сделано по техническим соображениям.

Следующая лемма является аналогом предыдущей для множеств произвольного диаметра.

Для случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}\subset \mathrm{R}^d$, введем обозначение

$$\sigma^2(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} \mathbf{Var}X(\mathbf{t}). \tag{23}$$

Лемма 5 *Пусть гауссовское поле* $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T} \subset \mathrm{R}^d$, *удовлетворяет условиям леммы 3. Пусть, кроме того, для любых несовпадающих* $\mathbf{t}$ *и* $\mathbf{s}$ *из* $\mathbf{T}$ *распределение вектора*

$$(X(\mathbf{t}),\, X_i(\mathbf{t}),\, X_{ij}(\mathbf{t}),\, X(\mathbf{s}),\, X_i(\mathbf{s}),\, X_{ij}(\mathbf{s}),\, j \geq i,\; i,j = 1,...,d),$$

невырождено. Тогда найдутся положительные числа C *и* c *такие, что для любого* $\epsilon > 0$ *найдется* $\epsilon_1 > 0$ *такое, что для любого замкнутого множества* $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ *имеет место оценка*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S}) - 1) \leq \\ &\leq CV(\mathbf{S})u^{2d+1} \exp\left(-\frac{(u - c||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{S}})^2}{2\gamma^2(\mathbf{S}) + \epsilon}\right) + CV(\mathbf{S})^2 u^{4d+2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\mathbf{S}) - \epsilon_1}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

где $\gamma^2(\mathbf{S})$ *определено в (8).*

Доказательство Покроем множество $\mathbf{S}$ кубами $\mathbf{K}_i$ одинакового объема с гранями, параллельными осям координат, причем кубы $\mathbf{K}_i$ выберем столь малыми, чтобы для каждого $\mathbf{K}_i$ и для объединения любых двух соседних кубов $\mathbf{K}_i$ было верно утверждение леммы 3. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S})(C_u^+(\mathbf{S}) - 1) \leq \mathbf{E}\sum_i C_u^+(\mathbf{K}_i)(\sum_i C_u^+(\mathbf{K}_i) - 1) = \\ = \;& \mathbf{E}\left(\sum_i C_u^+(\mathbf{K}_i)\sum_j C_u^+(\mathbf{K}_j) - \sum_i C_u^+(\mathbf{K}_i)\right) = \\ = \;& \sum_i \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)^2 + \sum_{i\neq j} C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j) - \sum_i \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i) = \\ = \;& \sum_i \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)(C_u^+(\mathbf{K}_i) - 1) + \sum_{i\neq j} C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j). \end{aligned} \tag{25}$$

Если во второй сумме $\mathbf{K}_i$ и $\mathbf{K}_j$ соседние, то поскольку

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(C_u^+(\mathbf{K}_i) + C_u^+(\mathbf{K}_j))(C_u^+(\mathbf{K}_i) + C_u^+(\mathbf{K}_j) - 1) = \\ &= 2\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j) + \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)(C_u^+(\mathbf{K}_i) - 1) + \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_j)(C_u^+(\mathbf{K}_j) - 1), \end{aligned} \tag{26}$$

математическое ожидание $\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j)$ оценивается сверху при помощи леммы 3. Таким образом, для некоторой константы C и числа c, являющегося максимумом всех соответствующих констант из леммы 3 по всем парам соседних параллелепипедов,

$$\begin{aligned} &\sum_i \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)(C_u^+(\mathbf{K}_i) - 1) + \sum_{i\neq j, \mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j \neq \phi} C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j) \leq \\ &\leq CV(\mathbf{S}) \exp\left(-\frac{(u - c||\mathbf{E}X(\mathbf{t})||_{\mathbf{S}})^2}{2\gamma^2(\mathbf{S}) + \epsilon}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Для несоседних $\mathbf{K}_i$ и $\mathbf{K}_j$ из (5) и (26) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j) = \\
&= \int_{\mathbf{K}_i}\int_{\mathbf{K}_j} d\mathbf{t}d\mathbf{s}\int_u^\infty\int_u^\infty dx_1dx_2E(\mathbf{t},\mathbf{s})p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2,\mathbf{0},\mathbf{0}) = \\
&= \int_{\mathbf{K}_i}\int_{\mathbf{K}_j} d\mathbf{t}d\mathbf{s}\int_u^\infty\int_u^\infty dx_1dx_2E(\mathbf{t},\mathbf{s})p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(\mathbf{0},\mathbf{0}\,|\,x_1,x_2)p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2),
\end{aligned} \tag{28}$$

где

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(\mathbf{y_1},\mathbf{y_2}\,|\,x_1,x_2)$ - условная плотность распределения вектора $(\nabla X(\mathbf{t}),\,\nabla X(\mathbf{s}))$, при условии $X(\mathbf{t})=x_1,\,X(\mathbf{s})=x_2$,

$p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2)$ - плотность распределения вектора $(X(\mathbf{t}),X(\mathbf{s}))$.

Поскольку точки $\mathbf{t}$ и $\mathbf{s}$ находятся на расстоянии, ограниченном снизу фиксированным положительным числом, в силу условий леммы все распределения значений поля и его производных в точках $\mathbf{t}$ и $\mathbf{s}$ равномерно невырождены, поэтому процедура оценивания значительно упрощается по сравнению с леммой 3. В частности, в силу невырожденности

$$\sup_{x_1,x_2,\mathbf{t},\mathbf{s},\|bt-\mathbf{s}\|\geq\delta} p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(\mathbf{0},\mathbf{0}\,|\,x_1,x_2)<\infty.$$

Далее, используя неравенство типа (11) для произведения двух определителей в определении (6) для $E(\mathbf{t},\mathbf{s})$, и невырожденность условий в этом же определении, нетрудно получить неравенство

$$\sup_{\mathbf{t},\mathbf{s},\|bt-\mathbf{s}\|\geq\delta} E(\mathbf{t},\mathbf{s})\leq Cx_1^{2d}x_2^{2d}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{K}_i)C_u^+(\mathbf{K}_j)\leq CV(\mathbf{K}_i)V(\mathbf{K}_j)\int_u^\infty\int_u^\infty dx_1dx_2x_1^{2d}x_2^{2d}p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2),$$

и оценка правой части элементарна, см. например [8], стр. . Имеем для всех положительных u,

$$\sup_{\mathbf{t},\mathbf{s},\|bt-\mathbf{s}\|\geq\delta}\int_u^\infty\int_u^\infty dx_1dx_2x_1^{2d}x_2^{2d}p_{\mathbf{t},\mathbf{s}}(x_1,x_2)\leq Cu^{4d+2}\exp\left(-\frac{u^2}{\sigma(\mathbf{S})^2(1+\rho(\delta))}\right),$$

где

$$\rho(\delta)=\max_{\mathbf{t},\mathbf{s},\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|\geq\delta}\frac{r(\mathbf{t},\mathbf{s})}{\sigma(\mathbf{t})\sigma(bs)}$$

- максимально возможное значение корреляционной функции поля X на рассматриваемом множестве. Поскольку в силу условий $\rho(\delta)<1$, то отсюда с учетом оценок для соседних кубов следует утверждение леммы, при этом мы уточнили возможное значение числа ϵ_1. Лемма доказана.

4 Вспомогательные результаты и некоторые следствия

Следующие три леммы приводятся здесь для удобства, доказательства можно найти в [8], [9]. Пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T} \subset \mathrm{R}^d$, - гауссовское случайное поле. Обозначим $m^+(\mathbf{S}) = \max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} m(\mathbf{t})$, $m(\mathbf{S}) = \max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} |m(\mathbf{t})|$.

Лемма 6 *Пусть гауссовское случайное поле $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathrm{R}^d$, дифференцируемо в среднем квадратическом. Тогда для любого жорданова множества $\mathbf{S}$ и для всех $u \geq m^+(\mathbf{S})$ имеет место следующая оценка сверху*

$$\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) > u) \leq CV(\mathbf{S})u^{d-1} \exp\left(-\frac{(u - m^+(\mathbf{S}))^2}{2\sigma^2(\mathbf{S})}\right),$$

где константа C может зависеть лишь от d и $\sigma(\mathbf{S})$.

Лемма 7 *В условиях леммы 6 для всех $u \geq m(\mathbf{S})$ и $\mathbf{S}$, удовлетворяющих тем же условиям, имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} |X(\mathbf{t})| > u) \leq 2CV(\mathbf{S})u^{d-1} \exp\left(-\frac{(u - m(\mathbf{S}))^2}{2\sigma^2(\mathbf{S})}\right),$$

где константа C может зависеть лишь от d и $\sigma(\mathbf{S})$.

Лемма 8 *В условиях леммы 7 найдется константа $C > 0$ такая что для всех $u > m(\mathbf{S}) + 1$ имеет место неравенство*

$$|\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} |X(\mathbf{t})| > u) - \mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) > u) - \mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}}(-X(\mathbf{t})) > u)|$$

$$\leq CV(\mathbf{S})^2 \left(u^{2d-1} \exp\left(-\frac{(u - m)^2}{\rho_1(\mathbf{S})\sigma^2(\mathbf{S})}\right)\right),$$

где

$$\rho_1(\mathbf{S}) = \max_{\mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{S}}(1 - \frac{r(\mathbf{t}, \mathbf{s})}{\sigma(\mathbf{t})\sigma(bs)} < 2.$$

Эти оценки при помощи лемм 3 и 5 могут быть применены для оценивания сверху правой части неравенства в леммах 1 и 2. Для этого мы введем следующее требование на гаусовские поле:

r(S): $\qquad \gamma(\mathbf{S}) < \sigma(\mathbf{S})$

Например, этому условию удовлетворяют все поля, являющиеся суммой однородного поля, удовлетворяющего условию SR и произвольной гдадкой функции.

Размерность границы $\partial\mathbf{S}$ жорданова множества $\mathbf{S}$ на единицу меньше, поэтому из лемм 5 и 6 получаем следующий результат.

Следствие 9 *В условиях лемм 5, и 6 найдутся константы $C > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для любого жорданова множества* $\mathbf{S}$*, для которого выполнено условие* $\mathbf{r}(\mathbf{S})$*, имеет место неравенство*

$$|\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} X(\mathbf{t}) > u) - \mathbf{E}C_u^+(\mathbf{S})| \leq$$

$$\leq C\left(V(\mathbf{S})^2 \exp\left(-\frac{u^2(1+\gamma)}{2\sigma^2(\mathbf{S})}\right) + V(\partial\mathbf{S})u^{d-2}\exp\left(-\frac{(u-m^+(\partial\mathbf{S})^2}{2\sigma^2(\partial\mathbf{S})}\right)\right).$$

Оценка в этом следствии становится сверхэкспоненциальной, если потребовать выполненным условие

$$\sigma(\partial\mathbf{S}) < \sigma(\mathbf{S}),$$

то есть, если максимум дисперсии достигается только внутри множества $\mathbf{S}$.

Обозначим через $C_u(\mathbf{S})$ число локальных максимумов поля $|X(\mathbf{t})|$, лежащих внутри множества $\mathbf{S}$, значение поля в которых больше или равно u.

Аналогично предыдущему следующее утверждение следует из лемм 5, 7 и 8.

Следствие 10 *В условиях лемм 5, 6 найдется константа $C > 0$, такая что для любого жорданова множества* $\mathbf{S}$*, для которого выполнено условие* $\mathbf{r(S)}$*, имеет место неравенство*

$$|\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} |X(\mathbf{t})| > u) - \mathbf{E}C_u(\mathbf{S})| \leq C\left(V(\mathbf{S})^2 \exp\left(-\frac{u^2(1+\gamma)}{2\sigma^2(\mathbf{S})}\right)\right.$$

$$\left.+V(\partial\mathbf{S})u^{d-2}\exp\left(-\frac{(u-m(\partial\mathbf{S})^2}{2\sigma^2(\partial\mathbf{S})}\right) + V(\mathbf{S})^2u^{2d-1}\exp\left(-\frac{(u-m(\mathbf{S}))^2}{\rho_1(\mathbf{S})\sigma^2(\mathbf{S})}\right)\right).$$

Следующее утверждение следует непосредственно из лемм 2 и 3.

Следствие 11 *Пусть гауссовское случайное поле $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$, $\mathbf{S}$ - замкнутое гладкое многообразие в R^d, удовлетворяет условиям леммы 3. Пусть также выполнено условие* $\mathbf{r(S)}$*. Тогда найдутся C и $\gamma > 0$ такие, что имеют место неравенства*

$$0 \leq \mathbf{E}_u(\mathbf{S}) - \mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{S}} |X(\mathbf{t})| > u) \leq C\left(V(\mathbf{S})^2 \exp\left(-\frac{u^2(1+\gamma)}{2\sigma^2(\mathbf{S})}\right)\right)$$

5 Предельные теоремы для гауссовских полей.

В [7] рассмотрена модель

$$X(\mathbf{t}) = \mu_T(t) + \xi(\mathbf{t}), \quad t \in [0, T]^d,$$

где $\xi(\mathbf{t})$ - гауссовское центрированное однородное и изотропное поле с ограниченным радиусом корреляции (т.е., поле с нулевым средним, ковариационная функция которого финитна и зависит лишь от расстояная между точками), а $\mu_T(\mathbf{t})$ - последовательность трендов, удовлетворяющих сформулированным ниже условиям. Используя леммы 3 и 5 и повторяя рассуждения из [7], без труда можно доказать следующий результат.

Теорема 12 *Пусть гауссовское случайное поле* $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathrm{R}^d$, *с нулевым средним удовлетворяет условиям* SR *и* $\mathbf{r}(\mathrm{R}^{\mathbf{d}})$ *и является полем с ограниченным радиусом корреляции:*

существует t_0 *такое, что для всех* $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\| \geq t_0$, *корреляция между* $X(\mathbf{t})$ *и* $X(\mathbf{s})$ *равна нулю.*

Пусть

$$\mathcal{M} = \{\mu_T(\mathbf{t}),\ \mathbf{t} \in \mathbf{T} = [0,T]^d, \quad T > 0\},$$

- некоторое семейство дважды дифференцируемых функций. Тогда найдется положительное число q_0, *зависящее только от ковариации поля* X, *такое, что для всех* q *из интервала* $(0, q_0]$ *существуют положительные* $\gamma(q)$ *и* C *такие, что для любого* $a \in (0,1)$ *и любой* μ_T *из множества* $\mathcal{M} \cap \{\mu : ||\mu||_0 \leq qu\}$, *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}}(X(\mathbf{t}) + \mu_T(\mathbf{t})) \leq u) - \exp\{-\mathbf{E}C_u^+(\mathbf{T})\}| \leq CT^d \exp\left(-\frac{(u-m^+)^2}{2\sigma^2}\right) \times$$

$$\times \left(u^{d-1}T^{-a} + u^{2d-2}T^{ad}\exp\left(-\frac{(u-m^+)^2}{2\sigma^2}\right) + T^{ad}\exp\left(-\frac{\gamma u^2 - (m^+)^2}{2\sigma^2}\right)\right),$$

где $m^+ = \max_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \mu_T(\mathbf{t})$.

Эта теорема, а также утверждения следствий из предыдущего параграфа сводят "континуальную задачу"исследования асимптотики распределения максимума гауссовского поля к задаче конечномерной - исследование асимптотики интеграла (1) - среднего числа стационарных точек гауссовского поля. Этот интеграл исследовался для гауссовского однородного поля и для его суммы с непостоянным трендом, смотри [7], [6] и приведенную там библтографию. Для модели "изотропное поле плюс тренд"конкретные результаты имеются в [7], без труда они переносятся на модель "однородное поле плюс тренд". Что же касается неоднородных гауссовских полей, то здесь результаты, насколько известно автору, отсуствуют, и получение их представляет несомненный интерес.

Список литературы

[1] Adler R. The Geometry of Random Fields, — John Wiley& Sons, New-York, 1981. — 280pp.

[2] Беляев Ю.К. Случайные точечные множества и задачи типа пересечения уровня.// Выбросы случайных полей, под ред. Ю.К. Беляева, — Вып. 29, — Изд-во МГУ, — С. 9-37.

[3] Булинская Е.В. О среднем числе пересечений некоторого уровня стационарным гауссовским процессом. // Теория вероятн. и ее применен. — 1961 — 6, — No 4, — С. 474-478.

[4] Крамер Г. Лидбеттер М.Р. Стационарные случайные процессы. — Мир, Москва. 1969.

[5] Elizarov A.I. (1987) О формуле для факториальных моментов числа стационарных точек гауссовского поля. // Вероятностные модели дискретной математики — Изд-во МИЭМ, Москва, 1987 С. 99-105.

[6] Hasofer A.M. (1976) The mean number of maxima above high levels in Gaussian random fields, // J. Applied Probadility, — 1976 — Vol. 13,— P.377-379.

[7] Konakov V.D., Piterbarg V.I. High level excursions of Gaussian fields and the weakly optimal choice of the smoothing parameter. I.// Mathematical Methods of Statistics, — 1995 — Vol. 3, — No 4,—P.

[8] Piterbarg V.I. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей, — 1988 — Изд-во МГУ, Москва.

[9] Piterbarg V.I. Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields, — American Mathematical Society, — Ser. Translations of Mathenatical Monographies, — Vol. 148, — Providence.

[10] Rice S.O. (1944, 1945) Mathematical analysis of random noice. //Bell Syst. Tech. J., — 1944, 1945 — **23**, — P.282-332, — **24**,— P. 409-416.