ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Е. В. Юровой
«Измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Представленная диссертационная работа Е. В. Юровой является исследованием в области функционального анализа и теории меры на локально выпуклых пространствах. В работе изучаются измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств, их сходимость, непрерывность на собственных подпространствах полной меры. Тематика диссертации относится к активно развивающемуся перспективному направлению функционального анализа на стыке с теорией меры и теорией вероятностей.

Измеримые линейные функционалы на бесконечномерном пространстве траекторий начали изучаться еще Н. Винером почти сто лет назад, затем они возникали в работах А.Н. Колмогорова по суммированию случайных величин и предельным теоремам для таких сумм, позже измеримые линейные функционалы и операторы использовались в теории стохастических интегралов, начиная с работ К. Ито. Например, если почти всюду или в среднем сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\xi_n$ из случайных величин ξ_n с числовыми коэффициентами c_n, то на пространстве всех последовательностей $\mathbb{R}^\infty$ (являющемся пространством Фреше с топологией покоординатной сходимости) возникает мера μ, равная распределению последовательности $\{\xi_n\}$, относительно этой меры можно рассматривать измеримый линейный функционал $l(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Этот функционал определен лишь почти всюду, но не всюду, если все числа c_n отличны от нуля. Аналогично стохастический интеграл

$$l(w) = \int_0^1 \varphi(t)\, dw(t)$$

от фиксированной непрерывной функции φ по винеровской траектории $w(t)$ определен как измеримый линейный функционал на пространстве $C[0,1]$ непрерывных линейных функций, наделенном классической мерой Винера. Если функция φ имеет неограниченную вариацию, то этот функционал не задается никаким непрерывным функционалом на $C[0,1]$, его также нельзя доопределить до борелевской линейной функции на $C[0,1]$, ибо по теореме Банаха такие функции обязательно непрерывны. Такого рода примеры оказались интересным объектом теории меры на бесконечномерных пространствах. В этой области заметную роль сыграли работы Р. Камерона, В. Мартина конца 1940-х годов и более поздние работы А. М. Вершика, И. И. Гихмана, А. В. Скорохода, О. Г. Смолянова, В. Н.Судакова, М. Кантера, И. Оказаки.

Актуальность исследования свойств измеримых линейных и полилинейных отображений объясняется широким применением таких отображений в бесконечномерном анализе, математической статистике, математической физике, стохастическом анализе. Исследования в близких к диссертации направлениях ведутся во многих крупных научных центрах по всему миру, велико число публикаций на близкие темы в центральных математических журналах.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 7 параграфов, и списка цитируемой литературы. Во введении дан исторический обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

В главе 1 исследуются измеримые линейные оператора, а основные результаты утверждают существование версий измеримых линейных операторов на банаховых пространствах с мерами, непрерывных на меньших компактно вложенных банаховых пространствах, имеющих, тем не менее, меру 1.

В главе 2 аналогичные вопросы рассмотрены для полилинейных отображений.

В главе 3 изучаются условные меры, порожденные гауссовскими мерами на произведении двух локально выпуклых пространств. Основной результат главы дает условия измеримой зависимости таких условных мер от параметра в ситуации, когда от этого параметра измеримо зависят заданные гауссовские меры. Эта тематика тесно связана с измеримыми линейными операторами, изучавшимися в первых двух главах.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Пусть $A_n\colon X \to Y$ — последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y. $A_n x \to Ax$ почти всюду относительно борелевской вероятностной меры μ на X, Тогда найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ меры 1, компактно вложенное в X, и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, почти всюду равный A.

2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство с центрированной гауссовской мерой γ, на X^n дана мера γ^n — произведение n копий меры γ. Если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство меры 1, компактно вложенное в X^n, то найдется такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L, компактно вложенное в X и имеющее меру 1, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.

3. Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — семейство центрированных радоновских гауссовских мер на произведении $X \times Y$, где X и Y — суслинские локально выпуклые пространства, измеримо зависящих от параметра α из измеримого пространства $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Тогда условные меры μ_α^y на X можно выбрать $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо зависящими от (y, α).

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации опубликованы 3 статьи в журналах из баз данных WoS и Scopus.

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (МГУ, 2011–2019 г.) и научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, Н. Н. Шамарова (МГУ, 2019 г.), а также на следующих конференциях: Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова (2012, 2016 г.), Международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», Москва, РУДН (2014 г.), Международная конференция «2nd Russian–Indian Joint Conference in Statistics and Probability», Euler International Mathematical Institute, С.-Петербург (2016 г.), Международная конференция «Analysis, probability and geometry», Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова (2016 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут применяться в различных вопросах теории меры на бесконечномерных пространствах, теории вероятностей и стохастического анализа. Конкретные результаты и общие методы работы Е. В. Юровой будут полезны в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, НИУ «Высшая школа экономики», Техническом университете им. Н. Э. Баумана, Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете.

Таким образом, в диссертационной работе Е. В. Юровой «Измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств» решены актуальные проблемы функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.01.07.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391244, факс +74959392090
email: mmmf@mech.math.msu.su, сайт http//www.math.msu.su/)
доктор физико-математических наук, профессор
(тел. +74959393680, email: vibogach@mail.ru)

В. И. Богачев

Подпись профессора В.И. Богачева удостоверяю
Декан механико-математического факультета МГУ,
член-корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич