МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Юрова Екатерина Владимировна

ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Богачев Владимир Игоревич**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Сакбаев Всеволод Жанович**
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
высшей математики Московского
физико-технического института

Ульянов Владимир Васильевич
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
математической статистики
факультета ВМиК
МГУ имени М.В. Ломоносова

Шавгулидзе Евгений Тенгизович
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
математического анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится «24» апреля 2020 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/

Автореферат разослан «23» марта 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
кандидат физико-математических наук
доцент

Н.А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке функционального анализа, теории меры и теории вероятностей. Основные объекты, рассматриваемые в работе, — измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств с мерами, гауссовские меры, а также порождаемые ими при измеримых линейных отображениях условные меры. Эта тематика восходит к основополагающим работам А. Н. Колмогорова, Н. Винера, Р. Камерона, В. Мартина, а также изучалась в последние десятилетия многими другими исследователями, в том числе А. М. Вершиком, И. И. Гихманом, А. В. Скороходом, О. Г. Смоляновым, В. Н.Судаковым, М. Кантером, И. Оказаки (см.[1,2,3,4,5,6,7,8,9]). Недавние обзоры более широких областей представлены в монографиях[10,11]. Исследование измеримых полилинейных форм и порождаемых ими многочленов может быть полезно в самых различных вопросах бесконечномерного анализа, в том числе рассматриваемых в работах[12,13,14,15].

Важнейшей особенностью измеримых линейных и полилинейных отображений бесконечномерных пространств является то, что их естественные области определения меньше всего пространства, причем на этих областях определения такие отображения в типичных случаях раз-

[1] Kolmogoroff A.N. Über die summen durch den zufall bestimmter unabhängiger grössen// Math. Ann. – 1928. – Bd. 99. – S. 309–319; Kolmogoroff A.N. Bemerkungen zu meiner Arbeit "Über die summen durch den zufall bestimmter unabhängiger grössen"// Math. Ann. – 1929. – Bd. 102. – S. 484–488. (О суммах независимых случайных величин, см. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. – 535 с.)

[2] Wiener N. The homogeneous chaos// Amer. J. Math. – 1938. – Vol. 60. – P. 879–936.

[3] Cameron R.H., Martin W.T. The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier–Hermite polynomials// Ann. Math. – 1947. – Vol. 48. – P. 385–392.

[4] Вершик А.М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах// Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19. – №1. – С. 210–212.

[5] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.1. М.: Наука, 1971. – 665 с.

[6] Смолянов О.Г. Измеримые полилинейные и степенные функционалы в некоторых линейных пространствах с мерой// Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 170. – №3. – С. 526–529.

[7] Вершик А.М., Судаков В.Н. Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах// Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1969. – Т. 12. – С. 7–-67.

[8] Kanter M. Random linear functionals and why we study them// Lect. Notes Math. – 1978. – Vol. 645. – P. 114–123.

[9] Okazaki Y. Stochastic basis in Fréchet space// Math. Ann. – 1986. – Vol. 274. – P. 379–383.

[10] Bogachev V.I. Measure theory, V. 1,2. New York: Springer, 2007.

[11] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Topological vector spaces and their applications. Cham: Springer, 2017. – 456 p.

[12] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях// Теория вероятн. и ее примен. – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

[13] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана// Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – Т. 80 – №6. – С. 141–172.

[14] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. 2-е изд. М.: УРСС, 2015.

[15] Götze F., Tikhomirov A. Asymptotic distribution of quadratic forms and applications// J. Theoret. Probab. – 2002. – Vol. 15. – №2. – P. 423–475.

рывны. Конечно, по классической теореме Лузина измеримые отображения обладают непрерывными сужениями на компакты с мерой, сколь угодно близкой к мере всего пространства. Однако это весьма общее свойство никак не учитывает линейность или полилинейность. Имеется здесь и объективная трудность: по известной теореме Банаха разрывная линейная функция на банаховом пространстве не может быть измеримой по Борелю. Поэтому чисто алгебраические версии заведомо разрывных линейных операторов, линейные на всем пространстве, не могут быть борелевскими. Тем самым невозможно и их конструктивное задание на всем пространстве. Например, ряд из функций $n^{-2}x_n$ на пространстве всех вещественных последовательностей, наделенном счетной степенью стандартной гауссовской меры на прямой, сходится почти всюду, причем его область сходимости есть борелевское линейное подпространство. На все пространство последовательностей полученный предел можно продолжить чисто алгебраически многими способами, но все эти способы не будут конструктивными и потребуют использования аксиомы выборы или ее следствий. Аналогично обстоит дело для стохастического интеграла Винера от непрерывной функции неограниченной вариации на отрезке по винеровскому процессу. Этот интеграл можно рассматривать как измеримый линейный функционал на пространстве непрерывных функций с мерой Винера, но борелевских линейных версий у него нет. В случае гауссовской меры (например винеровской) давно было понято, что такие измеримые функционалы могут быть непрерывными на меньших линейных подпространствах единичной меры при наделении их более сильными нормами. Например, указанный выше ряд из функций $n^{-2}x_n$ представляет собой непрерывный линейный функционал на весовом гильбертовом пространстве последовательностей с квадратом нормы $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x_n$, которое имеет меру 1 относительно рассматриваемой гауссовской меры на пространстве всех последовательностей. Однако уже для ряда из функций $n^{-1}x_n$ не столь просто найти непрерывно вложенное гильбертово пространство полной меры (т.е. с дополнением меры нуль), на котором сумма непрерывна, хотя таковое существует. Поэтому вполне естественно возникает вопрос о нахождении банаховых пространств, непрерывно вложенных в исходное пространство, сужения на которые заданных измеримых линейных отображений непрерывны. Аналогичный вопрос можно поставить и для полилинейных отображений. Исследование этих двух вопросов составляет основное содержание диссертации и занимает первые две главы, где приведены как положительные результаты, так и некоторые контрпримеры.

Третья глава посвящена исследованию условных мер, порожденных гауссовскими мерами на произведении пространств. Основной результат дает широкие условия измеримой зависимости таких условных мер от параметра, от которого измеримо зависят исходные гауссовские меры. Эта задача также тесно связана с измеримыми линейными операторами.

Само понятие измеримого линейного или полилинейного отображения допускает различные неравносильные варианты формулировки. Естественная, хотя и довольно прямолинейная трактовка такова: считать такими те линейные в обычном алгебраическом смысле функции, которые измеримы. Одним из столь же естественных конкурирующих определений является рассмотрение предела сходящихся (почти всюду, по мере или в среднем какого-то порядка) последовательностей непрерывных линейных операторов (в случае определения измеримого линейного оператора и аналогично для полилинейных отображений). Впрочем, для гауссовских мер это дает равносильное определение, однако в общем случае равносильности нет. Возможны и другие подходы.

Цель работы.

• Получить описание измеримых линейных операторов на банаховых пространствах с мерами, обладающих непрерывными сужениями на непрерывно вложенные банаховы пространства полной меры.

• Для измеримых полилинейных отображений банаховых пространств с мерами исследовать существование непрерывно вложенных банаховых пространств полной меры, сужения на которые данных отображений непрерывны.

• Для условных мер, порожденных зависящими от параметра гауссовскими мерами на произведении пространств, получить широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от данного параметра.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Пусть $A_n\colon X \to Y$ — последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y. $A_n x \to Ax$ почти всюду относительно борелевской вероятностной меры μ на X, Тогда найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ меры 1, компактно вложенное в X, и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, почти всюду равный A.

2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство с центрированной гауссовской мерой γ, на X^n дана мера γ^n — произведение n копий меры γ. Если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство

меры 1, компактно вложенное в X^n, то найдется такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L, компактно вложенное в X и имеющее меру 1, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.

3. Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — семейство центрированных радоновских гауссовских мер на произведении $X \times Y$, где X и Y — суслинские локально выпуклые пространства, измеримо зависящих от параметра α из измеримого пространства $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Тогда условные меры μ_α^y на X можно выбрать $\mathcal{B}(Y)\otimes\mathcal{A}$-измеримо зависящими от (y, α).

Положения, выносимые на защиту.

1. Существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ меры 1 и непрерывного линейного оператора $\widetilde{A}\colon\ (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, равного почти всюду оператору A, который задан как предел почти всюду сходящейся последовательности $A_n\colon\ X \to Y$ непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше.

2. Существование такого сепарабельного рефлексивного банахова пространства L меры 1, компактно вложенного в сепарабельное банахово пространство X с центрированной гауссовской мерой γ, что $L^n \subset E$ и вложение компактно, если E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство меры 1, компактно вложенное в X^n с степенью меры γ.

3. Для семейства центрированных радоновских гауссовских мер, которые заданы на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств и измеримо зависят от параметра, существование условных мер на первом сомножителе, которые измеримо зависят от этого параметра.

Методы исследования. Методы, используемые в настоящей работе, относятся к общему функциональному анализу, теории меры на локально выпуклых пространствах и стохастическому анализу. Кроме того, автором были предложены некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории меры, бесконечномерного анализа, стохастического анализа и теории вероятностей. Ее результаты и методы будут полезны в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики», Институте проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете и Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения РАН.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются меры на локально выпуклых пространствах, их линейные и полилинейные отображения, а также функции на локально выпуклых пространствах с мерами, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях.

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 2012 г., 2016 г.,

2. Международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», Москва, РУДН, Россия, 2014 г.,

3. Международная конференция «2nd Russian–Indian Joint Conference in Statistics and Probability», Euler International Mathematical Institute, С.-Петербург, Россия, 2016 г.,

4. Международная конференция «Analysis, probability and geometry», Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 2016 г.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (МГУ, многократно, 2011–2019 г.).

2. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, Н. Н. Шамарова (МГУ, 2019 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (см. [1], [2], [3], последняя из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах 4 международных конференций (см. [4]–[7]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 42 наименований. Общий объем диссертации составляет 58 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В первой главе исследуется связь между различными определениями линейных измеримых операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y, при этом на X задана радоновская мера μ. Здесь показано, что для измеримого линейного оператора в широком смысле найдутся сепарабельный рефлексивный банахов носитель меры и линейная версия оператора, непрерывная на нем. В случае, когда Y — пространство с базисом Шаудера, наличие носителя меры с указанными свойствами равносильно тому, что оператор является измеримым в обычном смысле.

Напомним, что меры на борелевских σ-алгебрах топологических пространств называются борелевскими. Борелевская вероятностная мера μ называется радоновской, если для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое компактное подмножество $K \subset B$, что выполнено неравенство $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$.

Борелевская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X называется центрированной гауссовской, если всякий непрерывный линейный функционал l на X есть центрированная гауссовская случайная величина относительно μ, т.е. индуцированная мера $\mu \circ l^{-1}$ либо сосредоточена в нуле, либо имеет плотность распределения вида

$$(2\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-t^2/(2\sigma)).$$

Если $\sigma = 1$, то мера с такой плотностью называется стандартной гауссовской мерой на прямой. Важнейшим примером центрированной гауссовской меры служит счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой, заданная на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех вещественных последовательностей и называемая стандартной гауссовской мерой на $\mathbb{R}^\infty$. Общие сведения о радоновских и гауссовских мерах можно найти в книгах[10,16,17].

Пространство полной меры — пространство меры 1 в случае вероятностной меры, а в общем случае имеющее дополнение меры нуль.

Полное метризуемое локально выпуклое пространство называют пространством Фреше.

Говорят, что банахово пространство E компактно вложено в локально выпуклое пространство X, если E — линейное подпространство в X,

[16] Bogachev V.I. Gaussian measures. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998, 433 p.

[17] Bogachev V.I. Gaussian measures on infinite-dimensional spaces// Real and Stochastic Analysis. Current trends. (ed. M.M. Rao), P. 1–83. Singapore: World Sci., 2014.

а единичный шар из E имеет компактное замыкание в X. Если пространство E рефлексивно, то его замкнутый единичный шар компактен в X, ибо он слабо компактен.

Хорошо известно, что всякая радоновская вероятностная мера на пространстве Фреше сосредоточена на компактно вложенном рефлексивном банаховом пространстве (см.[18,19], а также книгу[10]). С другой стороны, для широких классов измеримых линейных операторов известно существование непрерывно вложенных пространств, сужения на которые непрерывны (см.[16]). Естественно возникает вопрос о возможности выбора подпространства, сужение на которое измеримого линейного оператора непрерывно, с такими же свойствами, как и носитель меры. Основной результат первой главы дает положительный ответ на этот вопрос. Кроме того, получена новая характеризация измеримых линейных операторов со значениями в пространствах с базисами Шаудера. В литературе используется несколько различных естественных определений измеримого линейного оператора на локально выпуклом пространстве X с радоновской вероятностной мерой μ, принимающего значения в локально выпуклом пространстве Y (о мерах на локально выпуклых пространствах см.[10,20,21]).

Определение 1.2.1. *Измеримым линейным оператором будем называть отображение A, которое почти всюду по мере μ является пределом последовательности непрерывных линейных операторов $A_n\colon\ X \to Y$.*

Всюду ниже X и Y будут сепарабельными пространствами Фреше, поэтому все борелевские меры на X автоматически радоновы, а всякий измеримый линейный оператор из X в Y автоматически оказывается μ-измеримым, т.е. для всякого $B \in \mathcal{B}(Y)$ множество $A^{-1}(B)$ измеримо относительно μ (входит в лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$). Другое естественное определение таково.

Определение 1.2.2. *Измеримым линейным оператором в широком смысле называют такое μ-измеримое отображение $A\colon X \to Y$, что найдутся измеримое линейное подпространство $X_0 \subset X$ полной меры и линейное в обычном смысле отображение $A_0\colon\ X_0 \to Y$, почти всюду равное A. Такой оператор A_0 называют собственно линейной версией A.*

[18]Булдыгин В.В. Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах// Теория вероятн. и ее применения. – 1984. – Т. 29. – №3. – С. 528–532.

[19]Богачев В.И. Локально выпуклые пространства со свойством ЦПТ и носители мер// Вестн. МГУ. Математика, механика. – 1986. – №6. – С. 16–20.

[20]Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2010, 488 p.

[21]Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984, 368 с.

Измеримый линейный оператор между сепарабельными пространствами Фреше является измеримым линейным оператором в широком смысле, ибо множество всех точек $x \in X$, где последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, является борелевским линейным подпространством. Некоторое время считалось, что оба понятия равносильны (см., например, теорему 2 на с. 618 книги[5]), но затем выяснилось, что в общем случае это не так (см.[8,22]). Правда, для некоторых важных классов мер, например гауссовских, равносильность имеет место (см.[16] и пример ниже). Рассмотрим следующее свойство отображения A:

(RB) *есть рефлексивное сепарабельное банахово пространство* $(E, \|\cdot\|_E)$ *меры* 1*, компактно вложенное в* X*, причем* A *имеет версию, являющуюся непрерывным линейным оператором из* $(E, \|\cdot\|_E)$ *в* Y*.*

В работе доказано, что измеримые линейные операторы обладают свойством (RB), а если Y — банахово пространство с базисом Шаудера, то верно и обратное. Тем самым для банахова пространства Y с базисом Шаудера свойство (RB) равносильно определению 1.2.1.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $A_n\colon\ X \to Y$ *— последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше* X *и* Y*,* μ *— борелевская вероятностная мера на* X *и* $A_n x \to Ax$ *почти всюду. Тогда найдутся компактно вложенное в* X *сепарабельное рефлексивное банахово пространство* $(E, \|\cdot\|_E)$ *полной меры и непрерывный линейный оператор* $\widetilde{A}\colon\ (E, \|\cdot\|_E) \to Y$*, почти всюду равный оператору* A*.*

Следствие 1.2.4. *Вместо сепарабельности обоих пространств* X *и* Y *можно потребовать лишь радоновость меры* μ *на* X*.*

Следствие 1.2.5. *Если* Y *— банахово пространство, то упомянутое в теореме пространство* E *можно взять так, что некоторая подпоследовательность* $\{A_{n_k}\}$ *будет сходиться на* E *по операторной норме.*

Теорема 1.2.7. *Пусть* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— сепарабельное рефлексивное банахово пространство, компактно вложенное в* X*,* A *— непрерывный линейный оператор из* $(E, \|\cdot\|_E)$ *в банахово пространство* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *с базисом Шаудера. Тогда существует последовательность непрерывных конечномерных линейных операторов* $A_n\colon\ X \to (Y, \|\cdot\|_Y)$*, поточечно сходящихся к* A *на* E*.*

Следствие 1.2.8. *Если* Y *— банахово пространство с базисом Шаудера, то определение* 1.2.1 *равносильно свойству* (RB).

Следствие 1.2.9. *Если* X *и* Y *гильбертовы, то пространство* E *в тео-*

[22]Скороход А.В. Линейные и почти линейные функционалы на измеримом гильбертовом пространстве// Теория вероятн. и ее применения. – 1978. – Т. 23. – №2. – С. 397–402.

реме 1.2.3 *тоже можно взять гильбертовым. Оба утверждения остаются в силе и для пространства Фреше* Y *с базисом.*

Пример. Рассмотрим случай, когда γ — центрированная гауссовская радоновская мера на локально выпуклом пространстве X и A — измеримый линейный оператор на X со значениями в сепарабельном пространстве Фреше Y. Тогда по теореме Цирельсона (см.[20] или[16]) существуют ортонормированный базис $\{e_n\}$ в пространстве Камерона–Мартина $H(\gamma)$ меры γ и последовательность $\{\xi_n\} \subset X^*$, ортонормированная в $L^2(\gamma)$, такие, что векторы

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) A e_k$$

почти всюду сходятся к Ax. Легко видеть, что A_n — непрерывные линейные операторы. Если X — тоже пространство Фреше, то по теореме 1.2.3 существуют компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon\ E \to Y$, почти всюду совпадающий с A. Из этого следует хорошо известный факт, что для радоновской гауссовской меры на пространстве Фреше X пространство измеримых линейных функционалов (совпадающее с совокупностью всех измеримых линейных в широком смысле функционалов) совпадает с множеством линейных функций, обладающих непрерывными сужениями на компактно вложенные рефлексивные сепарабельные банаховы пространства полной меры.

Во второй главе исследуются измеримые полилинейные функции на пространствах Фреше и аналоги двух свойств для них, которые равносильны для измеримого линейного функционала относительно гауссовской меры. Доказано, что наличие последовательности непрерывных линейных функций, почти всюду сходящейся к данному функционалу, равносильно наличию компактно вложенного банахова пространства полной меры, на котором данный функционал непрерывен. Выяснено, что для полилинейных функций эти свойства не равносильны, но второе равносильно формально более сильному условию, что компактно вложенное подпространство есть степень подпространства, вложенного в исходное пространство Фреше.

Как известно, для измеримых линейных функционалов A на сепарабельном пространстве Фреше X с центрированной гауссовской мерой γ справедливы следующие утверждения (см.[16]):

(i) функционал A почти всюду есть предел последовательности непрерывных линейных функционалов,

(ii) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E

полной меры, которое компактно вложено в X, и непрерывный линейный функционал $\widetilde{A}\colon\ E \to \mathbb{R}$, равный A почти всюду.

На самом деле свойство (ii) влечет свойство (i) для всех борелевских мер. Возникает естественный вопрос о том, когда эти свойства или их аналоги выполняются для измеримых полилинейных функций. Можно рассматривать этот вопрос для более сильного условия (ii) или для более слабого условия (i).

Есть даже два естественных обобщения первой задачи (т.е. относящей-ся к свойству (ii)) для полилинейных форм

$$B(x_1, \ldots, x_n)\colon\ X \times X \times \ldots \times X \to \mathbb{R},$$

где X^n наделяется степенью меры γ:

(a) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и такая непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon\ L \times \ldots \times L \to \mathbb{R}$, что

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$$

для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in L \times \ldots \times L$;

(b) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \ldots \times X$, и такая непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$$

для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Основной результат этой главы состоит в том, что свойства (a) и (b) равносильны для всех $n > 1$, но даже в случае $n = 2$ они не равносильны естественному аналогу свойства (i), т.е. они не равносильны наличию последовательности непрерывных форм, сходящихся к B почти всюду относительно степени меры.

Основные результаты этой главы заключаются в следующих двух теоремах.

Теорема 2.1.1. *Если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в X^n, то найдется такое сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, которое компактно вложено в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.*

Поэтому свойства (a) и (b) равносильны.

Теорема 2.2.1. *Существует билинейная форма на $X \times X$, которая почти всюду равна поточечному пределу последовательности непрерывных билинейных форм, но при этом для нее не существует рефлексивного* *сепарабельного банахова пространства L полной меры, компактно вложенного в X, и непрерывной билинейной формы $\widetilde{B}(x,y)\colon L\times L\to\mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{B}(x,y)=B(x,y)$ для почти всех $(x,y)\in L\times L$.*

В **третьей главе** исследуются свойства условных мер. Показано, что если семейство гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств X и Y зависят измеримо от параметра α, то возможно найти условные меры μ_α^y на X так, что они зависят от (y,α) измеримо.

Пусть даны локально выпуклые пространства X и Y с радоновской вероятностной мерой μ на $\big(X\times Y,\ \mathcal{B}(X\times Y)\big)$. Говорят, что заданы условные меры μ^y, если имеется семейство радоновских вероятностных мер на пространстве X, удовлетворяющее следующим условиям:

1. для всякого борелевского подмножества B пространства $X\times Y$ функция $\mu^y(B^y)$ борелевски измерима, где B^y — проекция на X сечения B по уровню y, т.е. $B^y=\{x\in X\colon (x,y)\in B\}$;

2. для всякой ограниченной борелевской функции f на $X\times Y$ интеграл от f по мере μ равен
$$\int_Y\int_X f(x,y)\,\mu^y(dx)\,\nu(dy),$$
где ν — проекция меры μ на Y.

Пусть теперь дано семейство радоновских мер $\{\mu_\alpha\}$ на $\big(X\times Y,\mathcal{B}(X\times Y)\big)$, измеримо зависящее от параметра α из некоторого измеримого пространства $(\mathfrak{A},\mathcal{A})$. Под этим здесь и далее понимается измеримость относительно слабой топологии на пространстве мер, равносильная $\mathcal{A}$-измеримой зависимости от параметра α интегралов от ограниченных борелевских функций. Естественно возникает вопрос о возможности выбора условных мер μ_α^y так, чтобы они зависели от (α,y) измеримо. В работе[23] был получен следующий важный положительный результат в этот направлении: если X, Y и $\mathfrak{A}$ — вполне регулярные суслинские пространства (непрерывные образы полных сепарабельных метрических пространств), причем $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ — борелевская σ-алгебра, то существует версия условных мер μ_α^y, зависящая от (α,y) измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times\mathfrak{A})$ на $Y\times\mathfrak{A}$, порожденной суслинскими множествами. Таким образом, речь идет не о борелевской измеримости, а об измеримости относительно более широкой σ-алгебры, причем

[23]Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра// Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – №1. – С. 13–17.

есть основания полагать, что в общем случае борелевскую измеримость получить нельзя. В данной главе доказано, что для центрированных радоновских гауссовских мер такой борелевский измеримый выбор условных мер осуществим. Для гауссовских мер условные меры строятся более конструктивно, см.[16,17,24,25].

Сформулируем основной результат главы.

Напомним (см.[10]), что слабая топология на пространстве борелевских мер на вполне регулярном пространстве X порождается полунормами

$$m \mapsto \left| \int_X f(x)\, m(dx) \right|, \quad f \in C_b(X),$$

где $C_b(X)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на X. Если X — суслинское пространство, то пространство мер на нем со слабой топологией тоже суслинское (см.[10]). Борелевская σ-алгебра на пространстве мер порождается интегралами от ограниченных непрерывных функций на X, а интегралы от ограниченных борелевских функций оказываются борелевскими функциями на пространстве мер.

Согласно цитированной выше теореме Цирельсона, всякая центрированная радоновская гауссовская мера μ сосредоточена на суслинском подпространстве и равна образу стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ при некотором измеримом линейном отображении. Более того, если мера μ не сосредоточена на конечномерном подпространстве, то упомянутое линейное отображение является изоморфизмом борелевских линейных подпространств меры 1. Это сводит обсуждаемый нами вопрос к случаю пространств $X = Y = \mathbb{R}^\infty$, который далее и рассматривается.

Точки пространства $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ будут обозначаться через (x, y), где компоненты векторов x и y имеют координаты x_i и y_i.

Известно (см.[16,17]), что для центрированной гауссовской меры μ на $X \times Y$ (далее считаем, что $X = Y = \mathbb{R}^\infty$) есть центрированная гауссовская мера σ на X, по которой условные меры строятся так:

$$\mu^y = \sigma(\,\cdot - Ay), \qquad \text{где } A = \mathbb{E}(x \mid y),$$

где $\mathbb{E}(x \mid y)$ — условное математическое ожидание первой компоненты относительно σ-алгебры, порожденной второй компонентой. Иначе говоря, $A\colon Y \to X$, $Ay = (\xi_1(y), \xi_2(y), \ldots)$, ξ_k — условное математическое ожидание координаты x_k относительно σ-алгебры, порожденной всеми

[24]LaGatta T. Continuous disintegrations of Gaussian processes// Theory Probab. Appl. – 2013. – Vol. 57. – №1. – P. 151–162.

[25]Tarieladze V., Vakhania N. Disintegration of Gaussian measures and average-case optimal algorithms// J. Complexity. – 2007. – Vol. 23. – №4-6. – P. 851–866.

координатами y_i. Это условное математическое ожидание есть проекция в $L^2(\mu)$ координатной функции x_k на замкнутое линейное подпространство, порожденное координатными функциями y_i. Если $\{\eta_i\}$ — результат ортогонализации в $L^2(\mu)$ функций $\{y_i\}$, то

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_k, \eta_i)_{L^2(\mu)} \eta_i,$$

где ряд сходится почти всюду и в $L^2(\mu)$. Мера σ равна образу меры μ при измеримом линейном отображении $(x, y) \mapsto x - Ay$. Интеграл ограниченной борелевской функции f по мере σ вычисляется по формуле

$$\int_X f(x)\, \sigma(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az)\, \mu(dx\, dz),$$

а интеграл по мере μ^y дается формулой

$$\int_X f(x)\, \mu^y(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az + Ay)\, \mu(dx\, dz).$$

Таким образом, для доказательства теоремы надо показать, что соответствующие условные меры $\sigma_\alpha(\,\cdot\, - A_\alpha y)$ зависят измеримо от (y, α), что приводит к рассмотрению интегралов

$$\int_{X\times Y} f(x - A_\alpha z + A_\alpha y)\, \mu_\alpha(dx\, dz).$$

Теорема 3.2.1. *Пусть дано семейство центрированных гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на произведении $X \times Y$ двух суслинских локально выпуклых пространств, зависящее измеримо от параметра α со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Тогда найдутся гауссовские условные меры μ_α^y, которые зависят $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо от (y, α).*

Заключение

В диссертации исследованы свойства измеримости линейных и полилинейных отображений бесконечномерных пространств с мерами. Доказано, что для оператора A между сепарабельными пространствами Фреше, почти всюду по вероятностной мере равного пределу последовательности непрерывных линейных операторов, найдутся компактно вложенный рефлексивный сепарабельный банахов носитель меры и линейная версия оператора A, непрерывная на нем. Если область значений A имеет базис Шаудера, верно и обратное. Если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в X^n (где X — сепарабельное пространство Фреше с борелевской мерой), то есть такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно. Поэтому для полилинейных форм $B\colon X^n \to \mathbb{R}$ равносильны такие свойства:

(a) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, которое компактно вложено в X, и непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}\colon L^n \to \mathbb{R}$, почти всюду равная B;

(b) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, которое компактно вложено в X^n, и непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}\colon E \to \mathbb{R}$, почти всюду равная B.

Для семейства центрированных радоновских гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на $X \times Y$, измеримо зависящих от параметра α из измеримого пространства $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$, показано, что можно выбрать условные меры μ_α^y на X так, что они будут $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо зависеть от (y, α).

Дальнейшее исследование по теме диссертации может проводиться в следующих направлениях.

1. Исследование классов измеримых линейных и измеримых линейных в широком смысле функционалов для выпуклых мер.

2. Рассмотрение более общего случая линейных условных математических ожиданий, порожденных измеримым линейным отображением, также зависящим от параметра.

Автор благодарит своего научного руководителя В. И. Богачева за предложенные задачи и поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Юрова Е.В. О непрерывных сужениях измеримых линейных операторов// Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 443. – №3. – С. 300–303 (импакт-фактор WoS 0.625).

Yurova E.V. On continuous restrictions of measurable linear operators// Dokl. Math. – 2012. – Vol. 85. – №2. – P. 229–232.

[2] Юрова Е.В. О непрерывных сужениях измеримых полилинейных отображений// Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – №6. – С. 930–936 (импакт-фактор WoS 0.612).

Yurova E.V. On continuous restrictions of measurable multilinear mappings// Math. Notes. – 2015. – Vol. 98. – №5-6. – P. 977–981.

[3] Alekseev G.A., Yurova E.V. On Gaussian conditional measures depending on a parameter// Theory of Stochastic Processes. – 2017. – Vol. 22 (38). – №2. – P. 1–7 (импакт-фактор SJR 0.12).

В работе [3] диссертанту принадлежит теорема 1.1; Г.А. Алексееву принадлежат некоторые идеи доказательства леммы 2.1.

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] Юрова Е.В. Непрерывные сужения измеримых линейных операторов. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012», МГУ, М., 2012.

[5] Юрова Е.В. Измеримые линейные и полилинейные операторы в бесконечномерных пространствах. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (тезисы и тексты докладов международной конференции 15–18 декабря 2014 года). РУДН, М., 2014. С. 60–61.

[6] Юрова Е.В. Непрерывные сужения измеримых полилинейных отображений. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», МГУ, М., 2016.

[7] Yurova E. V. Measurable linear and multilinear mappings. 2nd Russian–Indian Joint Conference in Statistics and Probability, Euler International Math. Institute, Saint-Petersburg, Russia, 30 May – 3 June 2016, Book of abstracts, p. 43.